ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ БЮДЖЕТНОЕ
ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
«Московский государственный университет имени М. В. Ломоносова»

На правах рукописи

Алмохамед Муатаз

# ОБРАТНЫЕ ЗАДАЧИ ДЛЯ ЭВОЛЮЦИОННЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ ВТОРОГО И ВЫСШИХ ПОРЯДКОВ

1.1.2 – Дифференциальные уравнения и математическая физика

Диссертация на соискание ученой степени
кандидата физико-математических наук

Научный руководитель:
доктор физико-математических наук,
профессор Тихонов Иван Владимирович

Москва — 2023

# Оглавление

# Введение

Настоящая работа — диссертация на соискание ученой степени кандидата физико-математических наук на тему «Обратные задачи для эволюционных дифференциальных уравнений второго и высших порядков». Эта работа подготовлена на кафедре математической физики факультета вычислительной математики и кибернетики Федерального государственного бюджетного образовательного учереждения высшего образования «Московский государственный университет имени М. В. Ломоносова» МГУ.

Текст представляет в систематической форме исследования автора с начала обучения в аспирантуре по настоящее время 2017 – 2023 гг. Основным изучаемым вопросом является единственность решения некоторых линейных обратных задач для абстрактных дифференциальных уравнений в банаховом пространстве.

При поступлении в аспирантуру, по предложению своего научного руководителя И. В. Тихонова, автор заинтересовался рядом абстрактных обратных задач, где вопрос единственности решения допускал полное исследование, причем в самых общих предположениях. Результаты исследования показывают, что критерий единственности решения может быть выражен в спектральных терминах — через нули характеристической целой функции. Изложение полученных результатов составляет ядро данной работы. Наше исследование во многом продолжает линию подробно разработанную в диссертации И. В. Тихонова [58].

**Актуальность** рассматриваемой темы обусловлена необходимостью постоянного развития аналитического направления в рамках современной теории дифференциальных уравнений. Важность изучения линейных обратных задач объясняется тем, что такие задачи часто встречаются на практике — как задачи «определения источника», когда заранее неизвестные внешние воздействия на физическую систему восстанавливаются при помощи дополнительных условий («переопределений»).

**Краткая история вопроса.** Как известно, вопрос единственности решения требует особого внимания при постановке различных задач и является одним из центральных в математической физике. Обычно з а д а ч е й называют совокупность дифференциального уравнения и дополнительных условий (начальных, краевых, нелокальных и т. п.). Задача, имеющая не более одного решения при любом выборе данных в дополнительных условиях, считается д е т е р м и н и р о в а н н о й. При постановке задачи желательно знать, является ли она детерминированной или нет? Мы будем изучать этот вопрос применительно к обратным задачам для абстрактных дифференциальных уравнений второго и высших порядков.

Напомним, что различные задачи для абстрактных дифференциальных уравнений порядка выше первого изучаются с 1950 гг. Отметим здесь важные работы Хилле [93, 94], Вишика [13], Вишика и Ладыженской [14]. При этом упомянутые работы Хилле [93, 94] содержат общую постановку задачи Коши для абстрактного дифференциального уравнения произвольного порядка $n \in \mathbb{N}$ (см. также книгу Хилле и Филлипса [74, гл. XXIII]). Из последующих наиболее заметных работ по тематике упомянем статьи Прокопенко [47], Фаторини [87, 88], Херша [92], Сандефура [111], Нойбрандера [106]. Имеется специализированная монография Сяо Тиджина и Лян Цзиня [115], целиком посвященная задаче Коши для абстрактных дифференциальных уравнений высокого порядка (см. также диссертацию Сяо Тиджина [114]). Ряд типичных задач для абстрактных дифференциальных уравнений второго порядка рассмотрен в третьей главе книги Крейна [29]. В последние десятилетия активно изучаются более сложные варианты абстрактных дифференциальных уравнений высокого порядка и неклассических задач для них (см., например, работы Эйдельмана и Тихонова [85], Тихонова [54, 56], Поблете и Поцо [107], Лизамы и Мурилло [100], Мурилло-Арчила [105]). В перечисленных публикациях есть множество дополнительных ссылок на сопутствующую литературу, включая указания на некоторые примеры с физическим содержанием (см., например, работу Мурилло-Арчила [105]).

Теория неклассических *обратных задач* для эволюционных дифференциальных уравнений с выделенной переменной $t$ составляет важную часть общей теории обратных задач (см. монографии Денисова [16] и Прилепко, Орловского, Васина [109]). С абстрактной точки зрения эволюционные уравнения часто рассматривают в банаховом пространстве $E$ на конечном отрезке $[0, T]$. Типичная задача: требуется восстановить неизвестную правую часть уравнения при помощи дополнительного условия в финальный момент времени. Обычно финальное условие имеет вид $u(T) = v_T$, где $v_T$ — заданный элемент из банахова пространства $E$. Будем называть это *финальным переопределением первого рода.* Обратные задачи с таким условием при тех или иных специальных ограничениях для уравнений первого или второго порядков рассматривались многими авторами, среди которых (в порядке хронологии) Прилепко [43, 44], Искендеров [22], Искендеров и Тагиев [23], Ранделл [110], Амиров [10], Эйдельман [75], Прилепко и Соловьев [46], Орловский [40], Прилепко и Костин [45], Камынин [24], Соловьев [50], Костин [26]. Критерий единственности решения для уравнения первого порядка без всяких лишних ограничений получен в работе Тихонова и Эйдельмана [69]. После этого в работе Тихонова и Эйдельмана [70] подходы перенесены на задачу для уравнения произвольного порядка $n \in \mathbb{N}$ с финальным переопределением первого рода. В последующей работе Тихонова [57] показано, что разработанный метод применим к краевым задачам для дифференциальных уравнений высокого порядка. Имеются также обобщения на случай уравнений с дробной производной, (см., например, работы Глушака [15], Костина и Пискарева [27], Федорова и Нагумановой [72, 73]).

Для уравнений второго порядка представляет интерес также *финальное переопределение второго рода*, когда при $t = T$ задано значение производной $u'(T) = v_T$. Возможно, что задачи с последним условием еще не изучены с должной подробностью. Отметим здесь лишь результаты Прилепко, Орловского, Васина [109, гл. 8, разд. 3], где для уравнений «эллиптического типа» рассматривалась линейная обратная задача с финальным переопределением общего вида $\alpha\, u(T) + \beta\, u'(T) = v_T$, $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, $\alpha^2 + \beta^2 \neq 0$, включающим в себя оба упомянутых выше условия. Подобное соотношение в случае, когда $\alpha, \beta \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$, будем называть *переопределением третьего рода.*

**Цель и задачи диссертации.** Целью диссертационной работы является дальнейшее развитие теории линейных обратных задач с различными финальными условиями для эволюционных уравнений второго и высших порядков.

Для достижения указанной цели были поставлены следующие задачи.

1. Для абстрактного дифференциального уравнения второго порядка получить критерий единственности решения линейной обратной задачи с финальным переопределением второго рода $u'(T) = v_T$ (без ограничений на тип эволюционного уравнения).

2. Для абстрактного дифференциального уравнения второго порядка получить критерий единственности решения линейной обратной задачи с финальным переопределением третьего рода $\alpha\, u(T) + \beta\, u'(T) = v_T$ (без ограничений на тип эволюционного уравнения).

3. Исследовать распределение нулей характеристической целой функции, возникающей при изучении обратной задачи с финальным переопределением третьего рода.

4. Указать достаточные признаки единственности решения обратной задачи с финальным переопределением третьего рода.

5. Для абстрактного дифференциального уравнения второго порядка построить присоединенные решения линейной однородной обратной задачи в тех случаях, когда соответствующая характеристическая целая функция имеет кратные нули.

6. Для абстрактного дифференциального уравнения произвольного натурального порядка $n$ установить критерий единственности решения модельной обратной задачи со специальным переопределением вида $u^{(q)}(T) = v_T$ (без ограничений на тип эволюционного уравнения).

7. Исследовать распределение нулей характеристической целой функции, возникающей при изучении обратной задачи для дифференциального уравнения произвольного натурального порядка $n$. Использовать связи с теорией целых функций типа Миттаг-Леффлера.

8. Указать достаточные признаки единственности решения линейной обратной задачи для дифференциального уравнения произвольного порядка $n \in \mathbb{N}$.

9. Особо отметить критерий единственности решения обратной задачи для уравнения четвертого порядка с финальным переопределением $u''(T) = v_T$, когда результат приобретает завершенную формулировку в элементарных терминах.

**Научная новизна.** Все результаты диссертационной работы являются новыми и состоят в следующем.

1. Показано, что обратная задача с финальным переопределением второго рода для абстрактного дифференциального уравнения второго порядка допускает полное исследование с точки зрения единственности решения. Результат (критерий единственности решения) имеет универсальный характер и применим ко всем эволюционным уравнениям второго порядка вида $u''(t) = Au(t) + g$ с линейным замкнутым оператором $A$ и неизвестным элементом $g$ из банахова пространства $E$.

2. На основе классических результатов из теории целых функций доказан критерий единственности решения в линейной обратной задаче с финальным переопределением третьего рода. Подобное условие рассматривалось ранее лишь при специальных ограничений на тип дифференциального уравнения второго порядка. От этих ограничений удалось отказаться, что позволило существенно расширить круг возможных приложений.

3. Для задачи с переопределением третьего рода получены результаты по распределению нулей возникающей характеристической функции, содержащей линейную комбинацию двух элементарных целых функций порядка 1/2. Указаны типичные конфигурации нулей в зависимости от выбираемых коэффициентов.

4. Найден ряд эффективных признаков единственности решения линейной обратной задачи с финальным переопределением третьего рода. Все утверждения носят конструктивный характер и легко проверяются в конкретных примерах из математической физики.

5. Для уравнения второго порядка построены присоединенные решения линейной однородной обратной задачи в тех случаях, когда соответствующая характеристическая целая функция имеет кратные нули. Приведены конкретные примеры обратных задач, где возникают присоединенные решения.

6. Рассмотрена общая постановка модельной обратной задачи с параметрами $n \in \mathbb{N}$ и $q \in \{ 0, \dots , n-1 \}$. Здесь $n$ — порядок абстрактного дифференциального уравнения, а $q$ — порядок производной в финальном условии. В подобной общности обратная задача прежде не изучалась. Без специальных ограничений на порядок и тип уравнения удалось получить универсальный критерий единственности решения обратной задачи. Результат носит завершенный характер и требует для доказательства использования некоторых тонких принципов из теории целых функций.

7. В модельной обратной задаче с параметрами $n, q$ указан ряд эффективных достаточных признаков единственности решения. Они получаются путем сравнения спектра основного оператора из дифференциального уравнения с нулями характеристической функции, относимой классу целых функций типа Миттаг-Леффлера. Выделены случаи, когда нули находятся элементарно (в явном виде).

8. Отдельно указан конкретный критерий единственности решения обратной задачи для уравнения четвертого порядка с параметрами $n = 4$ и $q = 2$ в связи с явным нахождением здесь нулей характеристической функции. Приведены соответствующие примеры для уравнений в частных производных.

**Теоретическая и практическая значимость.** Рассмотренные обратные задачи в общей постановке могут найти применение в математической физике как задачи о нахождении дополнительных источников в физической системе по заданной информации о следах основной неизвестной функции. Использование языка абстрактных дифференциальных уравнений существенно расширяет круг возможных примеров и делает наглядной схему исследования обратных задач. Возникающие спектральные соотношения обеспечивают связь с теорией целых функций, предлагая новые задачи в этой области. Вопрос о распределении нулей целых функций типа Миттаг-Леффлера находится в центре внимания крупных аналитиков в последние десятилетия, и связи с обратными задачами здесь весьма перспективны. Кроме того, на основе проведенных исследований можно выполнять численные расчеты, связанные с обратными задачами.

**Методология и методы исследования.** Основным используемым аппаратом является современная теория дифференциальных уравнений в банаховом пространстве. Наши постановки обратных задач согласуются с общими подходами, принятыми в московской школе А. И. Прилепко. При достижении поставленных научных целей важную роль играют средства комплексного анализа, связанные с целыми функциями одной переменной. Активно используются целые функции типа Миттаг-Леффлера, а также применяются теоремы Фрагмена-Линделефа и подходящий вариант теоремы Мюнца. Доказательства некоторых результатов проведены по методу работ Тихонова и Эйдельмана (см. [57, 69, 70]). Кроме того, ряд технических расчетов, связанных с распределением нулей характеристических целых функций, выполнен с использованием современных систем компьютерной математики.

**Положения, выносимые на защиту:**

- Критерий единственности решения линейной обратной задачи с финальным переопределением второго рода для абстрактного дифференциального уравнения второго порядка без ограничений на тип эволюционного уравнения.

- Критерий единственности решения линейной обратной задачи с финальным переопределением третьего рода для абстрактного дифференциального уравнения второго порядка без ограничений на тип эволюционного уравнения. Ряд эффективных достаточных признаков единственности решения.

- Исследование присоединенных решений линейной однородной обратной задачи для абстрактного дифференциального уравнения второго порядка.

- Критерий единственности решения модельной обратной задачи для абстрактного дифференциального уравнения произвольного порядка $n \in \mathbb{N}$ с переопределением, содержащим производную искомой функции в выбранный финальный момент времени (также без ограничений на тип эволюционного уравнения).

- Новый случай линейной обратной задачи для абстрактного дифференциального уравнения четвертого порядка, где критерий единственности решения принимает законченный элементарный вид.

Все результаты, выносимые на защиту, получены автором лично. Результаты других авторов, используемые в диссертации, отмечены соответствующими ссылками.

**Степень достоверности результатов.** Достоверность результатов автора подтверждена строгими математическими доказательствами. Все результаты с полными доказательствами были представлены на научном семинаре «Анализ и его приложения» Института математики и информатики МПГУ (руководители — профессора Г. Г. Брайчев, И. В. Тихонов, В. Б. Шерстюков). Большинство результатов представлено также на специализированном семинаре «Обратные задачи математической физики и естествознания» Механико-математического факультета МГУ (руководители — профессор А. И. Прилепко и академик В. А. Садовничий). Еще несколько докладов по тематике диссертации было сделано на факультете Вычислительной математики и кибернетики МГУ: на научном семинаре по обратным задачам (руководители — профессора А. В. Баев, А. М. Денисов, И. В. Тихонов) и на научном семинаре «Спектральная теория дифференциальных операторов и актуальные вопросы математической физики» (руководители — профессор И. С. Ломов и академик Е. И. Моисеев). Также результаты докладывались на международных научных конференциях. Основные результаты каждой главы опубликованы в научных журналах должного уровня (Web of Science, Scopus, ВАК РФ).

**Публикации.** По теме исследования опубликовано 20 работ [1]–[9], [60]–[68], [77] и [78]. Из них статья [1] в журнале из списка ВАК РФ; статья [65] в журнале из списка ВАК РФ с переводом [112] в журнале, индексируемом в *Web of Science*, *Scopus*, *RSCI*; статья [8], в журнале, индексируемом в *Scopus*, *RSCI*; статья [78] в журнале, индексируемом в *Web of Science*, *Scopus*, *RSCI*; а остальные работы — в сборниках трудов научных конференций. Часть работ подготовлена совместно с научным руководителем И. В. Тихоновым. Научному руководителю принадлежат общие постановки задач и указания на направления проводимых исследований. Работа [68] подготовлена совместно с И. В. Тихоновым и В. Б. Шерстюковым — основные расчеты здесь проведены автором. В статьях, опубликованных в ведущих рецензируемых научных журналах из списка ВАК РФ, *Scopus* и *Web of Science*, отражена проблематика всех глав диссертации.

**Апробация результатов.** Различные части исследования докладывались на шестнадцати международных научных конференциях, в том числе один доклад носил обзорный характер (Санкт-Петербург, РГПУ им. А. И. Герцена, 2023 г.). Представим в следующем списке точные названия конференций.

- Международная конференция: Воронежская зимняя математическая школа «Современные методы теории функций и смежные проблемы» (**Воронеж**, 28 января – 02 февраля 2019 г.).

- LXXII Научная конференция: Герценовские чтения – 2019 «Некоторые актуальные проблемы современной математики и математического образования» (**Санкт-Петербург**, РГПУ им. А. И. Герцена, 08 – 12 апреля 2019 г.).

- Международная конференция памяти академика А. А. Самарского к 100-летию со дня рождения «Современные проблемы вычислительной математики и математической физики» (**Москва**, ВМК МГУ, 18 – 20 июня 2019 г.).

- 2nd International Conference on Mathematical Modelling in Applied Sciences: ICMMAS'19 (**Russia – Belgorod**, BSU, 20 – 24 august 2019).

- 20-я Международная Саратовская зимняя школа «Современные проблемы теории функций и их приложения» (**Саратов**, 28 января – 01 февраля 2020 г.).

- XXI Международная научная конференция «Системы компьютерной математики и их приложения» (**Смоленск**, СмолГУ, 22 – 23 мая 2020 г.).

- Республиканская научная конференция с участием зарубежных ученых «Современные методы математической физики и их приложения» (**Узбекистан – Ташкент**, 17 – 18 ноября 2020 г.).

- Международная конференция: Воронежская зимняя математическая школа «Современные методы теории функций и смежные проблемы» (**Воронеж**, 28 января – 02 февраля 2021 г.).

- Научная сессия Московского педагогического государственного университета (**Москва**, МПГУ, 15 марта 2021 г.).

- Международная конференция «Дифференциальные уравнения, математическое моделирование и вычислительные алгоритмы» (**Белгород**: ИД «БелГУ» НИУ «БелГУ», 25 – 29 октября 2021 г.).

- Научная конференция: «Тихоновские чтения» (**Москва**, ВМК МГУ, 25 – 30 октября 2021 г.).

- 21-я Международная Саратовская зимняя школа «Современные проблемы теории функций и их приложения» (**Саратов**, 31 января – 04 февраля 2022 г.).

- XXIII Международная научная конференция «Системы компьютерной математики и их приложения» (**Смоленск**, СмолГУ, 27 – 28 мая 2022 г.).

- Научная конференция: «Тихоновские чтения» (**Москва**, ВМК МГУ, 24 – 28 октября 2022 г.).

- LXXVI Герценовские чтения: международная научная конференция «Современные проблемы математики и математического образования» (**Санкт-Петербург**, РГПУ им. А. И. Герцена, 18 – 20 апреля 2023 г.).

- XXIV Международная научная конференция «Системы компьютерной математики и их приложения» (**Смоленск**, СмолГУ, 26 – 27 мая 2023 г.).

**Личный вклад автора.** Автором решены все поставленные задачи: установлены критерии единственности решения линейных обратных задач для абстрактного дифференциального уравнения второго порядка с финальными переопределениями второго и третьего рода (оба критерия — без ограничений на тип эволюционного уравнения); исследовано распределение нулей возникающей характеристической целой функции; получены эффективные достаточные признаки единственности решения линейной обратной задачи с переопределением третьего рода; исследованы присоединенные решения линейной однородной обратной задачи. Кроме того, для абстрактного дифференциального уравнения произвольного порядка $n \in \mathbb{N}$ установлен критерий единственности решения модельной обратной задачи с переопределением, содержащим производную искомой функции в выбранный финальный момент времени (без ограничений на тип эволюционного уравнения); здесь также исследовано распределение нулей возникающей характеристической функции (связанной с функциями типа Миттаг-Леффлера) и получены эффективные достаточные признаки единственности решения обратной задачи. Отдельно установлен новый элементарный критерий единственности решения обратной задачи, действующий для уравнения четвертого порядка.

**Структура работы.** Диссертационная работа состоит из введения, основного текста и списка литературы. Основной текст разбит на три главы. Каждая глава разбита на параграфы, некоторые параграфы — на пункты. Нумерация параграфов в работе — сквозная. Нумерация пунктов и прочих единиц (утверждений, формул, примеров и проч.) ведется по параграфам. Каждая глава посвящена своей теме. Общая структура всех глав: математическая постановка задачи; формулировки основных результатов; их полные доказательства; дополнительные исследования по применению доказанных утверждений (следствия, примеры и т. д.).

В конце текста дан список литературы. Список составлен в алфавитном порядке: сначала работы на кириллице, а потом — на латинице. Ссылки на литературу в тексте идут по номерам работ по списку, причем во многих местах помимо номеров для удобства чтения указаны фамилии авторов (для краткости без инициалов).

Общий объем диссертации составляет 127 страниц, включая один рисунок. Список литературы состоит из 115 наименований.

Коротко изложим основное **содержание диссертации**.

Во всех трех главах рассматриваются модельные обратные задачи для эволюционных дифференциальных уравнений в банаховом пространстве. Охарактеризуем материал по каждой главе отдельно, но прежде зафиксируем следующие общие положения.

Все обсуждаемые обратные задачи являются линейными. Всюду в работе используем обозначения: $E$ — комплексное банахово пространство; $A$ — линейный замкнутый оператор в пространстве $E$ с областью определения $D(A) \subset E$ (не обязательно плотной в $E$); $T > 0$ — фиксированное число (финальный момент времени). Специально подчеркнем, что основные полученные результаты, предполагают лишь минимальные ограничения на $A$ типа линейности и замкнутости.

**Во вводной главе 1** (§§ 1 – 3) изучается обратная задача для абстрактного дифференциального уравнения второго порядка со стандартными условиями Коши и *финальным переопределением второго рода* — когда в финальный момент времени задано значение производной от основной эволюционной функции. Это наиболее простая модель, дающая ориентиры для последующих результатов.

Краткий § 1 посвящен точной постановке задачи

$$\begin{cases} u''(t) = Au(t) + g, \quad 0 < t < T, \\ u(0) = u_0, \;\; u'(0) = u_1, \\ u'(T) = u_2, \end{cases} \tag{0.1}$$

с неизвестной функцией $u\colon [\,0, T\,] \to E$ и неизвестным элементом $g \in E$. Здесь $u_0$, $u_1$, $u_2$ — заданные элементы в $E$. Решением задачи считаем пару $(u(t), g)$, удовлетворяющую всем соотношениям в системе (0.1). При этом предполагаем, что

$$u \in C^2(\,(\,0, T\,),\, E\,) \cap C^1(\,[\,0, T\,],\, E\,) \quad \text{и} \quad u(t) \in D(A) \;\; \text{при} \;\; 0 < t < T.$$

Обратная задача (0.1) называется *однородной*, если $u_0 = u_1 = u_2 = 0$.

Следующий § 2 делится на три пункта. В первом, в предположении, что какое-то из чисел $\lambda_k = -k^2\pi^2/T^2$ с некоторым $k \in \mathbb{N}$ является собственным значением оператора $A$ с собственным вектором $f_k \in D(A)$, $f_k \neq 0$, получено нетривиальное элементарное решение

$$u_k(t) = \frac{T^2}{k^2\pi^2}\left(1 - \cos\frac{k\pi t}{T}\right) f_k, \qquad g_k = f_k$$

для однородной версии обратной задачи (0.1). Методом разделения переменных дается общая схема для нахождения подобных решений, после чего проверка полученного производится просто — с учетом условий

$$u_0 = u_1 = u_2 = 0 \qquad \text{и} \qquad Af_k = \lambda_k f_k = (-k^2\pi^2/T^2) f_k.$$

Во втором пункте § 2 установлен критерий единственности решения с полным доказательством для однородной обратной задачи (теорема 2.1). Как следствие отсюда получаем (теорема 2.2): *для того чтобы обратная задача* (0.1) *при любом выборе элементов* $u_0, u_1, u_2 \in E$ *имела не более одного решения* $(u(t), g)$, *необходимо и достаточно, чтобы ни одно из чисел*

$$\lambda_k = -\frac{k^2\pi^2}{T^2}, \qquad k \in \mathbb{N},$$

*не являлось собственным значением оператора* $A$.

Во третьем пункте § 2 сформулирован удобный достаточный признак единственности решения (теорема 2.3).

Далее, в § 3, показывается, как реализуются полученные результаты применительно к обратным задачам для некоторых уравнений в частных производных. Рассмотрены модельные примеры для простых уравнений типа колебания струны и уравнения Пуассона в прямоугольнике, а затем — более сложный пример для трехмерного уравнения Пуассона, взятого в цилиндрической области. Представленные результаты носят иллюстративный характер.

**В главе 2** (§§ 4–8) для абстрактного дифференциального уравнения второго порядка изучается обратная задача с условиями Коши, как в первой главе, но с *переопределением третьего рода*, содержащим комбинацию значений эволюционной функции и ее производной в заданный финальный момент времени $T > 0$. Здесь ситуация намного сложнее и исследование требует больших усилий.

Точная постановка задачи дана в § 4. В банаховом пространстве $E$ рассматриваем соотношения

$$\begin{cases} u''(t) = Au(t) + g, \quad 0 < t < T, \\ u(0) = u_0, \ \ u'(0) = u_1, \\ \alpha u(T) + \beta u'(T) = u_2, \end{cases} \tag{0.2}$$

с неизвестной функцией $u\colon [\,0, T\,] \to E$ и неизвестным элементом $g \in E$. Выбранные элементы $u_0$, $u_1$, $u_2 \in E$ и числовые значения $\alpha$, $\beta \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ считаем заданными. Понятие решения вводим аналогично тому, как это сделано в главе 1. Обратная задача (0.2) называется *однородной*, если $u_0 = u_1 = u_2 = 0$.

Следующий § 5 делится на два пункта. В первом из них с однородной версией задачи (0.2) связывается ее скалярная модель и характеристическая целая функция

$$L(\lambda) \ = \ \alpha\, L_1(\lambda) + \beta\, L_2(\lambda) \ \equiv \ \alpha\, \frac{\operatorname{ch}\sqrt{\lambda}\, T - 1}{\lambda} \ + \beta\, \frac{\operatorname{sh}\sqrt{\lambda}\, T}{\sqrt{\lambda}}, \qquad \lambda \in \mathbb{C}. \tag{0.3}$$

В предположении, что некоторый нуль $\lambda = a$ функции (0.3) является собственным значением оператора $A$ с собственным вектором $f \in D(A)$, $f \neq 0$, для однородной версии обратной задачи (0.2) получено нетривиальное элементарное решение вида

$$u(t) = \frac{\operatorname{ch}\sqrt{a}\, t - 1}{a}\, f, \qquad g = f. \tag{0.4}$$

Формула (0.4) допускает также прямую проверку подстановкой в систему (0.2) с учетом условий $u_0 = u_1 = u_2 = 0$ и $Af = af$.

Во втором пункте § 5 сформулирован следующий критерий единственности решения обратной задачи (0.2) (теорема 5.1): *предположим, что при некоторых элементах* $u_0$, $u_1$, $u_2 \in E$ *обратная задача* (0.2) *имеет решение* $(u(t), g)$. *Для того чтобы это решение было единственным необходимо и достаточно, чтобы ни один нуль характеристической функции* $L(\lambda)$ *из формулы* (0.3) *не являлся собственным значением оператора* $A$.

После этого, в теореме 5.2, приведена эквивалентная версия критерия для однородного случая обратной задачи (0.2).

Далее, в § 6, установлено полное доказательство теорем 5.1 и 5.2. Сначала обсуждаются технические факты, связанные с целыми функциями $L_1(\lambda)$, $L_2(\lambda)$ и с образованной из них характеристической функцией (0.3). Затем следует основное доказательство. Оно является нетривиальным и довольно объемным (около двенадцати страниц). Существенную роль здесь играют соображения из теории функций (оценки поведения функций на мнимой оси, принцип Фрагмена–Линделефа, теорема Мюнца и т. д.).

Отдельный § 7 посвящен распределению нулей характеристической функции (0.3) в зависимости от выбора параметров $\alpha,\ \beta \in \mathbb{C}\setminus\{0\}$. Эта информация важна для применения полученного критерия единственности (см. теорему 5.1). Приводятся общие сведения про нули, их кратности и локализацию в некоторых специальных случаях. Здесь же (на основе результатов о распределении нулей) сформулированы эффективные условия единственности и неединственности решения, относимые к изучаемой обратной задаче (0.2). Все установленные утверждения (теоремы 7.7–7.18) имеют простые формулировки и допускают непосредственную проверку при выборе конкретных примеров из математической физики.

Следующий § 8 посвящен *присоединенным решениям*, иногда возникающим в однородной обратной задаче (0.2). Этот существенно новый эффект был обнаружен при подготовке диссертации. Исследование показывает, что характеристическая целая функция $L(\lambda)$ из формулы (0.3) может иметь кратные нули кратности два при некоторых сочетаниях параметров $\alpha,\ \beta \in \mathbb{C},\ |\alpha| + |\beta| > 0,\ T > 0$. Допустим, что $\lambda = a$ — именно такой кратный нуль, т. е. $L(a) = L'(a) = 0$. В предположении, что то же число оказалось кратным собственным значением оператора $A$ с собственным вектором $f \in D(A),\ f \neq 0$, и присоединенным вектором $f^+ \in D(A^2),\ f^+ \neq 0$ (когда $Af = af$ и $Af^+ = af^+ + f$), получено присоединенное решение соответствующей однородной обратной задачи. Оно имеет вид

$$u(t) = \frac{\operatorname{ch}(\sqrt{a}\,t) - 1}{a}\, f^+ + \frac{\sqrt{a}\,t\, \operatorname{sh}(\sqrt{a}\,t) - 2\operatorname{ch}(\sqrt{a}\,t) + 2}{2a^2}\, f, \qquad g = f^+. \tag{0.5}$$

Пары $(u(t), g)$ вида (0.5) являются независимыми по отношению к элементарным решениям (0.4). Показано, что формула (0.5) допускает реализацию на практике: в гильбертовом пространстве $E = L_2(0, l)$ для несамосопряженных операторов $A$ с кратными спектрами приведены примеры конкретных обратных задач, имеющих присоединенные решения. Очень полезной здесь оказалась идея В. А. Ильина [18, 19], позволяющая строить операторы $A$ с нужными свойствами (дальнейшее развитие теории несамосопряженных операторов Ильина представлено в недавних монографиях Ломова [34, 35]).

**В главе 3** (§§ 9 – 15) изучается модельная обратная задача для абстрактного дифференциального уравнения произвольного порядка $n \in \mathbb{N}$ с условиями Коши и специальным финальным переопределением.

Вводный § 9 носит подготовительный характер. Сначала дается краткий обзор по теории так называемых *обобщенных экспонент* или, как говорят еще (см. [103]), *обобщенных $\lambda$-гиперболических функций* вида

$$y_{n,m}(t,\lambda) = \frac{t^m}{m!} + \lambda\,\frac{t^{n+m}}{(n+m)!} + \lambda^2\,\frac{t^{2n+m}}{(2n+m)!} + \ldots = \sum_{j=0}^{\infty} \lambda^j\,\frac{t^{jn+m}}{(jn+m)!}\,. \tag{0.6}$$

Здесь $t \in \mathbb{R}$, $\lambda \in \mathbb{C}$, $n \in \mathbb{N}$, $m \in \mathbb{Z}$. При $t = 1$ и $\lambda = z$ вводится основное, нужное семейство целых функций $Y_{n,m}(z) = y_{n,m}(1,z)$, $n \in \mathbb{N}, m \in \mathbb{Z}$, со следующей явной формулой

$$Y_{n,m}(z) = \frac{1}{m!} + \frac{z}{(n+m)!} + \frac{z^2}{(2n+m)!} + \ldots = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{z^j}{(jn+m)!}, \qquad z \in \mathbb{C}. \tag{0.7}$$

Отмечается связь $Y_{n,m}(z) = E_{1/n}(z;\, m+1)$ с функциями типа Миттаг-Леффлера [17]

$$E_\rho(z;\,\mu) = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{z^j}{\Gamma(j\rho^{-1}+\mu)}\,, \qquad z \in \mathbb{C},$$

где $\rho > 0$ и $\mu \in \mathbb{C}$ — два параметра, а $\Gamma$ — символ гамма-функции. Для каждой из функций $Y_{n,m}(z) = E_{1/n}(z;\, m+1)$ рассматриваем бесконечное множество нулей

$$\Lambda_{n,m} \equiv \big\{\, z \in \mathbb{C} : Y_{n,m}(z) = 0 \,\big\} = \big\{\, z_k(n,m) \,\big\}_{k \in J} \tag{0.8}$$

с индексацией $k \in J = J(n,m) \subseteq \mathbb{Z}$, проведенной без учета кратности. Выделены три элементарных случая $\Lambda_{1,1}$, $\Lambda_{2,2}$ и $\Lambda_{2,1}$, когда все нули находятся явно. Технический аппарат готов для проводимого исследования.

Следующий § 10 посвящен точной постановке общей обратной задачи с фиксированными значениями $n \in \mathbb{N}$ и $q \in \{\, 0, \ldots, n-1 \,\}$. Рассматриваем соотношения

$$\begin{cases} \dfrac{d^n u(t)}{dt^n} = Au(t) + g, \qquad 0 < t < T, \\ u(0) = u_0, \quad u'(0) = u_1, \quad \ldots\;, \quad u^{(n-1)}(0) = u_{n-1}, \\ u^{(q)}(T) = u_n. \end{cases} \tag{0.9}$$

Все элементы $u_0, \ldots, u_n \in E$ считаем заданными. Неизвестными, как и ранее, являются функция $u\colon [\,0,T\,] \to E$ и элемент $g \in E$. Предполагаем, что

$$u \in C^n((\,0,T\,),E) \cap C^{n-1}([\,0,T\,],E) \quad \text{и} \quad u(t) \in D(A) \quad \text{при} \quad 0 < t < T.$$

Обратная задача (0.9) называется *однородной*, если $u_0 = \ldots = u_n = 0$.

Отдельно отмечаются специальные, изученные ранее, случаи задачи (0.9) с параметрами: а) $n = 1$ и $q = 0$; б) $n = 2$ и $q = 0$ или $q = 1$. Эти случаи включены сейчас в общую схему с некоторыми особенностями при рассмотрении.

Далее, в § 11, сформулирован наш основной критерий единственности решения (теорема 11.1): *для того чтобы обратная задача* (0.9) *с фиксированными значениями* $n \in \mathbb{N}$ *и* $q \in \{0, \ldots, n-1\}$ *при любом выборе элементов* $u_0, \ldots, u_n \in E$ *имела не более одного решения* $(u(t), g)$, *необходимо и достаточно, чтобы ни одно из чисел*

$$\lambda_k = \lambda_k(n, n-q) = \frac{z_k(n, n-q)}{T^n}, \qquad k \in J = J(n, n-q) \subseteq \mathbb{Z}, \tag{0.10}$$

*не являлось собственным значением оператора* $A$. *Здесь* $z_k = z_k(n, n-q)$ — *нули целой функции* $Y_{n,\, n-q}(z)$ *из семейства* (0.7) (*см. также формулу* (0.8)).

Для упомянутых выше специальных случаев (при $n = 1$ и $n = 2$) приведены отдельные формулировки критерия единственности решения (теоремы 11.2 – 11.4), совпадающие с прежними результатами Тихонова, Эйдельмана и автора. Тем самым, теорема 11.1 охватывает все допустимые ситуации.

Последующий § 12 содержит полное доказательство основного результата. Параграф разбит на несколько пунктов. Сначала рассматривается однородная версия обратной задачи (0.9), для которой дана своя отдельная формулировка критерия единственности (см. теорему 12.1). Затем показана *необходимость* условия из критерия единственности: в предположении, что некоторое число $\lambda_k$ из формулы (0.10) является собственным значением оператора $A$ с собственным вектором $f_k \in D(A)$ ($f_k \neq 0$, $Af_k = \lambda_k f_k$) для однородной обратной задачи получено нетривиальное элементарное решение вида

$$u(t) = y_{n,n}(t, \lambda_k)\, f_k, \qquad g = f_k, \tag{0.11}$$

где $y_{n,n}(t, \lambda)$ — функция из семейства (0.6). Отдельно рассмотрены пары (0.11) для случаев $n = 1$ и $n = 2$. Здесь результаты совпадают с полученными ранее.

Заключительная, весьма объемная часть § 12 посвящена доказательству *достаточности* условия в критерии единственности для задачи (0.9). Выводятся соответствующие операторные соотношения, анализ которых осуществлен при помощи «метода частных» Б. Я. Левина. Ключевую роль здесь играет один прием Карлемана, использующий теорему Вимана о поведении целых функций порядка $\rho < 1/2$ (подробнее см. [57]). Как и в главе 2, завершение доказательства основано на теореме Мюнца.

Поскольку полученный критерий единственности решения обратной задачи (0.9) тесно связан с нулями целых функций $Y_{n,m}(z)$ из семейства (0.7), то вопросу распределения этих нулей посвящен отдельный § 13.

Известны три специальные множества $\Lambda_{1,1}$, $\Lambda_{2,2}$, $\Lambda_{2,1}$ вида (0.8), когда все нули вычисляются явно. Основной интерес для нас представляют прочие $\Lambda_{n,m}$ при $n \geqslant 3$, где явное вычисление нулей весьма затруднительно. Здесь были использованы недавние результаты Попова и Седлецкого [42], на основании которых показано, что все числа (0.10) при $n \geqslant 3$ и $q \in \{\,0,\,1,\,\ldots\,,\,n-1\,\}$ являются вещественными и отрицательными, причем

$$\lambda_k = \lambda_k(n, n-q) = -\left(\frac{\pi}{\sin(\pi/n)}\left(k - \frac{1}{2} + \frac{n-q}{n}\right) + \varepsilon_k\right)^n \Big/ T^n$$

с нумерацией $k \in \mathbb{N}$ и значениями $\varepsilon_k = \varepsilon_k(n,\, n-q)$, экспоненциально стремящимся к нулю при $k \to \infty$.

Особо отмечены функции $Y_{4,m}(z)$ при $m = \{-2,\,0,\,2\}$, для которых нули вычисляются явно. В развитии одной идеи И. В. Тихонова [57], показано, что

$$\Lambda_{\,4,m} = \left\{-4\left(k + \frac{m-2}{4}\right)^4 \pi^4\right\}_{k\in\mathbb{N}}, \qquad m = -2,\,0,\,2. \tag{0.12}$$

Этот интересный случай дополняет общую теорию А. Ю. Попова и А. М. Седлецкого и позволяет сформулировать отдельную, вполне завершенную версию критерия единственности для абстрактного дифференциального уравнения четвертого порядка (см. теорему 14.7).

Далее, в § 14, устанавливаются некоторые следствия. Параграф делится на два пункта. В первом, на основе полученных результатов о нулях характеристической функции, отмечен ряд достаточных признаков единственности решения, действующих для общей обратной задачи (0.9). Приведем один типичный пример (из теоремы 14.5), пригодный для случая $n \geqslant 3$: *пусть $A$ — линейный замкнутый оператор в банаховом пространстве $E$. Обратная задача* (0.9) *с фиксированными параметрами $n \geqslant 3$, $q \in \{\,0,\,\ldots\,,\,n-1\,\}$ при любом выборе значения $T > 0$ и элементов $u_0,\,\ldots\,,\,u_n \in E$ имеет не более одного решения $(u(t), g)$, если у оператора $A$ нет собственных значений на луче*

$$M = M(n, q, T) \equiv \big(-\infty,\; -T^{-n}(\,2n-q\,)!/\,(\,n-q\,)!\;\big) \subset \mathbb{R}.$$

Компьютерная проверка показывает, что верхняя граница в указанном множестве является достаточно точной.

Во втором пункте § 14 рассматривается специальный случай обратной задачи для уравнения четвертого порядка:

$$\begin{cases} \dfrac{d^4u(t)}{dt^4} = Au(t) + g, \qquad 0 < t < T, \\ u(0) = 0, \quad u'(0) = 0, \quad u''(0) = 0, \quad u'''(0) = 0, \\ u''(T) = 0, \end{cases} \tag{0.13}$$

где критерий единственности приобретает следующий простой вид (теорема 14.7): *пусть $A$ — линейный замкнутый оператор в банаховом пространстве $E$. Для того чтобы линейная однородная обратная задача* (0.13) *имела на* $(0, T)$ *только тривиальное решение* $u(t) \equiv 0$, $g = 0$, *необходимо и достаточно, чтобы ни одно из чисел*

$$\lambda_k = -\frac{4k^4\pi^4}{T^4}, \qquad k \in \mathbb{N}, \tag{0.14}$$

*не являлось собственным значением оператора* $A$.

Числа (0.14) получаются согласно (0.10) на основе явно найденных нулей из множества $\Lambda_{4,2}$ (см. формулу (0.12) при $m = 2$).

В предположении, что какое-то число $\lambda_k = -4k^4\pi^4/T^4$ с некоторым $k \in \mathbb{N}$ является собственным значением оператора $A$ с собственным вектором $f_k \in D(A)$, $f_k \neq 0$, для обратной задачи (0.13) указано нетривиальное элементарное решение

$$u(t) = \frac{T^4}{4k^4\pi^4} \left( 1 - \cos\frac{k\pi t}{T} \, \operatorname{ch}\frac{k\pi t}{T} \right) f_k, \qquad g = f_k. \tag{0.15}$$

При проверке соотношений (0.13) используется то, что $Af_k = (-4k^4\pi^4/T^4)f_k$.

Завершает основной текст § 15, в котором приведены конкретные примеры обратных задач для уравнений в частных производных четвертого порядка. Здесь реализуются идеи, связанные с задачей (0.13) и ее возможными решениями вида (0.15). Построенные примеры неединственности вполне обозримы и выражаются через элементарные функции.

**В заключении** подводятся итоги выполненного исследования.

**Список литературы** включает научные работы, с которыми автор ознакомился при подготовке диссертации. Дадим краткий обзор использованных источников с разбивкой их по тематическим разделам.

**Теория обратных и неклассических задач (основные источники).**

Монографии: Денисов [16], Прилепко, Орловский, Васин [109].

Статьи: Тихонов [57, 58], Тихонов, Эйдельман [69, 70].

**Обратные и неклассические задачи (дополнительная литература).**

Монографии: Гасаноглу, Романов [91], Исаков [95], Кирш [97].

Статьи: Амиров [10], Глушак [15], Исаков [21], Искендеров [22], Искендеров и Тагиев [23], Камынин [24], Костин [26], Костин, Пискарев [27], Орловский [40], Прилепко [43, 44], Прилепко, Костин [45], Прилепко, Соловьев [46], Сабитов [48], Соловьев[50], Федоров, Нагуманова [72, 73], Эйдельман [75], Ранделл [110].

**Теория функций и функциональный анализ.**

Монографии: Левин [32], Леонтьев [33], Маркушевич [37], Полиа и Сегё [41], Стоилов [51], Титчмарш [52], Хилле, Филлипс [74], Боас [81].

Статьи: Мюнц [104].

**Абстрактные дифференциальные уравнения.**

Монографии: Крейн [29], Сяо Тиджин и Лян Цзинь [115].

Статьи: Вишик [13], Вишик, Ладыженская [14], Любич [36], Прокопенко [47], Тихонов [54, 56], Эйдельман, Тихонов [85], Фаторини [87, 88], Херш [92], Хилле [93, 94], Лизама и Мурилло [100], Мурилло-Арчила [105], Нойбрандер [106], Поблете и Поцо [107], Сандефур [111], Сяо Тиджин [114].

**Уравнения в частных производных и спектральная теория.**

Монографии: Ломов [34, 35], Михайлов [38], Тихонов, Самарский [53], Арфкен, Вебер, Харрис [79].

Статьи: Ильин [18, 19], Ионкин [20].

**Обобщенные экспоненты и функции Миттаг-Леффлера.**

Монографии: Бейтмен, Эрдейи [11], Джрбашян [17], Попов, Седлецкий [42], Горенфло, Килбас, Майнарди, Рогозин [89].

Статьи: Малдун, Унгар [103], Унгар [113].

Автор выражает глубокую признательность своему научному руководителю Ивану Владимировичу Тихонову за постановку задач, внимание к работе и постоянную помощь в исследованиях. Автор благодарен также Антону Юрьевичу Попову и Владимиру Борисовичу Шерстюкову за ценные консультации по теории целых функций.

# Глава 1.

# Обратная задача для дифференциального уравнения второго порядка с финальным переопределением второго рода

Изучается модельная обратная задача для абстрактного дифференциального уравнения второго порядка

$$u''(t) = Au(t) + g$$

со стандартными условиями Коши. Стационарное неоднородное слагаемое $g$ считается неизвестным. В качестве дополнительного условия взято *финальное переопределение второго рода* — когда в финальный момент времени задано значение производной от основной эволюционной функции. Для рассматриваемой задачи показано, что вопрос единственности решения можно исследовать при минимальных требованиях к оператору $A$, предполагая лишь, что $A$ — линейный и замкнутый в банаховом пространстве $E$.

## § 1. Абстрактная постановка задачи

Пусть $E$ — комплексное банахово пространство и $A$ — линейный замкнутый оператор в $E$ с областью определения $D(A) \subset E$ (не обязательно плотной в $E$). Зафиксируем вещественное число $T > 0$. На интервале $(0, T)$ рассмотрим абстрактное дифференциальное уравнение второго порядка

$$u''(t) = Au(t) + g, \qquad 0 < t < T, \tag{1.1}$$

с неизвестным элементом $g$ из пространства $E$.

Для одновременного нахождения функции $u\colon [\,0,T\,] \to E$ и элемента $g$ добавим условия Коши

$$u(0) = u_0, \qquad u'(0) = u_1 \tag{1.2}$$

с финальным переопределением второго рода

$$u'(T) = u_2, \tag{1.3}$$

где $u_0$, $u_1$, $u_2$ элементы из $E$. Задача (1.1)–(1.3) относится к классу *обратных задач* (см. [16, 91, 97, 109]).

Пару $(u(t), g)$ назовем *ослабленным решением* обратной задачи (1.1)–(1.3), если

$$u \in C^2(\,(\,0,T\,),\, E\,) \cap C^1(\,[\,0,T\,],\, E\,), \quad u(t) \in D(A) \ \text{ при } \ 0 < t < T, \quad g \in E, \tag{1.4}$$

и выполнены все соотношения (1.1)–(1.3). При этом $Au \in C((\,0,T\,),\, E\,)$.

При рассмотрении уравнения (1.1) на всем отрезке $[\,0,T\,]$ пара $(u(t), g)$ называется *классическим решением* обратной задачи (1.1)–(1.3), если

$$u \in C^2(\,[\,0,T\,],\, E\,), \qquad u(t) \in D(A) \ \text{ при } \ 0 \leqslant t \leqslant T, \qquad g \in E. \tag{1.5}$$

При этом уравнение (1.1) должно быть выполнено на отрезке $[\,0,T\,]$, а в соотношениях (1.2) для согласования условий надо считать, что $u_0 \in D(A)$.

Предположим что поставленная обратная задача (1.1)–(1.3) с некоторыми элементами $u_0$, $u_1, u_2 \in E$ разрешима. Поставим вопрос о единственности решения $(u(t),\, g)$. Понятно, что с общей точки зрения лучше рассматривать ослабленные решения, так как из единственности ослабленного решения будет также следовать единственность классического решения.

Подобные задачи изучались ранее в работах [10, 12, 22, 23, 40, 75] при тех или иных специальных ограничений. В работе [69] для обратной задачи с финальным переопределением первого рода $u(T) = u_2$ получен критерий единственности решения в случае дифференциального уравнения первого порядка без всяких ограничений. Затем, в работе [70], критерий единственности перенесен на уравнение высокого порядка, в том числе, на уравнение второго порядка. Подчеркнем, что в [69] и [70] фигурировало финальное переопределение именно первого рода.

Возможно, что обратные задачи с финальным переопределением (1.3) еще не изучены с должной подробностью. Отметим лишь результаты [109, п. 8.3], где для уравнений «эллиптического типа» рассматривалась обратная задача с заданной комбинацией $\alpha u(T) + \beta u'(T) = u_2$, $\alpha$, $\beta \in \mathbb{R}$, включающей в себя оба упомянутых выше переопределения.

Обратная задача (1.1)–(1.3) изучалась автором в работе [1] (и также в [2, 3]). Основываясь на [1], изложим материал подробно.

Используя методику [69, 70], мы получим критерий единственности решения в линейной обратной задаче для эволюционного дифференциального уравнения *второго порядка* в случае финального переопределения *второго рода*. Также, как в [69, 70], наш результат имеет универсальный характер и не налагает ограничений на тип уравнения.

Пусть две пары функций $(u^{(1)}(t),\, g^{(1)})$, $(u^{(2)}(t),\, g^{(2)})$ являются ослабленными решениями обратной задачи (1.1)–(1.3). Тогда пара $(u(t), g)$, где

$$u(t) = u^{(1)}(t) - u^{(2)}(t), \qquad g = g^{(1)} - g^{(2)},$$

удовлетворяет уравнению (1.1) и условиям

$$u(0) = 0, \quad u'(0) = 0, \quad u'(T) = 0. \tag{1.6}$$

Задача $(1.1), (1.6)$ называется *однородной обратной задачей*.

Очевидно, что задача $(1.1), (1.6)$ всегда имеет *тривиальное решение*

$$u(t) \equiv 0, \qquad g = 0.$$

Итак, вопрос единственности решения в исходной обратной задаче (1.1)–(1.3) сводится к вопросу об отсутствии нетривиальных решений у однородной обратной задачи $(1.1), (1.6)$.

# § 2. Критерий единственности решения

Для изучаемой обратной задачи (1.1)–(1.3) установим критерий, дающий полный ответ на вопрос о единственности решения. Как было отмечено выше, достаточно исследовать однородную обратную задачу $(1.1), (1.6)$ на отсутствие нетривиальных решений. Для поиска возможных таких решений применим метод разделения переменных.

**2.1. Элементарные решения.** Вначале рассуждаем формально. Нетривиальные элементарные решения однородной задачи $(1.1), (1.6)$ ищем в виде

$$u(t) = y(t) f, \qquad g = g, \tag{2.1}$$

где $y(t)$ — скалярная комплекснозначная функция, а $f$, $g$ — элементы из $E$.

При этом считаем, что

$$y \in C^2\,[\,0,T\,], \quad y(t) \not\equiv 0, \quad f \in D(A), \quad f \neq 0. \tag{2.2}$$

Требование $g \neq 0$ пока не налагаем, ибо изначально нельзя исключать, что $g = 0$, а $u(t) \not\equiv 0$ на $[\,0,T\,]$. Предположения (2.2) согласуются с условиями (1.5), поэтому элементарное решение (2.1) будет классическим.

Подставляя пару (2.1) в задачу (1.1), (1.6), получим уравнение

$$y''(t)f = y(t)\,Af + g, \qquad 0 \leqslant t \leqslant T, \tag{2.3}$$

вместе с условиями

$$y(0) = 0, \quad y'(0) = 0, \tag{2.4}$$

$$y'(T) = 0, \tag{2.5}$$

выполненными в силу того, что $f \neq 0$.

Так как $y(0) = 0$, то при $t = 0$ из (2.3) следует связь

$$g = \alpha f, \tag{2.6}$$

где $\alpha \equiv y''(0)$ — некоторое число. Подставляя (2.6) в уравнение (2.3) и преобразуя результат, придем к соотношению

$$Af = \frac{y''(t) - \alpha}{y(t)}\, f,$$

выполненному там, где $y(t) \neq 0$. Такое возможно только, если

$$Af = \lambda f, \tag{2.7}$$

с некоторой константой $\lambda \in \mathbb{C}$.

Итак, элемент $f \neq 0$ должен быть собственным вектором оператора $A$ с собственным значением $\lambda \in \mathbb{C}$. Но тогда уравнение (2.3) с учетом соотношений (2.6), (2.7) и при добавлении двух начальных условий (2.4) дает задачу Коши

$$\begin{cases} y''(t) = \lambda\, y(t) + \alpha, \quad 0 \leqslant t \leqslant T, \\ y(0) = 0, \quad y'(0) = 0. \end{cases} \tag{2.8}$$

Решение задачи Коши (2.8) может быть записано в виде

$$y(t) = \alpha\, \frac{\operatorname{ch}\sqrt{\lambda}\, t - 1}{\lambda}\,, \qquad \left[\, y(t) = \alpha t^2/2 \quad \text{при} \quad \lambda = 0 \,\right]. \tag{2.9}$$

При этом

$$y'(t) = \alpha\, \frac{\operatorname{sh}\sqrt{\lambda}\, t}{\sqrt{\lambda}}\,, \qquad [\, y'(t) = \alpha t \quad \text{при} \quad \lambda = 0 \,]. \tag{2.10}$$

Так как $y(t) \not\equiv 0$, то число $\alpha$ в формуле (2.9) должно быть отлично от нуля. Выберем $\alpha = 1$ $(\equiv y''(0))$.

Для нахождения подходящих значений $\lambda \in \mathbb{C}$ воспользуемся условием (2.5). При подстановке $t = T$ в формулу (2.10) получим уравнение

$$\frac{\operatorname{sh}\sqrt{\lambda}\,T}{\sqrt{\lambda}} = 0. \tag{2.11}$$

Корни уравнения (2.11) находятся элементарно

$$\operatorname{sh}\sqrt{\lambda}\,T = 0 \quad \Longrightarrow \quad e^{2\sqrt{\lambda}\,T} = 1 \quad \Longrightarrow \quad \sqrt{\lambda_k} = k\pi i/T, \quad k \in \mathbb{Z} \setminus \{0\} \qquad (\lambda \neq 0).$$

Следовательно, корни имеют вид $\lambda_k = -k^2\pi^2/T^2$, $k \in \mathbb{N}$. При подстановке таких значений в формулу (2.9), с учетом что $\alpha = 1$, получаем функции

$$y_k(t) = \frac{T^2}{k^2\pi^2}\left(1 - \cos\frac{k\pi t}{T}\right), \qquad k \in \mathbb{N}, \tag{2.12}$$

а соотношение (2.7) дает серию уравнений

$$Af_k = -\frac{k^2\pi^2}{T^2}\, f_k, \qquad k \in \mathbb{N}. \tag{2.13}$$

В силу ограничения (2.2) годятся только нетривиальные решения $f_k \neq 0$.

Допустим, что какое-то из чисел $\lambda_k = -k^2\pi^2/T^2$ при некотором $k \in \mathbb{N}$ является собственным значением оператора $A$, и нетривиальное решение $f_k \neq 0$ существует. Принимая во внимание выражения (2.6), (2.12) получим нетривиальное элементарное решение (2.1) следующего вида

$$u_k(t) = \frac{T^2}{k^2\pi^2}\left(1 - \cos\frac{k\pi t}{T}\right) f_k, \qquad g_k = f_k. \tag{2.14}$$

Сформулируем установленный результат.

**Лемма 2.1.** *Пусть существует $k \in \mathbb{N}$, для которого уравнение* (2.13) *имеет нетривиальное решение $f_k \neq 0$, т.е. число $\lambda_k = -k^2\pi^2/T^2$ является собственным значением оператора $A$ с собственном вектором $f_k \in D(A)$. Тогда обратная задача* (1.1), (1.6) *имеет нетривиальное элементарное решение вида* (2.14).

**Доказательство.** Все предыдущие рассуждения данного пункта дают полное обоснование леммы 2.1. Кроме того, прямая подстановка пары (2.14) в соотношения (1.1), (1.6) (с учетом того, что $f_k$ — собственный вектор оператора $A$ ) сразу показывает, что эта пара есть нетривиальное решение однородной обратной задачи (1.1), (1.6). □

Лемма 2.1 обеспечивает необходимое условие («необходимость») в следующем критерии единственности решения для однородной обратной задачи (1.1), (1.6).

**2.2. Единственность решения.** Установим следующий результат, дающий критерий единственности решения для однородной обратной задачи (1.1)–(1.6). В теореме речь идет о единственности ослабленного решения $(u(t),\, g)$, удовлетворяющего ограничениям (1.4).

**Теорема 2.1.** *Пусть $A$ — линейный замкнутый оператор в $E$. Для того чтобы однородная обратная задача* (1.1), (1.6) *имела только тривиальное решение* $u(t) \equiv 0$, $g = 0$, *необходимо и достаточно, чтобы ни одно из чисел*

$$\lambda_k = -\frac{k^2\pi^2}{T^2}, \qquad k \in \mathbb{N}, \tag{2.15}$$

*не являлось собственным значением оператора $A$.*

**Доказательство.** `Необходимость.` Пусть число $\lambda_k = -k^2\pi^2/T^2$ с некоторым $k \in \mathbb{N}$ является собственным значением оператора $A$, и пусть $f_k \neq 0$ — соответствующий собственный вектор из $D(A)$. Тогда (см. лемму 2.1) пара (2.14) служит нетривиальным решением однородной обратной задачи (1.1), (1.6). Указанное решение (2.14) является не только ослабленным, но и классическим, удовлетворяя ограничения (1.5).

Докажем теперь `достаточность`. Предположим, что ни одно из чисел (2.15) не является собственным значением оператора $A$, и пусть $(u(t),\, g)$ — некоторое ослабленное решение однородной обратной задачи (1.1), (1.6). Покажем, что $u(t) \equiv 0$ и $g = 0$.

Определим векторные коэффициенты

$$f_k = \int\limits_0^T u(t)\, \cos\frac{k\pi t}{T}\, dt, \qquad k \in \mathbb{N}. \tag{2.16}$$

Поскольку поведение функции $u(t)$ вблизи границ отрезка $[\,0, T\,]$ может «портиться» (см. условия (1.4)), зафиксируем малое $\varepsilon > 0$ и рассмотрим аппроксимации

$$f_{k,\varepsilon} = \int\limits_\varepsilon^{T-\varepsilon} u(t)\, \cos\frac{k\pi t}{T}\, dt, \qquad k \in \mathbb{N}. \tag{2.17}$$

Учитывая замкнутость оператора $A$ и уравнение (1.1), имеем соотношения

$$Af_{k,\varepsilon} = \int\limits_\varepsilon^{T-\varepsilon} Au(t)\, \cos\frac{k\pi t}{T}\, dt \;=\; \int\limits_\varepsilon^{T-\varepsilon} u''(t)\, \cos\frac{k\pi t}{T}\, dt \,-\, g\int\limits_\varepsilon^{T-\varepsilon} \cos\frac{k\pi t}{T}\, dt. \tag{2.18}$$

Проинтегрируем (2.18) по частям и получим

$$Af_{k,\varepsilon} = \; u'(t)\, \cos\frac{k\pi t}{T}\,\Big|_\varepsilon^{T-\varepsilon} + \frac{k\pi}{T}\int\limits_\varepsilon^{T-\varepsilon} u'(t)\, \sin\frac{k\pi t}{T}\, dt \,-\, g\int\limits_\varepsilon^{T-\varepsilon} \cos\frac{k\pi t}{T}\, dt \;=$$

$$= \left( u'(t)\, \cos \frac{k\pi t}{T} + \frac{k\pi}{T}\, u(t)\, \sin \frac{k\pi t}{T} \right) \Bigg|_{\varepsilon}^{T-\varepsilon} - \frac{k^2\pi^2}{T^2} \int\limits_{\varepsilon}^{T-\varepsilon} u(t)\, \cos \frac{k\pi t}{T}\, dt -$$

$$- \; g \int\limits_{\varepsilon}^{T-\varepsilon} \cos \frac{k\pi t}{T}\, dt \;\equiv\; h_{k,\varepsilon}.$$

Устремим теперь $\varepsilon \to 0+$. Тогда

$$f_{k,\varepsilon} \;\to\; \int\limits_{0}^{T} u(t)\, \cos \frac{k\pi t}{T}\, dt \;\equiv\; f_k$$

и

$$A f_{k,\varepsilon} \;=\; h_{k,\varepsilon} \;\to\; -\frac{k^2\pi^2}{T^2} \int\limits_{0}^{T} u(t)\, \cos \frac{k\pi t}{T}\, dt \;\equiv\; \lambda_k\, f_k$$

с числами $\lambda_k$ из формулы (2.15). В предельном переходе для $h_{k,\varepsilon}$ были использованы элементарные свойства тригонометрических функций и краевые условия (1.6).

Вновь учитывая замкнутость оператора $A$, приходим к соотношениям

$$f_k \in D(A), \qquad A f_k = \lambda_k\, f_k, \qquad k \in \mathbb{N},$$

выполненным для элементов $f_k$ из формулы (2.16) с числами $\lambda_k$ вида (2.15). По предположению ни одно из чисел (2.15) не является собственным значением оператора $A$. Но тогда $f_k = 0$ для всех векторных коэффициентов (2.16).

Итак, установили, что

$$\int\limits_{0}^{T} u(t)\, \cos \frac{k\pi t}{T}\, dt \,= 0, \qquad \forall\, k \in \mathbb{N}.$$

Применяя линейный непрерывный функционал $f^* \in E^*$, получаем непрерывную скалярную функцию $\psi(t) = f^*(u(t))$, ортогональную на отрезке $[\,0, T\,]$ всем функциям $\cos\,(k\pi t/T)$ со значениями $k \in \mathbb{N}$. Такая функция $\psi(t)$ может быть только константой. Но

$$\psi(0) = f^*(u(0)) = 0$$

в силу условия $u(0) = 0$ (см. (1.6)). В результате $\psi(t) = f^*(u(t)) \equiv 0$ всюду на $[\,0, T\,]$. Выбор функционала $f^* \in E^*$ был произвольным. По теореме Хана–Банаха заключаем, что $u(t) \equiv 0$ на $[\,0, T\,]$. Здесь $u(t)$ — первый и, как мы установили, равный нулю компонент взятого решения $(u(t),\, g)$. Но тогда $g = 0$ автоматически (см. уравнение (1.1)). Решение однородной обратной задачи (1.1), (1.6) может быть только тривиальным. □

Вернемся к неоднородной обратной задаче (1.1)–(1.3) и сформулируем следующий завершающий результат.

**Теорема 2.2.** *Пусть $A$ — линейный замкнутый оператор в $E$. Для того чтобы обратная задача* (1.1)–(1.3) *при любом выборе элементов $u_0$, $u_1$, $u_2 \in E$ имела не более одного ослабленного решения $(u(t), g)$, необходимо и достаточно, чтобы ни одно из чисел $\lambda_k$ вида* (2.15) *не являлось собственным значением оператора $A$.*

Теорема 2.2 прямо следует из теоремы 2.1 и дает критерий единственности решения обратной задачи (1.1)–(1.3) без всяких ограничений на природу оператора $A$, т. е. без всяких ограничений на тип эволюционного уравнения (1.1).

**2.3. Достаточный признак единственности.** Из теоремы 2.2 выводим удобное достаточное условие единственности решения обратной задачи (1.1)–(1.3).

**Теорема 2.3.** *Пусть $A$ — линейный замкнутый оператор в $E$, не имеющий собственных значений на луче $(-\infty, 0)$. Тогда обратная задача* (1.1)–(1.3) *при любом выборе значения $T > 0$ и элементов $u_0$, $u_1$, $u_2 \in E$ имеет не более одного ослабленного решения.*

**Доказательство.** Все числа вида (2.15) являются вещественными и отрицательными. Поэтому, по теореме 2.2, если у оператора $A$ нет собственных значений на луче $(-\infty, 0)$, то обратная задача (1.1)–(1.3) не может иметь более одного ослабленного решения $(u(t), g)$. $\square$

Дадим несколько иллюстраций на применение полученных результатов в следующем параграфе.

# § 3. Применение критерия единственности

Покажем как реализуется установленный критерий единственности решения. Рассмотрим следующие обратные задачи.

**3.1. Модельные простые примеры.** Обратные задачи будем рассматривать в прямоугольнике

$$(0, l) \times (0, T)$$

где $l > 0$, $T > 0$ — фиксированные числа.

Ввиду простоты ситуации, ее «одномерности» по переменной $x$, выбор основного банахова пространства $E$ представляется не слишком принципиальным. Для определенности будем считать, что

$$E = L_2(\,0, l\,), \qquad D(A) = H^2(\,0, l\,) \cap H_0^1(\,0, l\,),$$

предполагая, что все последующие действия соответствуют абстрактной схеме.

Возьмем одно из следующих дифференциальных уравнений:

1) уравнение вынужденных колебаний струны

$$u_{tt}(x,t) = u_{xx}(x,t) + g(x), \qquad 0 < x < l, \quad 0 < t < T; \tag{3.1}$$

2) эллиптическое уравнение типа Пуассона

$$u_{tt}(x,t) = -u_{xx}(x,t) + g(x), \qquad 0 < x < l, \quad 0 < t < T; \tag{3.2}$$

3) уравнение с комплексным параметром

$$u_{tt}(x,t) = i\,u_{xx}(x,t) + g(x), \qquad 0 < x < l, \quad 0 < t < T, \tag{3.3}$$

где $i$ — мнимая единица. Независимо от типа уравнения, переменную $t$ считаем условным эволюционным «временем».

При выборе того или иного уравнения будем добавлять к нему краевые условия

$$u(0,t) = 0, \quad u(l,t) = 0, \tag{3.4}$$

а также условия Коши

$$u(x,0) = u_0(x), \quad u_t(x,0) = u_1(x), \tag{3.5}$$

и финальное переопределение

$$u_t(x,T) = u_2(x). \tag{3.6}$$

Функции $u_0(x)$, $u_1(x)$, $u_2(x)$ предполагаем заданными. Неизвестной каждый раз является пара функции $u(x,t)$ и $g(x)$. Для уравнения Пуассона (3.2) разделение условий на «краевые», «начальные» и «финальное» представляется, конечно, немного искусственным, и весь набор (3.4)–(3.6) можно интерпретировать как одну общую комбинацию краевых условий.

**Случай 1.** Рассмотрим уравнение вынужденных колебаний струны (3.1) с условиями (3.4)–(3.6). На отрезке $[\,0, l\,]$ собственные значения оператора $A = d^2/dx^2$ с краевыми условиями первого рода (см. (3.4)) имеют вид

$$\mu_m^{(1)} = -\frac{m^2\pi^2}{l^2}, \qquad m \in \mathbb{N}, \tag{3.7}$$

т. е. $e_m''(x) = \mu_m^{(1)}\, e_m(x)$ с собственными функциями $e_m(x) = \sin(m\pi x/l)$.

В случае рационального отношения $T/l$ множества чисел (2.15) и (3.7) будут пересекаться, и среди чисел $\lambda_k$ вида (2.15) обязательно найдутся собственные значения оператора $A$. Соответственно, по теореме 2.2, в поставленной обратной задаче (3.1), (3.4)–(3.6) нет свойства единственности решения.

Поясним подробнее. Пусть $T/l = p/q$, где $p/q$ — несократимая рациональная дробь. Возникает связь $k/m = p/q$, при которой числа из множества (2.15) попадают в множество (3.7). Полагая $k = np$, $m = nq$ с параметром $n \in \mathbb{N}$ и учитывая, что $q/l = p/T$, получаем нужные собственные значения

$$\mu_m^{(1)} = \mu_{nq}^{(1)} = -\left(\frac{nq\pi}{l}\right)^2 = -\left(\frac{np\pi}{T}\right)^2 = \lambda_{np} = \lambda_k$$

с соответствующими собственными функциями

$$e_m(x) = e_{nq}(x) = \sin\frac{nq\pi x}{l} = \sin\frac{np\pi x}{T} = f_{np}(x) = f_k(x).$$

Применяя теперь формулу (2.14), имеем бесконечный набор элементарных решений

$$u_{np}(x,t) = \frac{T^2}{n^2p^2\pi^2}\left(1 - \cos\frac{np\pi t}{T}\right)\sin\frac{np\pi x}{T}, \qquad g_{np}(x) = \sin\frac{np\pi x}{T}, \qquad n \in \mathbb{N},$$

удовлетворяющих однородной обратной задаче (3.1), (3.4)–(3.6) при выборе однородных условий $u_0(x) \equiv 0$, $u_1(x) \equiv 0$, $u_2(x) \equiv 0$. Единственность решения обратной задачи, тем самым, нарушается.

Если же отношение $T/l$ иррационально, то множества чисел (2.15) и (3.7) не пересекаются, и ни одно из чисел (2.15) не является собственным значением оператора $A$. Но тогда, по теореме 2.2, задача (3.1), (3.4)–(3.6) при любом выборе данных $u_0(x)$, $u_1(x)$, $u_2(x)$ имеет не более одного решения $(u(x,t),\, g(x))$.

Как видим, ситуация подобна той, что обычно встречается в задачах Дирихле для уравнений гиперболического типа (см. [48, 82]; см. также [16, с. 140–143] и [40, с. 1619–1620]).

**Случай 2.** Рассмотрим теперь уравнение Пуассона (3.2) с условиями (3.4)–(3.6). На отрезке $[\,0,l\,]$ собственные значения оператора $A=-d^2/dx^2$ с краевыми условиями первого рода (см. (3.4)) имеют вид

$$\mu_m^{(2)}=\frac{m^2\pi^2}{l^2},\qquad m\in\mathbb{N},\tag{3.8}$$

т. е. $(-e_m''(x))=\mu_m^{(2)}\,e_m(x)$ с собственными функциями $e_m(x)=\sin\,(m\pi x/l)$.

Ни одно из чисел (3.8) не попадает на луч $(\,-\infty,0\,)$. Следовательно, по теореме 2.3, обратная задача (3.2), (3.4)–(3.6) всегда имеет не более одного решения.

**Случай 3.** Рассмотрим уравнение (3.3) с теми же условиями (3.4)–(3.6). На отрезке $[\,0,l\,]$ собственные значения оператора $A=i\,d^2/dx^2$ с краевыми условиями первого рода (см. (3.4)) имеют вид

$$\mu_m^{(3)}=-\,i\,\frac{m^2\pi^2}{l^2},\qquad m\in\mathbb{N},\tag{3.9}$$

т. е. $i\,e_m''(x)=\mu_m^{(3)}\,e_m(x)$ с прежними собственными функциями $e_m(x)=\sin\,(m\pi x/l)$.

Подобно случаю 2, ни одно число (3.9) не попадает на луч $(\,-\infty,0\,)$, и по теореме 2.3 обратная задача (3.3)–(3.6) всегда имеет не более одного решения.

**3.2. Уравнение Пуассона в цилиндрической области.** Рассмотрим дифференциальное уравнение

$$u_{xx}(x,y,z)+u_{yy}(x,y,z)+u_{zz}(x,y,z)=-g(x,y),\qquad (x,y)\in\Omega,\quad 0<z<h,\tag{3.10}$$

с неизвестной функцией $g(x,y)$. Здесь $\Omega$ — ограниченная выпуклая область в $\mathbb{R}^2_{(x,y)}$ с гладкой (или кусочно гладкой) границей $\partial\Omega$. Число $h>0$ считаем фиксированным.

Для одновременного нахождения пары $\big\{\,u(x,y,z),\ g(x,y)\,\big\}$ возьмем набор краевых условий

$$u(x,y,z)\,|_{\partial\Omega}=\mu(x,y,z),\qquad (x,y)\in\partial\Omega,\quad 0<z<h,\tag{3.11}$$

$$u(x,y,0)=u_0(x,y),\qquad u_z(x,y,0)=u_1(x,y),\tag{3.12}$$

$$u_z(x,y,h)=u_2(x,y).\tag{3.13}$$

Функции $u_0(x,y)$, $u_1(x,y)$, $u_2(x,y)$ заданы при $(x,y)\in\Omega$.

Если трактовать уравнение (3.10) как уравнение стационарной теплопроводности, то $u(x,y,z)$ — неизвестная температура внутри области $\Omega\times(0,h)$, $g(x,y)$ — плотность стационарных источников тепла, не зависящая от координаты $z$, функции $\mu(x,y,z)$ и $u_0(x,y)$ выражают граничные значения температуры, а функции $u_1(x,y)$ и $u_2(x,y)$ — это соответствующие температурные градиенты.

Похожие обратные задачи для эллиптических уравнений рассматривались, например, в работах [40, 44, 50]. Новым моментом является использование в (3.13) краевого условия второго рода, а не первого, как часто было раньше.

Обратная задача (3.11)–(3.13) рассмотрена автором в работе [3]. Основываясь на [3], изложим следующий материал.

Для исследования о единственности решения в обратной задаче (3.10)–(3.13), представим дифференциальное уравнение (3.10) в виде

$$u_{zz}(x,y,z) = -\,\Delta\, u(x,y,z) - g(x,y), \qquad (x,y)\in\Omega, \quad 0<z<h,$$

где $\Delta = \partial^2/\partial x^2 + \partial^2/\partial y^2$ — оператор Лапласа. Составим спектральную задачу

$$\begin{cases} \Delta\, u(x,y) + \lambda\, u(x,y) = 0, \quad (x,y)\in\Omega, \\ u(x,y)\,|_{\partial\Omega} = 0 \end{cases} \tag{3.14}$$

со спектральным параметром $\lambda\in\mathbb{C}$. Задаче (3.14) отвечает оператор

$$A = -\Delta = -(\,\partial^2/\partial x^2 + \partial^2/\partial y^2\,) \tag{3.15}$$

в пространстве $L_2(\Omega)$ на области определения $D(A) = \{\,u\in H^2(\Omega):\; u(x,y)\,|_{\partial\Omega} = 0\,\}$.

Как известно, в задаче (3.14) все собственные значения являются вещественными и неотрицательными. Следовательно, у оператора $A$ из (3.15) нет собственных значений на луче $(\,-\infty,0\,)$. Тогда, по теореме 2.3, обратная задача для уравнения (3.10) с однородными краевыми условиями (3.11)–(3.13) имеет только тривиальное решение $u(x,y,z)\equiv 0$, $g(x,y)=0$. Сформулируем следующий результат.

**Теорема 3.1.** *Пусть при некотором выборе функций* $\mu$, $u_0$, $u_1$, $u_2$ *обратная задача* (3.10)–(3.13) *имеет два решения*

$$\big\{u^{(1)}(x,y,z),\, g^{(1)}(x,y)\big\},\;\; \big\{u^{(2)}(x,y,z),\, g^{(2)}(x,y)\big\},$$

*таких, что их разность*

$$u(x,y,z)\equiv u^{(1)}(x,y,z) - u^{(2)}(x,y,z), \;\; g(x,y)\equiv g^{(1)}(x,y) - g^{(2)}(x,y),$$

*удовлетворяет условиям*

$$u\in C^2(\,(\,0,h\,),\,L_2(\Omega)\,)\cap C^1(\,[\,0,h\,],\,L_2(\Omega)\,),$$

$$u(\,\cdot\,,\,\cdot\,,z)\in H^2(\Omega)\cap H_0^1(\Omega) \quad \text{при всех} \quad z\in(\,0,h\,),$$

$$g\in L_2(\Omega),$$

*и является решением обратной задачи для уравнения* (3.10) *с однородным краевыми условиями* (3.11)–(3.13). *Тогда* $u^{(1)}(x,y,z) = u^{(2)}(x,y,z)$ *п. в. в цилиндре* $\Omega\times(\,0,h\,)$ *и* $g^{(1)}(x,y) = g^{(2)}(x,y)$ *п. в. в области* $\Omega$.

**Доказательство.** Предыдущие рассуждения данного пункта дают полное обоснование теоремы 3.1. □

Соображения «самосопряженности» при этом не используются, что позволяет легко перенести теорему единственности 3.1 в пространства типа $L^p$ произвольным $p \in (1, \infty)$. Отметим, что задача (3.10)–(3.13) представляет определенный интерес для геофизики в связи с вопросом о нахождении радиоактивных источников тепла в земной коре [53].

Итак, для модельной обратной задачи (1.1)–(1.3), в настоящей главе, получен полный ответ на поставленный вопрос о единственности решения и критерий установлен. В заключение, отметим что было бы полезно также продолжать исследование о разрешимости обратной задачи (1.1)–(1.3).

# Глава 2.

# Обратная задача для дифференциального уравнения второго порядка с финальным переопределением третьего рода

В настоящей главе продолжаем изучать модельную обратную задачу, рассматриваемую в главе 1, для эволюционного дифференциального уравнения второго порядка

$$u''(t) = Au(t) + g$$

со стандартными условиями Коши в начальный момент времени. Стационарное неоднородное слагаемое $g$, по прежнему, считается неизвестным. Но, в отличии от первой главы, в силу дополнительного условия задается *финальное переопределение третьего рода*, содержащее комбинацию значений эволюционной функции и ее производной в некий финальный момент времени. Для изучаемой задачи показано, что вопрос единственности решения можно исследовать также при минимальных требованиях к оператору $A$, предполагая лишь, что $A$ — линейный и замкнутый в банаховом пространстве $E$.

## § 4. Постановка задачи

Пусть $E$ — комплексное банахово пространство и $A$ — линейный замкнутый оператор в $E$ с областью определения $D(A) \subset E$ (не обязательно плотной в $E$). Зафиксируем вещественное число $T > 0$. На интервале $(0, T)$ рассмотрим абстрактное дифференциальное уравнение второго порядка

$$u''(t) = Au(t) + g, \qquad 0 < t < T, \tag{4.1}$$

с неизвестным элементом $g \in E$.

Для одновременного нахождения функции $u\colon [0, T] \to E$ и элемента $g$ добавим условия Коши

$$u(0) = u_0, \qquad u'(0) = u_1 \tag{4.2}$$

и специальное финальное условие

$$\alpha u(T) + \beta u'(T) = u_2. \tag{4.3}$$

Элементы $u_0$, $u_1$, $u_2 \in E$ и числовые значения $\alpha, \beta \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ считаем заданными.

Условие (4.3) будем называть *финальным переопределением третьего рода*. Задача (4.1)–(4.3) относится к классу *обратных задач* (см. [16, 109]). Модельная форма (4.1)–(4.3), простая по виду, но общая по характеру, позволяет охватить единым методом широкий круг примеров из математической физики. Главное, чтобы изучаемое дифференциальное уравнение имело второй порядок по выделенной переменной $t$, неформально полагаемой *временем*. Для поставленной задачи (4.1)–(4.3) установим критерий единственности решения без ограничений на оператор $A$, кроме отмеченных *линейности* и *замкнутости*. Поясним только понятие решения.

Пару $(u(t), g)$ назовем *ослабленным решением* обратной задачи (4.1)–(4.3), если

$$u \in C^2((0, T), E) \cap C^1([0, T], E), \quad u(t) \in D(A) \ \text{ при } \ 0 < t < T, \quad g \in E, \tag{4.4}$$

и все соотношения (4.1)–(4.3) выполнены. При этом $Au \in C((0, T), E)$.

Повышая требования, будем считать ослабленное решение $(u(t), g)$ *классическим*, если

$$u \in C^2([0, T], E), \qquad u(t) \in D(A) \ \text{ при } \ 0 \leqslant t \leqslant T, \qquad g \in E. \tag{4.5}$$

При этом уравнение (4.1) должно выполняться на отрезке $[0, T]$, а в соотношениях (4.2) для согласования условий естественно выбирать элемент $u_0$ из $D(A)$.

В основном мы будем рассматривать именно ослабленные решения (4.4), называя их далее просто *решениями*. Тогда, установив критерий единственности для ослабленных решений (4.4), получим результат, пригодный и для классических решений (4.5).

По-видимому, поставленная обратная задача еще не изучена с должной подробностью. Нам известны лишь частные результаты [109, п. 8.3], где для уравнений «эллиптического типа» с позитивным оператором $A$ (в смысле П. Е. Соболевского, см. [28, с. 275]) обсуждался аналог обратной задачи (4.1)–(4.3) со значениями $\alpha$, $\beta \in \mathbb{R}$, $\alpha^2 + \beta^2 \neq 0$.

Для полной картины о задаче (4.1)–(4.3), отметим, что специальный случай $\alpha \neq 0$, $\beta = 0$ (*финальное переопределение первого рода*) рассмотрен в [70] и результат получен, а для случая $\alpha = 0$, $\beta \neq 0$ (*финальное переопределение второго рода*) посвящена первая глава настоящей диссертации (см. также [1]). Поэтому далее, без ограничения общности, ограничимся предположением $\alpha \neq 0$, $\beta \neq 0$, как и было указано при постановке задачи. Точнее, постановка задачи (4.1)–(4.3) зависит от трех числовых параметров $\alpha$, $\beta \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ и $T > 0$. Как мы увидим в дальнейшем, картина с единственностью решения фактически обусловлена одним «безразмерным» параметром $p \equiv 2\beta/(\alpha T)$.

Обратная задача (4.1)–(4.3) изучалась автором в [65] (и в работах [4, 5, 6, 7, 8, 63, 64, 66, 67, 68], см. также [112]). Основываясь на упомянутых работах, изложим подробный материал.

Использовав методику работы [70] и некоторые факты из теории целых функций, установим универсальный критерий единственности решения для обратной задачи (4.1)–(4.3), действующий без ограничений на тип дифференциального уравнения (4.1).

# § 5. Критерий единственности решения

Допустим, что обратная задача (4.1)–(4.3) с некоторыми элементами $u_0$, $u_1$, $u_2 \in E$ разрешима. Поставим вопрос о единственности ее ослабленного решения. Это сводится к вопросу об отсутствии нетривиальных решений у однородной обратной задачи (аналогично как в параграфе 1). Поищем нетривиальные элементарные решения однородной обратной задачи.

**5.1. Элементарные решения однородной обратной задачи.** Дифференциальное уравнение (4.1) с условиями

$$u(0) = 0, \quad u'(0) = 0, \quad \alpha u(T) + \beta u'(T) = 0 \tag{5.1}$$

назовем *однородной обратной задачей*. Как обычно, *тривиальным решением* однородной задачи (4.1), (5.1) считаем пару

$$u(t) \equiv 0, \quad g = 0. \tag{5.2}$$

Все другие решения задачи (4.1), (5.1) (если они есть) называем тогда *нетривиальными*[1].

Укажем простой способ, позволяющий строить нетривиальные решения однородной обратной задачи (4.1), (5.1). Рассмотрим ее «операционный аналог», состоящий из скалярной задачи Коши

$$y''_{tt}(t,\lambda) = \lambda y(t,\lambda) + 1, \quad 0 \leqslant t \leqslant T, \tag{5.3}$$

$$y(0,\lambda) = 0, \quad y'_t(0,\lambda) = 0 \tag{5.4}$$

и финального условия

$$\alpha y(T,\lambda) + \beta y'_t(T,\lambda) = 0. \tag{5.5}$$

Здесь $\lambda$ — спектральный параметр. Требуется найти значения $\lambda \in \mathbb{C}$, при которых в скалярной задаче (5.3)–(5.5) существуют решения $y \in C^2[\,0,T\,]$.

Нетрудно понять, что каждому такому $\lambda$ отвечает лишь одно возможное решение $y(t)$ (причем последнее не будет тождественным нулем). Этим спектральная задача (5.3)–(5.5) отличается от привычных спектральных задач типа Штурма–Лиувилля, где есть естественное свойство линейности, и собственные функции можно умножать на ненулевые константы.

Анализ спектральной задачи (5.3)–(5.5) не сложен. Решение задачи Коши (5.3), (5.4) может быть записано в виде

$$y(t,\lambda) = \frac{\operatorname{ch}\sqrt{\lambda}\,t - 1}{\lambda} \qquad [\, y(t,0) = t^2/2 \,]\,. \tag{5.6}$$

При этом

$$y'_t(t,\lambda) = \frac{\operatorname{sh}\sqrt{\lambda}\,t}{\sqrt{\lambda}} \qquad [\, y'_t(t,0) = t \,]\,. \tag{5.7}$$

Последующая подстановка выражений (5.6), (5.7) в финальное условие (5.5) дает уравнение

$$\alpha\,\frac{\operatorname{ch}\sqrt{\lambda}\,T - 1}{\lambda} + \beta\,\frac{\operatorname{sh}\sqrt{\lambda}\,T}{\sqrt{\lambda}} = 0. \tag{5.8}$$

Именно корни $\lambda \in \mathbb{C}$ уравнения (5.8) служат спектральными значениями задачи (5.3)–(5.5).

---

[1] Ясно, что у таких нетривиальных решений $(u(t), g)$ функция $u(t)$ не должна обращаться в тождественный нуль на $[\,0,T\,]$, в то время как возможность $g = 0$ изначально исключать нельзя. Эта возможность действительно реализуется в некоторых специальных ситуациях, когда собственные значения оператора $A$ заполняют всю комплексную плоскость, и не реализуется, если хотя бы одна точка из $\mathbb{C}$ не является собственным значением оператора $A$ (подробнее см. [54]).

Поясним одно обстоятельство. Функции (5.6), (5.7) представимы степенными рядами

$$\frac{\operatorname{ch}\sqrt{\lambda}\,t - 1}{\lambda} = \frac{t^2}{2!} + \lambda\,\frac{t^4}{4!} + \lambda^2\,\frac{t^6}{6!} + \ldots + \lambda^n\,\frac{t^{2n+2}}{(2n+2)!} + \ldots\,, \tag{5.9}$$

$$\frac{\operatorname{sh}\sqrt{\lambda}\,t}{\sqrt{\lambda}} = \frac{t}{1!} + \lambda\,\frac{t^3}{3!} + \lambda^2\,\frac{t^5}{5!} + \ldots + \lambda^n\,\frac{t^{2n+1}}{(2n+1)!} + \ldots\,, \tag{5.10}$$

т. е. они являются *целыми* как по переменной $t$, так и по параметру $\lambda$. Тем самым, никакой «многозначности», связанной с присутствием $\sqrt{\lambda}$, в формулах (5.6)–(5.8) не возникает. Отметим также связь разложений (5.9), (5.10) с теорией так называемых *обобщенных экспонент* и теорией функций *типа Миттаг-Леффлера* (подробнее см. [62]; см. также [42, с. 33]).

Для последующего использования удобно ввести целые функции[2]

$$L_1(\lambda) = L_1(\lambda;\,T) \equiv \frac{\operatorname{ch}\sqrt{\lambda}\,T - 1}{\lambda}, \qquad L_2(\lambda) = L_2(\lambda;\,T) \equiv \frac{\operatorname{sh}\sqrt{\lambda}\,T}{\sqrt{\lambda}} \tag{5.11}$$

переменной $\lambda \in \mathbb{C}$. Составим из функций (5.11) следующую *характеристическую функцию* изучаемой обратной задачи

$$L(\lambda) = L(\lambda;\,T,\,\alpha,\,\beta) \equiv \alpha\,L_1(\lambda) + \beta\,L_2(\lambda), \qquad \lambda \in \mathbb{C}. \tag{5.12}$$

Здесь числа $\alpha, \beta$ те же, что в условии (4.3) (а также в последнем из соотношений (5.1) и в формуле (5.5)). Нули функции (5.12) совпадают с корнями уравнения (5.8) и со спектральными значениями $\lambda$ скалярной задачи (5.3)–(5.5).

Поскольку $L(\lambda)$ есть целая функция нецелого порядка $\rho = 1/2$, то множество нулей

$$\Lambda = \Lambda(T,\,\alpha,\,\beta) \equiv \{\,\lambda \in \mathbb{C}\colon\; L(\lambda) = 0\,\} \tag{5.13}$$

должно быть бесконечным (см. [32, с. 38–41]). Ясно, что это счетное множество с единственной предельной точкой на бесконечности. Структура множества $\Lambda$ и вопрос о правильной индексации нулей будут рассмотрены отдельно, в параграфе 7 ниже. Там, в частности, отмечено, что нули функции (5.12) являются, как правило, простыми, и особых проблем с кратностью точек в множестве (5.13) не возникает.

[2]Это элементарные целые функции порядка $\rho = 1/2$ по переменной $\lambda \in \mathbb{C}$. Все необходимые сведения из теории целых функций см. в [32, 33].

Выберем фиксированное значение $\lambda$ из множества (5.13), обозначив его временно через $a$. Поскольку это некоторый нуль функции $L(\lambda)$ и, автоматически, спектральное значение скалярной задачи (5.3)–(5.5), то при $\lambda = a$ задача (5.3)–(5.5) имеет решение

$$y(t,a) = \frac{\operatorname{ch}\sqrt{a}\,t - 1}{a} \equiv \frac{t^2}{2!} + a\,\frac{t^4}{4!} + \ \ldots \ + a^n\,\frac{t^{2n+2}}{(2n+2)!} + \ \ldots\ , \quad 0 \leqslant t \leqslant T.$$

Допустим, что то же число $\lambda = a \in \Lambda$ оказалось собственным значением оператора $A$ из уравнения (4.1), т. е. $Af = af$ с собственным вектором $f \in D(A)$, $f \neq 0$. Тогда пара

$$u(t) = y(t,a)f = \frac{\operatorname{ch}\sqrt{a}\,t - 1}{a}\,f, \qquad g = f \tag{5.14}$$

удовлетворяет всем соотношениям (4.1), (5.1), образуя нетривиальное решение этой задачи. Такие решения (если они есть) будем называть *элементарными решениями* однородной обратной задачи (4.1), (5.1). Зафиксируем точное утверждение.

**Лемма 5.1.** *Пусть некоторый нуль $\lambda = a$ характеристической функции* (5.12) *является собственным значением оператора $A$ с собственным вектором $f \in D(A)$, $f \neq 0$. Тогда однородная обратная задача* (4.1), (5.1) *имеет нетривиальное элементарное решение вида* (5.14). *Точнее, подобных решений будет бесконечно много, так как собственный вектор $f$ можно умножать на любую ненулевую константу.*

Лемма 5.1 проверяется непосредственно. Понятно, что в ее условиях единственность решения обратной задачи будет нарушаться, ибо в однородной версии (4.1), (5.1) появятся нетривиальные решения вида (5.14). Эти решения оказываются даже классическими, так как для них требования (4.5) очевидно выполнены и уравнение (4.1) действует на всем отрезке $[\,0, T\,]$.

**Замечание 5.1.** *Лемма* 5.1 *является универсальной формулировкой для обратной задачи* (4.1), (5.1) *с любым набором из параметров $\alpha$, $\beta \in \mathbb{C}$, $|\alpha| + |\beta| > 0$, $T > 0$.*

Замечание 5.1. получается соединением к лемме 5.1 подобные результаты для специальных случаев $\alpha \neq 0$, $\beta = 0$ из работы [70], и $\alpha = 0$, $\beta \neq 0$ из леммы 2.1, с учетом, из параграфа 7 ниже, множества нулей (7.1) и множества нулей (7.2) характеристических целых функций $L(\lambda) = L_1(\lambda)$ и $L(\lambda) = L_2(\lambda)$, соответственно, определенных в (5.11) (сравните полученные элементарные решения для специальных случаев с формулами (12.20) и (12.21) в параграфе 12 ниже).

Итак, для единственности решения в обратной задаче *необходимо*, чтобы ни один нуль характеристической функции $L(\lambda)$ из формулы (5.12) не совпадал с собственным значением оператора $A$. Наработанный прежде опыт (см. [1, 70]) подсказывает, что такое условие может быть еще и *достаточным*, и результат — критерий единственности решения — не исключен в максимальной общности. Эта гипотеза оказывается верной.

**5.2. Формулировка Критерия единственности решения.** Рассмотрим задачу (4.1)–(4.3) в исходных предположениях из параграфа 4.

**Теорема 5.1.** *Пусть $A$ — линейный замкнутый оператор в $E$. Предположим, что при некоторых $u_0$, $u_1$, $u_2 \in E$ обратная задача* (4.1)–(4.3) *имеет ослабленное решение $(u(t), g)$. Для того чтобы это решение было единственным необходимо и достаточно, чтобы ни один нуль характеристической функции* (5.12) *не являлся собственным значением оператора $A$.*

При $u_0 = u_1 = u_2 = 0$ теорема 5.1 приобретает следующий специальный вид.

**Теорема 5.2.** *Пусть $A$ — линейный замкнутый оператор в $E$. Для того чтобы однородная обратная задача* (4.1), (5.1) *имела только тривиальное ослабленное решение* (5.2) *и не имела других ослабленных решений необходимо и достаточно, чтобы ни один нуль характеристической функции* (5.12) *не являлся собственным значением оператора $A$.*

**Замечание 5.2.** *Теоремы* 5.1 *и* 5.2 *являются универсальными для обратной задачи* (4.1), (5.1) *с любым набором параметров $\alpha$, $\beta \in \mathbb{C}$, $|\alpha| + |\beta| > 0$, $T > 0$.*

Замечание 5.2. получается соединением к теоремам 5.1 и 5.2 подобные результаты для специальных случаев $\alpha \neq 0$, $\beta = 0$ из работы [70] (см. также теоремы 11.3 и 12.3, соответственно), и $\alpha = 0$, $\beta \neq 0$ из теорем 2.2 и 2.1, соответственно (сравните также с теоремами 11.4 и 12.4, соответственно), с учетом, из параграфа 7 ниже, множества нулей (7.1) и множества нулей (7.2) характеристических целых функций $L(\lambda) = L_1(\lambda)$ и $L(\lambda) = L_2(\lambda)$, соответственно, определенных в (5.11).

Доказательства теорем 5.1, 5.2 будем обсуждать в следующем параграфе.

# § 6. Доказательство критерия единственности

Ввиду очевидной линейности изучаемой обратной задачи теоремы 5.1 и 5.2 эквивалентны, и можно ограничиться доказательством только теоремы 5.2. При этом *необходимость* в ней сразу получается ссылкой на лемму 5.1 и элементарные решения вида (5.14). Итак, зафиксируем логику: нужный критерий будет установлен, если обосновать *достаточность* условия из теоремы 5.2 для единственности решения однородной обратной задачи (4.1), (5.1).

Последующее довольно объемное доказательство существенно использует соображения из теории целых функций. Чтобы не прерывать потом изложение, удобно сразу обсудить несколько технических фактов, связанных с функциями $L_1(\lambda)$, $L_2(\lambda)$ из (5.11) и с образованной из них характеристической функцией $L(\lambda)$ вида (5.12).

**6.1. Элементарные целые функции и их поведение на мнимой оси.** Рассматриваем целые функции $L_1(\lambda)$, $L_2(\lambda)$ из формулы (5.11). Нам нужно охарактеризовать их поведение на мнимой оси. Заметим, что обе эти функции являются *вещественными* в том смысле, что их тейлоровские разложения по переменной $\lambda$ содержат только вещественные коэффициенты (см. формулы (5.9), (5.10), взятые при $t = T > 0$ ). Поэтому для каждой из функций значения в комплексно сопряженных точках плоскости будут комплексно сопряжены. Как следствие имеем

$$|L_1(+i\tau)| = |L_1(-i\tau)| \quad \text{и} \quad |L_2(+i\tau)| = |L_2(-i\tau)|$$

в симметричных точках $\pm i\tau$ на мнимой оси. Здесь и всюду далее обозначаем через $i$ мнимую единицу.

Введем характеристики

$$V_1(\tau) \equiv |L_1(i\tau)|, \qquad V_2(\tau) \equiv |L_2(i\tau)|, \tag{6.1}$$

зависящие от переменной $\tau \in \mathbb{R}$ или, точнее, от $|\tau| \geqslant 0$.

Прямой подсчет показывает, что

$$V_1(\tau) \equiv \left| \frac{\operatorname{ch}\big(\sqrt{i\tau}\,T\big) - 1}{i\tau} \right| = \frac{\operatorname{ch}\big(\sqrt{|\tau|/2}\,T\big) \,-\, \cos\big(\sqrt{|\tau|/2}\,T\big)}{|\tau|}\,, \tag{6.2}$$

$$V_2(\tau) \equiv \left| \frac{\operatorname{sh}\big(\sqrt{i\tau}\,T\big)}{\sqrt{i\tau}} \right| = \sqrt{\frac{\operatorname{ch}^2\big(\sqrt{|\tau|/2}\,T\big) \,-\, \cos^2\big(\sqrt{|\tau|/2}\,T\big)}{|\tau|}}\,. \tag{6.3}$$

Затем, использовав формулы $\operatorname{ch}^2 a = (1+\operatorname{ch} 2a)/2$ и $\cos^2 a = (1+\cos 2a)/2$ , заметим связь

$$V_2(\tau) = \sqrt{\frac{\operatorname{ch}\big(\sqrt{2|\tau|}\,T\big) \,-\, \cos\big(\sqrt{2|\tau|}\,T\big)}{2|\tau|}} = \sqrt{2V_1(4\tau)}\,. \tag{6.4}$$

Отметим также степенное разложение

$$V_1(\tau) \;=\; \frac{T^2}{2!} \,+\, \frac{\tau^2}{2^2}\,\frac{T^6}{6!} \,+\, \frac{\tau^4}{2^4}\,\frac{T^{10}}{10!} + \,\ldots\, = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\tau^{2n}}{2^{2n}}\,\frac{T^{4n+2}}{(4n+2)!}\,, \quad \tau^{2n} = |\tau|^{2n}, \tag{6.5}$$

элементарно получаемое из (6.2). Перечисленные соотношения дают такой результат.

**Лемма 6.1.** *Пусть функции* $L_1(\lambda)$, $L_2(\lambda)$ *определены по формулам* (5.11). *Тогда их характеристики* $V_1(\tau)$, $V_2(\tau)$ *вида* (6.1) *являются строго положительными при* $\tau \in \mathbb{R}$ *и строго возрастающими при возрастании* $|\tau| \geqslant 0$. *При* $|\tau| \to \infty$ *верны асимптотики*

$$V_1(\tau) \sim \frac{\operatorname{ch}\left(\sqrt{|\tau|/2}\,T\right)}{|\tau|}, \qquad V_2(\tau) \sim \frac{\operatorname{ch}\left(\sqrt{|\tau|/2}\,T\right)}{|\tau|^{1/2}}, \tag{6.6}$$

*откуда* $V_1(\tau) = o(V_2(\tau))$ *при* $|\tau| \to \infty$.

**Доказательство.** То, что функция $V_1(\tau)$ строго положительна при $\tau \in \mathbb{R}$ и строго возрастает при возрастании $|\tau|$, очевидно следует из формулы (6.5). Затем, глядя на формулу (6.4), делаем аналогичные выводы относительно $V_2(\tau)$. И, наконец, асимптотики (6.6), действующие при $|\tau| \to \infty$ вместе с соотношением $V_1(\tau) = o(V_2(\tau))$, без труда выводятся из явных представлений (6.2), (6.3). □

Обратимся теперь к характеристической функции $L(\lambda) = \alpha\, L_1(\lambda) + \beta\, L_2(\lambda)$, построенной по правилу (5.12) с фиксированными значениями $\alpha, \beta \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$. По аналогии с (6.1) введем величину

$$V(\tau) \equiv |L(i\tau)| = |\alpha\, L_1(i\tau) + \beta\, L_2(i\tau)|, \quad \tau \in \mathbb{R}. \tag{6.7}$$

Так как коэффициенты $\alpha, \beta$ могут быть невещественными, то утверждать, что функция $V(\tau)$ зависит лишь от $|\tau|$ здесь уже, конечно, нельзя. Кроме того, неотрицательная функция $V(\tau)$ уже не обязательно строго положительна при $\tau \in \mathbb{R}$ (ибо какие-то нули функции $L(\lambda)$ могут оказаться на мнимой оси). Но поведение $V(\tau)$ при $|\tau| \to \infty$ легко охарактеризовать.

Действительно, имеем оценку сверху

$$V(\tau) = |\alpha\, L_1(i\tau) + \beta\, L_2(i\tau)| \leqslant |\alpha|\,|L_1(i\tau)| + |\beta|\,|L_2(i\tau)| = |\alpha| V_1(\tau) + |\beta| V_2(\tau), \quad \tau \in \mathbb{R},$$

и соответствующую оценку снизу

$$V(\tau) = |\alpha\, L_1(i\tau) + \beta\, L_2(i\tau)| \geqslant |\beta|\,|L_2(i\tau)| - |\alpha|\,|L_1(i\tau)| = |\beta| V_2(\tau) - |\alpha| V_1(\tau), \quad \tau \in \mathbb{R}.$$

Отсюда получаем, что

$$1 - \frac{|\alpha| V_1(\tau)}{|\beta| V_2(\tau)} \leqslant \frac{V(\tau)}{|\beta| V_2(\tau)} \leqslant 1 + \frac{|\alpha| V_1(\tau)}{|\beta| V_2(\tau)}, \quad \tau \in \mathbb{R}, \tag{6.8}$$

где $V_1(\tau) = o(V_2(\tau))$ при $|\tau| \to \infty$ согласно лемме 6.1. Поэтому, переходя к пределу в (6.8) и используя вторую асимптотику (6.6), замечаем, что

$$\begin{aligned} V(\tau) \equiv |L(i\tau)| = |\alpha\, L_1(i\tau) + \beta\, L_2(i\tau)| \sim |\beta| V_2(\tau) \ = \\ = |\beta|\,|L_2(i\tau)| \sim |\beta|\, \frac{\operatorname{ch}\left(\sqrt{|\tau|/2}\,T\right)}{|\tau|^{1/2}} \end{aligned} \tag{6.9}$$

при $|\tau| \to \infty$. Зафиксируем нужный результат в следующей форме.

**Лемма 6.2.** *Пусть функции* $L_1(\lambda)$, $L_2(\lambda)$ *определены по формулам* (5.11) *и неотрицательная величина* $V(\tau)$ *определена по формуле* (6.7) *с фиксированными значениями* $\alpha, \beta \in \mathbb{C}\setminus\{0\}$. *Тогда* $V(\tau)$ *строго положительна при достаточно больших* $|\tau| > 0$ *и верно соотношение*

$$\lim_{|\tau|\to\infty} \frac{|\alpha|V_1(\tau) + |\beta|V_2(\tau)}{V(\tau)} = \lim_{|\tau|\to\infty} \frac{|\alpha||L_1(i\tau)| + |\beta||L_2(i\tau)|}{|\alpha\, L_1(i\tau) + \beta\, L_2(i\tau)|} = 1. \tag{6.10}$$

**Доказательство.** Строгая положительность $V(\tau)$ при достаточно больших $|\tau| > 0$ следует из асимптотики (6.9). Для вычисления предела (6.10) достаточно заметить, что числитель и знаменатель фигурирующей там дроби образуют величины, эквивалентные при $|\tau| \to \infty$ (см. асимптотические формулы (6.6) и (6.9)). □

Соотношение (6.10) играет важную роль в дальнейшем. Вернемся теперь к обратной задаче.

**6.2. Начало доказательства: операторное тождество.** Критерий единственности решения доказываем в форме теоремы 5.2. Напомним, что в силу леммы 5.1 осталось установить *достаточность* условия из этого критерия.

Итак, предположим, что ни один нуль характеристической функции (5.12) не является собственным значением оператора $A$. Возьмем произвольное ослабленное решение $(u(t), g)$ однородной обратной задачи (4.1), (5.1) и покажем, что $u(t) \equiv 0$ на $[\,0, T\,]$ и $g = 0$, т. е. что решение может быть только тривиальным.

Для реализации нашего плана потребуется ряд вспомогательных функций. Их построение должно быть согласовано с изучаемой задачей (4.1), (5.1). Это означает, что функции должны зависеть от выбора значений $\alpha, \beta \in \mathbb{C}\setminus\{0\}$. Поскольку в конкретной ситуации такие значения можно считать фиксированными, мы не указываем на $\alpha, \beta$ в используемых далее обозначениях. Другими словами, вместо $Y(t,\lambda;\alpha,\beta)$ или $Z(t,\lambda;\alpha,\beta)$ пишем просто $Y(t,\lambda)$, $Z(t,\lambda)$ и т. п. Аналогично всюду в доказательстве считаем фиксированным значение $T > 0$.

Начнем с того, что, комбинируя выражения (5.6) и (5.7), составим функцию

$$Y(t,\lambda) = \alpha\, \frac{\operatorname{ch}\sqrt{\lambda}\, t - 1}{\lambda} + \beta\, \frac{\operatorname{sh}\sqrt{\lambda}\, t}{\sqrt{\lambda}} \tag{6.11}$$

с аргументами $t \in [\,0, T\,]$ и $\lambda \in \mathbb{C}$. Отметим, что

$$Y(0,\lambda) \equiv 0, \qquad Y(T,\lambda) = L(\lambda), \qquad \lambda \in \mathbb{C}. \tag{6.12}$$

Первое соотношение в (6.12) очевидно следует из определения (6.11); второе получается сравнением с формулами (5.11), (5.12), задающими характеристическую функцию $L(\lambda)$.

Центральную роль в этом разделе играет даже не сама функция $Y(t,\lambda)$, а ее производная по переменной $t$. Введем обозначение

$$Z(t,\lambda) \equiv {Y_t}'(t,\lambda) = \alpha \, \frac{\operatorname{sh}\sqrt{\lambda}\, t}{\sqrt{\lambda}} + \beta \, \operatorname{ch}\sqrt{\lambda}\, t. \tag{6.13}$$

Продифференцировав дальше, получаем

$$Z_t'(t,\lambda) = \alpha \, \operatorname{ch}\sqrt{\lambda}\, t \, + \, \beta \sqrt{\lambda} \, \operatorname{sh}\sqrt{\lambda}\, t, \tag{6.14}$$

$$Z_{tt}''(t,\lambda) = \alpha\sqrt{\lambda} \, \operatorname{sh}\sqrt{\lambda}\, t \, + \, \beta\lambda \, \operatorname{ch}\sqrt{\lambda}\, t \, = \lambda \, Z(t,\lambda). \tag{6.15}$$

Выделим значения

$$Z(0,\lambda) = \beta, \qquad Z_t'(0,\lambda) = \alpha, \qquad \lambda \in \mathbb{C}. \tag{6.16}$$

Отметим также то, что все функции $Y(t,\lambda)$, $Z(t,\lambda)$, $Z_t'(t,\lambda)$, $Z_{tt}''(t,\lambda)$ являются целыми по переменным $t$ и $\lambda$, разложимыми в степенные ряды наподобие (5.9), (5.10).

Теперь, сочетая функцию $Z(t,\lambda)$ из формулы (6.13) и функцию $u(t)$ — первый компонент решения $(u(t),g)$, определим векторную целую функцию

$$f(\lambda) = \int_0^T Z(t,\lambda)\, u(T-t)\, dt, \qquad \lambda \in \mathbb{C}. \tag{6.17}$$

Поскольку поведение $u(t)$ вблизи границ отрезка $[\,0,T\,]$ может в определенном смысле «портиться» (см. условия (4.4)), возьмем малое $\varepsilon > 0$ и рассмотрим аппроксимацию

$$f_\varepsilon(\lambda) = \int\limits_\varepsilon^{T-\varepsilon} Z(t,\lambda)\, u(T-t)\, dt, \qquad \lambda \in \mathbb{C}. \tag{6.18}$$

Тогда

$$f_\varepsilon(\lambda) = \int\limits_\varepsilon^{T-\varepsilon} Z(t,\lambda)\, u(T-t)\, dt \;\to\; \int\limits_0^{T} Z(t,\lambda)\, u(T-t)\, dt = f(\lambda) \tag{6.19}$$

при $\varepsilon \to 0+0$ для любого фиксированного значения $\lambda \in \mathbb{C}$. В предельном переходе (6.19) используется, что $u \in C(\,[\,0,T\,],\, E\,)$ по определению ослабленного решения (4.4).

Напомним также, что $u(t) \in D(A)$ при $0 < t < T$ и $Au \in C(\,(0,T),\, E\,)$ с линейным замкнутым оператором $A$. Поэтому, согласно известным свойствам векторного интеграла Римана, получаем, что $f_\varepsilon(\lambda) \in D(A)$ для любого $\lambda \in \mathbb{C}$, и вычисление $Af_\varepsilon(\lambda)$ можно проводить внесением оператора $A$ под знак интеграла в (6.18) (см. [74, теорема 3.3.2]).

С учетом уравнения (4.1) имеем

$$Af_\varepsilon(\lambda) = \int\limits_\varepsilon^{T-\varepsilon} Z(t,\lambda)\, Au(T-t)\,dt \;=\; \int\limits_\varepsilon^{T-\varepsilon} Z(t,\lambda)\,u''(T-t)\,dt \;-\; g\int\limits_\varepsilon^{T-\varepsilon} Z(t,\lambda)\,dt. \quad (6.20)$$

Последний «скалярный» интеграл в (6.20) допускает предельный переход

$$\int\limits_\varepsilon^{T-\varepsilon} Z(t,\lambda)\,dt = \int\limits_\varepsilon^{T-\varepsilon} Y_t'(t,\lambda)\,dt = Y(T-\varepsilon,\lambda) - Y(\varepsilon,\lambda) \;\to\; L(\lambda) \quad (6.21)$$

при $\varepsilon \to 0+0$ для любого фиксированного $\lambda \in \mathbb{C}$. В выкладке (6.21) использована связь (6.13) вместе с соотношениями (6.12).

Предшествующий «нескалярный» интеграл в (6.20) обрабатывается чуть сложнее. Проинтегрируем два раза по частям

$$\int\limits_\varepsilon^{T-\varepsilon} Z(t,\lambda)\,u''(T-t)\,dt = \; Z(t,\lambda)\,u'(T-t)\,\Big|_{T-\varepsilon}^{\varepsilon} \;+\; \int\limits_\varepsilon^{T-\varepsilon} Z_t'(t,\lambda)\,u'(T-t)\;dt \;=$$

$$= \Big( Z(t,\lambda)\,u'(T-t) + Z_t'(t,\lambda)\,u(T-t) \Big)\Big|_{T-\varepsilon}^{\varepsilon} \;+\; \int\limits_\varepsilon^{T-\varepsilon} Z_{tt}''(t,\lambda)\,u(T-t)\,dt.$$

При $\varepsilon \to 0+0$ внеинтегральное слагаемое обращается в нуль. Действительно, с учетом действующих условий (5.1) и (6.16), а также того, что $u \in C^1(\,[\,0,T\,],\,E\,))$, имеем

$$Z(\varepsilon,\lambda)\,u'(T-\varepsilon) + Z_t'(\varepsilon,\lambda)\,u(T-\varepsilon) \;-\; Z(T-\varepsilon,\lambda)\,u'(\varepsilon) \;-\; Z_t'(T-\varepsilon,\lambda)\,u(\varepsilon) \;\to$$

$$\to\; \beta\,u'(T) + \alpha\,u(T) - 0 - 0 \;=0.$$

Затем, принимая во внимание связь $Z_{tt}''(t,\lambda) = \lambda Z(t,\lambda)$ (см. (6.15)), замечаем, что

$$\int\limits_\varepsilon^{T-\varepsilon} Z_{tt}''(t,\lambda)\,u(T-t)\,dt \;=\; \lambda\int\limits_\varepsilon^{T-\varepsilon} Z(t,\lambda)\,u(T-t)\,dt \;=\; \lambda f_\varepsilon(\lambda) \;\to$$

$$\to\; \lambda f(\lambda) \;=\; \lambda\int\limits_0^{T} Z(t,\lambda)\,u(T-t)\,dt$$

при $\varepsilon \to 0+0$ для любого фиксированного $\lambda \in \mathbb{C}$ (здесь $f(\lambda)$, $f_\varepsilon(\lambda)$ — векторные целые функции из формул (6.17), (6.18) соответственно). В результате имеем соотношение

$$\int\limits_\varepsilon^{T-\varepsilon} Z(t,\lambda)\,u''(T-t)\,dt \;\to\; 0 \;+\; \lambda\int\limits_0^{T} Z(t,\lambda)\,u(T-t)\,dt = \lambda f(\lambda) \quad (6.22)$$

при $\varepsilon \to 0+0$ для любого фиксированного $\lambda \in \mathbb{C}$.

Теперь можем положить $\varepsilon \to 0+0$ в формуле (6.20). Учитывая замкнутость оператора $A$, а также соотношения (6.19), (6.21) и (6.22), выводим из (6.20), что $f(\lambda) \in D(A)$ при всех $\lambda \in \mathbb{C}$ и

$$Af(\lambda) = \lambda f(\lambda) - L(\lambda)g, \qquad \lambda \in \mathbb{C}. \tag{6.23}$$

Это *основное операторное тождество* для функции $f(\lambda)$ из формулы (6.17). Напомним, что векторная целая функция $f(\lambda)$ определяется первым компонентом $u(t)$ решения $(u(t), g)$ однородной обратной задачи (4.1), (5.1). Второй компонент $g \in E$, умноженный на характеристическую функцию $L(\lambda)$ из формулы (5.12), входит в правую часть (6.23).

Равенство (6.23) можно дифференцировать по $\lambda$, внося производные под знак линейного замкнутого оператора $A$. Последовательное дифференцирование приводит к тождествам

$$Af^{(m)}(\lambda) = \lambda f^{(m)}(\lambda) + mf^{(m-1)}(\lambda) - L^{(m)}(\lambda)g, \qquad \lambda \in \mathbb{C}, \tag{6.24}$$

верным при всех $m \in \mathbb{N}$. При $m = 0$ формула (6.24) вновь обращается в тождество (6.23).

Воспользуемся теперь нашим базовым предположением о том, что ни один нуль характеристической функции $L(\lambda)$ не является собственным значением оператора $A$.

Допустим, например, если $L(\lambda_0) = 0$ в точке $\lambda_0 \in \mathbb{C}$. Тогда подстановка $\lambda = \lambda_0$ в тождество (6.23) дает результат

$$Af(\lambda_0) \,=\, \lambda_0\, f(\lambda_0).$$

Отсюда, в силу упомянутого базового предположения, выводим, что $f(\lambda_0) = 0$. Это означает, что в действующих условиях всякий нуль характеристической функции $L(\lambda)$ из формулы (5.12) будет нулем векторной целой функции $f(\lambda)$, определенной по формуле (6.17). Более того, если $\lambda = \lambda_0$ — нуль кратности $k \geqslant 2$ для $L(\lambda)$, то $L^{(m)}(\lambda_0) = 0$ при $m = 0, \ldots, k-1$, и последовательное применение формулы (6.24) показывает, что $f^{(m)}(\lambda_0) = 0$ при $m = 0, \ldots, k-1$.

Зафиксируем установленный факт: при сделанном предположении всякий нуль характеристической функции $L(\lambda)$ из формулы (5.12) является нулем не меньшей кратности[3] для векторной целой функции $f(\lambda)$ из формулы (6.17). Другими словами,

[3] Как станет ясно в дальнейшем (см. параграф 7 ниже), обычно все нули функции $L(\lambda)$ являются простыми, и лишь при некоторых специальных сочетаниях параметров $\alpha, \beta \in \mathbb{C}\setminus\{0\}$ и $T > 0$ характеристическая функция (5.12) имеет также один нуль кратности два. То есть, хотя кратных нулей у $L(\lambda)$ почти никогда не бывает, их потенциальную возможность всё же приходится учитывать.

отношение

$$\frac{f(\lambda)}{L(\lambda)} = \frac{1}{L(\lambda)} \int_0^T Z(t,\lambda)\, u(T-t)\, dt \tag{6.25}$$

определяет векторную целую функцию переменной $\lambda \in \mathbb{C}$.

Выведем отсюда, что $u(t) \equiv 0$ при $0 \leqslant t \leqslant T$. Неформальную идею для последующих рассуждений дал нам пример 200 из задачника [41, отд. 4, гл. 3, § 5]. Этот пример разобран в [41] со ссылкой на Карлемана. Для применения идеи в нашей ситуации схему Карлемана пришлось видоизменить.

**6.3. Продолжение доказательства: принцип Фрагмена–Линделёфа.** Поскольку предстоит активная работа с целыми функциями, удобно перейти полностью к скалярному случаю. Возьмем линейный непрерывный функционал $f^*$ из сопряженного банахова пространства $E^*$ и подействуем им на векторные компоненты в (6.25).

Обозначим $F(\lambda) \equiv f^*(f(\lambda))$ при $\lambda \in \mathbb{C}$ и $\psi(t) \equiv f^*(u(t))$ при $0 \leqslant t \leqslant T$. Тогда, согласно формуле (6.17), имеем

$$F(\lambda) = \int_0^T Z(t,\lambda)\, \psi(T-t)\, dt, \qquad \lambda \in \mathbb{C}. \tag{6.26}$$

При взятии функционала $f^*$ нули функции $f(\lambda)$ не исчезают, а их кратности не уменьшаются. Отсюда заключаем, что отношение

$$Q(\lambda) \equiv \frac{F(\lambda)}{L(\lambda)} = \frac{f^*(f(\lambda))}{L(\lambda)} \tag{6.27}$$

определяет целую функцию переменной $\lambda \in \mathbb{C}$ (ср. (6.27) с прежним отношением (6.25)). Для нужных оценок дроби (6.27) перепишем ее числитель $F(\lambda)$ в виде, отличном от (6.26).

Вспомним сначала, что $Z(t,\lambda) = Y_t'(t,\lambda)$, где $Y(0,\lambda) \equiv 0$ (см. формулу (6.13), а затем (6.12)). Для функции $\psi(t) \equiv f^*(u(t))$ отметим соотношения

$$\psi \in C^1[\,0,T\,], \qquad \psi(0) = 0, \tag{6.28}$$

выполненные согласно (4.4) и (5.1). (Из условий (5.1) также следует, что $\psi'(0) = 0$, $\alpha\psi(T) + \beta\psi'(T) = 0$, но эти соотношения далее уже не понадобятся.) Применив сказанное к интегралу (6.26), получаем, что

$$F(\lambda) = \int_0^T Y_t'(t,\lambda)\, \psi(T-t)\, dt = \int_0^T Y(t,\lambda)\, \psi'(T-t)\, dt, \qquad \lambda \in \mathbb{C}. \tag{6.29}$$

где $Y(T,\lambda)\, \psi(0) - Y(0,\lambda)\, \psi(T) \equiv 0$ из-за значений $\psi(0) = 0$ и $Y(0,\lambda) \equiv 0$.

Теперь преобразуем запись функции $Y(t,\lambda)$. Исходя из определения (6.11), имеем

$$Y(t,\lambda) = \alpha \left(\frac{t}{T}\right)^2 \frac{\operatorname{ch}\sqrt{(t/T)^2\lambda}\;T - 1}{(t/T)^2\lambda} + \beta\left(\frac{t}{T}\right)\frac{\operatorname{sh}\sqrt{(t/T)^2\lambda}\;T}{\sqrt{(t/T)^2\lambda}}\,.$$

Последующее сравнение с элементарными функциями (5.11) дает выражение

$$Y(t,\lambda) = \alpha\,(t/T)^2\,L_1\big((t/T)^2\lambda\big) + \beta\,(t/T)\,L_2\big((t/T)^2\lambda\big), \quad 0 \leqslant t \leqslant T, \quad \lambda\in\mathbb{C}. \quad (6.30)$$

Подставим (6.30) в интеграл (6.29) и сделаем там замену $s = t/T$. Получим представление

$$F(\lambda) = \int_0^1 \big(\alpha s^2\,L_1(\lambda s^2) + \beta s\,L_2(\lambda s^2)\big)\,\eta'(1-s)\,ds, \qquad \lambda\in\mathbb{C}, \qquad (6.31)$$

где $\eta(s)\equiv\psi(Ts)$, $\eta'(s) = T\psi'(Ts)$ и $\eta'(1-s) = T\psi'(T-Ts)$ при $0\leqslant s\leqslant 1$. Из (6.28) следует, что

$$\eta\in C^1[0,1], \qquad \eta(0)=0. \qquad (6.32)$$

Представление (6.31) с функцией $\eta(s)$ типа (6.32) используем при анализе отношения (6.27), составленного из функций $F(\lambda)$ и $L(\lambda) = \alpha\,L_1(\lambda) + \beta\,L_2(\lambda)$.

Напомним (см. [32, 33]) что монотонные при $r>0$ характеристики

$$M(F;r)\equiv\max_{|\lambda|=r}|F(\lambda)|, \qquad M(L_1;r)\equiv\max_{|\lambda|=r}|L_1(\lambda)|, \qquad M(L_2;r)\equiv\max_{|\lambda|=r}|\,L_2(\lambda)|$$

отражают рост целых функций $F(\lambda)$, $L_1(\lambda)$, $L_2(\lambda)$ на плоскости $\mathbb{C}$. Основываясь на (6.31), запишем оценку

$$M(F;r)\leqslant C_\eta\,\big(\,|\alpha|\,M(L_1;r) + |\beta|\,M(L_2;r)\,\big), \qquad r>0, \qquad (6.33)$$

с константой

$$C_\eta \equiv \int_0^1 |\eta'(s)|\,ds = \operatorname{Var}\{\eta(s)\}\,\Big|_0^1. \qquad (6.34)$$

Элементарные функции (5.11), т. е. функции $L_1(\lambda)$ и $L_2(\lambda)$ имеют порядок $\rho = 1/2$, а их характеристики $M(L_1;r)$ и $M(L_2;r)$ при $r\geqslant 1$ оцениваются сверху через $\exp(\sqrt{r}\,T)$. Подставив данную мажоранту в (6.33), получим, что и $F(\lambda)$ не может расти быстрее, чем целая функция порядка $\rho = 1/2$. Тот же характер роста имеет целая функция $L(\lambda) = \alpha L_1(\lambda) + \beta L_2(\lambda)$.

Но тогда по теореме о категориях (см. [32, с. 37]) рост целой функции $Q(\lambda)$, задаваемой отношением (6.27), не может быть выше, чем у функции порядка $\rho = 1/2$. В частности, заведомо можем утверждать, что $Q(\lambda)$ есть целая функция *нулевого экспоненциального типа*, т. е. такая, что $\ln M(Q;r) = o(r)$ при $r\to+\infty$.

Оценим $Q(\lambda) \equiv F(\lambda)/L(\lambda)$ на мнимой оси. Обозначим $\lambda = i\tau$, где $\tau \in \mathbb{R}$, и используем характеристики $V_1(\tau)$, $V_2(\tau)$ из формулы (6.1). Учитывая их строгую монотонность, действующую при возрастании $|\tau| \geqslant 0$ (см. лемму 6.1), легко выводим из (6.31), что

$$|F(i\tau)| \leqslant C_\eta \left(|\alpha|\, V_1(\tau) + |\beta|\, V_2(\tau)\right), \qquad \tau \in \mathbb{R}, \tag{6.35}$$

с той же константой $C_\eta$ вида (6.34). Согласно лемме 6.2 величина $V(\tau) \equiv |L(i\tau)|$ строго положительна при достаточно больших $|\tau| > 0$. Поэтому с учетом (6.35) можем корректно оценить

$$|Q(i\tau)| = \frac{|F(i\tau)|}{|L(i\tau)|} \leqslant C_\eta \, \frac{|\alpha|\, V_1(\tau) + |\beta|\, V_2(\tau)}{V(\tau)} \tag{6.36}$$

при тех же достаточно больших $|\tau| > 0$. Снова по лемме 6.2, если $|\tau| \to \infty$, то дробь в правой части (6.36) стремится к единице. Следовательно, непрерывная величина $|Q(i\tau)|$ является ограниченной при $\tau \in \mathbb{R}$, или, другими словами, целая функция нулевого экспоненциального типа $Q(\lambda)$ оказывается ограниченной на мнимой оси. В силу известного варианта теоремы Фрагмена–Линделёфа (см. [32, с. 71]) такая функция может быть только константой.

Итак, получили, что $Q(\lambda) \equiv C$ в плоскости $\mathbb{C}$. Но тогда $F(\lambda) = CL(\lambda)$ при всех $\lambda \in \mathbb{C}$ с некоторой константой $C \in \mathbb{C}$. Используя представление (6.31), запишем

$$\int_0^1 \left(\alpha s^2\, L_1\big(\lambda s^2\big) + \beta s\, L_2\big(\lambda s^2\big)\right)\, \eta'(1-s)\, ds = C\left(\alpha\, L_1(\lambda) + \beta\, L_2(\lambda)\right), \quad \lambda \in \mathbb{C}. \tag{6.37}$$

Покажем, что тождество (6.37) с функцией $\eta(s)$, удовлетворяющей условиям (6.32), возможно только, если $C = 0$ и $\eta(s) \equiv 0$ при $0 \leqslant s \leqslant 1$.

**6.4. Завершение доказательства: теорема Мюнца.** Проанализируем тождество (6.37), выполненное при всех $\lambda \in \mathbb{C}$ с некоторой константой $C \in \mathbb{C}$. Используя явные формулы (5.11) (см. также (5.9) и (5.10)), разложим в степенные ряды

$$\begin{aligned}
\alpha\, L_1(\lambda) + \beta\, L_2(\lambda) \;&=\; \sum_{n=0}^{\infty} \left(\alpha\, \frac{T^{2n+2}}{(2n+2)!} \;+\; \beta\, \frac{T^{2n+1}}{(2n+1)!}\right) \lambda^n \;= \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{\alpha T}{2n+2} \;+\; \beta\right) \frac{T^{2n+1}}{(2n+1)!}\;\lambda^n,
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\alpha s^2\, L_1\big(\lambda s^2\big) + \beta s\, L_2\big(\lambda s^2\big) \;&=\; \sum_{n=0}^{\infty} \left(\alpha\, \frac{s^{2n+2}\, T^{2n+2}}{(2n+2)!} \;+\; \beta\, \frac{s^{2n+1}\, T^{2n+1}}{(2n+1)!}\right) \lambda^n \;= \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} \left(\alpha T\, \frac{s^{2n+2}}{2n+2} \;+\; \beta\, s^{2n+1}\right) \frac{T^{2n+1}}{(2n+1)!}\;\lambda^n.
\end{aligned}$$

Подставим эти разложения в (6.37) и приравняем коэффициенты при одинаковых степенях $\lambda$.

С учетом очевидных сокращений на $T^{2n+1}/(2n+1)!$ получим счетный набор соотношений

$$\int_0^1 \left(\alpha T\,\frac{s^{2n+2}}{2n+2} + \beta\, s^{2n+1}\right) \eta'(1-s)\,ds = C\left(\frac{\alpha T}{2n+2} + \beta\right), \quad n = 0,\,1,\,2,\,\ldots \tag{6.38}$$

Модуль интеграла в (6.38) мажорируется величиной

$$\left(|\alpha| T\,\frac{1}{(2n+2)(2n+3)} + |\beta|\,\frac{1}{2n+2}\right) \max_{0\leqslant s\leqslant 1} |\eta'(s)|,$$

стремящейся к нулю при $n \to \infty$. Но тогда и сам интеграл стремится к нулю при $n \to \infty$. Тем самым, переходя к пределу в (6.38), получаем при $n \to \infty$, что $0 = C\beta$. Здесь $\beta \neq 0$ по условию. Поэтому $C = 0$.

Подставив найденное значение $C$ в (6.38), имеем соотношения

$$\int_0^1 \left(\alpha T\,\frac{s^{2n+2}}{2n+2} + \beta\, s^{2n+1}\right) \eta'(1-s)\,ds = 0, \qquad n = 0,\,1,\,2,\,\ldots \tag{6.39}$$

Заметим, что

$$\int_0^1 \frac{s^{2n+2}}{2n+2}\,\eta'(1-s)\,ds = \frac{s^{2n+2}}{2n+2}\,\eta(1-s)\bigg|_1^0 + \int_0^1 s^{2n+1}\,\eta(1-s)\,ds = $$

$$= \int_0^1 s^{2n+1}\,\eta(1-s)\,ds$$

с учетом значения $\eta(0) = 0$ (см. (6.32)). Такое преобразование в (6.39) дает результат

$$\int_0^1 \left(\alpha T\,\eta(1-s) + \beta\,\eta'(1-s)\right) s^{2n+1}\,ds = 0, \qquad n = 0,\,1,\,2,\,\ldots \tag{6.40}$$

Последнее возможно только, если

$$\alpha T\,\eta(1-s) + \beta\,\eta'(1-s) \equiv 0, \qquad 0 \leqslant s \leqslant 1. \tag{6.41}$$

Факт (6.41) выводится из (6.40) разными способами, но проще сразу воспользоваться теоремой Мюнца, утверждающей в своей слабой редакции[4], что если непрерывная функция ортогональна на $[\,0,1\,]$ системе степеней $\{s^{a_n}\}_{n=0}^{\infty}$, где

$$0 < a_0 < a_1 < \ \ldots\ < +\infty \qquad \text{и} \qquad \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{a_n} = +\infty,$$

то функция тождественно равна нулю на $[\,0,1\,]$ (см. номер 198 в [41, с. 44] или [104, с. 304–305]; см. также [25, с. 109] и [101, с. 116, 122–124]).

[4]Более известна сильная версия теоремы Мюнца о плотности линейных комбинаций степеней в пространствах типа $C[0,1]$ или $L^p[0,1]$. Отметим для точности, что в оригинальной работе Мюнца [104] рассматривался лишь классический вариант пространства $C[0,1]$. Но случай $L^p$ оказался идейно близок, и перенесенный туда результат тоже стали называть *теоремой Мюнца* (см., например, [25, гл. 3, § 6]).

Итак, установлено соотношение (6.41). Оно очевидно эквивалентно обыкновенному дифференциальному уравнению

$$\eta'(s) + \frac{\alpha T}{\beta}\,\eta(s) = 0 \qquad \text{при} \qquad 0 \leqslant s \leqslant 1,$$

к которому, согласно (6.32), надо добавить начальное условие

$$\eta(0) = 0.$$

Отсюда следует, что $\eta(s) \equiv 0$ при $0 \leqslant s \leqslant 1$. Вспоминая связь $\eta(s) \equiv \psi(Ts)$ при $0 \leqslant s \leqslant 1$, заключаем, что функция $\psi(t) \equiv f^*(u(t))$ тождественно равна нулю всюду на $[\,0, T\,]$. Выбор функционала $f^* \in E^*$ был произвольным. Поэтому, на основании известного следствия теоремы Хана–Банаха (см. [74, теорема 2.7.4]), можем утверждать, что $u(t) \equiv 0$ при $0 \leqslant t \leqslant T$. Подстановка такой функции в уравнение (4.1) показывает, что $g = 0$.

Подведем итог: при сделанном предположении (о том, что ни один нуль характеристической функции (5.12) не является собственным значением оператора $A$) неизбежно получаем, что решение $(u(t), g)$ однородной обратной задачи (4.1), (5.1) может быть только тривиальным. Критерий единственности решения в форме теоремы 5.2 полностью доказан. Отсюда автоматически следует теорема 5.1.

# § 7. Нули характеристической функции и некоторые следствия

Для применения установленного критерия единственности решения требуется информация о распределении нулей характеристической функции $L(\lambda) = L(\lambda; T, \alpha, \beta)$ из формулы (5.12). Уделим этому вопросу особое внимание.

**7.1. Общие сведения.** Как и в формуле (5.13), рассматриваем множество $\Lambda = \Lambda(T, \alpha, \beta) \equiv \{\,\lambda \in \mathbb{C}\colon\ L(\lambda) = 0\,\}$. Опишем его состав в зависимости от выбора параметров $T > 0$ и $\alpha, \beta \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$. Специально подчеркнем, что соглашение $\alpha \neq 0$, $\beta \neq 0$ действует далее без оговорок — при обращении в нуль одного из коэффициентов ситуация сразу упрощается и конкретный вид множества $\Lambda$ находится элементарным образом.

Действительно, если взять $\alpha \neq 0$, $\beta = 0$ (как для финального переопределения первого рода), то $L(\lambda) = \alpha L_1(\lambda)$ с функцией $L_1(\lambda) = L_1(\lambda;\, T)$ из формулы (5.11) и

$$\Lambda(T, \alpha, 0) = \Lambda(T, 1, 0) \equiv \{\, \lambda \in \mathbb{C}\colon\ L_1(\lambda) = 0 \,\} = \{\, \lambda_k^{(1)} \,\}_{k\in\mathbb{N}} = \left\{ -\frac{4k^2\pi^2}{T^2} \right\}_{k\in\mathbb{N}}, \tag{7.1}$$

причем все нули в множестве (7.1) имеют кратность два (см. также [70]). В свою очередь если взять $\alpha = 0$, $\beta \neq 0$ (как для финального переопределения второго рода), то $L(\lambda) = \beta L_2(\lambda)$ с функцией $L_2(\lambda) = L_2(\lambda;\, T)$ из формулы (5.11) и

$$\Lambda(T, 0, \beta) = \Lambda(T, 0, 1) \equiv \{\, \lambda \in \mathbb{C}\colon\ L_2(\lambda) = 0 \,\} = \{\, \lambda_m \,\}_{m\in\mathbb{N}} = \left\{ -\frac{m^2\pi^2}{T^2} \right\}_{m\in\mathbb{N}}, \tag{7.2}$$

причем все нули в множестве (7.2) являются простыми (см. также [1]). Любопытная особенность — присутствие в обоих множествах (7.1) и (7.2) общей серии нулей $(-4k^2\pi^2/T^2)$, взятых при $k \in \mathbb{N}$, сохранится и при рассмотрении финального переопределения третьего рода со значениями $\alpha \neq 0$, $\beta \neq 0$. Сосредоточимся сейчас именно на этом случае.

Используем элементарные формулы $\operatorname{ch} a - 1 = 2\operatorname{sh}^2(a/2)$ и $\operatorname{sh} a = 2\operatorname{sh}(a/2)\operatorname{ch}(a/2)$. С их помощью для функций (5.11) запишем

$$L_1(\lambda) = \frac{2}{\lambda}\, \operatorname{sh}^2 \frac{\sqrt{\lambda}\,T}{2}, \qquad L_2(\lambda) = \frac{2}{\sqrt{\lambda}}\, \operatorname{sh} \frac{\sqrt{\lambda}\,T}{2}\, \operatorname{ch} \frac{\sqrt{\lambda}\,T}{2}. \tag{7.3}$$

Отсюда видно, что характеристическая функция (5.12) допускает альтернативное представление

$$L(\lambda) \;=\; \frac{2}{\sqrt{\lambda}}\, \operatorname{sh} \frac{\sqrt{\lambda}\,T}{2} \left( \frac{\alpha}{\sqrt{\lambda}}\, \operatorname{sh} \frac{\sqrt{\lambda}\,T}{2} + \beta\, \operatorname{ch} \frac{\sqrt{\lambda}\,T}{2} \right) = G_1(\lambda)\, G_2(\lambda), \tag{7.4}$$

т. е. функция $L(\lambda) = \alpha\, L_1(\lambda) + \beta\, L_2(\lambda)$ распадается в произведение двух целых функций

$$G_1(\lambda) = G_1(\lambda;\, T) \equiv \frac{2}{\sqrt{\lambda}}\, \operatorname{sh} \frac{\sqrt{\lambda}\,T}{2}\,, \tag{7.5}$$

$$G_2(\lambda) = G_2(\lambda;\, T, \alpha, \beta) \equiv \frac{\alpha}{\sqrt{\lambda}}\, \operatorname{sh} \frac{\sqrt{\lambda}\,T}{2} + \beta\, \operatorname{ch} \frac{\sqrt{\lambda}\,T}{2} \tag{7.6}$$

переменной $\lambda \in \mathbb{C}$. Тем самым множество нулей характеристической функции $L(\lambda)$ оказывается составленным из множества нулей функции (7.5) и множества нулей функции (7.6).

Удобно сократить число параметров и ввести стандартизированные функции

$$H_1(\zeta) \equiv \frac{2}{\sqrt{\zeta}}\ \mathrm{sh}\,\frac{\sqrt{\zeta}}{2}\,, \tag{7.7}$$

$$H_2(\zeta) = H_2(\zeta; p) \equiv \frac{2}{\sqrt{\zeta}}\ \mathrm{sh}\,\frac{\sqrt{\zeta}}{2} + p\ \mathrm{ch}\,\frac{\sqrt{\zeta}}{2} \tag{7.8}$$

переменной $\zeta \in \mathbb{C}$. В записи (7.8) остался единственный параметр $p \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$. Ясно, что

$$G_1(\lambda; T) = T\,H_1\left(\lambda T^2\right), \qquad G_2(\lambda; T, \alpha, \beta) = \frac{\alpha T}{2}\ H_2\left(\lambda T^2; 2\beta/(\alpha T)\right). \tag{7.9}$$

Поэтому характеристическая функция (5.12) представима в виде

$$L(\lambda) = L(\lambda; T, \alpha, \beta) = c\,H_1\left(\lambda T^2\right) H_2\left(\lambda T^2; p\right) \tag{7.10}$$

где

$$c = \frac{\alpha T^2}{2}, \qquad p = \frac{2\beta}{\alpha T}\,. \tag{7.11}$$

Условия (7.11) обеспечивают эквивалентность представлений (7.4) и (7.10) для $L(\lambda)$.

Формулы перехода (7.9) показывают, что нули функций $G_1(\lambda), G_2(\lambda)$ связаны с нулями соответствующих функций $H_1(\zeta)$, $H_2(\zeta)$ преобразованием подобия $\lambda = \zeta/T^2$, сохраняющим не только все геометрические соотношения нулей, но и их кратности.

Завершим этот первичный разбор ситуации следующим базовым утверждением.

**Теорема 7.1.** *Множество нулей характеристической функции $L(\lambda)$ вида (5.12) или, что эквивалентно, вида (7.4) состоит из двух счетных серий. Первая универсальная серия нулей*

$$\lambda_k^{(1)} = -\frac{4k^2\pi^2}{T^2}, \qquad k \in \mathbb{N}, \tag{7.12}$$

*отвечает множителю (7.5) и не зависит от выбора значений $\alpha, \beta \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$. Вторая серия нулей отвечает множителю (7.6) и может быть записана в виде*

$$\lambda_k^{(2)} = \frac{\zeta_k}{T^2}, \qquad k \in J, \tag{7.13}$$

*где $\zeta_k = \zeta_k(p)$ — нули элементарной целой функции (7.8) с параметром $p = 2\beta/(\alpha T)$. Нумерация $k \in J = J(p) \subset \mathbb{Z}$ в (7.13) может зависеть от значения $p \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$. Множества (7.12) и (7.13) не пересекаются, т. е. ни один нуль функции (7.5) не является нулем функции (7.6).*

**Доказательство.** Все корни уравнения $\operatorname{sh}(a/2) = 0$ на плоскости $\mathbb{C}$ выражаются формулой $a_k = 2k\pi i$, где $k \in \mathbb{Z}$. При этом $\operatorname{ch}(a_k/2) = \cos k\pi \neq 0$. Отсюда, во-первых, следует, что все нули функции (7.5) имеют вид (7.12) с указанной там нумерацией $k \in \mathbb{N}$, а, во-вторых, что ни один такой нуль $\lambda_k^{(1)}$ не может быть нулем функции (7.6).

В то же время функция $G_2(\lambda) = G_2(\lambda; T, \alpha, \beta)$ вида (7.6) как целая функция нецелого порядка $\rho = 1/2$ имеет бесконечное (счетное) множество нулей. Эти нули, учитывая вторую связь в (7.9), можно формально записать в виде (7.13) — через нули стандартизированной функции (7.8). Вопрос о наиболее удобной нумерации $k \in J$ в множестве таких нулей должен уточняться отдельно. □

Как видим, наличие общего множителя $(2/\sqrt{\lambda}\,)\operatorname{sh}\big(\sqrt{\lambda}\,T/2\big)$ приводит к тому, что серия нулей (7.12) оказывается общей для всех трех функций $L_1(\lambda)$, $L_2(\lambda)$ и $L(\lambda) = \alpha L_1(\lambda) + \beta L_2(\lambda)$. Тем самым (см. теорему 5.1), отсутствие среди чисел (7.12) собственных значений оператора $A$ есть *необходимое условие* единственности решения изучаемой обратной задачи (4.1)–(4.3) с фиксированным $T > 0$ при любом выборе параметров $\alpha, \beta \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ (см. также работы [70] и [1] про случаи $\alpha \neq 0$, $\beta = 0$ и $\alpha = 0$, $\beta \neq 0$ соответственно). Эта особенность изучаемой обратной задачи представляется весьма оригинальной.

**7.2. Кратность нулей.** Обсудим теперь вопрос о кратности нулей характеристической функции $L(\lambda)$. Используем представление $L(\lambda) = G_1(\lambda)\,G_2(\lambda)$ с функциями (7.5), (7.6). Поскольку, согласно теореме 7.1, множества нулей указанных сомножителей не пересекаются, вопрос о кратных нулях достаточно рассмотреть отдельно для $G_1(\lambda)$ и $G_2(\lambda)$, точнее даже, для их регуляризированных аналогов — функций $H_1(\zeta)$ и $H_2(\zeta)$ из формул (7.7) и (7.8) соответственно.

Вопрос об отсутствии кратных нулей у функции $H_1(\zeta)$ решается просто. Имеем

$$H_1(\zeta) \equiv \frac{2}{\sqrt{\zeta}} \operatorname{sh}\frac{\sqrt{\zeta}}{2}\,, \qquad H_1'(\zeta) \equiv \frac{1}{2\zeta}\left(\operatorname{ch}\frac{\sqrt{\zeta}}{2} - \frac{2}{\sqrt{\zeta}}\operatorname{sh}\frac{\sqrt{\zeta}}{2}\right).$$

Как уже отмечалось при доказательстве теоремы 7.1, величины $\operatorname{sh}(a/2)$ и $\operatorname{ch}(a/2)$ никогда одновременно не обращаются в нуль. Отсюда следует, что $H_1(\zeta) = H_1'(\zeta) = 0$ невозможно ни в какой точке $\zeta \in \mathbb{C}$.

Рассмотрим теперь функцию $H_2(\zeta) = H_2(\zeta; p)$ с параметром $p \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$. Картина с ее кратными нулями оказывается довольно неожиданной. В решении поставленной задачи важную роль играют комплексно сопряженные корни уравнения

$$\operatorname{sh} z = z, \tag{7.14}$$

расположенные в полуплоскости $\operatorname{Re} z > 0$. Множество таких корней запишем в виде

$$z = z_n, \qquad n \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}, \qquad z_{-n} = \overline{z}_n. \tag{7.15}$$

Считаем, что основная серия корней $z = z_n$ при $n \in \mathbb{N}$ расположена в первом координатном угле $\operatorname{Re} z > 0$, $\operatorname{Im} z > 0$ и занумерована в порядке возрастания модулей.

Следующий результат получен совместно с И. В. Тихоновым и В. Б. Шерстюковым.

**Теорема 7.2.** *Рассматриваем функцию $H_2(\zeta; p)$ вида (7.8) с параметром $p \in \mathbb{C}\setminus\{0\}$. Определим счетное множество значений*

$$p_n = -\frac{2}{1 + \operatorname{ch} z_n}, \qquad n \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}, \qquad p_{-n} = \overline{p}_n, \tag{7.16}$$

*где $z_n$ — корни (7.15) трансцендентного уравнения (7.14), попадающие в полуплоскость $\operatorname{Re} z > 0$. Тогда справедливы утверждения:*

- *При каждом $p \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$, не входящем в множество (7.16), функция $H_2(\zeta; p)$ имеет только простые нули.*

- *При $p = p_n$ из множества (7.16) функция $H_2(\zeta; p_n)$ помимо бесконечного числа простых нулей имеет ровно один кратный нуль кратности два, который находится по формуле*
$$\zeta = z_n^2, \tag{7.17}$$
*с тем же $z_n$ из (7.15), что и при выборе параметра $p_n = -2/(1 + \operatorname{ch} z_n)$.*

*Добавим еще, что при $n \in \mathbb{N}$ значения $p_n$ из формулы (7.16) попадают в область*

$$-2 < \operatorname{Re} p < 0, \qquad 0 < \operatorname{Im} p < 1, \tag{7.18}$$

*причем $p_n \to 0$ при $n \to \infty$. Как следствие, при всех номерах $n \in \mathbb{Z}\setminus\{0\}$ значения $p_n$ не могут быть вещественными.*

Подробное доказательство данной теоремы 7.2 и обсуждение сопутствующих обстоятельств будет дано отдельно (см. также [7, 68]). Сейчас отметим лишь, что все величины из теоремы 7.2 допускают эффективное исследование с выводом необходимых оценок, представляющих интерес как для математической физики, так и для теории функций. В частности, уравнение (7.14) посредством замены $z = i\xi$ с переменной $\xi \in \mathbb{C}$ приводится к виду
$$\sin \xi = \xi. \tag{7.19}$$

Последнее встречается в спектральной теории при рассмотрении ряда задач механики сплошной среды (см., например, [83, 86, 96]). С аналитической точки зрения уравнение (7.19) рассматривал еще Харди [90]. Простой и понятный разбор ситуации, связанной с корнями подобных уравнений, дал Маркушевич [37, с. 64–68]. Основываясь на его результатах, получаем приближенную формулу

$$z_n \approx \ln(4n\pi) + \frac{1}{4n} + i\left(2n\pi + \frac{\pi}{2} - \frac{1}{2n\pi}\ln(4n\pi)\right) \tag{7.20}$$

для основной серии корней «нашего» уравнения (7.14). Родственный вариант, восходящий к работе Харди [90], имеет вид (см. [83, с. 392])

$$z_n = \ln\big((4n+1)\pi\big) + \delta_n + i\left(2n\pi + \frac{\pi}{2} - \frac{2}{(4n+1)\pi}\ln\big((4n+1)\pi\big) + \varepsilon_n\right). \tag{7.21}$$

Отдельно показывается, что приближения (7.20) и (7.21) согласованы с нумерацией $n \in \mathbb{N}$ (см. [90]). Высокую точность таких соотношений подтверждают следующие оценки В. Б. Шерстюкова:

$$0 < \delta_n < \frac{2}{(4n+1)^2\pi^2}\ln^2\big((4n+1)\pi\big), \qquad |\varepsilon_n| < \frac{4}{(4n+1)^3\pi^3}\ln^3\big((4n+1)\pi\big),$$

действующие при всех номерах $n \in \mathbb{N}$ для остатков $\delta_n, \varepsilon_n \in \mathbb{R}$ в формуле (7.21). Используя информацию о корнях уравнения (7.14), можно весьма точно оценить величины (7.16), (7.17) из теоремы 7.2 и указать для них ряд полезных аналитических соотношений. Здесь применимы также методы компьютерной математики.

Упомянем, к примеру, что область из (7.18), где локализуются значения $p_n$ при $n \in \mathbb{N}$, получена из общих соображений, связанных с действием отображения $p_n = -2/(1+\operatorname{ch} z_n)$ на корни уравнения (7.14), расположенные в первом координатном угле. Однако, как показывает численный расчет, можно, не погрешив против истины, заменить множество (7.18) гораздо более точным прямоугольником

$$-0.11 < \operatorname{Re} p < 0, \qquad 0 < \operatorname{Im} p < 0.22.$$

Вернемся к рассмотрению характеристической функции $L(\lambda) = L(\lambda; T, \alpha, \beta)$. Используем представление (7.10) с параметром $p = 2\beta/(\alpha T)$, заданным согласно (7.11). Проделанный анализ позволяет утверждать, что в большинстве ситуаций, т. е. в случае общего положения, все нули функции $L(\lambda) = L(\lambda; T, \alpha, \beta)$ являются простыми. Исключение составляют редкие примеры, когда параметры $\alpha, \beta \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ и $T > 0$ связаны специальным соотношением

$$\alpha T + (1 + \operatorname{ch} z_0)\beta = 0 \tag{7.22}$$

с некоторым корнем $z_0 = z_n$ из множества (7.15) (ср. (7.22) с формулой (7.16) из теоремы 7.2). При таком условии функция $L(\lambda) = L(\lambda; T, \alpha, \beta)$, помимо бесконечного числа простых нулей имеет единственный нуль кратности два, и он находится по формуле $\lambda = z_0^2/T^2$ с тем же значением $z_0$, что и в (7.22) (ср. формулу (7.13) с формулой (7.17) из теоремы 7.2).

Согласно теореме 7.2 значения $1 + \operatorname{ch} z_n = -2/p_n$ не могут быть вещественными. Поэтому соотношение (7.22) невозможно если $\alpha, \beta \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$. Отсюда получаем такое утверждение.

**Теорема 7.3.** *При любом выборе параметров* $\alpha$, $\beta \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ *и* $T > 0$ *все нули характеристической функции* $L(\lambda) = L(\lambda; T, \alpha, \beta)$ *из формулы* (5.12) *являются простыми.*

Выбор вещественных параметров $\alpha$, $\beta$ в условии (4.3) является, безусловно, приоритетным. Сосредоточимся именно на этом случае. Дополним теорему 7.3 следующим результатом.

**Теорема 7.4.** *При любом выборе параметров* $\alpha$, $\beta \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ *и* $T > 0$ *все нули характеристической функции* $L(\lambda) = L(\lambda; T, \alpha, \beta)$ *из формулы* (5.12) *являются вещественными.*

**Доказательство.** С учетом основной теоремы 7.1 достаточно установить, что все нули $\zeta_j$ стандартизированной функции (7.8) при любом выборе параметра $p \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ являются вещественными. Зафиксируем значение $p \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ и рассмотрим скалярную задачу

$$\begin{cases} 4y''(\tau) - \zeta y(\tau) = 0, \quad 0 \leqslant \tau \leqslant 1, \\ y(0) = 0, \quad y(1) + py'(1) = 0 \end{cases} \tag{7.23}$$

со спектральным параметром $\zeta \in \mathbb{C}$. С точностью до умножения на константу решение дифференциального уравнения из системы (7.23), удовлетворяющее краевому условию $y(0) = 0$, имеет вид $y(\tau) = \left(2/\sqrt{\zeta}\,\right) \operatorname{sh}\left(\sqrt{\zeta}\,\tau/2\right)$. После подстановки данной функции во второе краевое условие $y(1) + py'(1) = 0$ приходим к уравнению

$$\frac{2}{\sqrt{\zeta}} \operatorname{sh} \frac{\sqrt{\zeta}}{2} + p \operatorname{ch} \frac{\sqrt{\zeta}}{2} = 0 \tag{7.24}$$

относительно неизвестной $\zeta \in \mathbb{C}$. Корни уравнения (7.24) те же, что нули целой функции (7.8) — они совпадают со спектральными значениями задачи (7.23). Но спектр в задаче (7.23) может быть только вещественным.

Действительно, исходя из (7.23), введем оператор $B = 4d^2/d\tau^2$ в линейном вещественном пространстве $C[0,1]$ на области определения

$$D_p \equiv \{ y \in C^2[0,1]: \quad y(0) = 0, \quad y(1) + py'(1) = 0 \}.$$

Используем в $C[0,1]$ скалярное произведение

$$(y_1, y_2) = \int_0^1 y_1(\tau) y_2(\tau)\, d\tau, \qquad (y, y) \equiv \|y\|^2.$$

Стандартное интегрирование по частям показывает симметричность оператора $B$ в том смысле, что $(By_1, y_2) = (y_1, By_2)$ для любых $y_1, y_2 \in D_p$. Как известно, такой оператор не может иметь комплексных собственных значений $\zeta = \gamma_1 + i\gamma_2$, $\gamma_1, \gamma_2 \in \mathbb{R}$, $\gamma_2 \neq 0$.

В самом деле, предположим, что $B(y_1 + iy_2) = (\gamma_1 + i\gamma_2)(y_1 + iy_2)$ с некоторыми $y_1, y_2 \in D_p$, т.е. $By_1 = \gamma_1 y_1 - \gamma_2 y_2$ и $By_2 = \gamma_1 y_2 + \gamma_2 y_1$. Тогда вычисление числа $(By_1, y_2) = (y_1, By_2)$ дает равенство

$$\gamma_1(y_1, y_2) - \gamma_2(y_2, y_2) = \gamma_1(y_1, y_2) + \gamma_2(y_1, y_1) \ \sim \ \gamma_2 ( \|y_1\|^2 + \|y_2\|^2 ) = 0.$$

Но если $\gamma_2 \neq 0$, то $y_1(\tau) \equiv 0$ и $y_2(\tau) \equiv 0$ всюду на $[0,1]$.

Итак, ни сам оператор $B$, ни ассоциированная с ним спектральная задача (7.23) не могут иметь комплексных (невещественных) собственных значений. Следовательно, корни уравнения (7.24) и совпадающие с ними нули целой функции (7.8) будут исключительно вещественными. Возвращаясь к исходной характеристической функции (5.12) (и учитывая теорему 7.1), получаем утверждение теоремы 7.4. $\square$

Подытожим: при любом выборе значений $\alpha, \beta \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ все без исключения нули характеристической функции $L(\lambda) = L(\lambda; T, \alpha, \beta)$ являются вещественными и простыми. Для того чтобы завершить описание таких нулей, осталось, согласно теореме 7.1, в зависимости от параметра $p = 2\beta/(\alpha T) \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ указать зоны локализации чисел $\zeta_k$ из формулы (7.13), или, что то же самое, зоны локализации нулей $\zeta_k = \zeta_k(p) \in \mathbb{R}$ стандартизированной функции $H_2(\zeta; p)$ из формулы (7.8).

**7.3. Подробно про зоны локализации.** Разбор начнем в эквивалентных терминах — на языке корней уравнения (7.24). При этом для лучшего понимания динамики корней в зависимости от параметра $p$ рассмотрим все значения $p \in \mathbb{R}$, включая $p = 0$.

Случай $p = 0$ является особым, так как тогда корни уравнения (7.24) совпадают с нулями (простыми нулями) функции $H_1(\zeta)$ из (7.7) и имеют вид $\zeta_k = -4k^2\pi^2$ при $k \in \mathbb{N}$.

Еще один особый случай связан с возможным корнем $\zeta = 0$. Подстановка такого числа в уравнение (7.24) дает соотношение $1 + p \cdot 1 = 0$, откуда ясно, что $\zeta = 0$ является корнем для (7.24) тогда и только тогда, когда $p = -1$.

Приступим к изучению случая «общего положения». Поскольку при $p \in \mathbb{R}$ корни уравнения (7.24) могут быть только вещественными, всюду в данном пункте считаем, что $\zeta \in \mathbb{R}$. Используем замену

$$\zeta = \begin{cases} 4\mu^2, & \mu \geqslant 0, \\ -4\mu^2, & \mu < 0. \end{cases} \tag{7.25}$$

Формула (7.25) задает биекцию, точнее, сохраняющий порядок изотонный гомеоморфизм между прямой $\mu \in \mathbb{R}$ и прямой $\zeta \in \mathbb{R}$. Уравнение (7.24) перейдет в эквивалентную совокупность

$$\left[\begin{array}{ll} (1/\mu)\,\operatorname{sh}\mu + p\operatorname{ch}\mu = 0, & \mu \geqslant 0, \\ (1/\mu)\,\sin\mu + p\cos\mu = 0, & \mu < 0. \end{array}\right. \tag{7.26}$$

Вновь видим, что корень $\mu = 0$, соответствующий прежнему $\zeta = 0$, возникает в (7.26) лишь при $p = -1$. Временно исключим $\mu = 0$ из рассмотрения. Тогда при $\mu \in (-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$ совокупность (7.26) приводится к следующему эквивалентному виду

$$\left[\begin{array}{ll} p\mu = -\operatorname{th}\mu, & \mu > 0, \\ p\mu = -\operatorname{tg}\mu, & \mu < 0. \end{array}\right. \tag{7.27}$$

Полученные уравнения проанализируем графически (см. Рис. 2.1).

Введем вспомогательную функцию $\Phi(\mu)$, составленную из счетного числа ветвей $\varphi_k(\mu)$ следующим образом. Особая нулевая ветвь $\varphi_0(\mu)$ определяется на множестве $(-\pi/2, +\infty)$ по формулам $\varphi_0(\mu) = -\operatorname{tg}\mu$ при $\mu \in (-\pi/2, 0)$ и $\varphi_0(\mu) = -\operatorname{th}\mu$ при $\mu \in [0, +\infty)$. Ясно, что это непрерывная (точнее, непрерывно дифференцируемая), строго убывающая, выпуклая вниз функция на $(-\pi/2, +\infty)$. Затем, при $k \in \mathbb{N}$, положим $\varphi_k(\mu) = -\operatorname{tg}\mu$ на соответствующих промежутках

$$\mu \in (-(2k+1)\pi/2,\ -(2k-1)\pi/2).$$

Рассмотрим графики функций $s = \Phi(\mu)$ и $s = p\mu$. Абсциссы их точек пересечения на множестве $\mu \in (-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$ как раз дадут все корни, возникающие в (7.27). Для того чтобы вернуться к исходной совокупности (7.26), добавим корень $\mu = 0$, отвечающий единственному значению параметра $p = -1$. При таком $p$ секущая $s = p\mu$ к нулевой ветви $s = \varphi_0(\mu)$ перейдет в прямую $s = -\mu$, касающуюся этой ветви в точке $\mu = 0$.

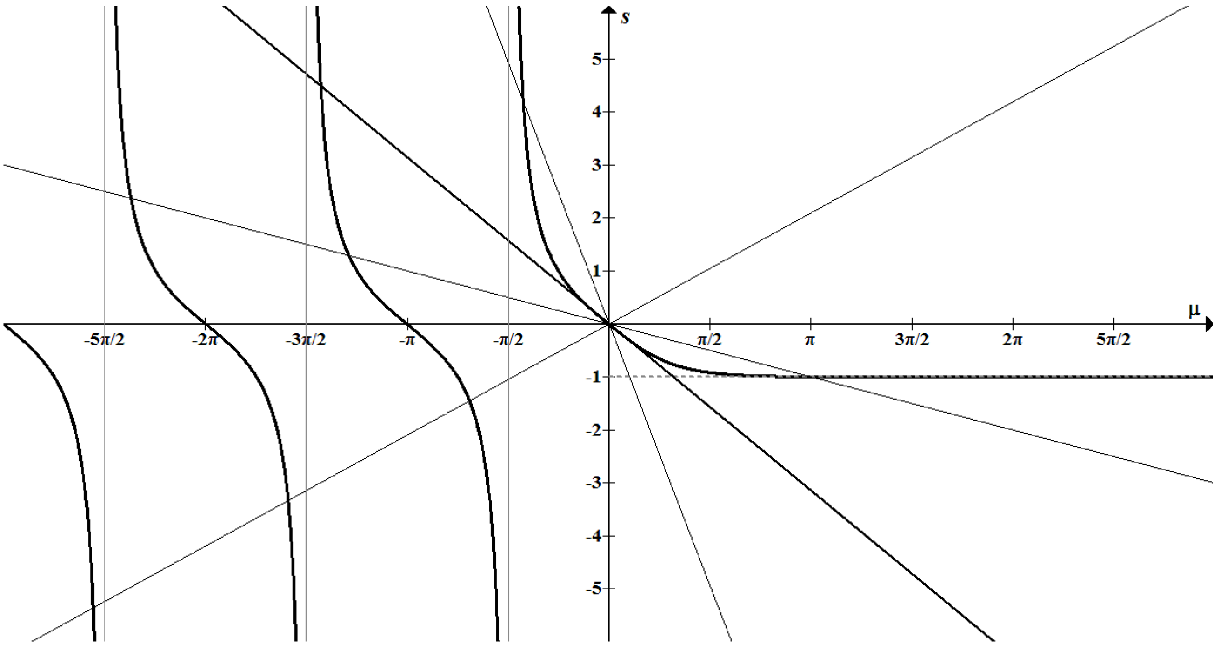

Рис. 2.1. Геометрический анализ совокупности уравнений (7.27).

В результате получаем счетное множество корней $\mu_k = \mu_k(p)$, непрерывно зависящих от параметра $p \in \mathbb{R}$. Точнее, особый корень $\mu_0 = \mu_0(p)$ определен лишь при $p \in (-\infty, 0)$ — он соответствует ветви $\varphi_0(\mu)$ и непрерывно возрастает с ростом $p$. Так, при $p \in (-\infty, -1)$ этот корень $\mu_0 = \mu_0(p)$ изменяется в промежутке $(-\pi/2, 0)$ как корень уравнения $p\mu = -\operatorname{tg}\mu$. Затем, при $p = -1$ возникает промежуточное значение $\mu_0(0) = 0$. Наконец, при $p \in (-1, 0)$ корень $\mu_0 = \mu_0(p)$ изменяется в промежутке $(0, +\infty)$ уже как корень уравнения $p\mu = -\operatorname{th}\mu$ с асимптотикой

$$\mu_0(p) \sim -1/p, \qquad p \to 0 - 0. \tag{7.28}$$

Асимптотика (7.28) устанавливается из простых соображений и дает отличное приближение уже при $p \geqslant -1/\pi$. Действительно, при таких $p$ точка пересечения графиков $s = p\mu$ и $s = -\operatorname{th}\mu$ будет расположена очень близко к асимптоте $s = -1$ графика $s = -\operatorname{th}\mu$. Следовательно, уравнение $p\mu = -\operatorname{th}\mu$ с высокой точностью выражается как $p\mu = -1$.

Остальные «регулярные» корни $\mu_k = \mu_k(p)$ с индексом $k \in \mathbb{N}$ определены при всех $p \in \mathbb{R}$. Точнее, при фиксированном $k \in \mathbb{N}$ каждый такой корень соответствует ветви $\varphi_k(\mu) = -\operatorname{tg}\mu$ и непрерывно возрастает с ростом $p$ в пределах от $-(2k+1)\pi/2$ до $-(2k-1)\pi/2$. В частности, при $p = 0$ получаем элементарные значения $\mu_k(0) = -k\pi$, разделяющие основные нужные нам случаи (см. Рис. 2.1)

$$\mu_k(p) \in (-(2k+1)\pi/2,\, -k\pi) \quad \text{при} \quad -\infty < p < 0,$$
$$\mu_k(p) \in (-k\pi,\, -(2k-1)\pi/2) \quad \text{при} \quad 0 < p < +\infty.$$

Таким образом, описание корней для совокупности (7.26) получено. Теперь, чтобы вернуться к исходному уравнению (7.24), используем замену (7.25). Следующий результат есть прямое следствие проведенных выше рассуждений.

**Теорема 7.5.** *Пусть $p \in \mathbb{R}$. Тогда все корни уравнения* (7.24) *принадлежат $\mathbb{R}$ и при анализе их расположения на прямой надо различать три случая.*

1) *Если $p < 0$, то корни уравнения* (7.24) *представимы в виде*

$$-\infty < \ldots < \zeta_{k+1} < \zeta_k < \ldots < \zeta_1 < \zeta_0. \tag{7.29}$$

*При любом фиксированном $k \in \mathbb{N}$ корень $\zeta_k = \zeta_k(p)$ строго возрастает с ростом $p \in (-\infty, 0)$, непрерывно двигаясь от левой границы до правой границы в интервале $(-(2k+1)^2\pi^2, -4k^2\pi^2)$. Кроме того, имеется особый корень $\zeta_0 = \zeta_0(p)$ ($\zeta_0(p) = 4\mu_0^2$, где $\mu = \mu_0$ — единственный положительный корень уравнения $p\mu + \operatorname{th}\mu = 0$), который строго возрастает в интервале $(-\pi^2, +\infty)$, непрерывно двигаясь от левой до правой границы так, что*

$$-\pi^2 < \zeta_0(p) < 0 \quad \textit{при} \quad p \in (-\infty, -1),$$
$$\zeta_0(p) = 0 \quad \textit{при} \quad p = -1,$$
$$\zeta_0(p) > 0 \quad \textit{при} \quad p \in (-1, 0)$$

*с асимптотикой $\zeta_0(p) \sim 4/p^2$ при $p \to 0-0$.*

2) *Если $p = 0$, то корни уравнения* (7.24) *принимают вид $\zeta_k = -4k^2\pi^2$ при $k \in \mathbb{N}$.*

3) *Если $p > 0$, то корни уравнения* (7.24) *представимы в виде*

$$-\infty < \ldots < \zeta_{k+1} < \zeta_k < \ldots < \zeta_1. \tag{7.30}$$

*При любом фиксированном $k \in \mathbb{N}$ корень $\zeta_k = \zeta_k(p)$ строго возрастает с ростом $p \in (0, +\infty)$, непрерывно двигаясь от левой границы до правой границы в интервале $(-4k^2\pi^2,\, -(2k-1)^2\pi^2)$. Как следствие отсюда получаем, что при всех $p > 0$ корни* (7.30) *будут отрицательными, строго меньшими числа $(-\pi^2)$.*

Для того чтобы завершить картину и получить нули серии (7.13) для характеристической функции (5.12) остается разделить на $T^2$ числа (7.29) при $p < 0$ или числа (7.30) при $p > 0$ с их описанием, указанным в теореме 7.5. Нетрудно убедиться при этом, что нули (7.12) и нули (7.13) в теореме 7.1 при фиксированном $p \in (-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$ обладают следующим свойством перемежаемости: между двумя любыми последовательными нулями серии (7.13) находится ровно один нуль серии (7.12). Точнее, при $p < 0$ имеем

$$\lambda_k^{(2)} = \zeta_k/T^2 \;<\; \lambda_k^{(1)} = -4k^2\pi^2/T^2 \;<\; \lambda_{k-1}^{(2)} = \zeta_{k-1}/T^2, \qquad k \in \mathbb{N},$$

а при $p > 0$ имеем

$$\lambda_{k+1}^{(2)} = \zeta_{k+1}/T^2 \;<\; \lambda_k^{(1)} = -4k^2\pi^2/T^2 \;<\; \lambda_k^{(2)} = \zeta_k/T^2, \qquad k \in \mathbb{N},$$

с учетом нумерации, введенной в теореме 7.5.

Отметим еще несколько следствий, важных с практической точки зрения. Напомним, что переход от параметра $p$ к изначальным $\alpha$, $\beta$ и $T$ происходит по формуле $p = 2\beta/(\alpha T)$ (см. (7.11)). Утверждая, что нули функции (7.13) локализуются в каких-то интервалах, мы имеем в виду, что вне этих интервалов нулей нет совсем, но в каждый из интервалов попадает хотя бы один или даже два таких нуля. Слово «интервал» мы понимаем здесь расширительно — как любой связный промежуток вещественной оси.

**Теорема 7.6.** *Для характеристической функции $L(\lambda) = L(\lambda; T, \alpha, \beta)$ из формулы (5.12) выделим следующие типичные возможности.*

1) *При любом выборе параметров $\alpha > 0$, $\beta > 0$ и $T > 0$ все нули функции (5.12) являются вещественными и отрицательными, строго меньшими числа $(-\pi^2/T^2)$. Точнее, эти нули локализуются в интервалах $[-4k^2\pi^2/T^2,\, -(2k-1)^2\pi^2/T^2)$ при $k \in \mathbb{N}$.*

2) *Также отрицательными будут все нули функции (5.12), если параметры $\alpha, \beta \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ и $T > 0$ связаны условием*

$$-\infty < \beta/\alpha < -T/2. \tag{7.31}$$

*Точнее, тогда нули локализуются в интервалах*

$$(-\pi^2/T^2,\, 0) \quad \text{и} \quad (-(2k+1)^2\pi^2/T^2,\, -4k^2\pi^2/T^2] \quad \text{при} \quad k \in \mathbb{N}.$$

3) *Далее, если параметры $\alpha, \beta \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ и $T > 0$ связаны специальным условием*

$$\beta/\alpha = -T/2 \quad \sim \quad \alpha T + 2\beta = 0, \tag{7.32}$$

*то характеристическая функция* (5.12) *имеет простой нуль в точке* $\lambda = 0$ *и остальные нули, локализованные в интервалах* $(-(2k+1)^2\pi^2/T^2,\ -4k^2\pi^2/T^2]$ *при* $k \in \mathbb{N}$.

4) *Если, наконец, параметры* $\alpha, \beta \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ *и* $T > 0$ *связаны условием*

$$-T/2 < \beta/\alpha < 0, \tag{7.33}$$

*то характеристическая функция* (5.12) *имеет один простой положительный нуль на луче* $(0, +\infty)$ *вида* $\lambda = 4\mu_0^2/T^2$, *где* $\mu = \mu_0$ — *единственный положительный корень уравнения* $2\beta\mu + \alpha T \operatorname{th}\mu = 0$, *и остальные отрицательные нули, локализованные в интервалах* $(-(2k+1)^2\pi^2/T^2,\ -4k^2\pi^2/T^2]$ *при* $k \in \mathbb{N}$.

**Доказательство.** Перечисленные результаты получаются простым сравнением базовой теоремы 7.1 и теоремы 7.5 (с учетом теорем 7.3 и 7.4). Условия (7.31)–(7.33) соответствуют случаям $p \in (-\infty, -1)$, $p = -1$, $p \in (-1, 0)$, разобранным в теореме 7.5 и отнесенным сейчас к параметру $p = 2\beta/(\alpha T)$. Других обоснований не требуется. □

Информацию, заложенную в теорему 7.6, можно уточнять *ad infinitum* путем дополнительного изучения корней трансцендентных уравнений (7.27). Подобные уравнения известны в анализе, начиная с Эйлера [75, с. 300–301] (см. также [84, с. 170–171]); ряд результатов представлен даже в учебной литературе (см. [31, с. 218, 453]). Полученного, впрочем, достаточно для многих содержательных выводов, связанных с исходной обратной задачей (4.1)–(4.3)

**7.4. Признаки единственности и неединственности решения.** Основываясь на работах автора [65, 66] изложим материал. Для сокращения формулировок рассматриваем обратную задачу (4.1)–(4.3) в ее однородной версии (4.1), (5.1). Оператор $A$ по-прежнему считаем линейным и замкнутым. Дадим сначала общие формулировки, а затем всё более и более специализированные.

**Теорема 7.7.** *Пусть у оператора* $A$ *нет вещественных собственных значений. Тогда при любом выборе параметров* $\alpha, \beta \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ *и* $T > 0$ *однородная обратная задача* (4.1), (5.1) *имеет только тривиальное решение* $u(t) \equiv 0$, $g = 0$.

**Доказательство** непосредственно следует из теорем 5.2 и 7.4.

**Теорема 7.8.** *Пусть у оператора* $A$ *нет собственных значений на луче* $(-\infty, 0) \subset \mathbb{R}$. *Тогда при любом выборе параметров* $\alpha > 0$, $\beta > 0$, $T > 0$ *однородная обратная задача* (4.1), (5.1) *имеет только тривиальное решение* $u(t) \equiv 0$, $g = 0$.

**Доказательство** следует из теоремы 5.2 и части 1) теоремы 7.6.

Теоремы 7.7 и 7.8 охватывают множество ситуаций. Так, под действие теоремы 7.8 можно подвести линейные обратные задачи о нахождении источника для эллиптических уравнений в цилиндрических областях, как в работах [3, 44, 50].

**Теорема 7.9.** *Пусть у оператора $A$ нет собственных значений на $(-\infty,-b)\subset\mathbb{R}$ с некоторым числом $b>0$. Тогда при любом выборе параметров $\alpha>0$, $\beta>0$ и $0<T\leqslant\pi/\sqrt{b}$ однородная обратная задача* (4.1), (5.1) *имеет только тривиальное решение* $u(t)\equiv 0$, $g=0$.

**Доказательство.** Так как $T\in(0,\,\pi/\sqrt{b}\,]$, то $-\pi^2/T^2\leqslant -b$. Тем самым, по теореме 7.6, часть 1), все нули характеристической функции (5.12) попадают на луч $(-\infty,-b)$, где нет собственных значений оператора $A$. Применяя теорему 5.2, получаем нужный результат. □

**Теорема 7.10.** *Пусть при выборе $\alpha>0$, $\beta>0$, $T>0$ у оператора $A$ нет вещественных собственных значений в промежутках $[-4k^2\pi^2/T^2,\,-(2k-1)^2\pi^2/T^2)$ ни при каком $k\in\mathbb{N}$. Тогда однородная обратная задача* (4.1), (5.1) *имеет только тривиальное решение* $u(t)\equiv 0$, $g=0$.

Теорема 7.10 является уточнением теоремы 7.8. Доказательство теоремы 7.10 следует из теоремы 5.2 и части 1) теоремы 7.6 — используя указанные интервалы локализации нулей.

**Теорема 7.11.** *Пусть параметры $\alpha,\beta\in\mathbb{R}\setminus\{0\}$ взяты разных знаков, а у оператора $A$ нет собственных значений на луче $(-\infty,0)\subset\mathbb{R}$. Тогда при любом $T$ из интервала*

$$0<T<-2\beta/\alpha \tag{7.34}$$

*однородная обратная задача* (4.1), (5.1) *имеет только тривиальное решение* $u(t)\equiv 0$, $g=0$.

**Доказательство.** Из условия (7.34) следует условие (7.31). Поэтому, применяя часть 2) теоремы 7.6, заключаем, что нули характеристической функции (5.12) попадают на луч $(-\infty,0)$, где нет собственных значений оператора $A$. В итоге, по теореме 5.2, получаем нужный результат. □

**Теорема 7.12.** *Пусть при выборе параметров $\alpha,\beta\in\mathbb{R}\setminus\{0\}$ разных знаков и при выборе $T$ из интервала* (7.34) *у оператора $A$ нет вещественных собственных значений в промежутке $(-\pi^2/T^2,\,0)$ и в промежутках $(-(2k+1)^2\pi^2/T^2,\,-4k^2\pi^2/T^2]$ ни при каком $k\in\mathbb{N}$. Тогда однородная обратная задача* (4.1), (5.1) *имеет только тривиальное решение* $u(t)\equiv 0$, $g=0$.

Теорема 7.12 является уточнением теоремы 7.11. Аналогично, как и для теоремы 7.11, доказательство теоремы 7.12 следует из теоремы 5.2 и части 2) теоремы 7.6 (условие (7.31) следует из условия (7.34)) с использованием указанных промежутков локализации нулей.

**Теорема 7.13.** *Пусть при выборе параметров* $\alpha, \beta \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ *и* $T > 0$, *связанных специальным условием* $\alpha T + 2\beta = 0$, *у оператора* $A$ *нет собственных значений на множестве*

$$I \equiv \bigcup_{k=0}^{\infty} I_k,$$

*где* $I_0 = \{0\}$ *и* $I_k = (-(2k+1)^2\pi^2/T^2,\ -4k^2\pi^2/T^2]$ *при* $k \in \mathbb{N}$. *Тогда однородная обратная задача* (4.1), (5.1) *имеет только тривиальное решение* $u(t) \equiv 0$, $g = 0$. *В частности, для теоремы подходит любой оператор* $A$ *без собственных значений на замкнутом луче* $(-\infty, 0\,] \subset \mathbb{R}$.

**Доказательство** следует из теоремы 5.2 и части 3) теоремы 7.6.

**Теорема 7.14.** *Пусть при выборе параметров* $\alpha, \beta \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ *разных знаков и при выборе* $T$ *из интервала*

$$-2\beta/\alpha < T < +\infty \tag{7.35}$$

*у оператора* $A$ *нет собственных значений в промежутке* $(0, +\infty)$ *и в промежутках* $(-(2k+1)^2\pi^2/T^2,\ -4k^2\pi^2/T^2]$ *ни при каком* $k \in \mathbb{N}$. *Тогда однородная обратная задача* (4.1), (5.1) *имеет только тривиальное решение* $u(t) \equiv 0$, $g = 0$.

**Доказательство.** Из условия (7.35) следует условие (7.33). Поэтому, по части 4) теоремы 7.6, все нули характеристической функции (5.12) локализуются в промежутке $(0, +\infty)$ и в промежутках $(-(2k+1)^2\pi^2/T^2,\ -4k^2\pi^2/T^2]$ при $k \in \mathbb{N}$, где нет собственных значений оператора $A$. В итоге, по теореме 5.2, получаем нужный результат. □

Теоремы 7.7–7.14 дают удобные признаки единственности решения обратной задачи (4.1), (5.1). На практике стоит учитывать также противоположные по смыслу признаки неединственности решения. Сформулируем несколько наглядных утверждений.

**Теорема 7.15.** *Рассмотрим однородную обратную задачу* (4.1), (5.1) *с фиксированным значением* $T > 0$. *Предположим, что какое-то из чисел* $\lambda_k = -4k^2\pi^2/T^2$ *с некоторым* $k \in \mathbb{N}$ *является собственным значением оператора* $A$. *Тогда единственность решения задачи* (4.1), (5.1) *нарушается при любом выборе* $\alpha, \beta \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$.

*В частности, согласно формуле* (5.14), *задача* (4.1), (5.1) *имеет нетривиальное решение*

$$u(t) = \frac{T^2}{4k^2\pi^2}\left(1 - \cos\frac{2k\pi t}{T}\right) f_k, \qquad g = f_k \tag{7.36}$$

*с собственным вектором* $f_k \neq 0$, *таким, что* $f_k \in D(A)$ *и* $Af_k = -(4k^2\pi^2/T^2) f_k$.

**Доказательство.** По теореме 7.1 взятое собственное значение $\lambda_k = -4k^2\pi^2/T^2$ попадает в серию (7.12) и является нулем характеристической функции (5.12). Но тогда, согласно теореме 5.2, единственность решения нарушается в задаче (4.1), (5.1). Нетривиальное решение вида (7.36) можно построить, согласно лемме 5.1, по формуле (5.14), при подстановке собственного значения $a = \lambda_k = -4k^2\pi^2/T^2$ с собственным вектором $f = f_k$, где $f_k \neq 0$ и $f_k \in D(A)$. Непосредственная подстановка в задачу подтверждает, что соотношения (4.1), (5.1) выполнены при всех $\alpha, \beta \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$. $\square$

Теорема 7.15 можно записать в следующей эквивалентной форме.

**Теорема 7.16.** *Пусть оператор* $A$ *имеет отрицательное собственное значение* $\lambda = -\gamma^2$, *где* $\gamma > 0$. *Пусть* $T = 2k\pi/\gamma > 0$ *с некоторым* $k \in \mathbb{N}$. *Тогда при любых* $\alpha, \beta \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ *единственность решения в обратной задаче* (4.1), (5.1) *нарушается, и задача имеет нетривиальное решение вида* (7.36) *с собственным вектором* $f_k \neq 0$, *таким, что* $f_k \in D(A)$ *и* $Af_k = -(4k^2\pi^2/T^2) f_k$.

Для доказательства теоремы 7.16 см. доказательство теоремы 7.15 с учетом, что $\lambda = -\gamma^2 = -4k^2\pi^2/T^2$.

В простых «гиперболических» примерах для уравнения колебаний струны оператор $A$ обладает серией собственных значений $\lambda_m = -(m\pi/l)^2$ при $m \in \mathbb{N}$, где $l > 0$ — длина струны. Тогда, как следует из теоремы 7.16, обратная задача (4.1), (5.1) имеет нетривиальные решения вида (7.36) в любой момент времени $T = T_{k,m} \equiv 2l(k/m)$, где $k, m \in \mathbb{N}$. Указанные моменты образуют счетное всюду плотное множество на луче $0 < T < \infty$, т. е. этот «гиперболический» случай в обратных задачах подобен по своей некорректности так называемой *задаче Дирихле* для уравнения колебаний струны (см. [82]; ср. с [16, с. 140–143] и [40, с. 1619–1620]).

Следующие два результата имеют более специальный характер.

**Теорема 7.17.** *Пусть* $\lambda_0 = 0$ — *собственное значение оператора* $A$, *т. е.* $Af_0 = 0$, *с элементом* $f_0 \in D(A)$, $f_0 \neq 0$. *Предположим, что параметры* $\alpha, \beta \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ *и* $T > 0$ *связаны условием* $\alpha T + 2\beta = 0$. *Тогда однородная обратная задача* (4.1), (5.1) *имеет нетривиальное решение*

$$u(t) = (t^2/2) f_0, \qquad g = f_0. \tag{7.37}$$

**Доказательство.** По теореме 7.6 с условием (7.32) собственное значение $\lambda_0 = 0$ является нулем характеристической функции (5.12). Воспользуемся формулой (5.14) вместе с уточнением, указанным в (5.6) для $\lambda = 0$. Получим пару (7.37). Проверка соотношений (4.1), (5.1) здесь не представляет труда. □

**Теорема 7.18.** *Пусть при выборе параметров* $\alpha$, $\beta \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ *разных знаков и при выборе* $T$ *из интервала* (7.35) *оператор* $A$ *имеет собственное значение* $\lambda = 4\mu_0^2/T^2$, *где* $\mu_0 = \mu$ *— единственный положительный корень уравнения*

$$2\beta\mu + \alpha T \operatorname{th} \mu = 0. \tag{7.38}$$

*Тогда однородная обратная задача* (4.1), (5.1) *имеет нетривиальное решение*

$$u(t) = \frac{T^2}{4\mu_0^2} \left( \operatorname{ch} \frac{2\mu_0 t}{T} - 1 \right) f_0, \qquad g = f_0 \tag{7.39}$$

*с собственным вектором* $f_0 \neq 0$, *таким, что* $f_0 \in D(A)$ *и* $Af_0 = (4\mu_0^2/T^2) f_0$.

**Доказательство.** Поскольку, из условия (7.35) следует (7.33), то, по части 4) теоремы 7.6, собственное значение $\lambda = 4\mu_0^2/T^2$, где $\mu = \mu_0$ — единственный положительный корень уравнения (7.37), является нулем характеристической функции (5.12). Тогда, согласно лемме 5.1, нетривиальное решение задачи (4.1), (5.1) можно построить по формуле (5.14) при подстановке собственного значения $a = \lambda = 4\mu_0^2/T^2$ с собственным вектором $f = f_0$, где $f_0 \neq 0$ и $f_0 \in D(A)$. Получим пару (7.39). Непосредственная подстановка этой пары в задачу подтверждает, что все соотношения (4.1), (5.1) выполнены. □

Все перечисленные утверждения полезны на практике и применимы для широкого класса линейных операторов. Уточняя распределение нулей характеристической функции (5.12), можно получать более специальные признаки единственности (и неединственности) решения обратной задачи (4.1), (5.1). Особо отметим необходимость дополнительных исследований для случая невещественных значений $\alpha, \beta \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$.

Ясно, что когда много собственных значений оператора $A$ совпадает с нулями характеристической функции (5.12), мы можем комбинировать возникающие пары вида (5.14), осуществляя синтез все более сложных решений однородной обратной задачи (4.1), (5.1). В совсем уже специальных случаях, когда характеристическая функция (5.12) имеет кратный нуль кратности два (см. теорему 7.2), возможны примеры, где кроме элементарных решений вида (5.14) появляются *присоединенные элементарные решения* $(u(t), g)$, учитывающие наличие у оператора $A$ не только собственных векторов из $D(A)$, но и присоединенных векторов из $D(A^2)$ (см. [8], также см. [7]).

# § 8. Присоединенные решения обратной задачи

Как было установлено для обратной задачи (4.1), (5.1) (однородная версия задачи (4.1)–(4.3)), в теории неклассических задач для эволюционных дифференциальных уравнений есть много результатов общего плана, выражающих единственность решения изучаемой задачи в терминах распределения нулей соответствующей характеристической целой функции (см. [55, 57, 58, 70, 71]). С этими нулями связаны *элементарные решения* линейной однородной задачи, дающие для нее простые примеры неединственности. Иногда нули могут оказаться кратными, и тогда в задаче помимо элементарных решений возникают дополнительные *присоединенные решения*, представляющие самостоятельный интерес на практике. Отмеченный эффект обсуждался в [8] для модельной обратной задачи (4.1), (5.1) — при $T = 1$, и для классического решения (4.5) (см. также [7, 68]). Представим развернутое изложение материала для задачи (4.1), (5.1) с конкретными примерами. При построении примеров используем одну идею В. А. Ильина, связанную с несамосопряженными дифференциальными операторами.

**8.1. Присоединенные решения обратной задачи.** Рассмотрим однородную обратную задачу (4.1), (5.1) с параметрами $\alpha,\, \beta \in \mathbb{C},\ |\alpha| + |\beta| > 0,\ T > 0$. Предположим, что некоторый нуль $\lambda = a$ характеристической функции (5.12) является собственным значением оператора $A$ с собственным вектором $f \in D(A),\ f \neq 0$. Тогда, по лемме 5.1 с учетом замечания 5.1, задача (4.1), (5.1) имеет нетривиальное элементарное решение вида (5.14). При этом, как видели в параграфе 7, пункты 7.1 и 7.2, нельзя исключать, что $\lambda = a$ есть кратный нуль характеристической функции (5.12). Покажем, что в таком случае помимо *элементарных решений* обратной задачи могут возникать дополнительные *присоединенные решения*, представляющие самостоятельный интерес.

Заметим, что функции $y(t, \lambda)$ и $L(\lambda)$ из формул (5.6) и (5.12) связаны соотношением

$$\alpha\, y(T, \lambda) + \beta\, y_t'(T, \lambda) = L(\lambda), \tag{8.1}$$

действующим при всех $\lambda \in \mathbb{C}$. Затем, исходя из формулы (5.6), введем функцию

$$s(t, \lambda) \equiv \frac{dy(t, \lambda)}{d\lambda} = \frac{\sqrt{\lambda}\, t\, \operatorname{sh}(\sqrt{\lambda}\, t) \,-\, 2\operatorname{ch}(\sqrt{\lambda}\, t) + 2}{2\lambda^2} = \sum_{j=0}^{\infty} \lambda^j\, \frac{(j+1)\, t^{2j+4}}{(2j+4)!}\,. \tag{8.2}$$

Дифференцируя по $\lambda$ равенства (5.3), (5.4) и (8.1), заключаем при всех $\lambda \in \mathbb{C}$, что

$$s_{tt}''(t, \lambda) = \lambda s(t, \lambda) + y(t, \lambda), \quad 0 \leqslant t \leqslant T, \tag{8.3}$$

$$s(0,\lambda) = 0, \qquad s_t'(0,\lambda) = 0, \tag{8.4}$$

$$\alpha\, s(T,\lambda) + \beta\, s_t'(T,\lambda) = L'(\lambda). \tag{8.5}$$

Допустим, что параметры $\alpha,\, \beta \in \mathbb{C},\ |\alpha| + |\beta| > 0,\ T > 0$, выбраны так, что характеристическая функция $L(\lambda)$ имеет нуль $\lambda = a \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ кратности два, т. е.

$$L(a) \;=\; L'(a) \;=\; 0. \tag{8.6}$$

Предположим, что тот же нуль $\lambda = a$ оказался кратным собственным значением оператора $A$ с собственным вектором $f \in D(A)$, $f \neq 0$, и присоединенным к нему вектором $f^+ \in D(A^2)$, $f^+ \neq 0$.

Согласно общему определению [30, с. 117] это означает, что

$$Af = a f, \qquad Af^+ = a f^+ + f. \tag{8.7}$$

Но тогда, с учетом имеющихся соотношений (5.3), (5.4), (8.1) и (8.3)–(8.7), элементарно проверяется, что пара

$$u(t) = y(t,a)\, f^+ + s(t,a)\, f, \qquad g = f^+ \tag{8.8}$$

является решением обратной задачи (4.1), (5.1). В силу понятной аналогии такие решения будем называть *присоединенными решениями* обратной задачи.

Используя явные представления для функций $y(t,\lambda)$ и $s(t,\lambda)$ (см. (5.6) и (8.2)), пару (8.8) можно записать в виде

$$u(t) \;=\; \frac{\operatorname{ch}(\sqrt{a}\, t) - 1}{a}\, f^+ \;+\; \frac{\sqrt{a}\, t\, \operatorname{sh}(\sqrt{a}\, t) \;-\; 2\operatorname{ch}(\sqrt{a}\, t) + 2}{2a^2}\, f, \qquad g = f^+. \tag{8.9}$$

Итак, установлен следующий результат.

**Теорема 8.1.** *Пусть* $\lambda = a \in \mathbb{C}$ *есть нуль кратности два для характеристической функции* (5.12) *и, одновременно, кратное собственное значение оператора* $A$ *в смысле определения* (8.7) *с собственным вектором* $f \in D(A)$, $f \neq 0$, *и присоединенным вектором* $f^+ \in D(A^2)$, $f^+ \neq 0$. *Тогда обратная задача* (4.1), (5.1) *с фиксированными параметрами* $\alpha,\, \beta \in \mathbb{C}$, $|\alpha| + |\beta| > 0$, $T > 0$, *помимо элементарного решения* (5.14) *имеет присоединенное решение* (8.9).

Подчеркнем, что присоединенные решения обратной задачи формально не связаны с ее элементарными решениями — и те, и те независимо друг от друга удовлетворяют одним и тем же соотношениям (4.1), (5.1). Запись (8.9) можно привести к следующему эквивалентному виду

$$u(t) \;=\; \frac{1}{a^2}\,\bigl(\operatorname{ch}(\sqrt{a}\,t)-1\bigr)\,\bigl(af^+-f\bigr)\;+\;\frac{1}{2a\sqrt{a}}\,t\,\operatorname{sh}(\sqrt{a}\,t)\,f, \qquad g=f^+, \tag{8.10}$$

где

$$Af=af, \qquad A(af^+-f)=a^2f^+ \tag{8.11}$$

в согласии с определением (8.7). Дальнейшие уточнения для (8.10) и (8.11) зависят от того, с каким из двух возможных случаев связано появление кратного нуля в формуле (8.6). Разберем варианты в виде двух отдельных примеров.

**Пример 1.** Пусть $\alpha\neq 0$, $\beta=0$, как для финального переопределения первого рода. Тогда задача (4.1), (5.1) приводится к виду

$$\begin{cases} u''(t)=Au(t)+g, \qquad 0<t<T,\\[2mm] u(0)=0, \quad u'(0)=0, \quad u(T)=0. \end{cases} \tag{8.12}$$

Здесь, согласно параграфу 7, пункт 7.1, характеристическая функция (5.12) имеет множество нулей (7.1), и каждый из нулей имеет кратность два.

Зафиксируем один такой нуль $\lambda_k^{(1)}=-4k^2\pi^2/T^2$ из множества (7.1) с конкретным $k\in\mathbb{N}$, обозначив его, как принято, через $a$. Предположим, что $a=-4k^2\pi^2/T^2$ есть кратное собственное значение оператора $A$ в смысле (8.7) с собственным вектором $f=f_k\neq 0$ и присоединенным вектором $f^+=f_k^+\neq 0$. Тогда, по лемме 5.1 с учетом замечания 5.1., обратная задача (8.12) имеет нетривиальное элементарное решение вида (5.14), а по теореме 8.1 — присоединенное решение вида (8.9) или, что эквивалентно, вида (8.10). Дадим явные выражения для этих решений.

Для значения $a=-4k^2\pi^2/T^2$ элементарное решение (5.14) принимает вид

$$u(t)=\frac{T^2}{4k^2\pi^2}\,\left(1-\cos\frac{2k\pi t}{T}\right)\,f_k, \qquad g=f_k, \tag{8.13}$$

а присоединенное решение (8.10) — соответственно вид

$$\begin{gathered} u(t)=\frac{T^4}{16k^4\pi^4}\left(1-\cos\frac{2k\pi t}{T}\right)\left(\frac{4k^2\pi^2}{T^2}\,f_k^+ + f_k\right)\;-\;\frac{T^3}{16k^3\pi^3}\,t\,\sin\frac{2k\pi t}{T}\,f_k,\\ g\;=\;f_k^+. \end{gathered} \tag{8.14}$$

Для таких пар проверка соотношений из системы (8.12) производится прямой подстановкой. При этом используется лишь то, что $k \in \mathbb{N}$, а также то, что

$$Af_k = -\frac{4k^2\pi^2}{T^2}\, f_k, \qquad A\left(\frac{4k^2\pi^2}{T^2}\, f_k^+ + f_k\right) = -\frac{16k^4\pi^4}{T^4}\, f_k^+ \tag{8.15}$$

в согласии с формулой (8.11), взятой при $a = -4k^2\pi^2/T^2$.

**Пример 2.** Пусть значения $\alpha, \beta \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$, $T > 0$ связаны условием (7.22) с некоторым корнем $z_0 \neq 0$ уравнения $\operatorname{sh} z = z$. Тогда задача (4.1), (5.1) приводится к виду

$$\begin{cases} u''(t) = Au(t) + g, \qquad 0 < t < T, \\ u(0) = 0, \quad u'(0) = 0, \quad (\operatorname{ch} z_0 + 1)u(T) - T\,u'(T) = 0. \end{cases} \tag{8.16}$$

Здесь, согласно параграфу 7, пункт 7.2, характеристическая функция (5.12) имеет нуль $\lambda = z_0^2/T^2$ кратности два. Сохраняя прежний стиль, обозначим $a = z_0^2/T^2$.

Рассуждаем по схеме. Допустим, что $a = z_0^2/T^2$ есть кратное собственное значение оператора $A$ в смысле (8.7) с собственным вектором $f = f_0 \neq 0$ и присоединенным вектором $f^+ = f_0^+ \neq 0$. Воспользуемся леммой 5.1 и теоремой 8.1. Для $a = z_0^2/T^2$ элементарное решение (5.14) принимает вид

$$u(t) = \frac{T^2}{z_0^2}\left(\operatorname{ch}\frac{z_0 t}{T} - 1\right) f_0, \qquad g = f_0, \tag{8.17}$$

а присоединенное решение (8.10) — соответственно вид

$$u(t) = \frac{T^4}{z_0^4}\left(\operatorname{ch}\frac{z_0 t}{T} - 1\right)\left(\frac{z_0^2}{T^2}\, f_0^+ - f_0\right) + \frac{T^3}{2z_0^3}\, t\,\operatorname{sh}\frac{z_0 t}{T}\, f_0, \qquad g = f_0^+. \tag{8.18}$$

При этом

$$Af_0 = \frac{z_0^2}{T^2} f_0, \qquad A\left(\frac{z_0^2}{T^2}\, f_0^+ - f_0\right) = \frac{z_0^4}{T^4}\, f_0^+ \tag{8.19}$$

согласно формуле (8.11), взятой при $a = z_0^2/T^2$.

Подстановка в систему (8.16) подтверждает правильность наших ответов: при проверке дифференциального уравнения используются соотношения (8.19), а при проверке последнего условия $(\operatorname{ch} z_0 + 1)u(T) - T\,u'(T) = 0$ — формула $\operatorname{ch}^2 z - 1 = \operatorname{sh}^2 z$ и связь $\operatorname{sh} z_0/z_0 = 1$, действующая в силу выбора значения $z_0 \neq 0$. Всё прочее дают прямые вычисления.

Осталось понять, насколько эти идеи воплотимы на практике. Другими словами, требуются конкретные примеры операторов $A$ с кратными собственными значениями в подходящих точках комплексной плоскости. При этом, поскольку для присоединенных решений обратных задач нужны присоединенные векторы оператора, сразу исключим из рассмотрения все самосопряженные варианты для $A$, где присоединенные векторы, как известно, отсутствуют.

**8.2. Несамосопряженные задачи с кратными спектрами.** Простую и естественную идею для получения нужной нам конструкции предложил по другому поводу В. А. Ильин. Как отмечено в его статьях [18, 19], следующий пример полезен для общей теории линейных несамосопряженных операторов и связан с модельными задачами из физики плазмы. Подробный разбор деталей, связанных с обсуждаемым случаем, см. в работе [20].

**Пример 3.** Рассмотрим краевую задачу

$$\begin{cases} f''(x) = \mu f(x), \qquad 0 \leqslant x \leqslant 1, \\ f(0) = 0, \quad f'(0) = f'(1), \end{cases} \tag{8.20}$$

со спектральным параметром $\mu \in \mathbb{C}$. Обратим внимание, что второе краевое условие является здесь нелокальным.

Задаче (8.20) соответствует оператор $A = d^2/dx^2$ в пространстве $L_2(0,1)$ на области определения

$$D(A) = \{\, f \in H^2(0,1)\colon \quad f(0) = 0, \;\; f'(0) = f'(1) \,\}.$$

Данный оператор имеет кратные собственные значения

$$\mu_k = -4k^2\pi^2, \qquad k \in \mathbb{N}, \tag{8.21}$$

с соответствующими собственными и присоединенными функциями

$$f_k(x) = \sin(2k\pi x), \qquad f_k^+(x) = -\frac{1}{4k\pi}\, x\cos(2k\pi x), \qquad k \in \mathbb{N}. \tag{8.22}$$

Помимо чисел (8.21) в спектр оператора $A$ входит также простое собственное значение $\mu_0 = 0$ с собственной функцией $f_0(x) = x$, но оно нам не понадобится.

Все функции (8.22) удовлетворяют на $[\,0,1\,]$ нужным краевым условиям и соотношениям

$$A\, f_k(x) = -4k^2\pi^2\, f_k(x), \qquad A\, f_k^+(x) = -4k^2\pi^2\, f_k^+(x) + f_k(x). \tag{8.23}$$

Очевидная эквивалентность (8.23) и (8.15) (при $T = 1$) показывает, что предложенный оператор, хорошо сочетаясь с обратной задачей (8.12), позволяет получить для нее конкретный пример с бесконечной серией элементарных и присоединенных решений.

Окончательные формулы приведем в пункте 8.3, а пока разовьем идею и построим пример более сложного оператора $A$, приспособленного, в том числе, для специальной обратной задачи (8.16).

**Пример 4.** Рассмотрим задачу с трехточечным нелокальным условием

$$\begin{cases} f''(x) = \mu\, f(x), & 0 \leqslant x \leqslant 2, \\ f'(0) = 0, \quad b_0\, f(0) + b_1\, f(1) + b_2\, f(2) = 0, \end{cases} \tag{8.24}$$

и спектральным параметром $\mu \in \mathbb{C}$. Коэффициенты $b_0,\, b_1,\, b_2 \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ считаем заданными.

Задаче (8.24) соответствует оператор $A = d^2/dx^2$ в пространстве $L_2(0,2)$ на области определения

$$D(A) = \{\, f \in H^2(0,2)\colon \;\; f'(0) = 0, \;\; b_0\, f(0) + b_1\, f(1) + b_2\, f(2) = 0\,\}.$$

Выясним, как влияет выбор коэффициентов $b_0,\, b_1,\, b_2 \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ на спектральные свойства оператора $A$. Точнее, нас интересует возможность получения кратных собственных значений в тех или иных точках комплексной плоскости.

Положим

$$v(x,\mu) \equiv \operatorname{ch}(\sqrt{\mu}\, x)\,, \qquad F(\mu) \equiv b_0 + b_1 \operatorname{ch}\sqrt{\mu} + b_2 \operatorname{ch}(2\sqrt{\mu}\,)\,. \tag{8.25}$$

Тогда при всех $\mu \in \mathbb{C}$ имеем соотношения

$$\begin{cases} v''_{xx}(x,\mu) = \mu\, v(x,\mu), & 0 \leqslant x \leqslant 2, \\ v'_x(0,\mu) = 0, \quad b_0\, v(0,\mu) + b_1\, v(1,\mu) + b_2\, v(2,\mu) = F(\mu). \end{cases} \tag{8.26}$$

Продифференцируем (8.25) и (8.26) по переменной $\mu$. Получим функции

$$w(x,\mu) \equiv \frac{dv(x,\mu)}{d\mu} = x\, \frac{\operatorname{sh}(\sqrt{\mu}\, x)}{2\sqrt{\mu}}, \qquad F'(\mu) = b_1\, \frac{\operatorname{sh}\sqrt{\mu}}{2\sqrt{\mu}} + b_2\, \frac{\operatorname{sh}(2\sqrt{\mu}\,)}{\sqrt{\mu}} \tag{8.27}$$

и систему

$$\begin{cases} w''_{xx}(x,\mu) = \mu\, w(x,\mu) + v(x,\mu), & 0 \leqslant x \leqslant 2, \\ w'_x(0,\mu) = 0, \quad b_0\, w(0,\mu) + b_1\, w(1,\mu) + b_2\, w(2,\mu) = F'(\mu), \end{cases} \tag{8.28}$$

также верную при всех $\mu \in \mathbb{C}$. Допустим, что $\mu = \mu_0 \in \mathbb{C}$ есть кратный нуль целой функции $F(\mu)$. Соответственно

$$F(\mu_0) = F'(\mu_0) = 0 \tag{8.29}$$

(возможно, что кратность данного нуля больше, чем два, но это сейчас для нас не важно). Рассматривая системы (8.26), (8.28) вместе с условием (8.29), заключаем, что пара $f_0(x) \equiv v(x,\mu_0)$ и $f_0^+(x) \equiv w(x,\mu_0)$ дает собственную и присоединенную функции оператора $A$ с кратным собственным значением $\mu = \mu_0$. Взяв явные выражения из формул (8.25) и (8.27), запишем подробно

$$f_0(x) = \operatorname{ch}(\sqrt{\mu_0}\, x)\,, \qquad f_0^+(x) = x\, \frac{\operatorname{sh}(\sqrt{\mu_0}\, x)}{2\sqrt{\mu_0}}. \tag{8.30}$$

При этом $Af_0(x) = \mu_0\, f_0(x)$ и $Af_0^+(x) = \mu_0\, f_0^+(x) + f_0(x)$.

Осталось проанализировать условие (8.29) и понять, когда оно будет выполняться. Начнем с более простого уравнения $F'(\mu_0) = 0$ для функции

$$F'(\mu) = b_1 \frac{\operatorname{sh} \sqrt{\mu}}{2\sqrt{\mu}} + b_2 \frac{\operatorname{sh}(2\sqrt{\mu})}{\sqrt{\mu}} = \frac{\operatorname{sh} \sqrt{\mu}}{\sqrt{\mu}} \left( \frac{b_1}{2} + 2b_2 \operatorname{ch} \sqrt{\mu} \right). \tag{8.31}$$

Первый сомножитель $S(\mu) \equiv \operatorname{sh} \sqrt{\mu} / \sqrt{\mu}$ имеет нули

$$\mu = \mu(n) \equiv -n^2\pi^2, \qquad n \in \mathbb{N}. \tag{8.32}$$

Подставим числа (8.32) в функцию $F(\mu)$ из формулы (8.25). Выделим здесь два случая.

1) Пусть $n = 2k$ и $\mu_k \equiv \mu(2k) = -4k^2\pi^2$ при $k \in \mathbb{N}$. Условие $F(\mu_k) = 0$ эквивалентно тому, что

$$b_0 + b_1 + b_2 = 0. \tag{8.33}$$

При выполнении (8.33) все нули $\mu_k = -4k^2\pi^2$ являются кратными для $F(\mu)$ и дают кратные собственные значения оператора $A$ с собственными и присоединенными функциями

$$f_k(x) = \cos(2k\pi x), \qquad f_k^+(x) = \frac{1}{4k\pi}\, x \sin(2k\pi x), \tag{8.34}$$

полученными по принципу (8.30) при замене там $\mu_0$ на $\mu_k = -4k^2\pi^2$.

2) Пусть теперь $n = 2k - 1$ и $\mu_k \equiv \mu(2k-1) = -(2k-1)^2\pi^2$ при $k \in \mathbb{N}$. Тогда условие $F(\mu_k) = 0$ эквивалентно тому, что

$$b_0 - b_1 + b_2 = 0. \tag{8.35}$$

В случае (8.35) все нули $\mu_k = -(2k-1)^2\pi^2$ являются кратными для $F(\mu)$ и дают кратные собственные значения оператора $A$ с собственными и присоединенными функциями

$$f_k(x) = \cos((2k-1)\pi x), \quad f_k^+(x) = \frac{1}{2(2k-1)\pi}\, x \sin((2k-1)\pi x), \tag{8.36}$$

полученными по принципу (8.30) при замене там $\mu_0$ на $\mu_k = -(2k-1)^2\pi^2$.

Условия (8.33) и (8.35) охватывают целые классы спектральных задач вида (8.24), у которых заведомо будут кратные собственные значения. Но числа из серии (8.32), вещественные и отрицательные, не подходят под цели, связанные со специальной обратной задачей (8.16). Действительно, для (8.16) (рассмотрим при $T = 1$) нужен оператор $A$, имеющий кратное собственное значение $a = z_0^2$ с корнем $z_0 \neq 0$ уравнения $\operatorname{sh} z = z$. Нетрудно понять, что такие корни не попадают на оси $\Re$ и $\operatorname{Im}$. Поэтому значение $a = z_0^2$ не может быть вещественным.

Итак, зафиксируем комплексный корень $z_0 \neq 0$ уравнения $\operatorname{sh} z = z$. Оценим возможность выполнения условия (8.29) со значением $\mu_0 = z_0^2$. Подставим это число вместо $\mu$ в выражения для $F(\mu)$ и $F'(\mu)$ из формул (8.25) и (8.31). Получим систему уравнений для коэффициентов $b_0$, $b_1$, $b_2 \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$, записанную в виде

$$b_0 + b_1 \operatorname{ch} z_0 + b_2 \operatorname{ch}(2z_0) = 0, \qquad \frac{b_1}{2} + 2b_2 \operatorname{ch} z_0 = 0. \tag{8.37}$$

Второе уравнение дает $b_1 = -4b_2 \operatorname{ch} z_0$, после чего из первого имеем

$$b_0 = -b_1 \operatorname{ch} z_0 - b_2 \operatorname{ch}(2z_0) = 4b_2 \operatorname{ch}^2 z_0 - b_2(2\operatorname{ch}^2 z_0 - 1) = b_2(2\operatorname{ch}^2 z_0 + 1).$$

Здесь $\operatorname{ch}^2 z_0 = \operatorname{sh}^2 z_0 + 1 = z_0^2 + 1$. То есть система уравнений (8.37) с учетом специфики значения $z_0$ эквивалентна соотношениям $b_0 = b_2(2z_0^2 + 3)$ и $b_1 = -4b_2 \operatorname{ch} z_0$. Полагая здесь $b_2 = 1$, находим типичную тройку

$$b_0 = 2z_0^2 + 3, \quad b_1 = -4\operatorname{ch} z_0, \quad b_2 = 1, \tag{8.38}$$

обращающую оба уравнения (8.37) в верные тождества. Выбор значений (8.38) обеспечивает выполнение условия (8.29) при $\mu_0 = z_0^2$. Тем самым, спектральная задача

$$\begin{cases} f''(x) = \mu f(x), \qquad 0 \leqslant x \leqslant 2, \\ f'(0) = 0, \quad (2z_0^2 + 3) f(0) - 4\operatorname{ch} z_0 \cdot f(1) + f(2) = 0, \end{cases} \tag{8.39}$$

порождает оператор $A = d^2/dx^2$, имеющий кратное собственное значение $\mu_0 = z_0^2$ с собственной и присоединенной функциями

$$f_0(x) = \operatorname{ch}(z_0 x), \qquad f_0^+(x) = \frac{1}{2z_0}\, x \operatorname{sh}(z_0 x) \tag{8.40}$$

согласно формуле (8.30). Проверка всех нужных соотношений для пары (8.40) производится, в том числе, непосредственно. Речь идет о попадании этих функций в $D(A)$ вместе с условиями $Af_0(x) = z_0^2 f_0(x)$ и $Af_0^+(x) = z_0^2 f_0^+(x) + f_0(x)$. При дальнейшем использовании в обратных задачах кратному собственному значению $\mu_0 = z_0^2$ можно вернуть стандартное обозначение $a = z_0^2$.

Но прежде чем вновь говорить про обратные задачи, зафиксируем итоговый результат относительно спектральной задачи (8.24).

**Теорема 8.2.** 1) *Пусть коэффициенты* $b_0$, $b_1$, $b_2 \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ *в нелокальном условии из спектральной задачи* (8.24) *выбраны так, что* $b_0 + b_1 + b_2 = 0$. *Тогда спектр задачи* (8.24) *содержит кратные собственные значения* $\mu_k = -4k^2\pi^2$ *с собственными и присоединенными функциями вида* (8.34) *при всех* $k \in \mathbb{N}$.

2) *Пусть коэффициенты* $b_0$, $b_1$, $b_2 \in \mathbb{C}\setminus\{0\}$ *в нелокальном условии из спектральной задачи* (8.24) *выбраны так, что* $b_0 - b_1 + b_2 = 0$. *Тогда спектр задачи* (8.24) *содержит кратные собственные значения* $\mu_k = -(2k-1)^2\pi^2$ *с собственными и присоединенными функциями вида* (8.36) *при всех* $k \in \mathbb{N}$.

3) *Пусть коэффициенты* $b_0, b_1, b_2 \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ *в нелокальном условии из спектральной задачи* (8.24) *выбраны согласно* (8.38) *с некоторым комплексным корнем* $z_0 \neq 0$ *уравнения* $\operatorname{sh} z = z$. *Тогда спектр задачи* (8.24) *или, что эквивалентно, задачи* (8.39) *содержит кратное собственное значение* $\mu_0 = z_0^2$ *с собственной и присоединенной функциями вида* (8.40).

Полное обоснование теоремы 8.2 дают приведенные выше рассуждения.

**8.3. Конкретные примеры обратных задач.** Вернемся к изучаемой обратной задаче (4.1), (5.1), точнее, к ее специальным версиям (8.12) и (8.16). На основе проведенных выше рассуждений укажем серию примеров для уравнения колебаний струны с неизвестной правой частью $g(x)$ так, чтобы в соответствующих обратных задачах были элементарные и присоединенные решения. В качестве оператора $A$ выступает вторая производная $d^2/dx^2$, дополненная подходящими краевыми и нелокальными условиями по переменной $x$. Ввиду простоты ситуации и «конечномерности» получаемых функциональных выражений, выбор основного банахова пространства $E$ представляется сейчас не принципиальным. Все наши ответы удовлетворяют поставленным задачам в классическом смысле и допускают прямую проверку подстановкой в заданные формулы.

**Пример 5.** Рассмотрим систему соотношений

$$\begin{cases} u_{tt}(x,t) = u_{xx}(x,t) + g(x), \quad 0 \leqslant x \leqslant 1, \quad 0 \leqslant t \leqslant 1, \\ u(0,t) = 0, \quad u_x(0,t) = u_x(1,t), \\ u(x,0) = u_t(x,0) = 0, \quad u(x,1) = 0 \end{cases} \tag{8.41}$$

с неизвестными функциями $u(x,t)$ и $g(x)$. Это аналог обратной задачи (8.12) (при $T = 1$) с оператором $A = d^2/dx^2$, отвечающим спектральной задаче (8.20). Для такого случая (см. пример 1) характеристическая функция обратной задачи имеет нули $\lambda_k^{(1)} = -4k^2\pi^2$, $k \in \mathbb{N}$, из множества (7.1) (при $T = 1$) и кратности нулей равны двум. Но точно те же числа указаны в формуле (8.21) как кратные собственные значения оператора $A$ (см. пример 3). Совмещая общие шаблоны (8.13) и (8.14) с конкретными выражениями (8.22), получаем элементарные и присоединенные решения для обратной задачи (8.41).

Точнее, элементарные решения имеют вид

$$u(x,t) = \frac{1}{4k^2\pi^2}\,(1-\cos(2k\pi t))\,\sin(2k\pi x), \qquad g(x) = \sin(2k\pi x), \tag{8.42}$$

а присоединенные решения — соответственно вид

$$\begin{gathered} u(x,t) = \frac{1}{16k^4\pi^4}\,(1-\cos(2k\pi t))\,(-k\pi x\cos(2k\pi x)+\sin(2k\pi x)) - \\ -\ \frac{1}{16k^3\pi^3}\,t\,\sin(2k\pi t)\cdot\sin(2k\pi x), \qquad g(x) = -\frac{1}{4k\pi}\,x\cos(2k\pi x). \end{gathered} \tag{8.43}$$

Формулы (8.42), (8.43) применимы при всех $k \in \mathbb{N}$.

Как видим, обратная задача (8.41) оказывается сильно некорректной — она обладает счетным множеством нетривиальных решений вида (8.42) и (8.43). Очевидно, что конечные линейные комбинации найденных пар снова дают решения обратной задачи. Возникает естественный вопрос: хватит ли запаса подобных линейных комбинаций, чтобы аппроксимировать (в том или ином смысле) произвольную пару $(u(x,t),\ g(x))$, удовлетворяющую всем соотношениям в (8.41)?

Эту задачу *спектрального синтеза* проще изучать на основе абстрактной постановки (8.12) в банаховом пространстве $E$. Пример же системы (8.41) показывает, что в случае финального переопределения первого рода, осуществляя спектральный синтез, нельзя обойтись одними элементарными решениями и надо учитывать возможность решений присоединенных. Ограничимся пока сделанным коротким замечанием, так как намеченная тема требует отдельного исследования.

**Пример 6.** Рассмотрим систему соотношений

$$\begin{cases} u_{tt}(x,t) = u_{xx}(x,t) + g(x), \quad 0 \leqslant x \leqslant 2, \quad 0 \leqslant t \leqslant 1, \\ u_x(0,t) = 0, \quad b_0\,u(0,t) + b_1\,u(1,t) + b_2\,u(2,t) = 0, \\ u(x,0) = u_t(x,0) = 0, \quad u(x,1) = 0 \end{cases} \tag{8.44}$$

с заданными значениями $b_0,\ b_1,\ b_2 \in \mathbb{C}\setminus\{0\}$ и неизвестными, как прежде, функциями $u(x,t)$, $g(x)$. Это снова аналог обратной задачи (8.12) (при $T=1$), но теперь уже с оператором $A = d^2/dx^2$, отвечающим спектральной задаче (8.24). Предположим, что выполнено условие (8.33), и применим теорему 8.2 для случая $b_0+b_1+b_2=0$. Получим, что кратные нули из (7.1) (при $T=1$) вновь окажутся кратными собственными значениями оператора $A$. Сочетая прежние шаблоны (8.13) и (8.14) с явными выражениями (8.34), устанавливаем нужные ответы для задачи (8.44).

Точнее, элементарные решения сейчас имеют вид

$$u(x,t) = \frac{1}{4k^2\pi^2}\,(1 - \cos(2k\pi t))\,\cos(2k\pi x), \qquad g(x) = \cos(2k\pi x), \tag{8.45}$$

а присоединенные решения — соответственно вид

$$\begin{aligned} u(x,t) = \frac{1}{16k^4\pi^4}\,(1 - \cos(2k\pi t))\,(k\pi x\sin(2k\pi x) + \cos(2k\pi x)) - \\ - \frac{1}{16k^3\pi^3}\,t\,\sin(2k\pi t)\cdot\cos(2k\pi x), \qquad g(x) = \frac{1}{4k\pi}\,x\sin(2k\pi x). \end{aligned} \tag{8.46}$$

Формулы (8.45), (8.46) применимы при всех $k \in \mathbb{N}$. Построенные решения удовлетворяют обратной задаче (8.44) всякий раз, когда $b_0 + b_1 + b_2 = 0$ (см. условие (8.33)). Фактически получаем целый класс обратных задач вида (8.44), имеющих не только элементарные, но и присоединенные решения. С физической точки зрения брать комплексные коэффициенты не очень естественно, поэтому можно ограничиться случаем $b_0,\, b_1,\, b_2 \in \mathbb{R}\setminus\{0\}$.

Приведем теперь пример, где комплексные коэффициенты в условиях неизбежны из-за математической сути дела.

**Пример 7.** Зафиксируем корень $z_0 \neq 0$ уравнения $\operatorname{sh} z = z$ и рассмотрим систему

$$\begin{cases} u_{tt}(x,t) = u_{xx}(x,t) + g(x), \quad 0 \leqslant x \leqslant 2, \quad 0 \leqslant t \leqslant 1, \\ u_x(0,t) = 0, \quad (2z_0^2 + 3)\,u(0,t) - 4\operatorname{ch} z_0 \cdot u(1,t) + u(2,t) = 0, \\ u(x,0) = u_t(x,0) = 0, \quad (\operatorname{ch} z_0 + 1)u(x,1) - u_t(x,1) = 0 \end{cases} \tag{8.47}$$

с неизвестными функциями $u(x,t)$, $g(x)$. Это аналог обратной задачи (8.16) (при $T = 1$) с оператором $A = d^2/dx^2$, отвечающим спектральной задаче (8.39). Напомним (см. пример 2), что характеристическая функция задачи (8.16) имеет нуль $\lambda = z_0^2$ (при $T = 1$) кратности два, и это же число по теореме 8.2 есть кратное собственное значение для $A$. Тем самым, используя шаблоны (8.17) и (8.18) вместе с явными выражениями (8.40), получаем формулы элементарного и присоединенного решений для задачи (8.47).

Точнее, элементарное решение имеет вид

$$u(x,t) = \frac{1}{z_0^2}\,(\operatorname{ch}(z_0 t) - 1)\,\operatorname{ch}(z_0 x), \qquad g(x) = \operatorname{ch}(z_0 x), \tag{8.48}$$

а присоединенное решение — соответственно вид

$$\begin{aligned} u(x,t) \;=\; \frac{1}{2z_0^4}\,(\operatorname{ch}(z_0 t) - 1)\,(z_0 x\,\operatorname{sh}(z_0 x) - 2\operatorname{ch}(z_0 x)) + \\ + \frac{1}{2z_0^3}\,t\,\operatorname{sh}(z_0 t)\cdot\operatorname{ch}(z_0 x), \qquad g(x) = \frac{1}{2z_0}\,x\operatorname{sh}(z_0 x). \end{aligned} \tag{8.49}$$

Для таких пар все соотношения в системе (8.47) будут выполнены.

Понятно, что с практической точки зрения построенный пример 7 носит искусственный характер, и выбор двух специальных условий в (8.47), связанных с комплексным корнем $z_0 \neq 0$ уравнения $\operatorname{sh} z = z$, трудно объяснить физическими соображениями. Но математически всё законно — построенная обратная задача (8.47) обладает элементарным и присоединенным решениями и соответствует общей ситуации из примера 2, показывая, что можно добиться нужного не самыми сложными средствами. Для того чтобы уйти от комплексных решений для (очевидно) вещественного уравнения колебаний струны, можно овеществить ситуацию, расписав вещественную и мнимую части в системе (8.47) и в получаемых решениях (8.48), (8.49). Возникнет набор выражений непрозрачной структуры, физически осмыслить который по-прежнему затруднительно. Итак, примем результат как чисто математическую конструкцию.

Отметим еще, что пример 7 предлагает сразу счетный набор обратных задач, так как нужных корней у уравнения $\operatorname{sh} z = z$ будет бесконечно много (см. [68, 112]). Половину корней следует, конечно, отбросить. Действительно, вместе с каждым корнем $z = z_0 \neq 0$ уравнение имеет корень $z = -z_0 \neq 0$, и оба этих корня дают одну и ту же систему (8.47) с решениями (8.48), (8.49), не зависящими от выбора знака перед корнем. Поэтому при взятии конкретных примеров можно ограничиться лишь теми корнями уравнения $\operatorname{sh} z = z$, что попадают в полуплоскость $\operatorname{Re} z > 0$. Кроме того, вычисление значения $\operatorname{ch} z_0$, используемого в формуле (8.47), допускает дополнительное уточнение.

Действительно, пусть $z_0 = x_0 + iy_0$ — корень уравнения $\operatorname{sh} z = z$, попадающий в полуплоскость $\operatorname{Re} z > 0$. Здесь $x_0 = \operatorname{Re} z_0$, $y_0 = \operatorname{Im} z_0$, а $i$ — мнимая единица. Используем стандартные представления

$$\operatorname{ch} z_0 = \operatorname{ch} x_0 \cos y_0 + i \operatorname{sh} x_0 \sin y_0, \qquad \operatorname{sh} z_0 = \operatorname{sh} x_0 \cos y_0 + i \operatorname{ch} x_0 \sin y_0.$$

По условию $\operatorname{sh} x_0 \cos y_0 = \operatorname{Re} \operatorname{sh} z_0 = \operatorname{Re} z_0 = x_0 > 0$. Отсюда, во-первых, следует, что $\operatorname{sh} x_0 > 0$, а затем, что $\cos y_0 > 0$. Но тогда и $\operatorname{Re} \operatorname{ch} z_0 = \operatorname{ch} x_0 \cos y_0 > 0$, т. е. значение $\zeta = \operatorname{ch} z$ на выбранном корне $z_0$ попадает в полуплоскость $\operatorname{Re} \zeta > 0$.

Очевидно также, что $\operatorname{ch}^2 z_0 = \operatorname{sh}^2 z_0 + 1 = z_0^2 + 1$. В результате

$$\operatorname{ch} z_0 = \sqrt{z_0^2 + 1}\,, \tag{8.50}$$

где используется *главная ветвь корня*, переводящая плоскость $\mathbb{C}$ с разрезом по лучу $(-\infty, 0\,]$ в полуплоскость $\operatorname{Re} \zeta > 0$. Подстановка (8.50) с однозначно вычисляемым значением $\operatorname{ch} z_0$ применима в предыдущих системах (8.16), (8.39) и (8.47), а также в исходной формуле (7.22), из которой следует данная часть теории.

На этом исследование присоединенных решений в обратной задаче $(4.1), (5.1)$ можно считать в основном завершенным.

# Глава 3.

# Обратная задача для дифференциального уравнения произвольного натурального порядка

В настоящей главе изучается модельная обратная задача для дифференциального уравнения
$$\frac{d^n u(t)}{dt^n} = Au(t) + g, \quad 0 < t < T,$$
произвольного натурального порядка $n \in \mathbb{N}$. Стационарное неоднородное слагаемое $g$ считается неизвестным. Для нахождения пары $(u(t), g)$, помимо стандартных условий Коши, задается дополнительное переопределение, содержащее производную от функции $u(t)$ в финальный момент времени $t = T$. Показано, что вопрос единственности решения в поставленной обратной задаче можно исследовать при минимальных требованиях к оператору $A$, предполагая лишь, что $A$ — линейный и замкнутый в банаховом пространстве $E$.

Важную роль в исследованиях будут играть специальные функции, называемые *обобщенными экспонентами* (или *индикаторными функциями*). Поэтому дадим вначале краткий обзор по теории обобщенных экспонент.

## § 9. Обобщенные экспоненты

Рассматриваем обобщенные экспоненты, включающие в единую схему обобщенные гиперболические и тригонометрические функции [11] и тесно связанные с классическими функциями типа Миттаг-Леффлера [17]. Основываясь на работах [62, 78] (совместных с И. В. Тихоновым), изложим следующий материал.

**9.1. Общие сведения.** Определим специальные функции вида

$$y_{n,m}(t,\lambda) = \frac{t^m}{m!} + \lambda\,\frac{t^{n+m}}{(n+m)!} + \lambda^2\,\frac{t^{2n+m}}{(2n+m)!} + \ldots = \sum_{j=0}^{\infty} \lambda^j\,\frac{t^{jn+m}}{(jn+m)!}\,. \tag{9.1}$$

Здесь $t$ — основное вещественное переменное, параметр $\lambda$ предполагаем комплексным, значение $n$ — натуральным, а $m$ — целым:

$$t \in \mathbb{R}, \quad \lambda \in \mathbb{C}, \quad n \in \mathbb{N}, \quad m \in \mathbb{Z}. \tag{9.2}$$

Значение $n$ называем *индексом* функции $y_{n,m}(t,\lambda)$, а $m$ — ее *номером.*

Как обычно, действует правило

$$\frac{1}{(-1)!} = \frac{1}{(-2)!} = \frac{1}{(-3)!} = \ldots = \frac{1}{(-r)!} = 0, \qquad \forall\, r \in \mathbb{N}, \tag{9.3}$$

обнуляющее соответствующие слагаемые в (9.1) при отрицательных номерах $m \in \mathbb{Z}$. Соглашения (9.2), (9.3) считаем выполненными по умолчанию.

Функции вида (9.1) называем *обобщенными экспонентами* индекса $n$. Встречается также термин *обобщенные $\lambda$–гиперболические функции* порядка $n$ и типа $m$, но мы его использовать не будем. Информация про обобщенные экспоненты и их модификации представлена в [11, 62, 80, 103, 113]. Выделим отдельно специальные классы обобщенных экспонент.

При $\lambda = 1$ формула (9.1) принимает вид

$$y_{n,m}(t,1) = \frac{t^m}{m!} + \frac{t^{n+m}}{(n+m)!} + \frac{t^{2n+m}}{(2n+m)!} + \ldots = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{t^{jn+m}}{(jn+m)!}\,. \tag{9.4}$$

Функции вида (9.4) называют *обобщенными гиперболическими функциями* индекса $n$ (см. [11, 103]).

При $\lambda = -1$ формула (9.1) принимает вид

$$y_{n,m}(t,-1) = \frac{t^m}{m!} - \frac{t^{n+m}}{(n+m)!} + \frac{t^{2n+m}}{(2n+m)!} - \ldots = \sum_{j=0}^{\infty} (-1)^j\,\frac{t^{jn+m}}{(jn+m)!}\,. \tag{9.5}$$

Функции вида (9.5) называют *обобщенными тригонометрическими функциями* индекса $n$ (см. [11, 103]).

Отметим также статьи Поли [108] и Микусинского [102], содержащие много полезных сведений про обобщенные гиперболические и тригонометрические функции соответственно.

Укажем элементарные примеры обобщенных экспонент:

- $y(t) = e^t$ при $n = 1, \quad m = 0 \quad \lambda = 1.$
- $y(t) = \operatorname{ch} t$ при $n = 2, \quad m = 0 \quad \lambda = 1.$
- $y(t) = \operatorname{sh} t$ при $n = 2, \quad m = 1 \quad \lambda = 1.$
- $y(t) = \cos t$ при $n = 2, \quad m = 0 \quad \lambda = -1.$
- $y(t) = \sin t$ при $n = 2, \quad m = 1 \quad \lambda = -1.$

Видно, что функции (9.1) образуют широкий класс, естественный для целей анализа.

Зафиксируем индекс $n \in \mathbb{N}$. Следующие свойства функций (9.1) удобно свести в единую таблицу операционного исчисления:

$$y^{(r)}_{n,m}(t,\lambda) = y_{n,\,m-r}(t,\lambda), \qquad r = 0,\, 1,\, \dots\,, \tag{9.6}$$

$$y^{(n)}_{n,m}(t,\lambda) = \lambda\, y_{n,m}(t,\lambda) + \frac{t^{m-n}}{(m-n)!}, \tag{9.7}$$

$$y^{(n)}_{n,m}(t,\lambda) = \lambda\, y_{n,m}(t,\lambda), \qquad m \leqslant n-1, \tag{9.8}$$

$$y^{(r)}_{n,m}(0,\lambda) = \delta_{m,r}, \qquad m,\, r = \{\, 0,\, \dots\,, n-1\,\}. \tag{9.9}$$

Уточним, что в формулах типа (9.6)–(9.9) производные всегда берутся по основной переменной $t$.

Соотношение (9.7) является частным случаем следующей общей формулы

$$y^{(pn)}_{n,m}(t,\lambda) = \lambda^p\, y_{n,m}(t,\lambda) \,+\, \sum_{j=1}^{p}\, \lambda^{p-j}\, \frac{t^{\,m-jn}}{(m-jn)!}\,, \qquad p = 1,\, 2,\, \dots\,. \tag{9.10}$$

Отсюда, учитывая (9.6), получаем

$$y^{(pn+r)}_{n,m}(t,\lambda) = \lambda^p\, y_{n,\,m-r}(t,\lambda) \,+\, \sum_{j=1}^{p}\, \lambda^{p-j}\, \frac{t^{\,m-jn-r}}{(m-jn-r)!}\,, \tag{9.11}$$

где $p = 1,\, 2,\, \dots,\ r = 0,\, 1,\, \dots$ Кроме того, отметим соотношение

$$y_{n,-pn-r}(t,\lambda) \;=\; y^{(pn+n+r)}_{n,n}(t,\lambda) \;=\; \lambda^{p+1}\, y_{n,\,n-r}(t,\lambda), \tag{9.12}$$

где $p = 0,\, 1,\, \dots,\ \ r = 1,\, 2,\, \dots$ Важность (9.12) состоит в том, что оно позволяет переходить от отрицательных номеров $k = -pn - r$ к неотрицательным $n - r$ за счет выбора подходящих значений $p,\, r$.

Использование формальных правил (9.6)–(9.12) сильно упрощает аналитическую работу с обобщенными экспонентами.

**9.2. Функции Миттаг-Леффлера.** Обобщенные экспоненты (9.1) тесно связаны с целыми функциями типа Миттаг-Леффлера $E_\rho(z;\,\mu)$. Напомним, что

$$E_\rho(z;\,\mu) = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{z^j}{\Gamma(j\rho^{-1}+\mu)}\,, \tag{9.13}$$

где $z \in \mathbb{C}$ — переменное, $\rho > 0$, $\mu \in \mathbb{C}$ — параметры, а $\Gamma$ обозначает гамма-функцию. Теория функций типа Миттаг-Леффлера изложена в [11, 17, 42]. Отметим, что в книге [11] используется другое обозначение. Нас будет интересовать особый случай $\rho = 1/n$ со значением $n \in \mathbb{N}$.

Рассмотрим формулу (9.1), полагая там $t = 1$ и $\lambda = z$. Получим семейство целых функций

$$Y_{n,m}(z) = \frac{1}{m!} + \frac{z}{(n+m)!} + \frac{z^2}{(2n+m)!} + \ \ldots \ = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{z^j}{(jn+m)!}\,, \quad z \in \mathbb{C}. \tag{9.14}$$

Функции (9.14) играют особую роль. Поскольку $a! = \Gamma(a+1)$, то

$$Y_{n,m}(z) = E_{1/n}(z;\, m+1), \qquad z \in \mathbb{C}, \tag{9.15}$$

т.е. $Y_{n,m}(z)$ есть целая функция типа Миттаг-Леффлера (9.13) при выборе параметров $\rho = 1/n$ и $\mu = m+1$.

При этом имеем

$$y_{n,m}(t,\lambda) = t^m\, Y_{n,m}(\lambda t^n) = t^m\, E_{1/n}(\lambda t^n;\, m+1). \tag{9.16}$$

Последовательно подставляя сюда $\lambda = 1$ и $\lambda = -1$, получим связи

$$y_{n,m}(t,1) = t^m\, Y_{n,m}(t^n) = t^m\, E_{1/n}(t^n;\, m+1), \tag{9.17}$$

$$y_{n,m}(t,-1) = t^m\, Y_{n,m}(-t^n) = t^m\, E_{1/n}(-t^n;\, m+1) \tag{9.18}$$

функций Миттаг-Леффлера (9.15) с обобщенными гиперболическими функциями (9.4) и обобщенными тригонометрическими функциями (9.5).

С другой стороны, при фиксированном $t = T > 0$ из формулы (9.16) следует, что

$$y_{n,m}(T,\lambda) = T^m\, Y_{n,m}(\lambda T^n) = T^m\, E_{1/n}(\lambda T^n;\, m+1). \tag{9.19}$$

Учитывая также правило (9.6), имеем формулу

$$y^{(r)}_{n,m}(T,\lambda) = y_{n,\,m-r}(T,\lambda) = T^{m-r}\, Y_{n,\,m-r}(\lambda T^n) = T^{m-r}\, E_{1/n}(\lambda T^n;\, m-r+1). \tag{9.20}$$

Перечисленные соотношения (9.16)–(9.20) позволяют находить взаимосвязи между нулями функций Миттаг-Леффлера и корнями уравнений с обобщенными экспонентами.

**9.3. Нули функции $Y_{n,m}(z)$.** Для функций (9.14) с фиксированными $n \in \mathbb{N}$, $m \in \mathbb{Z}$ определим множество нулей

$$\Lambda_{n,m} \equiv \left\{ z \in \mathbb{C} : Y_{n,m}(z) = 0 \right\} = \left\{ z_k(n,m) \right\}_{k \in J}. \tag{9.21}$$

Здесь $k \in J = J(n,m)$ — индексация нулей без учета кратности.

При $n = 1$ и $n = 2$ ситуация, как правило, элементарна, и корни уравнений с обобщенными экспонентами находятся явно (см. [78]). Выделим сразу три практических важных случая. При $n = 1$, $m = 1$ имеем

$$Y_{1,1}(z) = \frac{1}{1!} + \frac{z}{2!} + \frac{z^2}{3!} + \ \dots \ = \frac{e^z - 1}{z}, \qquad \text{откуда} \quad \Lambda_{1,1} \equiv \left\{2k\pi i\right\}_{k \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}}. \tag{9.22}$$

При $n = 2$, $m = 2$ имеем

$$Y_{2,2}(z) = \frac{1}{2!} + \frac{z}{4!} + \frac{z^2}{6!} + \ \dots \ = \frac{\operatorname{ch}\sqrt{z} - 1}{z}, \quad \text{откуда} \quad \Lambda_{2,2} \equiv \left\{ -4k^2\pi^2 \right\}_{k \in \mathbb{N}}. \tag{9.23}$$

При $n = 2$, $m = 1$ имеем

$$Y_{2,1}(z) = \frac{1}{1!} + \frac{z}{3!} + \frac{z^2}{5!} + \ \dots \ = \frac{\operatorname{sh}\sqrt{z}}{\sqrt{z}}, \qquad \text{откуда} \quad \Lambda_{2,1} \equiv \left\{ -k^2\pi^2 \right\}_{k \in \mathbb{N}}. \tag{9.24}$$

Непосредственно проверяется, что все нули функции $Y_{2,2}(z)$ в (9.23) являются кратными с кратностью два, а нули функций $Y_{1,1}(z)$ и $Y_{2,1}(z)$ в (9.22) и (9.24), соответственно, являются простыми.

При $n \geqslant 3$ множество $\Lambda_{n,m}$ не допускает столь явного описания и требуется дополнительная информация «про нули». Этот вопрос, согласно соотношению (9.15), связан с распределением нулей функций Миттаг-Леффлера — подробнее будем обсуждать позже в параграфе 13. Сейчас отметим лишь, что $Y_{n,m}(z) = E_{1/n}(z; m+1)$ является целой функцией нецелого порядка $\rho = 1/n \leqslant 1/3$ и, значит имеет бесконечно много различных нулей (см. [17, с. 321] и также [52, с. 260–261]).

# § 10. Постановка обратной задачи

Пусть $E$ — комплексное банахово пространство и $A$ — линейный замкнутый оператор в $E$ с областью определения $D(A) \subset E$ (не обязательно плотной в $E$). Зафиксируем значения $n \in \mathbb{N}$ — порядок уравнения, и $T > 0$ — финальный момент времени. На интервале $(0, T)$ рассмотрим абстрактное дифференциальное уравнение $n$–го порядка

$$\frac{d^n u(t)}{dt^n} = Au(t) + g, \qquad 0 < t < T, \tag{10.1}$$

с неизвестным элементом $g \in E$.

Для одновременного нахождения функции $u\colon [\,0,T\,] \to E$ и элемента $g$ добавим условия Коши

$$u(0) = u_0, \quad u'(0) = u_1, \quad \ldots\ , \quad u^{(n-1)}(0) = u_{n-1} \tag{10.2}$$

и специальное финальное переопределение

$$u^{(q)}(T) = u_n \tag{10.3}$$

с фиксированным значением $q \in \{\,0, \ldots, n-1\,\}$. Элементы $u_0, \ldots, u_n \in E$ считаем заданными. Задача (10.1)–(10.3) относится к классу *обратных задач* (см. [16, 91, 97, 109]).

Пару $(u(t), g)$ назовем *ослабленным решением* обратной задачи (10.1)–(10.3), если

$$u \in C^{\,n}((\,0,T\,), E) \cap C^{\,n-1}([\,0,T\,], E), \quad u(t) \in D(A) \ \text{ при } \ 0 < t < T, \quad g \in E, \tag{10.4}$$

и выполнены все соотношения (10.1)–(10.3).

Ослабленное решение $(u(t), g)$ считаем *классическим*, если

$$u \in C^{\,n}([\,0,T\,], E), \quad u(t) \in D(A) \ \text{ при } \ 0 \leqslant t \leqslant T, \quad g \in E. \tag{10.5}$$

При этом уравнение (10.1) должно быть выполнено на отрезке $[\,0,T\,]$, а в соотношениях (10.2) для согласования условий естественно полагать, что $u_0 \in D(A)$, и в специальном случае при $q = 0$ считаем также, что $u_n \in D(A)$ в соотношении (10.3).

В основном мы будем рассматривать именно ослабленные решения (10.4), называя их далее просто *решениями*. Тогда при установлении критерия единственности для ослабленных решений (10.4) автоматически получим результат, пригодный для классических решений (10.5).

Отметим, что обратная задача (10.1)–(10.3) сильно упрощается, при $n = 1$, и получаем дифференциальное уравнение первого порядка $u'(t) = Au(t) + g$ с двумя условиями $u(0) = u_0$, $u(T) = u_1$. Это обычная двухточечная обратная задача с финальным переопределением (см. [22, 23, 40, 69, 75, 109, 110]).

Предположим что при некоторых элементах $u_0, \ldots, u_n \in E$ обратная задача (10.1)–(10.3) разрешима. Поставим вопрос о единственности ее ослабленного решения $(u(t), g)$.

Подобные задачи при $n = 1$ и $n = 2$ встречаются в работах [10, 12, 22, 23, 40, 75, 109, 110] при тех или иных специальных ограничений. Критерий единственности решения для уравнения первого порядка ($n = 1$) без всяких ограничений получен в работе [69]. В [70] подходы работы [69] перенесены на задачу (10.1)–(10.3) для уравнения произвольного порядка $n \in \mathbb{N}$, но только с значением $q = 0$. В последующей работе [57] показано, что разработанный метод применен к краевым задачам для дифференциальных уравнений высокого порядка. После того, в [1], критерий единственности решения обратной задачи (10.1)–(10.3) для уравнения второго порядка ($n = 2$) с финальным переопределением второго рода ($q = 1$) установлен (этому случаю посвящена глава 1 настоящей диссертации). Затем, в [61], критерий единственности решения рассмотрен для уравнений высокого порядка $n \geqslant 3$ с любым значением $q \in \{\, 0, \, \ldots \, , n - 1 \,\}$ (без полного доказательства). Имеются также обобщения на случай уравнения с дробной производной (см., например, [15]).

Обратная задача (10.1)–(10.3) изучалась автором в работах [4, 60, 61, 62, 77, 78]). Основываясь на упомянутых работах, изложим материал с полными подробными доказательствами.

Используя подходы работ [1, 57, 61, 69, 70], установим критерий единственности решения для обратной задачи (10.1)–(10.3). Будем рассматривать обратную задачу (10.1)–(10.3) с любыми фиксированными $n \in \mathbb{N}$ и $q \in \{\, 0, \, \ldots \, , n - 1 \,\}$. Обратим внимание, что ограничения на тип уравнения считаются минимальными.

## § 11. Критерий единственности решения

Сформулируем следующий результат, дающий критерий единственности решения обратной задачи (10.1)–(10.3).

**Теорема 11.1.** *Пусть $A$ — линейный замкнутый оператор в банаховом пространстве $E$. Для того чтобы обратная задача* (10.1)–(10.3) *с фиксированными параметрами $n \in \mathbb{N}$ и $q \in \{\, 0, \, \ldots \, , n - 1 \,\}$ при любом выборе элементов $u_0, \, \ldots \, , u_n \in E$ имела не более одного решения, необходимо и достаточно, чтобы ни одно из чисел*

$$\lambda_k = \frac{z_k}{T^n}, \qquad z_k = z_k(n, \, n - q) \in \Lambda_{n, \, n-q} \, , \tag{11.1}$$

*не являлось собственным значением оператора $A$. Здесь $\Lambda_{n, \, n-q}$ есть множество нулей функции $Y_{n, \, n-q}(z)$ из семейства* (9.14).

Случай $n = 1$ с значением $q = 0$ и случай $n = 2$ с значением $q = 0$ или $q = 1$ представляют особый интерес, поскольку, все нули $z_k(n, n-q)$ находятся явно (см. формулы в (9.22)–(9.24)), и доказательства имеют некие особенности. Приведем для них отдельные формулировки.

**Теорема 11.2** (Тихонов И.В., Эйдельман Ю.С.: 2000 г.)**.** *Пусть $A$ — линейный замкнутый оператор в банаховом пространстве $E$. Для того чтобы обратная задача*

$$\frac{du(t)}{dt} = Au(t) + g, \qquad 0 < t < T,$$
$$u(0) = u_0, \quad u(T) = u_1$$

*с заданными элементами $u_0$, $u_1 \in E$ имела не более одного решения, необходимо и достаточно, чтобы ни одно из чисел*

$$\lambda_k = \frac{2k\pi i}{T}, \qquad k \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}, \tag{11.2}$$

*не являлось собственным значением оператора $A$.*

**Теорема 11.3** (Тихонов И.В., Эйдельман Ю.С.: 2002 г.)**.** *Пусть $A$ — линейный замкнутый оператор в банаховом пространстве $E$. Для того чтобы обратная задача*

$$\frac{d^2u(t)}{dt^2} = Au(t) + g, \qquad 0 < t < T,$$
$$u(0) = u_0, \quad u'(0) = u_1, \quad u(T) = u_2$$

*с заданными элементами $u_0$, $u_1$, $u_2 \in E$ имела не более одного решения, необходимо и достаточно, чтобы ни одно из чисел*

$$\lambda_k = -\frac{4k^2\pi^2}{T^2}, \qquad k \in \mathbb{N}, \tag{11.3}$$

*не являлось собственным значением оператора $A$.*

**Теорема 11.4.** *Пусть $A$ — линейный замкнутый оператор в банаховом пространстве $E$. Для того чтобы обратная задача*

$$\frac{d^2u(t)}{dt^2} = Au(t) + g, \qquad 0 < t < T,$$
$$u(0) = u_0, \quad u'(0) = u_1, \quad u'(T) = u_2$$

*с заданными элементами* $u_0,\ u_1,\ u_2 \in E$ *имела не более одного решения, необходимо и достаточно, чтобы ни одно из чисел*

$$\lambda_k = -\frac{k^2\pi^2}{T^2}, \qquad k \in \mathbb{N}, \tag{11.4}$$

*не являлось собственным значением оператора* $A$.

Теоремы 11.2, 11.3 и 11.4 получены в работах [69], [70] и [1] соответственно. Подобные результаты теоремы 11.1 были получены, как специальные случаи в работе [70] для случая $q = 0$ с произвольным $n \geqslant 1$, и в [61] для $n \geqslant 3$ с произвольным $q \in \{0, \dots, n-1\}$. Сейчас мы включим доказательства всех этих утверждений в общую схему на базе теоремы 11.1. Особенности рассуждений для случаев $n \leqslant 2$ по сравнению с $n \geqslant 3$ см. в параграфе 12.

# § 12. Доказательство критерия единственности

Для удобства изложим доказательство в нескольких пунктах, так как оно громоздкое и требует много усилий.

**12.1. Однородная обратная задача.** Как известно, обратная задача (10.1)–(10.3) при любом выборе элементов $u_0, \dots, u_n \in E$ имеет не более одного решения тогда и только тогда, когда однородная обратная задача

$$\frac{d^n u(t)}{dt^n} = Au(t) + g, \qquad 0 < t < T, \tag{12.1}$$

$$u(0) = 0, \quad u'(0) = 0, \quad \dots\ , \quad u^{(n-1)}(0) = 0, \tag{12.2}$$

$$u^{(q)}(T) = 0 \tag{12.3}$$

имеет только *тривиальное решение* $u(t) \equiv 0$, $g = 0$. Применяя к однородной обратной задаче (12.1)–(12.3), теорема 11.1 имеет следующий вид.

**Теорема 12.1.** *Пусть* $A$ *— линейный замкнутый оператор в банаховом пространстве* $E$. *Для того чтобы обратная задача* (12.1)–(12.3) *с фиксированными параметрами* $n \in \mathbb{N}$ *и* $q \in \{0, \dots, n-1\}$ *имела только тривиальное решение* $u(t) \equiv 0$, $g = 0$, *необходимо и достаточно, чтобы ни одно из чисел* (11.1) *не являлось собственным значением оператора* $A$.

Аналогично, теоремы 11.2 – 11.4 для специальных случаев $n = 1$ и $n = 2$ приводятся к виду.

**Теорема 12.2** (Тихонов И.В., Эйдельман Ю.С.: 2000 г.)**.** *Пусть $A$ — линейный замкнутый оператор в банаховом пространстве $E$. Для того чтобы обратная задача*

$$\frac{du(t)}{dt} = Au(t) + g, \qquad 0 < t < T, \tag{12.4}$$

$$u(0) = 0, \quad u(T) = 0 \tag{12.5}$$

*имела только тривиальное решение $u(t) \equiv 0$, $g = 0$, необходимо и достаточно, чтобы ни одно из чисел* (11.2) *не являлось собственным значением оператора $A$.*

**Теорема 12.3** (Тихонов И.В., Эйдельман Ю.С.: 2002 г.)**.** *Пусть $A$ — линейный замкнутый оператор в банаховом пространстве $E$. Для того чтобы обратная задача*

$$\frac{d^2u(t)}{dt^2} = Au(t) + g, \qquad 0 < t < T, \tag{12.6}$$

$$u(0) = 0, \quad u'(0) = 0, \quad u(T) = 0 \tag{12.7}$$

*имела только тривиальное решение $u(t) \equiv 0$, $g = 0$, необходимо и достаточно, чтобы ни одно из чисел* (11.3) *не являлось собственным значением оператора $A$.*

**Теорема 12.4.** *Пусть $A$ — линейный замкнутый оператор в банаховом пространстве $E$. Для того чтобы обратная задача*

$$\frac{d^2u(t)}{dt^2} = Au(t) + g, \qquad 0 < t < T, \tag{12.8}$$

$$u(0) = 0, \quad u'(0) = 0, \quad u'(T) = 0 \tag{12.9}$$

*имела только тривиальное решение $u(t) \equiv 0$, $g = 0$, необходимо и достаточно, чтобы ни одно из чисел* (11.4) *не являлось собственным значением оператора $A$.*

Переходим, теперь, к доказательствам теорем 12.1–12.4, и автоматически следуют доказательства теорем 11.1–11.4. В начале, мы установим связь однородной обратной задачи (12.1)–(12.3) с характеристическими числам (11.1). Отсюда, непосредственно, получим необходимое условие единственности в теореме 12.1.

**12.2. Необходимое условие критерия единственности.** Установим необходимость для универсальной теоремы (12.1), и потом покажем его применение к специальным случаям $n = 1$ и $n = 2$.

**12.2.1. Спектральная задача. Элементарные решения.** Рассмотрим однородную обратную задачу (12.1)–(12.3) с фиксированными значениями $n \in \mathbb{N}$ и $q \in \{\, 0, \, \dots \, , \, n - 1 \,\}$. Для обратной задачи (12.1)–(12.3) составим "операционный аналог", состоящий из скалярной задачи Коши

$$y^{(n)}(t) = \lambda\, y(t) + 1, \qquad 0 \leqslant t \leqslant T, \tag{12.10}$$

$$y(0) = 0, \quad y'(0) = 0, \quad \dots \; , \quad y^{(n-1)}(0) = 0 \tag{12.11}$$

и финального условия

$$y^{(q)}(T) = 0. \tag{12.12}$$

Здесь $\lambda \in \mathbb{C}$ — спектральный параметр. Требуется найти все такие значения $\lambda$ для которых задача (12.10)–(12.12) имеет решение $y \in C^{\,n}[\,0, T\,]$.

Для любого $\lambda \in \mathbb{C}$ решение задачи Коши (12.10), (12.11) однозначно определено и имеет вид

$$y_{n,n}(t, \lambda) = \frac{t^n}{n!} + \lambda\, \frac{t^{2n}}{2n!} + \lambda^2\, \frac{t^{3n}}{3n!} \; + \; \dots \; = \; t^n\, Y_{n,n}(\lambda t^n). \tag{12.13}$$

Здесь $y_{n,n}(t, \lambda)$ — функция из семейства (9.1), а $Y_{n,n}(z)$ — функция из семейства (9.14), где $m = n$ в исходных формулах (см. также связь (9.16)). Используя соотношения (9.6), (9.19), имеем

$$y^{(q)}_{n,n}(T, \lambda) = y_{n,\, n-q}(T, \lambda) = T^{\,n-q}\; Y_{n,\, n-q}(\lambda T^n). \tag{12.14}$$

Соотношение (12.14) означает, что условие (12.12) выполняется тогда и только тогда, когда $Y_{n,\, n-q}(\lambda T^n) \; = \; 0$, т. е. когда $z \; = \; \lambda T^n$ является нулем функции $Y_{n,\, n-q}(z)$. Согласно (9.21), множество нулей функций $Y_{n,\, n-q}(z)$ имеет обозначение $\Lambda_{n,\, n-q}$ .

Таким образом, все решения спектральной задачи (12.10)–(12.12) имеют вид

$$y(t) = y_{n,n}(t, \lambda_k) = t^n\, Y_{n,n}(\lambda_k t^n), \qquad \lambda = \lambda_k = z_k \,/ T^n, \tag{12.15}$$

где $z_k = z_k(n, \, n - q) \in \Lambda_{n,\, n-q}$ , $k \in J = J(n, \, n - q)$ (см. (9.21)). Числа $\lambda_k$ из (12.15) являются те же характеристическими числами (11.1).

Пусть некоторое число $\lambda_k$ из (12.15) является собственным значением оператора $A$ с собственным вектором $f_k \in D(A)$, $f_k \neq 0$. Тогда, пара

$$u(t) = y_{n,n}(t, \lambda_k)\, f_k, \qquad g = f_k \tag{12.16}$$

есть нетривиальное решение однородной обратной задачи (12.1)–(12.3). Для проверки, что пара (12.16) удовлетворяет соотношениям (12.1)–(12.3), достаточно использовать два факта:

1) функция $y_{n,n}(t, \lambda_k)$ из (12.15) удовлетворяет соотношениям (12.10)–(12.12) для любого $\lambda = \lambda_k$.

2) $Af_k = \lambda_k f_k$.

Пару (12.16) будем называть *элементарным решением* однородной обратной задачи (12.1)–(12.3).

Итак, однородная обратная задача (12.1)–(12.3) имеет нетривиальное элементарное решение вида (12.16) когда число $\lambda_k$ из (11.1) является собственным значением оператора $A$ с собственным вектором $f_k \neq 0$. Отсюда следует необходимое условие критерия единственности решения в теореме 12.1.

**12.2.2. Специальные случаи.** Выделим индивидуальные формы решений вида (12.16) в связи с обратными задачами (12.4)–(12.5), (12.6)–(12.7) и (12.8)–(12.9) из теорем 12.2, 12.3 и 12.4, соответственно.

Случай $n = 1$, $q = 0$. Из соотношений (12.13), (9.22), имеем

$$y_{1,1}(t, \lambda) = t\, Y_{1,1}(\lambda t) \;=\; \frac{t\,(e^{\lambda t} - 1)}{\lambda t} \;=\; \frac{e^{\lambda t} - 1}{\lambda} \tag{12.17}$$

и $\Lambda_{n,\,n-q} \equiv \Lambda_{1,\,1} = \big\{2k\pi i\big\}_{k \in \mathbb{Z}\setminus\{0\}}$ (см. также (9.22)). Пусть некоторое $\lambda_k = 2k\pi i/T$ с целым $k \neq 0$ является собственным значением оператора $A$. В силу (12.16) и (12.17), нетривиальное решение обратной задачи (12.4), (12.5) имеет вид

$$u(t) = \frac{T}{2k\pi i}\, \left(e^{2k\pi i t/T} - 1\right)\, f_k, \qquad g = f_k, \tag{12.18}$$

где $Af_k = (2k\pi i/T)\, f_k\,$, $f_k \neq 0$. В случае вещественного пространства $E$, нетривиальные вещественные решения получаются из (12.18) овеществлением (см. [69]). Необходимое условие критерия единственности решения в теореме 12.2 показано.

Случай $n = 2$ с значением $q = 0$ или $q = 1$. Из соотношений (12.13), (9.23), имеем

$$y_{2,2}(t,\lambda) = t^2\, Y_{2,2}(\lambda t^2) \;=\; \frac{t^2(\operatorname{ch}\sqrt{\lambda}t - 1)}{\lambda\, t^2} \;=\; \frac{\operatorname{ch}\sqrt{\lambda}t - 1}{\lambda}\,. \tag{12.19}$$

Если $q = 0$, тогда $\Lambda_{n,\,n-q} \equiv \Lambda_{2,\,2} = \big\{ -4k^2\pi^2 \big\}_{k\in\mathbb{N}}$ (см. также (9.23)). Пусть некоторое число $\lambda_k = -4k^2\pi^2/T^2$, $k \in \mathbb{N}$, является собственным значением оператора $A$. В силу (12.16) и (12.19), нетривиальное решение обратной задачи (12.6), (12.7) имеет вид

$$u(t) = \frac{T^2}{4k^2\pi^2}\,\left(1 - \cos\frac{2k\pi t}{T}\right) f_k, \qquad g = f_k, \tag{12.20}$$

где $Af_k = (-4k^2\pi^2/T^2)\, f_k$, $f_k \neq 0$. Необходимое условие критерия единственности решения в теореме 12.3 показано.

Если $q = 1$, тогда $\Lambda_{n,\,n-q} \equiv \Lambda_{2,\,1} = \big\{ -k^2\pi^2 \big\}_{k\in\mathbb{N}}$ (см. также (9.24)). Пусть некоторое число $\lambda_k = -k^2\pi^2/T^2$, $k \in \mathbb{N}$, является собственным значением оператора $A$. В силу (12.16) и (12.19), нетривиальное решение обратной задачи (12.8), (12.9) имеет вид

$$u(t) = \frac{T^2}{k^2\pi^2}\,\left(1 - \cos\frac{k\pi t}{T}\right) f_k, \qquad g = f_k, \tag{12.21}$$

где $Af_k = (-k^2\pi^2/T^2)\, f_k$, $f_k \neq 0$. Необходимое условие критерия единственности решения в теореме 12.4 показано.

Итак, необходимое условие критерия единственности решения установлено. Осталось доказывать достаточное условие критерия единственности решения. Это требует на много больших усилий.

**12.3. Достаточное условие критерия единственности.** Доказательство достаточности для теоремы 12.1, включительно для теорем 12.2–12.4, изложим на нескольких этапов.

**12.3.1. Операторное тождество.** Рассмотрим общую однородную обратную задачу (12.1)–(12.3) с фиксированными параметрами $n \in \mathbb{N}$ и $q \in \{\, 0, \ldots, n-1 \,\}$. Пусть $(u(t), g)$ — некоторое ослабленное решение задачи (12.1)–(12.3). Предположим, что ни одно из чисел (11.1) не является собственным значением оператора $A$, и покажем, что $u(t) \equiv 0$ и $g = 0$.

Используя функцию $y_{n,n}(t,\lambda)$ из (12.13), определим векторную функцию переменной $\lambda \in \mathbb{C}$ по формуле

$$f(\lambda) = \int_0^T y_{n,n}^{(q+1)}(t,\lambda)\, u(T-t)\, dt, \tag{12.22}$$

где

$$y_{n,n}^{(q+1)}(t,\lambda) \equiv \frac{d^{\,q+1}}{dt^{\,q+1}}\Big(y_{n,n}(t,\lambda)\Big).$$

Поскольку поведение функции $u(T-t)$ вблизи границ отрезка $[\,0,T\,]$ может в определенном смысле «портиться» (см. условия (10.4)), возьмем малое $\varepsilon>0$ и составим аппроксимацию

$$f_\varepsilon(\lambda) = \int_\varepsilon^{T-\varepsilon} y_{n,n}^{(q+1)}(t,\lambda)\,u(T-t)\,dt. \tag{12.23}$$

Тогда

$$f_\varepsilon(\lambda) = \int_\varepsilon^{T-\varepsilon} y_{n,n}^{(q+1)}(t,\lambda)\,u(T-t)\,dt \;\to\; \int_0^{T} y_{n,n}^{(q+1)}(t,\lambda)\,u(T-t)\,dt = f(\lambda) \tag{12.24}$$

при $\varepsilon \to 0+0$ для любого фиксированного значения $\lambda \in \mathbb{C}$. В предельном переходе (12.24) используется, что $u \in C([\,0,T\,],\,E)$ по определению ослабленного решения (10.4).

Напомним также, что $u(t) \in D(A)$ при $0<t<T$ и $Au \in C((\,0,T\,),\,E)$ с линейным замкнутым оператором $A$. Поэтому, согласно известным свойствам векторного интеграла Римана, получаем, что $f_\varepsilon(\lambda) \in D(A)$ для любого $\lambda \in \mathbb{C}$, и вычисление $Af_\varepsilon(\lambda)$ можно проводить внесением оператора $A$ под знак интеграла в (12.23) (см. [74, теорема 3.3.2]).

Учитывая уравнение (12.1), имеем

$$Af_\varepsilon(\lambda) \,= \int_\varepsilon^{T-\varepsilon} y_{n,n}^{(q+1)}(t,\lambda)\,Au(T-t)\,dt \,= \int_\varepsilon^{T-\varepsilon} y_{n,n}^{(q+1)}(t,\lambda)\,(u^{(n)}(T-t)-g)\,dt \,=$$

$$= \int_\varepsilon^{T-\varepsilon} y_{n,n}^{(q+1)}(t,\lambda)\,u^{(n)}(T-t)\,dt \,-\, g\int_\varepsilon^{T-\varepsilon} y_{n,n}^{(q+1)}(t,\lambda)\,dt.$$

Проинтегрируем по частям, получим

$$Af_\varepsilon(\lambda) \,=- \,y_{n,n}^{(q+1)}(t,\lambda)\,u^{(n-1)}(T-t)\Big|_\varepsilon^{T-\varepsilon} + \int_\varepsilon^{T-\varepsilon} y_{n,n}^{(q+2)}(t,\lambda)\,u^{(n-1)}(T-t)\,dt \,-$$

$$-\, g\int_\varepsilon^{T-\varepsilon} y_{n,n}^{(q+1)}(t,\lambda)\,dt \,=$$

$$= -\,\big(\,y_{n,n}^{(q+1)}(t,\lambda)\,u^{(n-1)}(T-t) + y_{n,n}^{(q+2)}(t,\lambda)\,u^{(n-2)}(T-t) \,+\, \ldots \,+$$

$$+\; y_{n,n}^{(n+q)}(t,\lambda)\,u(T-t)\big)\Big|_\varepsilon^{T-\varepsilon} \;+$$

$$+\,\int_\varepsilon^{T-\varepsilon} y_{n,n}^{(n+q+1)}(t,\lambda)\,u(T-t)\,dt \,-\, g\int_\varepsilon^{T-\varepsilon} y_{n,n}^{(q+1)}(t,\lambda)\,dt.$$

С учетом (9.6), (9.8), используя, что

$$y_{n,n}^{(n+q+1)}(t,\lambda) = \frac{d^n}{dt^n}\left(y_{n,n}^{(q+1)}(t,\lambda)\right) = \frac{d^n}{dt^n}\Big(y_{n,\,n-q-1}(t,\lambda)\Big) =$$
$$= y_{n,\,n-q-1}^{(n)}(t,\lambda) \;=\; \lambda\, y_{n,\,n-q-1}(t,\lambda) \;=\; \lambda\, y_{n,n}^{(q+1)}(t,\lambda),$$

то,

$$\int_{\varepsilon}^{T-\varepsilon} y_{n,n}^{(n+q+1)}(t,\lambda)\, u(T-t)\, dt \;=\; \lambda \int_{\varepsilon}^{T-\varepsilon} y_{n,n}^{(q+1)}(t,\lambda)\, u(T-t)\, dt \;=\; \lambda\, f_\varepsilon(\lambda) \quad (\text{см. } (12.23)).$$

Следовательно,

$$Af_\varepsilon(\lambda) = \big(\, y_{n,n}^{(q+1)}(t,\lambda)\, u^{(n-1)}(T-t) + y_{n,n}^{(q+2)}(t,\lambda)\, u^{(n-2)}(T-t) + \,\ldots\, +$$
$$+\, y_{n,n}^{(n+q)}(t,\lambda)\, u(T-t)\big)\Big|_{T-\varepsilon}^{\varepsilon} + \lambda\, f_\varepsilon(\lambda) \,-\, \big(y_{n,n}^{(q)}(T-\varepsilon,\lambda) - y_{n,n}^{(q)}(\varepsilon,\lambda)\big)\, g.$$

Тогда, с учетом соотношения (9.24), имеем

$$Af_\varepsilon(\lambda) \;\to\; \big(\, y_{n,n}^{(q+1)}(t,\lambda)\, u^{(n-1)}(T-t) + y_{n,n}^{(q+2)}(t,\lambda)\, u^{(n-2)}(T-t) + \,\ldots\, +$$
$$+\, y_{n,n}^{(n+q)}(t,\lambda)\, u(T-t)\big)\Big|_{T}^{0} + \lambda\, f(\lambda) \,-\, \big(y_{n,n}^{(q)}(T,\lambda) - y_{n,n}^{(q)}(0,\lambda)\big) g. \tag{12.25}$$

при $\varepsilon \to 0+0$ для любого фиксированного значения $\lambda \in \mathbb{C}$.

Функция $y_{n,n}(t,\lambda)$ из (12.13), при $t = 0$, удовлетворяет соотношениям

$$y_{n,n}^{(j)}(0,\lambda) = \begin{cases} \lambda^{k-1} & \text{при} \quad j = kn, \quad \text{где} \quad k \in \mathbb{N}, \\ 0 & \text{для остальных целых } \; j \geqslant 0. \end{cases}$$

В частности,

$$y_{n,n}^{(n)}(0,\lambda) = 1, \qquad y_{n,n}^{(j)}(0,\lambda) = 0, \quad \text{при} \quad j \in \{\,0,\,\ldots\,,2n-1\,\} \setminus \{n\}. \tag{12.26}$$

Используя соотношения (12.26) с условиями $u(0) = u'(0) = \ldots = u^{(n-1)}(0) = 0$ и $u^{(q)}(T) = 0$ (см. (12.2) и (12.3), соответственно), имеем

$$\big(\, y_{n,n}^{(q+1)}(t,\lambda)\, u^{(n-1)}(T-t) + y_{n,n}^{(q+2)}(t,\lambda)\, u^{(n-2)}(T-t) + \ldots + y_{n,n}^{(n+q)}(t,\lambda)\, u(T-t)\big)\Big|_{T}^{0} =$$
$$= \big(y_{n,n}^{(q+1)}(0,\lambda)\, u^{(n-1)}(T) + y_{n,n}^{(q+2)}(0,\lambda)\, u^{(n-2)}(T) + \,\ldots\, + y_{n,n}^{(n+q)}(0,\lambda)\, u(T)\big) \,-$$
$$-\, \big(y_{n,n}^{(q+1)}(T,\lambda)\, u^{(n-1)}(0) + y_{n,n}^{(q+2)}(T,\lambda)\, u^{(n-2)}(0) + \,\ldots\, + y_{n,n}^{(n+q)}(T,\lambda)\, u(0)\big) \,=$$
$$= y_{n,n}^{(q+1)}(0,\lambda)\, u^{(n-1)}(T) + y_{n,n}^{(q+2)}(0,\lambda)\, u^{(n-2)}(T) + \,\ldots\, + y_{n,n}^{(n+q)}(0,\lambda)\, u(T) \,=$$
$$= u^{(q)}(T) = 0. \tag{12.27}$$

Подставляя значения (12.27) в (12.25), получим

$$Af_\varepsilon(\lambda) \;\to\; 0 + \lambda\, f(\lambda) - \big(y^{(q)}_{n,n}(T,\lambda) - y^{(q)}_{n,n}(0,\lambda)\big)\, g$$

при $\varepsilon \to 0+0$ для любого фиксированного значения $\lambda \in \mathbb{C}$. Из соотношения (12.14), $y^{(q)}_{n,n}(T,\lambda) = T^{\,n-q}\, Y_{n,\,n-q}(\lambda T^n)$. Кроме того, $y^{(q)}_{n,n}(0,\lambda) = 0$, ибо $q \in \{\,0,\,\dots\,,\,n-1\,\}$ (сравнивать с (12.26)). В результате имеем соотношение

$$Af_\varepsilon(\lambda) \;\to\; \lambda\, f(\lambda) - T^{\,n-q}\, Y_{n,\,n-q}(\lambda T^n)\, g \tag{12.28}$$

при $\varepsilon \to 0+0$ для любого фиксированного значения $\lambda \in \mathbb{C}$.

Учитывая замкнутость оператора $A$, а также предельные соотношения (12.24) и (12.28), выводим, что $f(\lambda) \in D(A)$ и

$$Af(\lambda) = \lambda\, f(\lambda) - T^{\,n-q}\, Y_{n,\,n-q}(\lambda T^n)\, g \tag{12.29}$$

для всех $\lambda \in \mathbb{C}$. Это основное *операторное тождество* для функции $f(\lambda)$ из (12.22).

Ясно, что $f(\lambda)$ есть целая векторная функция по переменой $\lambda \in \mathbb{C}$ со значениями в банаховом пространстве $E$. В силу замкнутости оператора $A$, тождество (12.29) можно дифференцировать по $\lambda$. Последовательное применение такой процедуры приводит к тождествам

$$Af^{(m)}(\lambda) \;=\; \lambda\, f^{(m)}(\lambda) \;+\; mf^{(m-1)}(\lambda) \;-\; T^{\,(m+1)n-q}\; Y^{(m)}_{n,\,n-q}(\lambda T^n)\, g \tag{12.30}$$

для $\lambda \in \mathbb{C}$ и $m = 1,\, 2,\, \dots\,.$

Определим скалярную целую функцию

$$G(\lambda) = Y_{n,\,n-q}(\lambda T^n), \qquad \lambda \in \mathbb{C}. \tag{12.31}$$

Множество нулей функции (12.31) описывается формулой (11.1). Другими словами, все нули функции $G(\lambda)$ имеют вид $\lambda_k = z_k/T^n$, где $z_k = z_k(n,\, n-q)$ — нули функции $Y_{n,\,n-q}(z)$ из семейства (9.14). Более того, кратность каждого нуля $\lambda_k$ функции $G(\lambda)$ равна кратностью соответствующего нуля $z_k$ функции $Y_{n,\,n-q}(z)$.

Пусть $\lambda_k = z_k/T^n$ — некоторое число из (11.1). Подставляя $\lambda_k$ в (12.29), получим

$$Af(\lambda_k) = \lambda_k\, f(\lambda_k). \tag{12.32}$$

Если $\lambda_k = z_k/T^n$ является кратным нулем функции $G(\lambda)$ с кратностью $m_k \geqslant 2$ (и соответственно $z_k$ является кратным нулем функции $Y_{n,\,n-q}(z)$), тогда, из соотношения (12.30), получим

$$Af^{(m)}(\lambda_k) = \lambda_k\, f^{(m)}(\lambda_k) + mf^{(m-1)}(\lambda_k), \qquad m = 1,\,\dots\,, m_k - 1. \tag{12.33}$$

По предположению ни одно из чисел (11.1) не является собственным значением оператора $A$. Следовательно, все такие числа $\lambda_k = z_k/T^n$ — нули функции $G(\lambda)$, являются нулями функции $f(\lambda)$ (см. (12.32)), и не меньшей кратности (см. (12.33)).

Тогда, для всех таких чисел $\lambda_k$ из (11.1), имеем

$$f(\lambda_k) \equiv \int_0^T y_{n,n}^{(q+1)}(t,\lambda_k)\, u(T-t)\, dt \;=\; 0. \tag{12.34}$$

Более того,

$$f^{(m)}(\lambda_k) \equiv \int_0^T \frac{d^m}{d\lambda^m}\, \left(y_{n,n}^{(q+1)}(t,\lambda)\right)\Big|_{\lambda=\lambda_k} u(T-t)\, dt \;=\; 0 \tag{12.35}$$

для $m = 1, \ldots, m_k - 1$, если числа $\lambda_k$ и $z_k$ являются нулями с кратностью $m_k \geqslant 2$ функций $G(\lambda)$ и $Y_{n,\,n-q}(z)$, соответственно.

Формулы (12.34), (12.35) представляют собой ортогональные соотношения между векторной функцией $u(T-t)$ и некоторой функциональной системой, которая связана с обобщенной гиперболической функцией $y_{n,n}^{(q+1)}(t,\,\lambda) = y_{n,\,n-q-1}(t,\,\lambda)$. Из соотношения (12.34), с учетом (12.35), выведем, что функция $u(t)$ является тождественным нулем на $[\,0,T\,]$.

**12.3.2. Анализ ортогональных соотношений.** Рассмотрим соотношение (12.34) отдельно для случаев $n=1$, $n=2$, и потом для $n \geqslant 3$.

**Случай:** $n=1,\ q=0$ (Тихонов И.В., Эйдельман Ю.С.: 2000 г.).

Здесь $\lambda_k = 2k\pi i/T,\quad k \in \mathbb{Z}\setminus\{0\}$, из (11.2) (см. также (9.22)). Из (12.17) имеем $y_{1,1}'(t,\lambda) = e^{\lambda t}$. Подставим в (12.34), получим

$$f(\lambda_k) \equiv \int_0^T e^{2k\pi i t/T}\, u(T-t)\, dt \;=\; \int_0^T u(t)\, e^{-2k\pi i t/T}\, dt \;=\; 0, \qquad k \in \mathbb{Z}\setminus\{0\}.$$

Применяя линейный непрерывный функционал $f^* \in E^*$, получаем непрерывную скалярную функцию $\psi(t) \equiv f^*(u(t))$, ортогональную на отрезке $[\,0,T\,]$ всем экспонентам $\exp(2k\pi i t/T)$, $k \in \mathbb{Z}\setminus\{0\}$. Такая функция $\psi(t)$ может быть только константой. В силу условий $u(0)=u(T)=0$ (см. (12.5)), тогда

$$\psi(0) = \psi(T) = 0.$$

В результате $\psi(t) \equiv 0$ на $[\,0,T\,]$. Итак, $f^*(u(t)) \equiv 0$ на $[\,0,T\,]$ для любого функционала $f^* \in E^*$. По теореме Хана-Банаха заключаем, что $u(t) \equiv 0$ на отрезке $[\,0,T\,]$. При этом $g=0$ автоматически (см. дифференциальное уравнение (12.4)). Решение $(u(t),g)$ однородной обратной задачи (12.4), (12.5) может быть только тривиальным. Достаточное условие критерия единственности в теореме 12.2 показано.

**Случай:** $n=2,\ q=0$ (Тихонов И.В., Эйдельман Ю.С.: 2002 г.).

Здесь $\lambda_k=-4k^2\pi^2/T^2,\ \ k\in\mathbb{N},$ из (11.3) (см. также (9.23)). Напомним, что все нули $z_k=-4k^2\pi^2$ функции $Y_{2,2}(z)$ имеют кратность два. Следовательно, помимо соотношения $f(\lambda_k)=0$ из (12.34), имеем также $f'(\lambda_k)=0$ в силу (12.35).

Из (12.19) следует, что

$$y'_{2,2}(t,\lambda)=\frac{\operatorname{sh}\sqrt{\lambda}\,t}{\sqrt{\lambda}} \qquad \text{и} \qquad \frac{d}{d\lambda}\big(y'_{2,2}(t,\lambda)\big)=\frac{\sqrt{\lambda}\,t\operatorname{ch}\sqrt{\lambda}\,t-\operatorname{sh}\sqrt{\lambda}\,t}{2\lambda\sqrt{\lambda}}\,.$$

Для $\lambda_k=-4k^2\pi^2/T^2$, элементарным вычислением получим

$$y'_{2,2}(t,\lambda_k)=\frac{T}{2k\pi}\,\sin\frac{2k\pi t}{T}, \qquad k\in\mathbb{N},$$

и

$$\frac{d}{d\lambda}\big(y'_{2,2}(t,\lambda)\big)\Big|_{\lambda=\lambda_k}=\frac{T^2}{8k^2\pi^2}\left(\frac{T}{2k\pi}\,\sin\frac{2k\pi t}{T}-t\,\cos\frac{2k\pi t}{T}\right), \qquad k\in\mathbb{N}.$$

Подставляя эти выражения в соотношения $f(\lambda_k)=0$ и $f'(\lambda_k)=0$ из (12.34) и (12.35), соответственно, получим

$$\int_0^T u(T-t)\,\sin\frac{2k\pi t}{T}\,dt\;=\;0, \qquad k\in\mathbb{N},$$

и

$$\frac{T}{2k\pi}\int_0^T u(T-t)\,\sin\frac{2k\pi t}{T}\,dt-\int_0^T u(T-t)\,t\,\cos\frac{2k\pi t}{T}\,dt\;=\;0, \qquad k\in\mathbb{N}.$$

Откуда

$$\int_0^T u(T-t)\,\sin\frac{2k\pi t}{T}\,dt\;=\;0, \qquad \int_0^T u(T-t)\,t\,\cos\frac{2k\pi t}{T}\,dt\;=\;0, \qquad k\in\mathbb{N}.$$

Применяя линейный непрерывный функционал $f^*\in E^*$, получаем непрерывную скалярную функцию

$$\psi(t)\equiv f^*(u(T-t)) \tag{12.36}$$

ортогональную на $[\,0,T\,]$ всем функциям

$$\sin\left(2k\pi t/T\right), \quad t\,\cos\left(2k\pi t/T\right), \quad k\in\mathbb{N}. \tag{12.37}$$

Воспользуемся следующим элементарным фактом.

**Лемма 12.1.** *Пусть $\psi(t)$ — непрерывная скалярная функция, и ортогональная на $[\,0,T\,]$ всем функциям* (12.37)*. Тогда функция $\psi(t)$ постоянна на $[\,0,T\,]$.*

**Доказательство.** После подстановки $t = (\tau + T)/2$, перейдем к более удобному симметричному отрезку $[\,-T, T\,]$ с соотношениями

$$\int_{-T}^{T} \psi_1(\tau)\ \sin\frac{k\pi\tau}{T}\, d\tau\ =\ 0, \qquad \int_{-T}^{T} \psi_1(\tau)\ (\tau+T)\cos\frac{k\pi\tau}{T}\, d\tau = 0, \qquad k\in\mathbb{N}.$$

Здесь $\psi_1(\tau) \equiv \psi((\tau+T)/2)$ — непрерывная функция на $[\,-T, T\,]$.

Из ортогональности синусам следует, что функция $\psi_1(\tau)$ является четной на $[\,-T, T\,]$. Поэтому функция $\tau\,\psi_1(\tau)$ является нечетной и ортогональной косинусам. Кроме того, из второго интеграла, функция $(\tau+T)\,\psi_1(\tau)$ тоже ортогональна косинусам. В итоге заключаем, что

$$\int_{-T}^{T} \psi_1(\tau)\ \cos\frac{k\pi\tau}{T}\, d\tau = 0, \qquad k\in\mathbb{N}.$$

Итак, непрерывная функция $\psi_1(\tau)$ ортогональна на отрезке $[\,-T, T\,]$ всем $\sin(k\pi\tau/T)$ и $\cos(k\pi\tau/T)$, $k\in\mathbb{N}$. Поэтому функция $\psi_1(\tau)$ постоянна на $[\,-T, T\,]$. Следовательно, функция $\psi(t) = \psi_1(2t - T)$ также постоянна на $[\,0, T\,]$. $\square$

После применения леммы 12.1 к функции $\psi(t) = f^*(u(T-t))$ из (12.36), заключаем, что функция $\psi(t)$ может быть только константой на отрезке $[\,0, T\,]$. В силу условий $u(0) = u(T) = 0$ (см. (12.7)), тогда

$$\psi(0) = \psi(T) = 0.$$

В результате $\psi(t) \equiv 0$ на $[\,0, T\,]$. Итак, $f^*(u(T-t)) \equiv 0$ на $[\,0, T\,]$ для любого функционала $f^* \in E^*$. По теореме Хана-Банаха, получаем, что $u(t) \equiv 0$ на отрезке $[\,0, T\,]$. Следовательно, $g = 0$ (см. дифференциальное уравнение (12.6)). Решение $(u(t), g)$ однородной обратной задачи (12.6), (12.7) может быть только тривиальным. Достаточное условие критерия единственности в теореме 12.3 показано.

**Случай:** $n = 2,\ q = 1$.

Здесь $\lambda_k = -k^2\pi^2/T^2$, $k\in\mathbb{N}$, из (11.4), (см. также (9.24)). Из (12.19) имеем $y''_{2,2}(t,\lambda) = \operatorname{ch}\sqrt{\lambda}\, t$. Подставим в (12.34), получим

$$f(\lambda_k) = \int_0^T u(T-t)\ \cos\frac{k\pi t}{T}\, dt\ =\ 0, \qquad k\in\mathbb{N}.$$

Применяя линейный непрерывный функционал $f^* \in E^*$, получаем непрерывную скалярную функцию $\psi(t) \equiv f^*(u(T-t))$ ортогональную на $[\,0, T\,]$ всем функциям $\cos(k\pi t/T)$, $k \in \mathbb{N}$. Такая функция $\psi(t)$ может быть только константой. В силу условия $u(0) = 0$ (см. (12.9)), тогда

$$\psi(T) = 0.$$

В результате $\psi(t) \equiv 0$ на $[\,0, T\,]$. Итак, $f^*(u(T-t)) \equiv 0$ на $[\,0, T\,]$ для любого функционала $f^* \in E^*$. Как прежде, заключаем, что $u(t) \equiv 0$ на $[\,0, T\,]$. Также $g = 0$ (см. дифференциальное уравнение (12.8)). Решение $(u(t), g)$ однородной обратной задачи (12.8), (12.9) может быть только тривиальным. Достаточное условие критерия единственности в теореме 12.4 показано.

**Случай:** $n \geqslant 3$, $q \in \{\,0, \ldots, n-1\,\}$.

Для этой ситуации преобразуем представление (12.22) функции $f(\lambda)$. Проинтегрируем по частям, получим

$$f(\lambda) \equiv \int_0^T y_{n,n}^{(q+1)}(t, \lambda)\, u(T-t)\, dt \ =$$

$$= \ y_{n,n}^{(q)}(t, \lambda)\, u(T-t)\,\Big|_0^T + \int_0^T y_{n,n}^{(q)}(t, \lambda)\, u'(T-t)\, dt.$$

В силу условия $u(0) = 0$ (см. (12.2)) и соотношений $y_{n,n}^{(q)}(0, \lambda) = 0$ для любого $q \in \{\,0, \ldots, n-1\,\}$ (см. (12.26)), заключаем

$$f(\lambda) = \int_0^T y_{n,n}^{(q)}(t, \lambda)\, u'(T-t)\, dt, \qquad \lambda \in \mathbb{C}.$$

Используя свойство (9.6), имеем $y_{n,n}^{(q)}(t, \lambda) = y_{n,\,n-q}(t, \lambda)$. Тогда

$$f(\lambda) = \int_0^T y_{n,\,n-q}(t, \lambda)\, u'(T-t)\, dt, \qquad \lambda \in \mathbb{C}, \tag{12.38}$$

и $f(\lambda)$ является векторной целой функцией переменной $\lambda$.

Предыдущие анализы операторных тождеств (12.29), (12.30) показывают, что все нули характеристической функции $G(\lambda) = Y_{n,\,n-q}(\lambda T^n)$ из (12.31) являются также нулями функции $f(\lambda)$ (не меньшей кратности). Поэтому отношение $f(\lambda)/G(\lambda)$ определяет векторную целую функцию переменной $\lambda$.

Пусть $f^*$ — линейный непрерывный функционал из $E^*$. Тогда

$$Q(\lambda) = \frac{f^*(f(\lambda))}{G(\lambda)}$$

определяет скалярную целую функцию переменной $\lambda \in \mathbb{C}$. Используя формулу (12.38), получим

$$Q(\lambda) = \frac{1}{G(\lambda)} \int_0^T y_{n,\,n-q}(t,\lambda)\,\psi(t)\,dt, \qquad \lambda \in \mathbb{C}. \tag{12.39}$$

Здесь $\psi(t) = f^*(u'(T-t))$ — непрерывная скалярная функция на отрезке $[\,0,T\,]$, а $G(\lambda) = Y_{n,\,n-q}(\lambda T^n)$ — характеристическая функция из (12.31). Такое представление (12.39) определяет целую функцию только если $\psi(t) \equiv 0$ на $[\,0,T\,]$. Установим этот факт с помощью следующего результата из работе [57], который мы сформулируем в нужной нам редакции.

**Лемма 12.2.** *Пусть* $n \in \mathbb{N}$, $n \geqslant 3$, $m \in \mathbb{N}\cup\{0\}$, *и пусть функции* $y_{n,m}(t,\lambda)$ *и* $Y_{n,m}(z)$ *определены формулами* (9.1) *и* (9.14)*, соответствено. Рассмотрим отношение* $Q(\lambda)$ *вида*

$$Q(\lambda) = \frac{1}{Y_{n,m}(\lambda T^n)} \int_0^T y_{n,m}(t,\lambda)\,\psi(t)\,dt, \tag{12.40}$$

*где* $\psi(t)$ *— непрерывная скалярная функция на отрезке* $[\,0,T\,]$. *Если* $Q(\lambda)$ *определяет целую функцию переменной* $\lambda \in \mathbb{C}$, *тогда* $\psi(t) \equiv 0$ *на* $[\,0,T\,]$ *и* $Q(\lambda) \equiv 0$ *на* $\mathbb{C}$.

Полное доказательство леммы 12.2 изложена в [57], где автор И. В. Тихонов развивает пример 199 из задачника [41] со ссылкой на Карлемана. Отметим лишь, что этот результат в работе [57] обсуждается на отрезке $[\,0,1\,]$, который не трудно перенести на отрезок $[\,0,T\,]$.

Применяя лемму 12.2 к целой функции $Q(\lambda)$ из (12.39), где $G(\lambda) = Y_{n,\,n-q}(\lambda T^n)$, $\psi(t) = f^*(u'(T-t))$. Получаем, что $\psi(t) \equiv 0$ на $[\,0,T\,]$. В результате $f^*(u'(T-t)) \equiv 0$ на $[\,0,T\,]$ для любого функционала $f^* \in E^*$. По теореме Хана-Банаха, заключаем, что $u'(t) = 0$ при $t \in [\,0,T\,]$. Следовательно, $u(t)$ является константой, но в силу условия $u(0) = 0$ из (12.2) получим $u(t) \equiv 0$ на $[\,0,T\,]$. При этом $g = 0$ (см. дифференциальное уравнение (12.1)). Итак, в этом случае, решение $(u(t), g)$ однородной обратной задачи (12.1)–(12.3) может быть только тривиальным. Достаточное условие критерия единственности в теореме 12.1 для любых $n \geqslant 3$ и $q \in \{\,0,\,\dots\,,\,n-1\,\}$ показано.

В итоге, было доказано, что: если ни одно из чисел (11.1) не является собственным значением оператора $A$, тогда однородная обратная задача (12.1)–(12.3) с любыми фиксированными $n \in \mathbb{N}$ и $q \in \{0, \ldots, n-1\}$ имеет только тривиальное решение $u(t) \equiv 0$, $g = 0$. Достаточное условие критерия единственности в теореме 12.1 установлено.

## § 13. Распределение нулей характеристической функции

Итак, согласно доказанным теоремам 11.1–11.4 установлено, что критерий единственности решения обратной задачи (10.1)–(10.3) тесно связан с нулями целых функций $Y_{n,m}(z)$, определенными в (9.14). Поэтому для того, чтобы применять полученные результаты, полезно знать расположение (или примерное расположение) нулей функций $Y_{n,m}(z)$ с параметрами $n \in \mathbb{N}$ и $m \in \mathbb{Z}$ (будем рассматривать только нужные нам случаи). Обсудим это подробнее.

Для случаев $n = 1$ и $n = 2$ ситуация элементарна, как показано ранее в параграфе 9, пункт 9.3, и все нули функций $Y_{1,1}(z)$, $Y_{2,2}(z)$ и $Y_{2,1}(z)$ находятся явно (см. множества нулей в (9.22)–(9.24), соответственно). Но, для случая $n \geqslant 3$ нули не описываются в явном виде и требуется дополнительная информация[5].

Поскольку, $Y_{n,m}(z)$ относятся к классу целых функций типа Миттаг-Леффлера

$$Y_{n,m}(z) = E_{1/n}(z;\, m+1), \qquad z \in \mathbb{C} \qquad (\text{см. } (9.15)),$$

то, вопрос о нулях включается в более широкий контекст аналогичной задачи для общей функции Миттаг-Леффлера $E_\rho(z;\, \mu)$ с параметрами $\rho > 0$, $\mu \in \mathbb{C}$ (для нашей случая нас интересуют значения $\rho = 1/n \leqslant 1/3$, $\mu = m+1$). Вопросу распределения нулей функций Миттаг-Леффлера посвящена специализированная монография [42], подводящая итог исследованиям многих аналитиков (Виман, Полиа, Островский, Седлецкий, Попов и др.).

[5]Точнее, при $n \geqslant 3$, как правило, нули функций $Y_{n,m}(z)$ не описываются в явном виде, но, возможно при некоторых значений $m \in \mathbb{Z}$ есть функции $Y_{n,m}(z)$, нули которых вычисляются явно. Как пример об этом укажем функции $Y_{4,m}(z)$, $m \in \{-2, 0, 2\}$ в пункте 13.2 ниже.

**13.1. Нули функции $Y_{n,m}(z)$ с индексом $n \geqslant 3$.** Приведем формулировку нескольких полезных результатов в нужной нам редакции.

**Теорема 13.1.** *Пусть $n, m \in \mathbb{Z}$, причем $n \geqslant 3$, $m \in \{\,0, 1, \ldots, n\,\}$. Тогда все нули функции $Y_{n,m}(z) = E_{1/n}(z;\, m{+}1)$ являются вещественными, отрицательными и простыми. При нумерации $k \in \mathbb{N}$ нули выражаются асимптотической формулой*

$$z_k = -\left( \frac{\pi}{\sin(\pi/n)} \left( k - \frac{1}{2} + \frac{m}{n} \right) + \alpha_k \right)^n, \tag{13.1}$$

*где $\alpha_k = o(1)$ при $k \to \infty$, точнее*

$$|\alpha_k| \leqslant C_{n,m} \exp(-k\,\theta_n), \qquad k \in \mathbb{N},$$

*где $\theta_n = 2\pi \sin(2\pi/n) > 0$, а $C_{n,m}$ — некоторая константа, зависящая лишь от выбора $n, m$.*

*Для описания нулей функции $Y_{n,l}(z) = E_{1/n}(z;\; l+1)$ с отрицательными значениями $l \in \{\,-1, -2, \ldots, -n\,\}$ можно воспользоваться формулой перехода*

$$Y_{n,\,l}(z) = z\, Y_{n,\,n+l}(z), \tag{13.2}$$

*где значение $n{+}l \equiv m$ попадает в множество $\{\,0,\, 1,\, \ldots,\, n{-}1\,\}$, давая, тем самым, возможность применять результаты из первой части теоремы.*

Сформулированная теорема 13.1 получается как следствие нескольких утверждений из [42] (см. там теорему 3.1.1 на с. 57, теорему 2.1.4 на с. 45 и теорему 2.2.2 на с. 48–49). Формула перехода (13.2) следует из определения (9.14) с учетом действующего соглашения (9.3).

Помимо асимптотической формулы (13.1) имеются двусторонние оценки нулей, конкретизирующие их положение при всех номерах $k \in \mathbb{N}$ в определенных интервалах локализации согласно следующей теореме.

**Теорема 13.2.** *Пусть $n, m \in \mathbb{Z}$, причем $n \geqslant 3$ и $m \in \{\,0, 1, \ldots, n\,\}$. Тогда все нули функции $Y_{n,m}(z) = E_{1/n}(z;\; m+1)$, расположенные в последовательность $\{\, z_k(n,m)\,\}_{k\in\mathbb{N}}$, удовлетворяют неравенствам*

$$-\,\beta_1(n,m) \;<\; z_1(n,m) \;<\; -\,\frac{(n+m)!}{m!}, \tag{13.3}$$

$$-\,\beta_k(n,m) \;<\; z_k(n,m) \;<\; -\,\beta_{k-1}(n,m), \qquad k \geqslant 2, \tag{13.4}$$

*где*

$$\beta_k(n,m) = \left( \frac{\pi}{\sin(\pi/n)} \left( k + \frac{m}{n} \right) \right)^n.$$

Теорема 13.2 непосредственно получается как следствие теоремы 3.1.1 из монографии [42, с. 57] для случая $\rho = 1/n \leqslant 1/3$, $\mu = m + 1$.

Полезно дополнить теоремы 13.1, 13.2 следующим результатом.

**Теорема 13.3.** *Пусть $n, m, d \in \mathbb{Z}$, причем $n \geqslant 3$, $m, d \in \{\,0,\,1,\,\ldots\,,\,n{-}1\,\}$ и $m \neq d$. Тогда ни один нуль функции $Y_{n,m}(z) = E_{1/n}(z;\ m+1)$ не является нулем функции $Y_{n,d}(z) = E_{1/n}(z;\ d+1)$. Более того, нули этих функций перемежают друг друга: между двумя любыми соседними нулями функции $Y_{n,m}(z)$ находится в точности один нуль функции $Y_{n,d}(z)$, и наоборот.*

Для получения теоремы 13.3 надо воспользоваться (9.18) и одним из результатов работы [102], где среди прочего установлено следующее: пусть $m, d \in \{0,\,1,\,\ldots\,,\,n{-}1\}$ и $m \neq d$, тогда положительные нули функций $y_{n,m}(t,-1)$ и $y_{n,d}(t,-1)$ перемежают друг друга (подробнее см. [57]).

**13.2. Функции $Y_{4,m}(z)$ с «хорошими» нулями**. Менее известно, что есть более сложные случаи, когда нули функций из семейства (9.14) вычисляются явно. Возможно впервые данный эффект был отмечен в работе [57]. Эти случаи подробно рассмотрены автором в [78]. Основываясь на [78], изложим следующие результаты.

**Лемма 13.1.** *Функции $Y_{4,\,0}(z)$ и $Y_{4,\,2}(z)$ из семейства* (9.14) *имеют соответствующие множества нулей*

$$\Lambda_{4,0} \equiv \big\{ -4(k-1/2)^4\pi^4 \big\}_{k\in\mathbb{N}}\,, \qquad \Lambda_{4,2} \equiv \big\{ -4k^4\pi^4 \big\}_{k\in\mathbb{N}}\,. \tag{13.5}$$

*причем все указанные нули являются простыми.*

**Доказательство.** Начнем с функции $Y_{4,\,0}(z)$. По формуле (9.14) запишем

$$Y_{4,0}(z) = 1 + \frac{z}{4!} + \frac{z^2}{8!} + \frac{z^3}{12!} + \ldots\,.$$

Отсюда

$$Y_{4,0}(\zeta^4) = 1 + \frac{\zeta^4}{4!} + \frac{\zeta^8}{8!} + \frac{\zeta^{12}}{12!} + \ldots = \frac{1}{2}\big(\cos\zeta + \operatorname{ch}\zeta\big) = \frac{1}{2}\big(\cos\zeta + \cos(i\zeta)\big).$$

Применив формулу суммы косинусов, введем целую функцию

$$F_{4,0}(\zeta) = Y_{4,0}(\zeta^4) = \cos\frac{(1-i)\zeta}{2}\,\cos\frac{(1+i)\zeta}{2}. \tag{13.6}$$

Ее нули находятся из совокупности двух уравнений

$$\cos\frac{(1-i)\zeta}{2} = 0, \qquad \cos\frac{(1+i)\zeta}{2} = 0$$

и образуют две серии $\zeta_k^{(1)} = (k-1/2)\pi(1+i)$ и $\zeta_k^{(2)} = (k-1/2)\pi(1-i)$ с общей индексацией $k \in \mathbb{Z}$. Формула (13.6) показывает, что нули функции $Y_{4,0}(z)$ связаны с нулями функции $F_{4,0}(\zeta)$ соотношением $z = \zeta^4$, т.е. каждый нуль функции $Y_{4,0}(z)$ есть четвертая степень какого-то нуля функции $F_{4,0}(\zeta)$. Возводя в четвертую степень числа $\zeta_k^{(1)}$ и $\zeta_k^{(2)}$, получаем единый ответ

$$z_k = ((k-1/2)\pi(1+i))^4 = ((k-1/2)\pi(1-i))^4 = -4(k-1/2)^4\pi^4$$

с индексацией $k \in \mathbb{N}$. Как видим, это именно те числа, что указаны в формуле (13.5) для множества $\Lambda_{4,0}$. Найденные нули являются простыми для функции $Y_{4,0}(z)$.

Действительно, из (13.6) следует, что $F'_{4,0}(\zeta) = 4\,\zeta^3\, Y'_{4,0}(\zeta^4)$. Поэтому соотношение $Y_{4,0}(z) = Y'_{4,0}(z) = 0$ для некоторого $z \neq 0$ возможно только, если $F_{4,0}(\zeta) = F'_{4,0}(\zeta) = 0$ для некоторого $\zeta \neq 0$. Но это никогда не выполняется, так как все нули функций $\cos((1-i)\zeta/2)$ и $\cos((1+i)\zeta/2)$, составляющих функцию (13.6), являются простыми, и $\zeta_k^{(1)} \neq \zeta_m^{(2)}$ ни при каком выборе $k, m \in \mathbb{Z}$.

Аналогично находятся нули функции $Y_{4,\,2}(z)$. По формуле (9.14) имеем

$$Y_{4,2}(z) = \frac{1}{2!} + \frac{z}{6!} + \frac{z^2}{10!} + \frac{z^3}{14!} + \dots .$$

Отсюда

$$\zeta^2 Y_{4,2}(\zeta^4) = \frac{\zeta^2}{2!} + \frac{\zeta^6}{6!} + \frac{\zeta^{10}}{10!} + \frac{\zeta^{14}}{14!} + \dots = \frac{1}{2}\left(\operatorname{ch}\zeta - \cos\zeta\right) = \frac{1}{2}\left(\cos(i\zeta) - \cos\zeta\right).$$

Применив формулу разности косинусов и разделив на $\zeta^2$, получим целую функцию

$$F_{4,2}(\zeta) = Y_{4,2}(\zeta^4) = \frac{1}{\zeta^2}\,\sin\frac{(1-i)\zeta}{2}\,\sin\frac{(1+i)\zeta}{2}. \tag{13.7}$$

Ее нули находятся из совокупности двух уравнений

$$\frac{1}{\zeta}\,\sin\frac{(1-i)\zeta}{2} = 0, \qquad \frac{1}{\zeta}\,\sin\frac{(1+i)\zeta}{2} = 0$$

и образуют две серии $\zeta_k^{(1)} = k\pi(1+i)$ и $\zeta_k^{(2)} = k\pi(1-i)$ с индексацией $k \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$. Возводя в четвертую степень, получаем для функции $Y_{4,2}(z)$ один общий ответ

$$z_k = (k\pi(1+i))^4 = (k\pi(1-i))^4 = -4k^4\pi^4$$

с окончательной индексацией $k \in \mathbb{N}$. Как видим, это именно те числа, что указаны в формуле (13.5) для множества $\Lambda_{4,2}$. По прежней схеме проверяется, что ни один из нулей функции $Y_{4,2}(z)$ не является кратным. $\square$

В качестве простого дополнения к лемме 13.1 рассмотрим функцию

$$Y_{4,-2}(z) = \frac{z}{2!} + \frac{z^2}{6!} + \frac{z^3}{10!} + \frac{z^4}{14!} + \ldots = z\, Y_{4,2}(z), \tag{13.8}$$

с множеством простых нулей

$$\Lambda_{4,-2} = \Lambda_{4,2} \cup \{0\} = \big\{ -4(k-1)^4\pi^4 \big\}_{k\in\mathbb{N}}. \tag{13.9}$$

Ответы (13.5), (13.9) можно записать единым образом

$$\Lambda_{4,m} = \big\{ -4(k+(m-2)/4)^4\pi^4 \big\}_{k\in\mathbb{N}}, \qquad m = -2,\, 0,\, 2. \tag{13.10}$$

Как видим, все нули функций $Y_{4,m}(z)$ при $m = -2,\, 0,\, 2$ находятся элементарно.

Сопоставим данный факт с общими результатами [42], применив их к функции $Y_{4,m}(z) = E_{1/4}(z; m+1)$ с различными $m \in \mathbb{Z}$. Так, используя теоремы 2.1.4, 2.2.2 и 3.1.1 из [42] получаем, что при $m \in \{\, 0, \ldots, 7\,\}$ *все нули* функции $Y_{4,m}(z)$ будут вещественными, отрицательными и простыми с асимптотической формулой.

$$z_k = z_k(4,m) = -4(k + (m-2)/4 + \alpha_k(m))^4\pi^4, \;\; \text{где} \;\; \alpha_k(m) \to 0 \;\; \text{при} \;\; k \to \infty. \tag{13.11}$$

Формула (13.11) согласована с индексацией $k \in \mathbb{N}$ и может быть дополнена весьма точными двусторонними оценками (13.3) и (13.4), при подстановке $n = 4$, и подходящие для всех значений $m \in \{\, 0, \ldots, 7\,\}$[6]. В случае произвольного $m \in \mathbb{Z}$ вещественными, отрицательными и простыми будут все нули $z_k = z_k(4,m)$ *с достаточно большими* номерами $k \in \mathbb{N}$, и формула (13.11) к ним по-прежнему применима.

Наш ответ (13.10) показывает, что при $m = -2,\, 0,\, 2$ асимптотическая формула (13.11) обращается в строгое равенство, где $\alpha_k(m) \equiv 0$ для всех нулей $z_k(4,m)$. Таким образом, результат (13.10) можно рассматривать как небольшое, но полезное дополнение к фундаментальным исследованиям [42]. В связи со сказанным возникает естественный вопрос, образующий следующую задачу.

**Задача 13.1.** Есть ли еще какие-то примеры функций $Y_{n,m}(z)$ из семейства (9.14) со значениями $n \geqslant 3$ и $m \in \mathbb{Z}$, когда все нули вычисляются явно, и асимптотические формулы из книги [42] обращаются в строгие равенства? Или же случаем $n = 4$ при $m = -2,\, 0,\, 2$ все и исчерпывается?

[6] Отметим, что значение $m = 7$ не включается при применение теоремы 13.2, но получается использованием особенности случая $n = 4$ из исходной теоремы 3.1.1 в [42].

Другие примеры нам неизвестны, и их построение представляется маловероятным. В основе успеха в нашем случае лежат удачно подобранные представления (13.6) и (13.7). Ясно, что их можно привести к виду

$$Y_{4,0}(z) = \cos\frac{(1-i)\sqrt[4]{z}}{2}\ \cos\frac{(1+i)\sqrt[4]{z}}{2}, \tag{13.12}$$

$$Y_{4,2}(z) = \frac{1}{\sqrt{z}}\ \sin\frac{(1-i)\sqrt[4]{z}}{2}\ \sin\frac{(1+i)\sqrt[4]{z}}{2}, \tag{13.13}$$

с дополнением

$$Y_{4,-2}(z) = \sqrt{z}\sin\frac{(1-i)\sqrt[4]{z}}{2}\ \sin\frac{(1+i)\sqrt[4]{z}}{2}. \tag{13.14}$$

полученным уже из (13.8). Для вычисления значений (13.12)–(13.14) используются главные ветви радикалов

$$\sqrt[4]{z} = {}_{+}\sqrt[4]{r}\, e^{i\theta/4}, \qquad \sqrt{z} = {}_{+}\sqrt{r}\, e^{i\theta/2},$$

взятые для $z = re^{i\theta}$ при $r > 0,\ 0 \leqslant \theta < 2\pi$.

## § 14. Некоторые следствия

В данном параграфе рассмотрим полезные дополнения к полученным результатам для обратной задачи (10.1)–(10.3). В начале приведем удобные достаточные условия единственности решения для этой обратной задачи. Потом, выделим обратную задачу (10.1)–(10.3) для уравнения четвертого порядка.

**14.1. Достаточны условия единственности решения.** При применении к обратной задаче (10.1)–(10.3) критерия единственности решения (теоремы 11.1) могут возникать трудности, связанные с нахождением собственных значений оператора $A$ и характеристических чисел $\lambda_k$ (см. (11.1)). Часто на практике собственные значения и характеристические числа не находятся явно, а удовлетворяют лишь некоторым приближенным оценкам. Когда эти оценки согласованы, где в область, содержащую характеристические числа $\lambda_k$, не попадают собственные значения оператора $A$, то на основании теоремы 11.1 получаем утверждение о единственности решения обратной задачи.

Для сокращения формулировок рассматриваем обратную задачу (10.1)–(10.3) в однородной версии (12.1)–(12.3) и ее специальных случаях. Оператор $A$ по-прежнему считаем линейным и замкнутым. Дадим сначала общие формулировки, а потом более специализированные.

**Теорема 14.1.** *Пусть при выборе* $T > 0$ *у оператора* $A$ *нет собственных значений на* $i\mathbb{R} \setminus (-2\pi i/T, 2\pi i/T)$. *Тогда обратная задача* (12.4), (12.5) *имеет только тривиальное решение* $u(t) \equiv 0$, $g = 0$. *В частности, для теоремы подходит любой оператор* $A$ *без мнимых собственных значений.*

Доказательство теоремы 14.1 непосредственно следует из теоремы 12.2, поскольку все характеристические числа (11.2) являются мнимыми, и с учетом их точных локализаций.

**Теорема 14.2.** *Пусть при выборе* $T > 0$ *у оператора* $A$ *нет собственных значений на луче* $(-\infty, -4\pi^2/T^2]$. *Тогда обратная задача* (12.6), (12.7) *имеет только тривиальное решение* $u(t) \equiv 0$, $g = 0$. *В частности, для теоремы подходит любой оператор* $A$ *без вещественных собственных значений.*

Доказательство теоремы 14.2 непосредственно следует из теорем 12.3, поскольку все характеристические чила (11.3) являются вещественными, отрицательными, и с учетом их точных локализаций.

**Теорема 14.3.** *Пусть при выборе* $T > 0$ *у оператора* $A$ *нет собственных значений на* $(-\infty, -\pi^2/T^2]$. *Тогда обратная задача* (12.8), (12.9) *имеет только тривиальное решение* $u(t) \equiv 0$, $g = 0$. *В частности, для теоремы подходит любой оператор* $A$ *без вещественных собственных значений.*

Доказательство теоремы 14.3 следует из теорем 12.4, поскольку все характеристические чила (11.4) являются вещественными, отрицательными, и с учетом их точных локализаций.

**Теорема 14.4.** *Пусть у оператора* $A$ *нет вещественных собственных значений. Тогда обратная задача* (12.1)–(12.3) *с фиксированными* $n \geqslant 3$ *и* $q \in \{0, \ldots, n-1\}$ *имеет только тривиальное решение* $u(t) \equiv 0$, $g = 0$.

**Доказательство.** Из теоремы 12.1 знаем, что характеристические числа имеют вид

$$\lambda_k = \frac{z_k(n, n-q)}{T^n} \qquad (\text{см. } (11.1)),$$

где $z_k(n, n-q)$ — нули функции $Y_{n,n-q}(z)$. В силу ограничения значений параметра $q \in \{0, \ldots, n-1\}$, имеем $1 \leqslant n-q \leqslant n$. Применяя теорему 13.1 к характеристической функции $Y_{n,n-q}(z)$, где $n \geqslant 3$ и $n-q \in \{1, \ldots, n\}$, заключаем, что все такие числа $\lambda_k$ из (11.1) являются вещественными, и даже отрицательными. Следовательно, по теореме 12.1, получаем нужный результат. □

Для теоремы 14.4 можно сформулировать следующее уточнение.

**Теорема 14.5.** *Пусть $A$ — линейный замкнутый оператор в банаховом пространстве $E$. Тогда обратная задача* (12.1)–(12.3) *с фиксированными значениями $n \geqslant 3$, $q \in \{0, \ldots, n-1\}$ и $T > 0$ имеет только тривиальное решение $u(t) \equiv 0$, $g = 0$, если у оператора $A$ нет собственных значений на луче*

$$M = \left( -\infty,\ -T^{-n}(2n-q)!/(n-q)!\ \right). \tag{14.1}$$

Доказательство теоремы 14.5 получается продолжением доказательства теоремы 14.4. Применяем к функции $Y_{n,n-q}(z)$, где $n \geqslant 3$ и $n-q \in \{1, \ldots, n\}$, еще теорему 13.2. Используя соотношений (13.3), (13.4), заключаем, что все числа $\lambda_k$ из (11.1) являются вещественными, отрицательными и расположены на луче (14.1), где нет собственных значений. Следовательно, по теореме 12.1, получаем нужный результат.

**Теорема 14.6.** *Пусть у оператора $A$ нет собственных значений на $(-\infty, -b]$ с некоторым числом $b > 0$. Тогда при любом выборе $T$ из интервала $(0, \pi/\sqrt{b}]$ обратная задача* (12.8), (12.9) *имеет только тривиальное решение $u(t) \equiv 0$, $g = 0$.*

**Доказательство.** Так как $T \in (0, \pi/\sqrt{b}]$, то $-\pi^2/T^2 \leqslant -b$. Тем самым, по теореме 12.4, все характеристические числа (11.4) попадают на $(-\infty, -b]$, где нет собственных значений оператора $A$. Следовательно, получаем нужный результат. □

Отметим, что аналогичные результаты теоремы 14.6 можно получить также для остальных случаев обратной задаче (12.1)–(12.3), относительно параметров $n, q$.

**14.2. Обратная задача для уравнения четвертого порядка.** Применим результаты параграфа 13, пункт 13.2, к однородной обратной задаче (12.1)–(12.3). Учитывая исходные ограничения $n \in \mathbb{N}$ и $q \in \{0, \ldots, n-1\}$, видим, что для формулы (11.1) с множеством $\Lambda_{n,n-q}$ подходит только одна возможность, а именно, $n = 4$, $q = 2$. Это дает множество $\Lambda_{4,2}$, описанное в лемме 13.1. Другие явно найденные множества $\Lambda_{4,0}$ и $\Lambda_{4,-2}$ не могут быть использованы.

Основываясь на работе автора [78], изложим следующие результаты.

**Теорема 14.7.** *Пусть $A$ — линейный замкнутый оператор в банаховом пространстве $E$. Для того чтобы однородная обратная задача*

$$\frac{d^4u(t)}{dt^4} = Au(t) + g, \qquad 0 < t < T, \tag{14.2}$$

$$u(0) = 0, \quad u'(0) = 0, \quad u''(0) = 0, \quad u'''(0) = 0, \tag{14.3}$$

$$u''(T) = 0 \tag{14.4}$$

*имела на* $(0,T)$ *только тривиальное решение* $u(t)\equiv 0$, $g=0$, *необходимо и достаточно, чтобы ни одно из чисел*

$$\lambda_k = -\frac{4k^4\pi^4}{T^4}, \qquad k\in\mathbb{N}, \tag{14.5}$$

*не являлось собственным значением оператора* $A$.

Действительно, обратная задача (14.2)–(14.4) есть частный случай общей однородной обратной задачи (12.1)–(12.3) при выборе $n=4$ и $q=2$. Применим теорему 12.1 и учтем описание множества $\Lambda_{n,\,n-q}\equiv\Lambda_{4,2}$ из формулы (13.5). Получим критерий из теоремы 14.7.

Допустим, какое-то число $\lambda=\lambda_k$ из (14.5) оказалось собственным значением оператора $A$ с собственным вектором $f_k\in D(A)$, $f_k\neq 0$. Укажем явный вид для элементарного решения (12.16).

В данном случае

$$u(t)=y_{4,4}(t,\lambda_k)\,f_k, \qquad g=f_k, \tag{14.6}$$

где $\lambda_k=-4k^4\pi^4/T^4$ с некоторым $k\in\mathbb{N}$. Используя формулы (9.1) и (9.16), заметим, что

$$y_{4,4}(t,\lambda_k)=\frac{t^4}{4!}+\lambda_k\frac{t^8}{8!}+\lambda_k^2\frac{t^{12}}{12!}+\ldots=\frac{1}{\lambda_k}\,(\,y_{4,0}(t,\lambda_k)-1\,)=\frac{1}{\lambda_k}\left(Y_{4,0}(\lambda_k t^4)-1\right).$$

Для функции $Y_{4,0}(z)$ имеется явное представление (13.12). Подставим в эту формулу переменную $z=\lambda_k t^4=-4k^4\pi^4t^4/T^4$. После элементарных подсчетов получим

$$Y_{4,0}(\lambda_k t^4)=Y_{4,0}(-4k^4\pi^4t^4/T^4)=\cos\frac{k\pi t}{T}\,\cos\frac{ik\pi t}{T}=\cos\frac{k\pi t}{T}\,\operatorname{ch}\frac{k\pi t}{T}.$$

Таким образом,

$$y_{4,4}(t,\lambda_k)=\frac{T^4}{4k^4\pi^4}\left(1-\cos\frac{k\pi t}{T}\,\operatorname{ch}\frac{k\pi t}{T}\right). \tag{14.7}$$

Применив соотношение (14.7) в формулы (14.6), получим следующую теорему.

**Теорема 14.8.** *Рассмотрим однородную обратную задачу* (14.2)–(14.4) *с фиксированным значением* $T>0$. *Предположим, что какое-то из чисел* $\lambda_k=-4k^4\pi^4/T^4$ *с некоторым* $k\in\mathbb{N}$ *есть собственное значение оператора* $A$. *Тогда единственность решения задачи нарушается. В частности, согласно формуле* (14.6), *задача* (14.2)–(14.4) *имеет нетривиальное элементарное решение*

$$u(t)=\frac{T^4}{4k^4\pi^4}\left(1-\cos\frac{k\pi t}{T}\,\operatorname{ch}\frac{k\pi t}{T}\right)f_k, \qquad g=f_k, \tag{14.8}$$

*с собственным вектором* $f_k\in D(A)$, $f_k\neq 0$, $Af_k=(-4k^4\pi^4/T^4)f_k$.

Прямая проверка подтверждает, что пара (14.8) удовлетворяет всем соотношениям в (14.2)–(14.4). Дополним теоремы 14.7, 14.8 следующим достаточным условием единственности решения для обратной задачи (14.2)–(14.4).

**Теорема 14.9.** *Пусть $A$ — линейный замкнутый оператор в банаховом пространстве $E$. Однородная обратная задача* (14.2)–(14.4) *имеет только тривиальное решение $u(t) \equiv 0$, $g = 0$, если у оператора $A$ нет собственных значений на луче*

$$(-\infty,\ -4\pi^4/T^4\,]. \tag{14.9}$$

Теорема 14.9 получается как следствие из теоремы 14.7. Эта теорема является уточнением для теоремы 14.5 для случая $n = 4$, $q = 2$. Действительно, из соотношения (14.1), имеем

$$M = (-\infty,\ -6!/T^4\,2!\,] \;=\; (-\infty,\ -360/T^4\,].$$

Как видим, множество $M$ содержит луч (14.9). Завершим следующей задачей, тесно связанной с предыдущей задачей 13.1 в параграфе 13, пункт 13.2.

**Задача 14.1.** Есть ли еще какие-то возможности, кроме указанных

$$(n, q) \in \{\,(1,0),\ (2,0),\ (2,1),\ (4,2)\,\}, \tag{14.10}$$

когда общий критерий единственности решения из теоремы 12.1 приобретает законченный вид с явно вычисленными значениями (11.1) ? Или же четырьмя случаями из формулы (14.10) все и исчерпывается ?

# § 15. Специальные примеры обратных задач

Проиллюстрируем полученные результаты настоящей главы конкретными примерами для уравнений в частных производных, основываясь на [9]. Укажем сначала дифференциальные операторы $A$ с подходящими спектральными свойствами.

**Пример 1.** Рассмотрим краевую задачу

$$\begin{cases} f^{(4)}(x) = \mu f(x), \qquad 0 \leqslant x \leqslant 1, \\ f'(0) = 0, \quad f''(0) = 0, \quad f'''(0) = 0, \quad f''(1) = 0, \end{cases} \tag{15.1}$$

со спектральным параметром $\mu \in \mathbb{C}$.

Задаче (15.1) отвечает оператор $A = d^4/dx^4$ в пространстве $L_2(0,1)$ на области определения

$$D(A) = \left\{ f \in H^4(0,1): \quad f'(0) = 0, \quad f''(0) = 0, \quad f'''(0) = 0, \quad f''(1) = 0 \right\}.$$

Данный оператор имеет собственные значения

$$\mu_k = -4k^4\pi^4, \qquad k \in \mathbb{N}, \tag{15.2}$$

с собственными функциями

$$f_k(x) = \operatorname{ch} k\pi x \cdot \cos k\pi x, \qquad k \in \mathbb{N}. \tag{15.3}$$

Помимо чисел (15.2) в спектр оператора $A$ входит также собственное значение $\mu_0 = 0$ с собственной функцией $f_0(x) = 1$, но это сейчас нам не понадобится.

**Пример 2.** Рассмотрим краевую задачу

$$\begin{cases} f^{(4)}(x) = \mu f(x), & 0 \leqslant x \leqslant 1, \\ f(0) = 0, \quad f'(0) = 0, \quad f'''(0) = 0, \quad f(1) = 0, \end{cases} \tag{15.4}$$

со спектральным параметром $\mu \in \mathbb{C}$.

Задаче (15.4) отвечает оператор $A = d^4/dx^4$ в пространстве $L_2(0,1)$ на области определения

$$D(A) = \left\{ f \in H^4(0,1): \quad f(0) = 0, \quad f'(0) = 0, \quad f'''(0) = 0, \quad f(1) = 0 \right\}.$$

Данный оператор имеет спектр, составленный из тех же собственных значений (15.2) с собственными функциями

$$f_k(x) = \operatorname{sh} k\pi x \cdot \sin k\pi x, \qquad k \in \mathbb{N}. \tag{15.5}$$

Других собственных значений здесь нет.

Теперь можно перейти к конкретным примерам обратной задачи (12.1)–(12.3). Рассмотрим, именно, обратную задачу (14.2)–(14.4) для дифференциального уравнения четвертого порядка на интервале $(0,1)$. В качестве оператора $A$ выступает четвертая производная $d^4/dx^4$, дополненная подходящими краевыми условиями по переменной $x$. Ввиду простоты ситуации и «конечномерности» получаемых функциональных выражений, выбор основного банахова пространства $E$ представляется не принципиальным. Все наши ответы удовлетворяют поставленным задачам в классическом смысле и допускают прямую проверку подстановкой в заданные формулы.

**Пример 3.** Рассмотрим систему соотношений

$$\begin{cases} u_{tttt}(x,t) = u_{xxxx}(x,t) + g(x), \qquad 0 \leqslant x \leqslant 1, \quad 0 \leqslant t \leqslant 1, \\ u_x(0,t) = 0, \quad u_{xx}(0,t) = 0, \quad u_{xxx}(0,t) = 0, \quad u_{xx}(1,t) = 0, \\ u(x,0) = 0, \quad u_t(x,0) = 0, \quad u_{tt}(x,0) = 0, \quad u_{ttt}(x,0) = 0, \\ u_{tt}(x,1) = 0, \end{cases} \tag{15.6}$$

с неизвестными функциями $u(x,t)$ и $g(x)$.

Это аналог обратной задачи (14.2)–(14.4) (при $T = 1$) с оператором $d^4/dx^4$, отвечающим спектральной задаче (15.1). При этом все числа (14.5) (при $T = 1$) из теоремы 14.7 совпадают с собственными значениями (15.2), составляющими спектр данного оператора $A$. Отсюда заключаем, что единственность решения в обратной задаче (15.6) нарушается. По теореме 14.8, совмещая общий шаблон (14.8) с конкретными выражениями (15.3), получим элементарные решения для обратной задачи (15.6). Они имеют вид

$$u(t) = \frac{1}{4k^4\pi^4}\,(\,1 - \operatorname{ch} k\pi t \cdot \cos k\pi t\,)\,\operatorname{ch} k\pi x \cdot \cos k\pi x, \qquad g(x) = \operatorname{ch} k\pi x \cdot \cos k\pi x.$$

Указанные пары удовлетворяют соотношениям (15.6) при всех $k \in \mathbb{N}$.

**Пример 4.** Рассмотрим систему соотношений

$$\begin{cases} u_{tttt}(x,t) = u_{xxxx}(x,t) + g(x), \qquad 0 \leqslant x \leqslant 1, \quad 0 \leqslant t \leqslant 1, \\ u(0,t) = 0, \quad u_x(0,t) = 0, \quad u_{xxx}(0,t) = 0, \quad u(1,t) = 0, \\ u(x,0) = 0, \quad u_t(x,0) = 0, \quad u_{tt}(x,0) = 0, \quad u_{ttt}(x,0) = 0, \\ u_{tt}(x,1) = 0, \end{cases} \tag{15.7}$$

с неизвестными функциями $u(x,t)$ и $g(x)$.

Это аналог обратной задачи (14.2)–(14.4) (при $T = 1$) с оператором $d^4/dx^4$, отвечающим спектральной задаче (15.4). При этом все числа (14.5) (при $T = 1$) из теоремы 14.7 совпадают с собственными значениями (15.2), составляющими спектр данного оператора $A$. По теореме 14.7 заключаем, что единственность решения в обратной задаче (15.7) нарушается. По теореме 14.8, совмещая (14.8) и (15.5), получаем элементарные решения вида

$$u(t) = \frac{1}{4k^4\pi^4}\,(\,1 - \operatorname{ch} k\pi t \cdot \cos k\pi t\,)\,\operatorname{sh} k\pi x \cdot \sin k\pi x, \qquad g(x) = \operatorname{sh} k\pi x \cdot \sin k\pi x.$$

Указанные пары удовлетворяют соотношениям (15.7) при всех $k \in \mathbb{N}$.

Как видим, в задачах (15.6) и (15.7) есть бесконечно много различных линейно независимых элементарных решений, находимых согласно теореме 14.8. Построенные примеры 3 и 4 носят, конечно, иллюстративный характер. Для дальнейшего развития теории было бы полезно привести примеры обратных задач вида (14.2)–(14.4) (или общего вида (12.1)–(12.3)), возникающих непосредственно в математической физике.

# Заключение

Основные результаты диссертационной работы состоят в следующем.

- Без ограничений на тип абстрактного дифференциального уравнения второго порядка установлены критерии единственности решения для линейных обратных задач с переопределениями второго и третьего рода.
- Получены результаты по распределению нулей характеристической целой функции, возникшей при изучении обратной задачи с финальным переопределением третьего рода.
- На основании результатов о распределении нулей характеристической целой функции установлены эффективные достаточные признаки единственности решения обратной задачи с финальным переопределением третьего рода.
- Указаны конструкции присоединенных решений однородной обратной задачи для дифференциального уравнения второго порядка в тех случаях, когда соответствующая характеристическая целая функция имеет кратные нули.
- Без ограничений на тип абстрактного дифференциального уравнения произвольного порядка $n \in \mathbb{N}$ установлен критерий единственности решения модельной обратной задачи с переопределением, содержащим производную искомой функции в выбранный финальный момент времени.
- Без ограничений на тип и порядок уравнения получены эффективные достаточные признаки единственности решения изучаемой линейной обратной задачи.
- Обнаружен новый пример обратной задачи для абстрактного дифференциального уравнения четвертого порядка, где вопрос единственности решения допускает полное исследование в элементарных терминах.

Результаты диссертационной работы представляют интерес для специалистов, работающих в области теории дифференциальных уравнений, математического анализа и теории функций.

Дальнейшие исследования могут быть связаны с изучением разрешимости подобных обратных задач (без ограничений на тип эволюционного уравнения) и с выбором других более сложный переопределений, в том числе нелокального и интегрального вида.

# Литература


1. **Алмохамед М.** Критерий единственности решения в линейной обратной задаче с финальным переопределением второго рода // Вестник Воронежского государственного университета. Серия: Физика. Математика. — 2019. — № 3. — С. 50–58.

2. **Алмохамед М.** Критерий единственности решения в одной обратной задаче для абстрактного дифференциального уравнения второго порядка // Современные методы теории функций и смежные проблемы: материалы Международной конференции: Воронежская зимняя математическая школа. — Воронеж: Издательский дом ВГУ, 2019. — С. 19–20.

3. **Алмохамед М.** Восстановление правой части в уравнении Пуассона при помощи специальных краевых условий // Современные проблемы теории функций и их приложения: материалы 20-й международной Саратовской зимней школы. — Саратов: ООО Изд-во «Научная книга», 2020. — С. 30–32.

4. **Алмохамед М.** Модельные обратные задачи для абстрактных дифференциальных уравнений второго и высших порядков // Современные проблемы математики и математического образования: LXXVI Герценовские чтения: сборник научных статей. — СПб.: Изд-во РГПУ им. А. И. Герцена, 2023. — С. 207–215.

5. **Алмохамед М., Тихонов И. В.** Об обратной задаче для эволюционного уравнения второго порядка с финальным переопределением третьего рода // Современные методы теории функций и смежные проблемы: материалы Международной конференции: Воронежская зимняя математическая школа. — Воронеж: Издательский дом ВГУ, 2021. — С. 36–38.

6. **Алмохамед М., Тихонов И. В.** Единственность решения в модельной обратной задаче для абстрактного дифференциального уравнения второго порядка // Дифференциальные уравнения, математическое моделирование и вычислительные алгоритмы: сборник материалов международной конференции. — Белгород: ИД «БелГУ» НИУ «БелГУ», 2021. — С. 19–21.

7. **Алмохамед М., Тихонов И. В.** О некоторых спектральных исследованиях, связанных с теорией обратных задач // Современные проблемы теории функций и их приложения: материалы 21-й международной Саратовской зимней школы. — Саратов: Саратовский университет, 2022. — С. 20–26.

8. **Алмохамед М., Тихонов И. В.** Примеры присоединенных решений в линейных обратных задачах // Челябинский физико-математический журнал. — 2022. — Т. 7, вып. 4. — С. 395–411.

9. **Алмохамед М., Тихонов И. В.** Специальные примеры обратных задач для дифференциальных уравнений четвертого порядка // Системы компьютерной математики и их приложения: межвузовский сборник научных трудов. — Смоленск: Изд-во СмолГУ, 2023. — Вып. 24. — С. 218–222.

10. **Амиров А. Х.** О разрешимости обратных задач для уравнения второго порядка // Функц. анализ и его прилож. — 1986. — Т. 20, вып. 3. — С. 80–81.

11. **Бейтмен Г., Эрдейи А.** Высшие трансцендентные функции. Том 3. Эллиптические и автоморфные функции. Функции Ламе и Матье. (Сер.: «Справочная математическая библиотека»). — М.: Наука, 1967. — 300 с.

12. **Васильев В. В.** Спектральные свойства одной операторной матрицы // Белгородский гос. пед. институт. Деп. ВИНИТИ 26.02.1988. № 1573-В88. — Белгород: 1988. — 10 с.

13. **Вишик М. И.** Задача Коши для уравнений с операторными коэффициентами, смешанная краевая задача для систем дифференциальных уравнений и приближенный метод их решения // Матем. сборник. — 1956. — Т. 39 (81), № 1. — С. 51–148.

14. **Вишик М. И., Ладыженская О. А.** Краевые задачи для уравнений в частных производных и некоторых классов операторных уравнений // Успехи матем. наук. — 1956. — Т. 11, вып. 6 (72). — С. 41–97.

15. **Глушак А. В.** Об одной обратной задаче для абстрактного дифференциального уравнения дробного порядка // Матем. заметки. — 2010. — Т. 87, вып. 5. — С. 684–693.

16. **Денисов А. М.** Введение в теорию обратных задач. — М.: Изд-во МГУ, 1994. — 208 с.

17. **Джрбашян М. М.** Интегральные преобразования и представления функций в комплексной области. — М.: Наука, 1966. — 672 с.

18. **Ильин В. А.** Необходимые и достаточные условия базисности подсистемы собственных и присоединенных функций пучка М. В. Келдыша обыкновенных дифференциальных операторов // Доклады Академии наук СССР. — 1976. — Т. 227, № 4. — С. 796–799.

19. **Ильин В. А.** О существовании приведенной системы собственных и присоединенных функций у несамосопряженного обыкновенного дифференциального оператора // Труды МИАН СССР. — 1976. — Т. 142. — С. 148–155.

20. **Ионкин Н. И.** Решение одной краевой задачи теории теплопроводности с неклассическим краевым условием // Дифференц. уравнения. — 1977. — Т. 13, № 2. — С. 294–304.

21. **Исаков В. М.** Об одном классе обратных задач для параболических уравнений // Доклады Академии наук СССР. — 1982. — Т. 263, № 6. — С. 1296–1299.

22. **Искендеров А. Д.** Некоторые обратные задачи об определении правых частей дифференциальных уравнений // Известия АН Азерб. ССР, сер. физ.-техн. и матем. наук. — 1976. — № 2. — С. 58–63.

23. **Искендеров А. Д., Тагиев Р. Г.** Обратная задача об определении правых частей эволюционных уравнений в банаховом пространстве // Вопросы прикл. матем. и киберн. Науч. труды Азербайджанского ун-та. — 1979. — № 1. — С. 51–56.

24. **Камынин В. Л.** Об однозначной разрешимости обратной задачи для параболических уравнений с условием финального переопределения // Матем. заметки. — 2003. — Т. 73, вып. 2. — С. 217–227.

25. **Качмаж С., Штейнгауз Г.** Теория ортогональных рядов. — М.: ГИФМЛ, 1958. — 508 с.

26. **Костин А. Б.** Контрпримеры в обратных задачах для параболических, эллиптических и гиперболических уравнений // Журнал вычислительной математики и математической физики. — 2014. — Т. 54, № 5. — С. 779–792.

27. **Kostin A. B., Piskarev S. I.** Inverse Source Problem for the Abstract Fractional Differential Equation // Journal of Inverse and Ill-Posed Problems. — 2020. — V. 54, № 5. — P. 1–15.

28. **Красносельский М. А., Забрейко П. П., Пустыльник Е. И., Соболевский П. Е.** Интегральные операторы в пространствах суммируемых функций. — М.: Наука, 1966. — 500 с.

29. **Крейн С. Г.** Линейные дифференциальные уравнения в банаховом пространстве. (Сер.: «Современные проблемы математики»). — М.: Наука, 1967. — 464 с.

30. **Крейн С. Г. (ред.).** Функциональный анализ. Изд. 2-е, перераб. и дополн. (серия «Справочная математическая библиотека»)/ Коллектив авторов, под общей редакцией С. Г. Крейн. — М.: Наука, 1972. — 544 с.

31. **Кудрявцев Л. Д., Кутасов А. Д., Чехлов В. И., Шабунин М. И.** Сборник задач по математическому анализу. Том 1. Предел. Непрерывность. Дифференцируемость. Изд. 2-е. — М.: ФИЗМАТЛИТ, 2003. — 496 с.

32. **Левин Б. Я.** Распределение корней целых функций. — М.: ГИТТЛ, 1956. — 632 с.

33. **Леонтьев А. Ф.** Целые функции. Ряды экспонент. — М.: Наука, 1983. — 176 с.

34. **Ломов И. С.** Спектральный метод В. А. Ильина. Несамосопряженные операторы. I. Оператор второго порядка. Базисность и равномерная сходимость спектральных разложений. — М.: МАКС Пресс, 2019. — 132 с.

35. **Ломов И. С.** Спектральный метод В. А. Ильина. Несамосопряженные операторы. II. Оценки скорости равносходимости спектральных разложений. — М.: МАКС Пресс, 2023. — 380 с.

36. **Любич Ю. И.** К теореме единственности решения абстрактной задачи Коши // Успехи мат. наук. — 1961. — Т. 16, вып. 5(101). — С. 181–182.

37. **Маркушевич А. И.** Целые функции. Элементарный очерк. Изд. 2-е. — М.: Наука, 1975. — 120 с.

38. **Михайлов В. П.** Дифференциальные уравнения в частных производных. Изд. 2-е. — М.: Наука, 1983. — 424 с.

39. **Орловский Д. Г.** Об одной обратной задаче для дифференциального уравнения второго порядка в банаховом пространстве // Дифференц. уравнения. — 1989. — Т. 25, № 6. — С. 1000–1009.

40. **Орловский Д. Г.** К задаче определения параметра эволюционного уравнения // Дифференц. уравнения. — 1990. — Т. 26, № 9. — С. 1614–1621.

41. **Полиа Г., Сеге Г.** Задачи и теоремы из анализа. Часть вторая. Теория функций. Распределение нулей. Полиномы. Определители. Теория чисел. Изд. 3-е. — М.: Наука, 1978. — 432 с.

42. **Попов А. Ю., Седлецкий А. М.** Распределение корней функций Миттаг-Леффлера // Современная математика. Фундаментальные направления. — 2011. — Т. 40. — С. 3–171.

43. **Прилепко А. И.** Обратные задачи теории потенциала. (эллиптические, параболические, гиперболические уравнения и уравнение переноса) // Матем. заметки. — 1973. — Т. 14, № 5. — С. 755–767.

44. **Прилепко А. И.** Избранные вопросы в обратных задачах математической физики // Условно-корректные задачи математической физики и анализа. — Новосибирск: Наука. Сиб. отд-ние, 1992. — С. 151–162.

45. **Прилепко А. И., Костин А. Б.** О некоторых обратных задачах для параболических уравнений с финальным и интегральным наблюдением // Математический сборник. — 1992. — Т. 183, № 4. — С. 49–68.

46. **Прилепко А. И., Соловьёв В. В.** Теоремы разрешимости и метод Ротэ в обратных задачах для уравнения параболического типа. II // Дифференц. уравнения. — 1987. — Т. 23, № 11. — С. 1971–1980.

47. **Прокопенко Л. Н.** О единственности решения задачи Коши для операторно-дифференциальных уравнений // Доклады Академии Наук СССР. — 1963. — Т. 148, № 5. — С. 1030–1033.

48. **Сабитов К. Б.** Задача Дирихле для уравнений с частными производными высоких порядков // Матем. заметки. — 2015. — Т. 97, вып. 2. — С. 262–276.

49. **Соловьев В. В.** Обратные задачи для уравнений эллиптического и параболического типов в пространствах гёльдера: дис. ... д-ра физ.мат. наук: 01.01.02. — М., 2013.

50. **Соловьев В. В.** Разрешимость обратных задач для эллиптического уравнения в цилиндре // Вестник Московского государственного областного университета. Сер. Физика – Математика. — 2012. — № 1. — С. 27–38.

51. **Стоилов С.** Теория функций комплексного переменного. Том 1. Основные понятия и принципы. — М.: ИЛ, 1962. — 364 с.

52. **Титчмарш Е.** Теория функций. Изд. 2-е. — М.: Наука, 1980. — 464 с.

53. **Тихонов А. Н., Самарский А. А.** Уравнения математической физики. Изд. 7-е. (Сер.: «Классический университетский учебник»). — М.: Изд-во МГУ, Изд-во Наука, 2004. — 798 с.

54. **Тихонов И. В.** Структурные свойства нуль-решений абстрактной задачи Коши // Интегральные преобразования и специальные функции. Информ. бюллетень. — 2002. — Т. 3, № 1. — С. 22–38.

55. **Тихонов И. В.** Теоремы единственности в линейных нелокальных задачах для абстрактных дифференциальных уравнений // Известия РАН, сер. матем. — 2003. — Т. 67, № 2. — С. 133–166.

56. **Тихонов И. В.** Абстрактные дифференциальные нуль-уравнения // Функциональный анализ и его приложения. — 2004. — Т. 38, вып. 2. — С. 65–70.

57. **Тихонов И. В.** Обобщенная задача Уорда для абстрактных дифференциальных уравнений // Дифференц. уравнения. — 2005. — Т. 41, № 3. — С. 325–336.

58. **Тихонов И. В.** Обратные, нелокальные и краевые задачи для эволюционных уравнений: дис. ... д-ра физ.мат. наук: 01.01.02: защищена 29.10.08. — М., 2008.

59. **Тихонов И. В.** Неклассические задачи для дифференциальных уравнений и распределение нулей целых функций типа Миттаг-Леффлера // Системы компьютерной математики и их приложения: Материалы XIV Международной научной конференции, посвященной 90-летию профессора М.Б. Балка. — Смоленск: Изд-во СмолГУ, 2013. — Вып. 14. — С. 170–173.

60. **Тихонов И. В., Алмохамед М.** Единственность решения обратной задачи с финальным условием для эволюционного уравнения произвольного порядка // Современные проблемы вычислительной математики и математической физики. Международная конференция. Тезисы докладов. — Москва: Издательский отдел ВМК МГУ имени М. В. Ломоносова, МАКС Пресс, 2019. — С. 64.

61. **Тихонов И. В., Алмохамед М.** Об одной обратной задаче для дифференциального уравнения высокого порядка в банаховом пространстве // Некоторые

актуальные проблемы современной математики и математического образования. Герценовские чтения – 2019. Материалы научной конференции. — СПб.: Изд-во РГПУ им. А. И. Герцена, 2019. — С. 91–95.

62. **Тихонов И. В., Алмохамед М.** Обобщенные экспоненты и их применение в теории дифференциальных уравнений // Системы компьютерной математики и их приложения: Материалы XXI Международной научной конференции. — Смоленск: Изд-во СмолГУ, 2020. — Вып. 21. — С. 345–353.

63. **Тихонов И. В., Алмохамед М.** Спектральная теория линейных обратных задач для абстрактных дифференциальных уравнений высокого порядка // Современные методы математической физики и их приложения: тезисы докладов. — Ташкент, 2020. — № 1. — С. 105–107.

64. **Тихонов И. В., Алмохамед М.** Линейная обратная задача для дифференциального уравнения второго порядка в банаховом пространстве // Тихоновские чтения: научная конференция: тезисы докладов. — Москва: МАКС Пресс, 2021. — С. 105.

65. **Тихонов И. В., Алмохамед М.** Обратная задача с переопределением третьего рода для абстрактного дифференциального уравнения второго порядка // Дифференц. уравнения. — 2022. — Т. 58, № 7. — С. 890–911.

66. **Тихонов И. В., Алмохамед М.** Единственность и неединственность решения в линейной обратной задаче с переопределением третьего рода // Системы компьютерной математики и их приложения: материалы XXIII Международной научной конференции. — Смоленск: Изд-во СмолГУ, 2022. — Вып. 23. — С. 291–298.

67. **Тихонов И. В., Алмохамед М.** Присоединенные решения в обратных задачах для эволюционных уравнений второго порядка // Тихоновские чтения: тезисы докладов: научная конференция. — Москва: МАКС Пресс, 2022. — С. 82.

68. **Тихонов И. В., Шерстюков В. Б., Алмохамед М.** О некоторых трансцендентных уравнениях, важных для математической физики // Современные проблемы теории функций и их приложения: материалы 21-й международной Саратовской зимней школы. — Саратов: Саратовский университет, 2022. — С. 294–299.

69. **Тихонов И. В., Эйдельман Ю. С.** Единственность решения двухточечной обратной задачи для абстрактного дифференциального уравнения с неизвестным параметром // Дифференц. уравнения. — 2000. — Т. 36, № 8. — С. 1132–1133.

70. **Тихонов И. В., Эйдельман Ю. С.** Обратная задача для дифференциального уравнения в банаховом пространстве и распределение нулей целой функции типа Миттаг-Леффлера // Дифференц. уравнения. — 2002. — Т. 38, № 5. — С. 637–644.

71. **Тихонов И. В., Эйдельман Ю. С.** Критерий единственности в обратной задаче для абстрактного дифференциального уравнения с нестационарным неоднородным слагаемым // Матем. заметки. — 2005. — Т. 77, вып. 2. — С. 273–290.

72. **Федоров В. Е., Нагуманова А. В.** Обратная задача для эволюционного уравнения с дробной производной Герасимова–Капуто в секториальном случае // Известия Иркутского государственного университета. Серия Математика. — 2019. — Т. 28. — С. 123–137.

73. **Федоров В. Е., Нагуманова А. В.** Линейные обратные задачи для одного класса вырожденных эволюционных уравнений дробного порядка // Итоги науки и техники. Современная математика и ее приложения. Тематические обзоры ВИНИТИ. — 2019. — Т. 167. — С. 97–111.

74. **Хилле Э., Филлипс Р.** Функциональный анализ и полугруппы. — М.: ИЛ, 1962. — 832 с.

75. **Эйдельман Ю. С.** Единственность решения обратной задачи для дифференциального уравнения в банаховом пространстве // Дифференц. уравнения. — 1987. — Т. 23, № 9. — С. 1647–1649.

76. **Эйлер Л.** Введение в анализ бесконечных. Том 2. — М.: ГИФМЛ, 1961. — 392 с.

77. **Almohamed M., Tikhonov I. V.** Uniqueness of the Solution in the Inverse Problem for an Evolution Equation of Arbitrary Order // Mathematical Modelling in Applied Sciences ICMMAS'19. — Belgorod, Russia: BSU, 2019. — P. 25–26.

78. **Almohamed M., Tikhonov I. V.** Specific Cases of One General Inverse Problem for Abstract Differential Equations // Lobachevskii journal of mathematics. — 2023. — V. 44, № 2. — P. 502–509.

79. **Arfken G. B., Weber H. J., Harris F. E.** Mathematical Methods for Physicists: A Comprehensive Guide. Seventh Edition. — Academic Press, 2013. — xiii+1205 pp.

80. **Bayat M., Teimoori H., Mehri B.** A Generalization of Rotation and Hyperbolic Matrices and its Application // Electronic Journal of Linear Algebra. — 2007. — V. 16. — P. 125–134.

81. **Boas R. P.** Entire Functions. Volume 5. — New York: Academic Press, 1954. — xi+276 pp.

82. **Bourgin D. G., Duffin R.** The Dirichlet Problem for the Vibrating String Equation // Bulletin of the American Mathematical Society. — 1939. — V. 45, № 12. — P. 851–858.

83. **Buchwald V. T.** Eigenfunctions of Plane Elastostatics. I. The strip // Proceedings of the Royal Society of London. Ser. A. Mathematical and Physical Sciences. — 1964. — V. 277, № 1370. — P. 385–400.

84. **Comtet L.** Advanced Combinatorics. The Art of Finite and Infinite Expansions. — Dordrecht, Holland: D. Reidel Publishing Company, 1974. — xi+343 pp.

85. **Eidelman Y. S., Tikhonov I. V.** On Periodic Solutions of Abstract Differential Equations // Abstract and Applied Analysis. — 2001. — V. 6, № 8. — P. 489–499.

86. **Fadle J.** Die Selbstspannungs-Eigenwertfunktionen der Quadratischen Scheibe // Ingenieur-Archiv (≡ Archive of Applied Mechanics). — 1940. — Bd. 11. — S. 125–149.

87. **Fattorini H. O.** Ordinary Differential Equations in Linear Topological Spaces, I // Journal of Differential Equations. — 1968. — V. 5, № 1. — P. 72–105.

88. **Fattorini H. O.** Ordinary Differential Equations in Linear Topological Space, II // Journal of Differential Equations. — 1969. — V. 6, № 1. — P. 50–70.

89. **Gorenflo R., Kilbas A. A., Mainardi F., Rogosin S.** Mittag-Leffler Functions, Related Topics and Applications. Second Edition. — Berlin, Heidelberg: Springer, 2020. — xvi+540 p.

90. **Hardy G. H.** On the Zeroes of Integral Function $x - \sin x = \sum_1^\infty (-)^{n-1} \frac{x^{2n+1}}{2n+1!}$ // The Messenger of Mathematics. — 1902. — V. 31, № 11. — P. 161–165.

91. **Hasanoğlu A. H., Romanov V. G.** Introduction to Inverse Problems for Differential Equations. — Cham, Switzerland: Springer, 2017. — xiii+261 pp.

92. **Hersh R.** Explicit Solution of a Class of Higher-Order Abstract Cauchy Problems // Journal of Differential Equations. — 1970. — V. 8, № 3. — P. 570–579.

93. **Hille E.** Une Généralisation du Problème de Cauchy // Annales de l'Institut Fourier. — 1952. — T. 4. — P. 31–48.

94. **Hille E.** Sur le Problème Abstrait de Cauchy // Comptes Rendus des Séances de L'Académie des Sciences. — 1953. — T. 236, № 15. — P. 1466–1467.

95. **Isakov V.** Inverse Source Problems. (Math. Surveys and Monographs; №. 34). — Providence, Rhode Island: American Mathematical Society, 1990. — xvi+193 pp.

96. **Katopodes F. V., Davis A. M. J., Stone H. A.** Piston Flow in Two-Dimensional Channel // Physics of Fluids. — 2000. — V. 12, № 5. — P. 1240–1243.

97. **Kirsch A.** An Introduction to the Mathematical Theory of Inverse Problems. (Applied Mathematical Sciences. Volume 120). Second Edition. — New York: Springer, 2011. — xiv+310 pp.

98. **Levin B. Ya.** (in collaboration with Lyubarskii Yu., Sodin M., Tkachenko V.) Lectures on entire functions. (Translations of Math. Monographs, Vol. 150). — Providence, Rhode Island: American Mathematical Society, 1996. — xv+248 pp.

99. **Lions J. L.** Equations Differentielles Operationnelles: Et Problémes aux Limites. — Berlin, Heidelberg: Springer, 1961. — ix+292 pp.

100. **Lizama C., Murillo M.** Well-Posedness for a Fourth-Order Equation of Moore–Gibson–Thompson Type // Electronic Journal of Qualitative Theory of Differential Equations. — 2021. — № 81. — P. 1–18.

101. **Masayoshi Hata.** Problems and Solutions in Real Analysis. (Series on Number Theory and Its Applications. Vol. 4). — Singapore: World Scientific, 2007. — x+292 pp.

102. **Mikusiński J. G.** Sur les Fonctions $k_n(x) = \sum_{\nu=0}^{\infty} (-1)^n \dfrac{x^{n+k\nu}}{(n+k\nu)!}$ ( $k = 1, 2, \ldots$ $n = 0, 1, \ldots, k-1$ ) // Annales de la Société Polonaise de Mathématique. — 1948. — T. 21, Fasc. 1. — P. 1–12.

103. **Muldoon M. E., Ungar A. A.** Beyond Sin and Cos // Mathematics Magazine. — 1996. — Vol. 69, № 1. — P. 3–14.

104. **Müntz Ch. H.** Über Approximationssatz von Weierstraß // Mathematische Abhandlungen Hermann Amandus Schwarz zu seinem Fünfrigjährigen Doctorjubiläum. — Berlin, Heidelberg: Springer-Verlag, 1914. — S. 303–312.

105. **Murillo-Arcila M.** Well-Posedness for the Fourth-Order Moore–Gibson–Thompson Equation in the Class of Banach-Space-Valued Hölder-Continuous Functions // Mathematical Methods in the Applied Sciences. — 2023. — V. 46, № 2. — P. 1928–1937.

106. **Neubrander F.** Well-Posedness of Higher Order Abstract Cauchy Problems // Transactions of the American Mathematical Society. — 1986. — V. 295, № 1. — P. 257–290.

107. **Poblete V., Pozo J. C.** Periodic Solutions of an Abstract Third-Order Differential Equation // Studia Mathematica. — 2013. — V. 215, № 3. — P. 195–219.

108. **Póli L.** Sur les Sinus D'ordre Supérieur // Cahiers Rhodaniens 1. Université de Lyon, 1949. — P. 1–15.

109. **Prilepko A. I., Orlovsky D. G., Vasin I. A.** Methods for Solving Inverse Problems in Mathematical Physics. — New York, Basel: Marcel Dekker Inc, 2000. — 744 p.

110. **Rundell W.** Determination of an Unknown Non-Homogeneous Term in a Linear Partial Differential Equation from Overspecified Boundary Data // Applicable Analysis. — 1980. — V. 10, № 3. — P. 231–242.

111. **Sandefur J. T.** Higher Order Abstract Cauchy Problems // Journal of Mathematical Analysis and Applications. — 1977. — V. 60, № 3. — P. 728–742.

112. **Tikhonov I. V., Almohamed M.** Inverse Problem with Overdetermination of the Third Kind for an Abstract Second-Order Differential Equation // Differential Equations. — 2022. — V. 58, № 7. — P. 877–898.

113. **Ungar A.** Higher Order $\alpha$-Hyperbolic Functions // Indian Journal of Pure and Applied Mathematics. — 1984. — V. 15, № 3. — P. 301–304.

114. **Xiao T. J.** Higher Order Evolution Equations and Dynamic Boundary Value Problems: Dissertation zur Erlangung des Grades eines Doktors der Naturwissenschaften. Tag der mundlichen Qualifikation 23.12.02. — Sichuan, China, 2002.

115. **Xiao T. J., Liang J.** The Cauchy Problem for Higher-Order Abstract Differential Equations. (Lecture notes in mathematics; 1701). — Berlin, Heidelberg: Springer, 1998. — xiv+300 p.