

МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
имени М. В. ЛОМОНОСОВА
МЕХАНИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТЕТ

На правах рукописи

Думанский Станислав Александрович

Решение задач устойчивости элементов из сплавов с памятью формы

Специальность 1.1.8 – Механика деформируемого твердого тела

ДИССЕРТАЦИЯ
на соискание учёной степени
кандидата физико-математических наук

Научный руководитель:
доктор физико-математических наук, профессор
Мовчан Андрей Александрович

Москва — 2023

Оглавление

	Стр.
Введение	5
Глава 1. Сплавы с памятью формы (СПФ)	10
1.1 Структура	10
1.1.1 Фазовые переходы	10
1.1.2 Структурные превращения	12
1.2 Уникальные свойства СПФ	13
1.2.1 Накопление деформаций прямого перехода	13
1.2.2 Мартенситная неупругость	15
1.2.3 Эффект перекрестного упрочнения	16
1.2.4 Эффект памяти формы	17
1.2.5 Сверхупругость	18
1.3 Приложения	19
Глава 2. Модели нелинейного термомеханического деформирования СПФ	20
2.1 Гипотезы	20
2.2 Определяющие соотношения	21
2.2.1 Полные деформации	21
2.2.2 Упругие деформации	21
2.2.3 Термические деформации	22
2.2.4 Приращение деформаций за счет фазовых механизмов	22
2.2.5 Приращение деформаций за счет структурных механизмов	23
2.2.6 Параметр фазового состава	24
2.2.7 Уравнение энергетического баланса	25
2.2.8 Параметр вида напряженно-деформированного состояния тензора	25
2.2.9 Допустимые напряжения	26
2.3 Никелид титана	26
2.3.1 Материальные константы	26
2.3.2 Материальные функции	27
2.4 Модельные задачи	30
2.4.1 Прямой переход под действием постоянных напряжений	32
2.4.2 Монотонное нагружение из состояния хаотического мартенсита	34
2.4.3 Обратный переход под действием постоянных напряжений	38
Глава 3. Постановка задачи устойчивости для элементов из СПФ	41
3.1 Формулировки задачи устойчивости	41
3.2 Применение метода Эйлера	42
3.2.1 Статический метод Эйлера	42
3.2.2 Тривиальный и возмущенный процессы	42

	Стр.	
3.2.3	Концепции	43
3.2.4	Термомеханические постановки	44
Глава 4.	Решение краевых задач устойчивости элементов из СПФ	45
4.1	Процессы	45
4.1.1	Подготовительный процесс	45
4.1.2	Тривиальный процесс	46
4.1.3	Возмущенный процесс	46
4.2	Стойка Шенли	50
4.2.1	Геометрия и граничные условия	50
4.2.2	Тривиальный процесс	51
4.2.3	Возмущенный процесс	52
4.2.4	Результаты	53
4.3	Стержень	56
4.3.1	Геометрия и граничные условия	57
4.3.2	Гипотеза плоских сечений	58
4.3.3	Уравнения равновесия	59
4.3.4	Эйлера критическая длина	59
4.3.5	Случаи	60
4.3.6	Анализ устойчивости в термомеханически связанных постановках	61
4.3.7	Результаты	63
4.4	Пластина	65
4.4.1	Соглашение об индексах	66
4.4.2	Геометрия и граничные условия	66
4.4.3	Гипотеза прямых нормалей	67
4.4.4	Уравнения равновесия	68
4.4.5	Решение задач устойчивости	70
4.4.6	Результаты	73
Заключение	76
Список сокращений и условных обозначений	77
Словарь терминов	80
Список литературы	81
Приложение А. Пропорциональное нагружение	93
Приложение Б. Технические средства	94
Приложение В. Оптимизация	95

	Стр.
В.1 Методы оптимизации	95
В.1.1 Оптимизация непрерывных функций	96
В.1.2 Дискретная многомерная оптимизация	96

Введение

Сплавы с памятью формы (СПФ) относятся к классу функциональных материалов, демонстрирующих сильную связь между термомеханическим поведением и внешними как механическими, так и немеханическими воздействиями. Тела, изготовленные из данных материалов, в определенных температурных диапазонах проявляют термомеханическую реакцию на сообщение им и отведение от них тепла. Также некоторые СПФ при температурах, не превосходящих определяемых составом сплава критических значений, проявляют ферромагнитные свойства. В данной работе рассматриваются элементы, изготовленные из термомеханически активируемых СПФ. Уникальное макромеханическое поведение данных материалов, включающее эффект памяти формы [135], сверхупругость [149], мартенситную неупругость [53], накопление деформаций прямого перехода [54] и перекрестное упрочнение [56], является следствием твердотельных бездиффузионных кристаллографически обратимых термоупругих мартенситных переходов, открытых Г.В. Курдюмовым и Л.Г. Хандросом в 1948 году [39].

Широкое распространение СПФ начали получать после того, как в 1961 году наличие эффекта памяти формы было установлено у интерметаллидов, близких по составу к равноатомному никелиду титана [99], который, на настоящий момент, является одним из наиболее широко применяемых термически активируемых СПФ [114]. В простейшем случае никелид титана или нитинол может находиться в двух фазовых состояниях: аустенитном (высокотемпературном) и мартенситном (низкотемпературном), которым соответствуют типы строения кристаллической решетки $B2$ и $B19'$, соответственно. Фазовые переходы из аустенитного состояния в мартенситное называются *прямыми*, а из мартенситного в аустенитное *обратными*. С термодинамической точки зрения прямые и обратные фазовые переходы относятся к *фазовым переходам первого рода*, поскольку они сопровождаются выделением и поглощением латентного тепла, соответственно. Практически все термомеханические свойства СПФ различны для мартенситного и аустенитного состояний. В частности, значения модуля Юнга никелида титана в мартенситном E_M и аустенитном E_A фазовых состояниях равны 28 и 84 [ГПа], соответственно. Благодаря уникальному набору термомеханических характеристик, высокому сопротивлению износу, хорошей коррозионной стойкости и биосовместимости, никелид титана [134; 135] и сплавы на его основе [147] находят свое применение в аэрокосмических [114], медицинских [121; 130], железнодорожных [162], автомобильных [160] и строительных [101; 105] приложениях.

Вопросам моделирования термомеханического поведения СПФ посвящены работы Мовчана А.А. [43—45; 52], Мишустина И.В. [42], Рогового А.А. [74—76; 142; 143], Волкова А.Е. [5—8; 157], Гаврюшина С. С. [3; 10—13], Show J. A. и Kyriakydes S. [148], Lagoudas D.C. [122; 147], LExcellent C. [124], Auricchio F. [95; 145], Ziolkowski A. [163].

Устойчивость элементов из СПФ при различных режимах термомеханического нагружения изучалась в работах Малыгина Г.А. [41], Шкутина Л.И. [89], Жаворонока С.И. и Нуштаева Д.В. [29], Urushiyama Y. [155], Rahman M.A. [137—140], Amini M.R. [93], Nemat-Nasser S. [132; 133], Michailidis P.A. [129], Richter F. [141], Tang Z. [151; 152], Janez K. [120], Jiang D. [116], Watkins R.T. [159]. Подавляющее большинство исследований в данной области посвящено анализу устойчиво-

сти для активных процессов нагружения в режимах сверхупругости и мартенситной неупругости, при помощи методов аналогичных тем, которые применяются для анализа устойчивости упруго-пластических тел. Результаты экспериментальных исследований, проведенных Мовчаном А.А., Казариной С.А., Сильченко Л.Г. и Сильченко А.Л. [50; 51; 55; 57; 58] показывают, что элементы из СПФ склонны к потере устойчивости во время прямых и обратных фазовых переходов, происходящих под действием постоянных нагрузок. Авторами было установлено, что упругий анализ устойчивости элементов из СПФ, проводимый с использованием наименьших, соответствующих полностью мартенситному фазовому состоянию значений упругих констант, для рассматриваемых процессов термомеханического нагружения даеткратно завышенные значения критических нагрузок. Первые попытки дать теоретическое объяснение наблюдаемого несоответствия были предприняты в работах Мовчана А.А. и Сильченко Л.Г. [59; 61—68], в которых применялись однократно связанная постановка задачи устойчивости и актуальные на тот момент модели деформирования СПФ.

Разработка методов моделирования потери устойчивости элементов из СПФ, вызванной фазовыми переходами, происходящими под действием постоянных напряжений, которые учитывают дважды термомеханически связанное поведение СПФ и взаимное влияние между различными механизмами нелинейного деформирования, характерное для данных материалов, а также количественно правильно описывают чрезвычайно низкое сопротивление такому типу потери устойчивости, является актуальной проблемой.

Цель данной работы заключается в получении аналитических и численно-аналитических решений задач устойчивости стойки Шенли на стержнях из никелида титана, стержня и пластины из никелида титана при фазовых переходах, происходящих под действием постоянных нагрузок, учитывающих особенности нелинейного деформирования и дважды термомеханически связанного поведения СПФ.

Для достижения поставленной цели необходимо было решить следующие **задачи**:

1. Определить особенности термомеханического поведения СПФ, оказывающие наибольшее влияние на процесс потери устойчивости элементов из данных материалов в рассматриваемых процессах, и выбрать модели термомеханического деформирования, способные корректно описывать данные явления.
2. Сформулировать постановки задачи устойчивости элементов из СПФ во время фазовых переходов, происходящих под действием постоянных нагрузок, учитывающих наличие внутренних, описываемых в рамках определяющих соотношений, и внешних, определяемых граничными условиями, связей, в рамках которых можно получить аналитические и численно-аналитические решения данной задачи.
3. Провести исследование потери устойчивости стойки Шенли на стержнях из СПФ, вызванной прямым и обратным фазовыми переходами, происходящими под действием постоянных напряжений, в однократно и дважды связанной постановках для концепций фиксированной (ФН) и варьированной (ВН) внешней нагрузки.
4. Выполнить анализ устойчивости стержня из СПФ при прямом и обратном фазовых переходах, происходящих под действием постоянных напряжений, в однократно и дважды связанной постановках для концепций ФН и ВН.

5. Провести исследование устойчивости прямоугольной пластины из СПФ при прямом фазовом переходе, происходящем под действием постоянных напряжений, в однократно и дважды связанной постановках для концепции ВН.

Научная новизна

В существующих работах [59; 61—68], посвященных исследованию потери устойчивости элементов из СПФ, вызванной фазовыми переходами, происходящими под действием постоянных нагрузок, используются модели нелинейного однократно связанного деформирования СПФ, которые не учитывают взаимного влияния между процессами накопления неупругих деформаций, связанными с фазовыми и структурными механизмами. К настоящему моменту Мовчаном А.А. предложен ряд моделей объединенного деформирования СПФ, которые позволяют описывать как эффекты двойной термомеханической связанности [52], обусловленные выделением или поглощением латентного тепла и диссипацией энергии в результате упругого, фазового и структурного деформирования, так и взаимное влияние процессов деформирования по фазовым и структурным механизмам [43—45].

В рамках данной работы:

- Впервые выполнен анализ устойчивости элементов из СПФ с использованием *объединенных моделей фазового и структурного деформирования в дважды термомеханически связанной постановке для концепций фиксированной нагрузки (ФН) и варьированной нагрузки (ВН)*.
- Предложена модификация объединенной модели фазового и структурного деформирования СПФ, в рамках которой, в отличие от прототипа, приращение деформаций СПФ за счет фазовых механизмов зависит от девиатора тензора напряжений, а не от девиатора тензора активных напряжений.
- Впервые установлено, что для рассматриваемых моделей деформирования СПФ, во время фазовых переходов, вызванных монотонным охлаждением или нагревом и происходящих при постоянных напряжениях, структурное деформирование не имеет места.
- Дано теоретическое объяснение эффекта зависимости величин критических нагрузок от способа предварительной подготовки элемента в случае потери устойчивости при обратном фазовом переходе, происходящем под действием фиксированных напряжений.

Практическая значимость

Полученные результаты могут применяться для анализа устойчивости элементов из СПФ, претерпевающих прямые и обратные фазовые переходы, происходящие при мягком нагружении. Работа выполнена при частичной финансовой поддержке РФФИ (проекты 17-01-00216 А и 20-01-00240 А).

Методология и методы исследования

Определяющие соотношения формулируются в рамках феноменологического подхода, основанного на применении математического аппарата механики деформируемого твердого тела. При постановке задач устойчивости в малом применяется статический метод Эйлера. Для получения решений поставленных задач используются аналитические и численно-аналитические методы, которые задействуют аппарат математического анализа [30; 33; 87], теории обыкновенных

дифференциальных уравнений [34; 90; 92] и дифференциальных уравнений в частных производных [83]. Вычислительные алгоритмы реализованы в виде программ, написанных на языке C++ [79; 80; 85; 112]. Для построения графиков используется библиотека Matplotlib языка программирования Python.

Основные положения, выносимые на защиту:

1. Установлено, что термомеханически связанным постановкам соответствуют существенно меньшие значения критических параметров по сравнению с несвязанной постановкой, причем решения, полученные в рамках дважды связанной постановки и концепции ФН превосходят аналогичные значения, найденные для однократно связанной постановки и концепции ВН, соответственно.
2. Доказано, что при потере устойчивости, вызванной прямым фазовым переходом, дополнительное структурное деформирование не имеет места.
3. Установлено, что при потере устойчивости, вызванной обратным фазовым переходом, критическая нагрузка уменьшается с ростом абсолютных величин фазово-структурных деформаций, накопленных перед началом данного перехода.
4. Установлено, что с увеличением гибкости элемента, которая может выражаться в росте длины стержня или уменьшении толщины пластины, при фиксированных значениях остальных геометрических размеров влияние дополнительного фазового перехода на процесс потери устойчивости существенно снижается.

Достоверность теоретически полученных результатов подтверждается использованием классического математического аппарата механики деформируемых твердых тел, теорий упругости и пластичности, согласованностью с выводами, полученными другими авторами, [59; 61–68] и качественным соответствием явлениям, наблюдаемым в экспериментах [51; 55; 57; 58].

Апробация работы

Основные результаты, полученные в диссертации, докладывались и обсуждались на следующих научных конференциях и семинарах:

- Международной научной конференции студентов, аспирантов и молодых учёных ”Ломоносов”, МГУ, г. Москва, 2016, 2017, 2018, 2019, 2020 [22] и 2021 гг. [26].
- Всероссийской научной конференции ”Механика композиционных материалов и конструкций, сложных и гетерогенных сред” им. И.Ф. Образцова и Ю.Г. Яновского, ИПРИМ РАН, г. Москва, 2017 [16], 2018 [17], 2019 [20] и 2021 [25] гг.
- Международной конференции ”Деформирование и разрушение композиционных материалов и конструкций”, ИМАШ РАН, г. Москва, 2018 г. [18].
- Всероссийском съезде по фундаментальным проблемам теоретической и прикладной механики, г. Уфа, 2019 г. [49].
- Международном форуме ”Ключевые тренды в композитах: наука и технологии”, МГТУ, г. Москва, 2019 г. [21].
- Международной инновационной конференции молодых учёных и студентов по современным проблемам машиноведения МИКМУС, ИМАШ РАН, г. Москва, 2019 г. [19].

- Международной научно-технической конференции ”Современные направления и перспективы развития технологий обработки и оборудования в машиностроении”, г. Севастополь, 2021 г. [24].
- Научно-исследовательском семинаре кафедры теории пластичности механико-математического факультета МГУ имени М. В. Ломоносова, 29 мая 2023 г.
- Научно-исследовательском семинаре кафедры газовой и волновой динамики механико-математического факультета МГУ имени М. В. Ломоносова, 5 июня 2023 г.
- Научно-исследовательском семинаре кафедры механики композитов механико-математического факультета МГУ имени М. В. Ломоносова, 5 июня 2023 г.
- Научно-исследовательском семинаре кафедры теории упругости механико-математического факультета МГУ имени М. В. Ломоносова, 7 июня 2023 г.
- Всероссийском съезде по теоретической и прикладной механике, г. Санкт-Петербург, 22 августа 2023 г.

Личный вклад

В совместных работах А. А. Мовчану принадлежат постановки задач и общее научное руководство. Результаты, составляющие основное содержание диссертации, получены непосредственно автором.

Публикации

Основные результаты по теме диссертации изложены в 11 печатных изданиях, 7 из которых опубликованы в рецензируемых журналах, индексируемых в международных базах Web of Science, Scopus и RSCI, 3 опубликованы в сборниках трудов международных конференций, включенных в международные базы Scopus, 1 в прочих изданиях.

Объем и структура работы. Диссертация состоит из введения, 4 глав, заключения и 3 приложений. Полный объем диссертации составляет 96 страниц, включая 21 рисунок и 4 таблицы. Список литературы содержит 163 наименования.

Глава 1. Сплавы с памятью формы (СПФ)

Свойства тел из СПФ сильно зависят от химического состава сплава [135; 147] и способа их термомеханической обработки [54; 144]. Данная работа посвящена исследованию устойчивости элементов, изготовленных из равноатомного никелида титана [134]. Далее приводится краткое описание структуры этого интерметаллида 1.1 и феноменологии уникальных процессов термомеханического деформирования изготовленных из него тел 1.2. Информация, представленная в данных разделах, является основой для формулировки моделей нелинейного деформирования СПФ, подробнее обсуждаемых в главе 2, а также определения материальных функций и констант, требуемых при их идентификации. Заключительный раздел 1.3 посвящен краткому обзору характеристик СПФ, играющих определяющую роль при разработке приложений, в которых используются функциональные элементы, изготовленные из материалов данного класса.

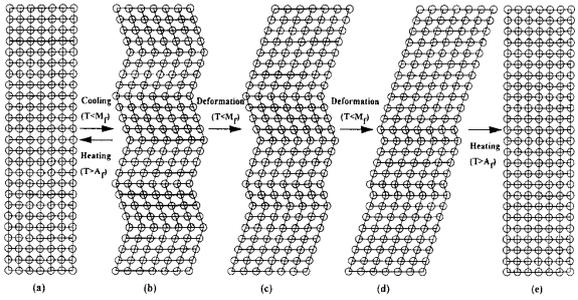
1.1 Структура

1.1.1 Фазовые переходы

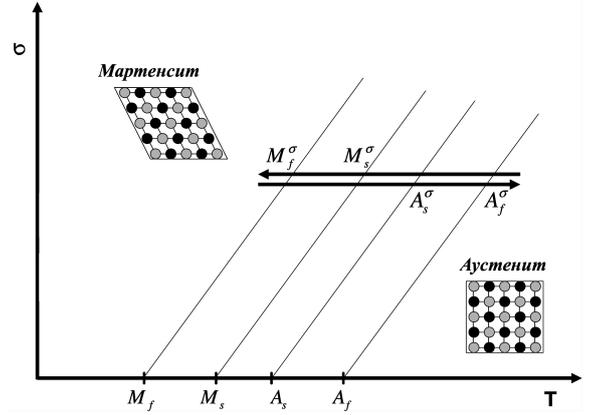
На наноуровне бездиффузионные твердотельные мартенситные и ромбоэдрические фазовые переходы, происходящие в никелиде титана, достаточно хорошо изучены [117; 134; 144; 149]. В зависимости от истории термообработки СПФ [135] прямой переход из аустенитной фазы $B2$ в мартенситную фазу $B19'$ может являться одноэтапным или двухэтапным. Во втором случае аустенитная фаза сначала превращается в мартенситную R -фазу, которая затем переходит в мартенситную фазу $B19'$. Фазовые переходы в поликристаллических СПФ могут происходить только если размер зерен в аустенитном состоянии превышает некоторые пороговые значения [158], которые для никелида титана составляют порядка 15 [нм] и 60 [нм] в случае ромбоэдрических и мартенситных превращений, соответственно. Прямой фазовый переход можно рассматривать, как два одновременно происходящих процесса: зарождения и развития мезоскопических элементов мартенситной фазы [60]. Обратный фазовый переход, с достаточной точностью удается описать в рамках предположения о том, что он обусловлен исключительно деградацией мартенситных мезоэлементов [52].

Прямые/обратные фазовые переходы, происходящие в представительном объеме СПФ, могут быть инициированы как отведением/подведением к рассматриваемому объему тепла, так и квазиизотермическим¹ увеличением/уменьшением уровня механических напряжений рис. 1.1.

¹Если процесс нагружения происходит достаточно быстро, то поглощение или выделение латентного тепла фазового перехода несколько меняет первоначальное распределение поля температур.



а) (а) исходный монокристалл, (б) хаотически ориентированный мартенсит, (с-д) деформация полученная в результате раздвоивания, (е) возвращение материала к исходной фазе в результате полного обратного превращения.



б)

Рисунок 1.1 — Схематическое представление эволюции кристаллической решетки а) [135] и зависимости температур фазовых переходов от уровня напряжений б) [147].

Вне областей фазовых переходов свойства СПФ слабо зависят от температуры, а характер их изменения находится в хорошем качественном соответствии с тем поведением, которое наблюдается у традиционных металлов и сплавов [106]. Увеличение или уменьшение объемной доли мартенситной фазы приводит к существенному уменьшению или увеличению значений многих термомеханических характеристик², таких как жесткость, коэффициент теплового расширения, теплопроводность и электрическое сопротивление. Эффективным способом определения зависимостей термодинамических свойств СПФ от объемной доли мартенситной фазы, является применение дифференциальной сканирующей калориметрии [149]. Результаты данных

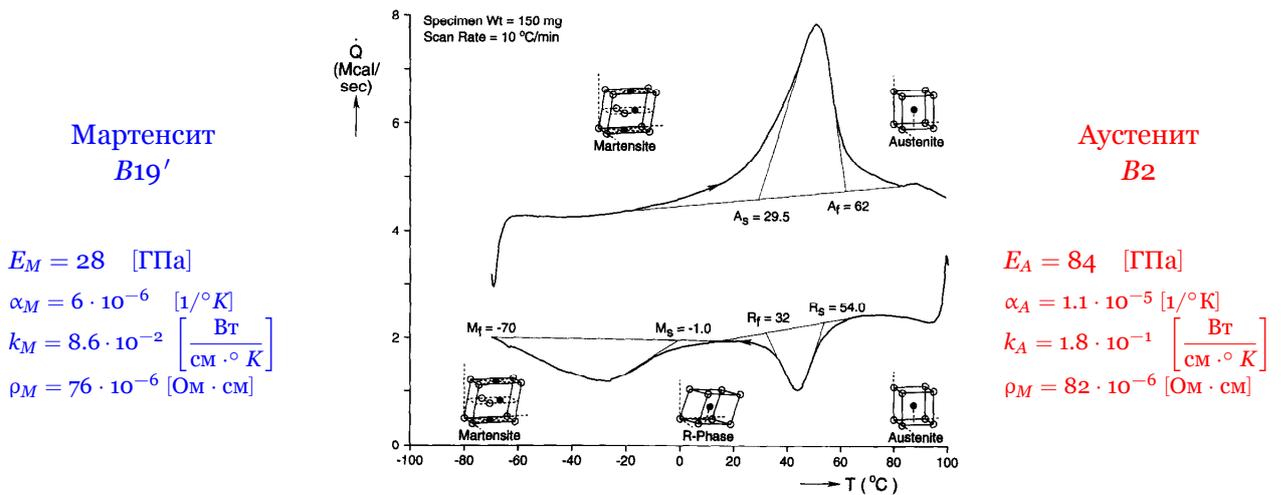


Рисунок 1.2 — Термограмма дифференциальной сканирующей калориметрии никелида титана [149].

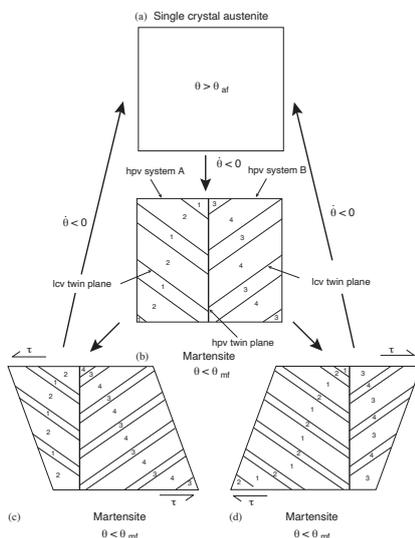
²Значения некоторых свойств никелида титана для мартенситного (M) и аустенитного (A) фазовых состояний приведены на рис. 1.2 и в пункте (2.3).

исследований, представленные на рис. 1.2, демонстрируют высокую степень влияния процессов выделения и поглощения латентного тепла, вызванных прямыми и обратными фазовыми переходами, на энергетический баланс рассматриваемой термодинамической системы. Также диапазоны температур фазовых переходов могут быть найдены при помощи методов, основанных на непрерывном измерении объема [154] и электрического сопротивления [124; 134; 144] образцов из исследуемого материала.

1.1.2 Структурные превращения

Поскольку мартенситной фазе соответствует низкосимметричная моноклинная с искажениями кристаллическая решетка, в общем случае представительный объем СПФ может содержать множество ориентированных в различных направлениях элементарных структур, называемых вариантами. После завершения прямого фазового перехода, который происходил при нулевых макроскопических напряжениях, в результате действия локальных микронапряжений образуется хаотически ориентированный или полностью сдвойникованный мартенсит, осредненная по объему деформация формоизменения которого равна нулю.

Можно выделить три основных механизма эволюции кристаллической решетки мартенситных структур [126; 149; 153]: раздвойникование, переориентация и скольжение. Все они являются бездиффузионными и обусловлены совместными перемещениями атомов, расположенных в узлах кристаллической решетки, происходящими под действием локальных сдвиговых напряжений.

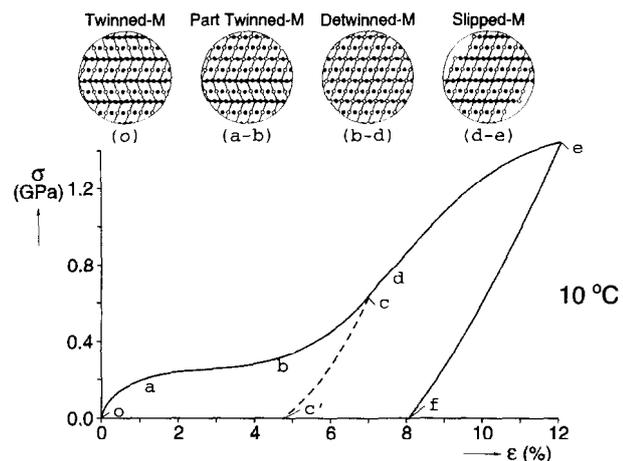


а) Раздвойникование и переориентация

[153]

б) Структурное деформирование мартенсита [149]

Рисунок 1.3 — Структурные превращения происходящие в мартенсите.



При монотонном нагружении представительного объема СПФ из состояния хаотического мартенсита, рис. 1.3, сначала в данном объеме происходит деформирование по механизмам раздвойникования и переориентации, при которых каждый атом решетки перемещается менее,

чем на одно межатомное расстояние, которые, после достижения мартенситом предельной кристаллографической деформации, сменяются пластическим деформированием. Если до момента начала пластического деформирования провести разгрузку и полный обратный фазовый переход, то накопленные в материале неупругие деформации будут полностью сняты. Это обусловлено высокой степенью симметрии кристаллической решетки типа $B2$, в которую переходят все разнонаправлено ориентированные мартенситные ячейки. После того, как в материале начинают накапливаться деформации, ассоциированные с механизмом скольжения, из-за которого некоторые атомы материала смещаются друг относительно друга более чем на одно межатомное расстояние, осуществление полного обратного фазового перехода не приводит к полному снятию накопленных в материале деформаций.

1.2 Уникальные свойства СПФ

1.2.1 Накопление деформаций прямого перехода

Пусть в элементе из СПФ, при температуре $T > A_f^\sigma$, реализуется однородное напряженно-деформированное состояние. Монотонное охлаждение, при достижении температуры M_s^σ , инициирует прямой фазовый переход. Будем предполагать, что скорость отвода тепла подбирается таким образом, чтобы распределение температуры по объему элемента было однородным.

Прямой переход происходящий под действием постоянных напряжений

Если в элементе реализуется тривиальное напряженное состояние $\sigma_{ij} \equiv 0$, то прямой фазовый переход, вызванный монотонным уменьшением температуры, приведет к образованию хаотически ориентированного мартенсита. Величина объемной деформации полностью сдвойникового мартенсита является свойством материала и для никелида титана составляет порядка 0.1%. Когда действующие напряжения отличны от нуля, охлаждение в диапазоне температур прямого фазового перехода приводит к монотонному росту упругих деформаций, вызванному уменьшением модуля упругости, и накоплению неупругих деформации, определяемых направлением и величиной приложенных напряжений. График, изображающий кривую, аппроксимирующую зависимость деформаций, накопленных в результате полного прямого перехода, от величин действующих напряжений, называется диаграммой прямого перехода. В работе [54] было проведено экспериментальное исследование мартенситных фазовых переходов, происходящих под действием постоянных растягивающих и сжимающих нагрузок.

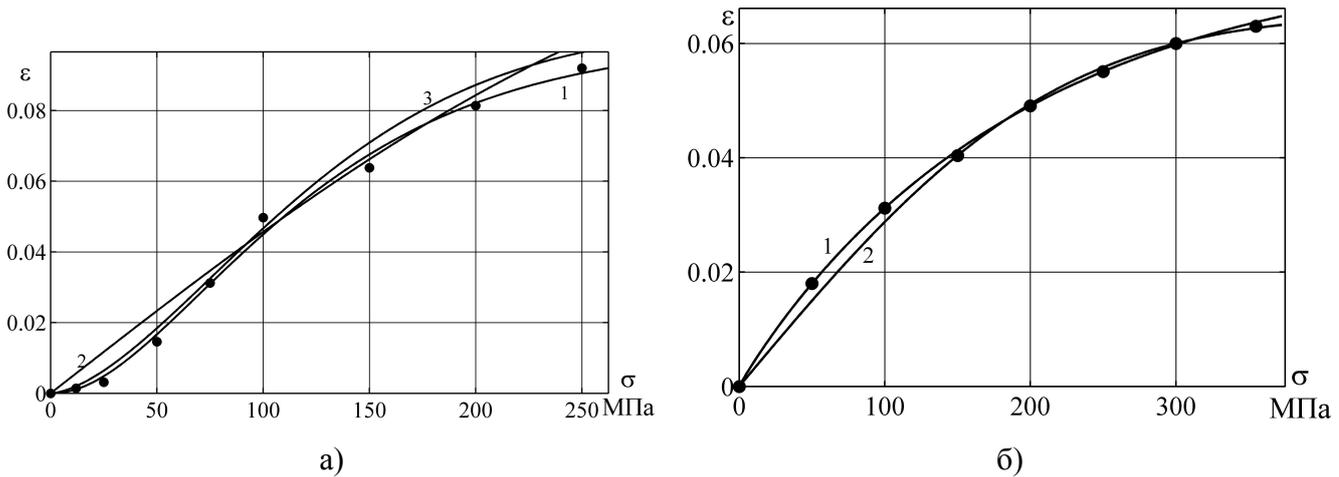


Рисунок 1.4 — Диаграммы прямого перехода для случаев растягивающих (а) и сжимающих (б) нагрузок. Точки – данные полученные в экспериментах; Линии 1, 2 и 3 – аппроксимации, полученные при помощи использования гамма-распределения, отраженного нормального распределения и распределения Вейбулла соответственно.

Результаты приведенной работы, представленные на рис. 1.4, позволяют заключить, что для рассматриваемых режимов термомеханического деформирования предельные кристаллографические деформации элементов из никелида титана и формы диаграмм прямого перехода существенным образом зависят от вида напряженно деформированного состояния, реализуемого во время данного фазового перехода.

Ориентированное превращение

Если в некоторый момент прямого фазового перехода, происходящего под действием постоянных напряжений, осуществляется полная механическая разгрузка, приводящая к практически мгновенному снятию упругих деформаций (рис. 1.5), то дальнейшее охлаждение сопровождается накоплением фазово-структурных деформаций, ориентация которых согласуется с направлением ранее приложенных напряжений [40].

Наличие данного эффекта позволяет заключить [60], что направление роста зародышей мартенситных элементов определяется их первоначальной ориентацией, которая, в свою очередь, зависит от напряжений, действующих на момент зарождения данных элементов. Новые мартенситные зародыши, которые образуются из объемов, занимаемых аустенитной фазой после того, как произошла разгрузка, в основном ориентированы хаотическим образом.

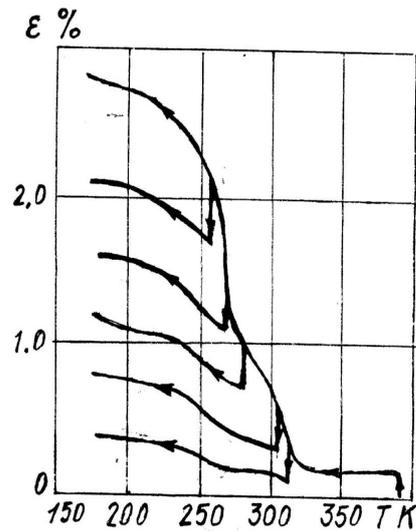
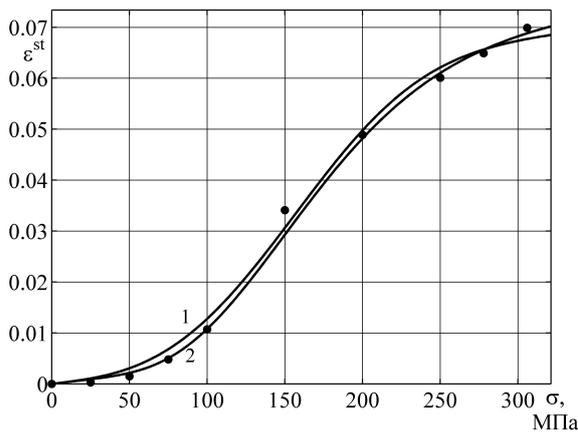


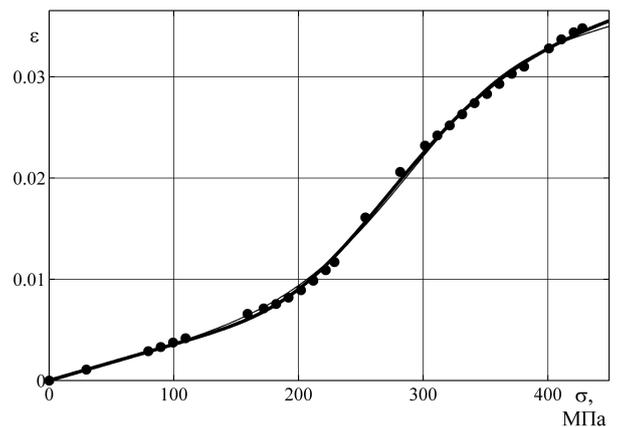
Рисунок 1.5 — Диаграмма ориентированного превращения.

1.2.2 Мартенситная неупругость

При изотермическом нагружении представительного объема СПФ, полностью занимаемого хаотически ориентированным мартенситом, в данном объеме будут накапливаться упругие и фазово-структурные деформации. Если нагружение является одноосным и монотонным, а поле напряжений однородно, то график, изображающий зависимость величины неупругих деформаций от уровня приложенных напряжений, называется диаграммой мартенситной неупругости.



а)



б)

Рисунок 1.6 — Диаграммы зависимости фазово-структурных деформаций в зависимости от действующих напряжений для случаев растяжения (а) и сжатия (б).

Согласно результатам экспериментов, проведенных в работах [53; 54], эволюция фазово-структурных деформаций, накапливаемых в режиме мартенситной неупругости и зависящих от вида напряженно-деформированного состояния рис. 1.6.

1.2.3 Эффект перекрестного упрочнения

В работе [56] оценивалось взаимное влияние процессов накопления деформаций за счет фазовых и структурных механизмов при одноосном сжатии. Диаграммы нагружения, полученные во время данного исследования, представлены на рис. 1.7. Диаграммы доориентации (линии

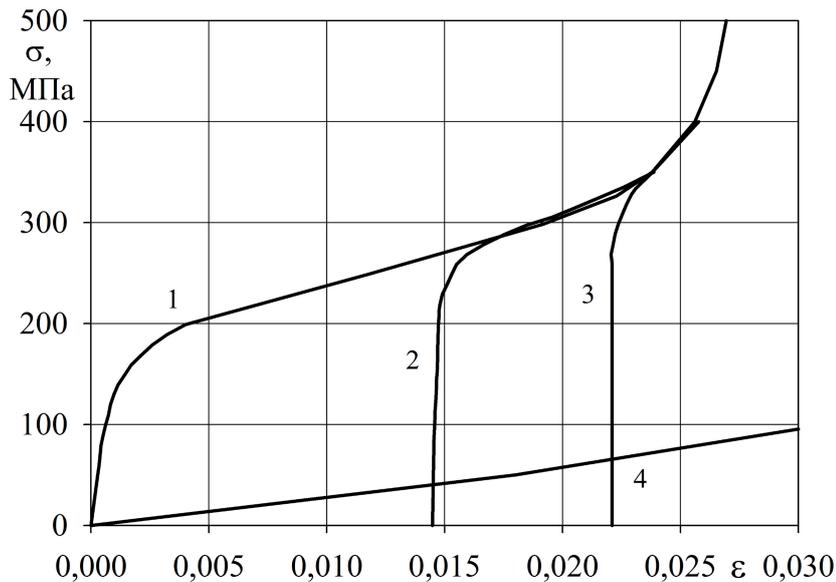


Рисунок 1.7 — Линия 1 – диаграмма мартенситной неупругости; Линии 2, 3 – диаграммы доориентации; 4 – диаграмма прямого перехода.

2. и 3.) получены при помощи изотермического монотонного нагружения образцов, которые до этого подвергались полным прямым фазовым переходам, происходившим под действием постоянных нагрузок с последующей разгрузкой. Данные диаграммы являются практически линейными вплоть до момента их пересечения с диаграммой мартенситной неупругости, после чего точка, описывающая напряженно-деформированное состояние, движется вдоль диаграммы мартенситной неупругости. Таким образом можно заключить, что для никелида титана характерен эффект перекрестного упрочнения, заключающийся в увеличении предела неупругого деформирования, ассоциированного с структурными механизмами, после осуществления прямого перехода под действием постоянного напряжения, обусловленного исключительно фазовыми механизмами деформирования. Полученные результаты также подтверждают тот факт, что состояние СПФ зависит от предшествующей истории термомеханического нагружения и для его корректного описания необходимо использовать модели, включающие параметры упрочнения, связанные с структурными механизмами деформирования.

1.2.5 Сверхупругость

Диаграмма изотермического монотонного одноосного растяжения с последующей разгрузкой элемента из СПФ, полученная при температуре $T > A_f^0$, представлена на рис. 1.9. На начальном этапе нагружения (o-a) деформирование является чисто упругим. После того, как действующие напряжения превышают некоторое пороговое значение, совместно с упругим деформированием происходит вызванный ростом действующих напряжений прямой фазовый переход, который сопровождается накоплением фазово-структурных деформаций (a-b). После окончания прямого перехода мартенсит является частично ориентированным и при дальнейшем увеличении напряжений будет происходить его доориентация (b-c), связанная с структурными механизмами деформирования. Если нагружение продолжается после того, как были достигнуты предельные кристаллографические деформации мартенсита (точка c на диаграмме), то в элементе накапливаются необратимые деформации, ассоциированные с механизмом скольжения (c-d). Разгрузка, начатая в любой точке участка (a-c), например в точке b, инициирует обратный

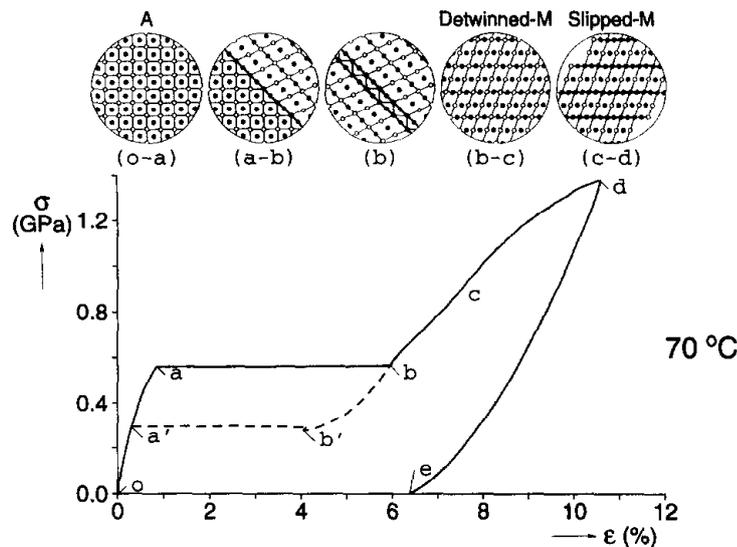


Рисунок 1.9 — Диаграммы растяжения-разгрузки элемента из поликристаллического никелида титана, изначально находящегося в полностью аустенитном фазовом состоянии [149].

фазовый переход, в результате которого неупругие деформации, накопленные на этапе монотонного нагружения, практически полностью снимаются. Замкнутая кривая, изображающая такой процесс, в частности (o-b-b'-a'-o), называется диаграммой сверхупругости. Пластическое деформирование, происходящее на участке (c-d), приводит к существенному уменьшению величин фазово-структурных деформаций, снимаемых в результате полного обратного фазового перехода, вызванного разгрузкой.

1.3 Приложения

В 70-е годы XX века СПФ начали активно применяться в инженерных приложениях [156]. Их уникальное термомеханическое поведение одновременно благоприятствовало и препятствовало разработке конструкций, содержащих элементы из данных материалов. Попытки решения практических задач привели к значительному увеличению количества экспериментальных и теоретических исследований в данной области, результатом которых стало появление совершенно новых подходов к проектированию [106].

СПФ применяются в качестве материалов для изготовления исполнительных механизмов [104; 156], демпферов [101], элементов конструкций, к монтажу или свойствам которых предъявляются особые требования [114; 121; 130], датчиков и пассивных систем контроля [94; 100; 162]. Часто один такой элемент совмещает в себе несколько функций, например, несущий элемент конструкции также является демпфером, или датчик работает как активный или пассивный исполнительный механизм.

К общим параметрам, характеризующим элементы из СПФ с прикладной точки зрения, относят: диапазоны температур фазовых переходов и предельные значения обратимых деформаций. В случае исполнительных механизмов к данному набору добавляются уровень удельных реактивных усилий и допустимое количество циклов нагружения, при котором материал демонстрирует стабильность свойств. Если материал используется в медицинских приложениях, предполагающих инвазивные процедуры, то важную роль начинает играть его биосовместимость. Когда эксплуатационные температуры существенно превосходят комнатную используют специальные высокотемпературные СПФ, в состав которых входят тугоплавкие металлы. Приложения, в которых элемент может подвергаться воздействию агрессивных сред, требуют повышенной коррозионной стойкости. Оптимизация перечисленных параметров для применения в конкретных приложениях выражается в подборе компонентов, их объемных долей и режима термомеханической обработки или тренировки сплава.

Глава 2. Модели нелинейного термомеханического деформирования СПФ

Уникальные свойства СПФ, описанные в первой главе, не могут быть корректно описаны при помощи классических моделей определяющих соотношений, используемых в механике деформируемых твердых тел [73; 123; 136]. Для математического моделирования процессов термомеханического деформирования СПФ применяют различные феноменологические [43—45; 122] и микро-/нано- механические подходы [102; 117]. В данной работе, для описания неупругого деформирования элементов из СПФ используются термодинамически замкнутые феноменологические модели, основанные на соотношениях, предложенных в работах [43—45; 52]. Поскольку деформирование СПФ, обусловленное дислокационными механизмами скольжения, подавляет их уникальные свойства [149], связанные в первую очередь с обратимостью процессов раздвоения и переориентации мартенситных структур [153], область допустимых напряжений выбирается таким образом, чтобы пластическое деформирование не имело места.

В этой главе используются результаты, полученные автором и опубликованные в статье [23].

2.1 Гипотезы

Основой для формулировки определяющих соотношений служат следующие предположения:

1. Элементы из поликристаллических СПФ на макроуровне являются однородными деформируемыми твердыми телами, для которых справедлива гипотеза сплошности [73; 78].
2. Состояние представительного объема СПФ можно описать при помощи конечного набора внутренних параметров состояния [103], которые в каждый момент времени удовлетворяют термомеханически связанной системе определяющих уравнений и термодинамическим ограничениям [52].
3. Процессы, включающие фазовые переходы [135] и структурные превращения [126], предполагаются *равновесными* и *термодинамически необратимыми* [127].
4. Зависимость свойств СПФ от времени в рассматриваемом диапазоне скоростей деформирования не проявляется.
5. Существует односвязная область в пространстве напряжений с границей, зависящей от актуального состояния материала, внутри которой эволюцией свойств СПФ из-за изменений структуры, вызванных накоплением необратимых деформаций и/или повреждений, можно пренебречь.

2.2 Определяющие соотношения

В данной работе используется Лагранжев подход к описанию сплошной среды. Начальные и конечные конфигурации моделируемых тел предполагаются мало отличающимися друг от друга, а компоненты тензоров деформаций и градиента перемещений считаются малыми величинами по сравнению с единицей.

Величины фазово-структурных деформаций при заданных граничных условиях зависят от истории термомеханического нагружения. Поэтому компоненты тензора полных деформаций должны удовлетворять дифференциальным, в общем случае неинтегрируемым, или интегральным зависимостям. Рассматриваемые далее определяющие соотношения для приращений фазово-структурных деформаций, происходящих по структурному и фазовому механизмам, являются аналогами инкрементальных уравнений теории пластического течения и дифференциальных соотношений теории вязкоупругости, соответственно.

Для записи определяющих соотношений используется стандартная тензорная форма [78; 110], подразумевающая немое суммирование по повторяющимся индексам, каждый из которых может принимать значения от 1 до 3. Компоненты всех тензоров записываются в прямоугольной декартовой системе координат.

2.2.1 Полные деформации

$$d\varepsilon_{ij} = d\varepsilon_{ij}^e + d\varepsilon_{ij}^T + d\varepsilon_{ij}^{phst}, \quad d\varepsilon_{ij}^{phst} = d\varepsilon_{ij}^{ph} + d\varepsilon_{ij}^{st} \quad (2.1)$$

ε_{ij}^e и ε_{ij}^T – тензоры упругих и температурных деформаций; $d\varepsilon_{ij}^{ph}$ и $d\varepsilon_{ij}^{st}$ – дифференциалы тензора фазово-структурных деформаций, связанные с фазовыми и структурными механизмами;

2.2.2 Упругие деформации

$$\varepsilon_{ij}^e = \frac{1 + \nu(q)}{E(q)} \sigma_{ij} - \frac{\nu(q)}{E(q)} \sigma_{kk} \delta_{ij} \quad (2.2)$$

$$\nu = \frac{E(q)}{2G(q)} - 1, \quad \frac{1}{E} = \frac{q}{E_M} + \frac{1-q}{E_A}, \quad \frac{1}{G} = \frac{q}{G_M} + \frac{1-q}{G_A}, \quad 0 \leq q \leq 1.$$

E , G и ν – модули Юнга, сдвига и коэффициент Пуассона; q – параметр фазового состава или объемная доля мартенситной фазы, которая равна 0 в аустенитном фазовом состоянии (индекс A), 1 в мартенситном фазовом состоянии (индекс M) и монотонно меняется во время фазовых переходов (2.16) между двумя этими крайними значениями.

2.2.3 Термические деформации

Температурные деформации определяются при помощи соотношений Дюамеля-Неймана [73]:

$$\varepsilon_{ij}^T = \alpha_{ij}^q(q)(T - T_0) \quad (2.3)$$

α_{ij}^q – тензор коэффициентов термического расширения; T и T_0 – текущая и отсчетная температуры;

Для изотропных материалов, в частности рассматриваемых СПФ, тензор коэффициентов теплопроводности является шаровым:

$$\alpha_{ij}^q = \alpha_q \delta_{ij}, \quad \alpha_q = q\alpha_M + (1 - q)\alpha_A$$

Температурные составляющие тензора деформаций являются малыми величинами по сравнению с другими его компонентам.

2.2.4 Приращение деформаций за счет фазовых механизмов

Приращения тензора полных деформаций обусловленные фазовыми механизмами могут быть представлены в виде суммы шаровых и девиаторных компонент:

$$d\varepsilon_{ij}^{ph} = \varepsilon^0 dq \delta_{ij} + d\varepsilon_{ij}^{ph'}, \quad d\varepsilon_{ij}^{ph'} = \omega_{ij}(q, \sigma_{ij}, \varepsilon_{ij}^{phst'}) dq \quad (2.4)$$

Поскольку процесс прямого превращения связан с зарождением и развитием мартенситных структур, а обратного превращения только с деградации мартенситных образований, материальная функция ω_{ij} должна определяться по разному, в зависимости от рассматриваемого процесса¹:

$$\omega_{ij}^f = \frac{3}{2} \rho_D^f(\mu_\sigma) \frac{\sigma'_{ij}}{\sigma_i} [1 - qf(q)] \varphi_f(\sigma_i, \mu_\sigma) + f(q) \varepsilon_{ij}^{phst'}, \quad dq > 0 \quad (2.5)$$

$$\omega_{ij}^r = \frac{\varepsilon_{ij}^{phst'}}{q}, \quad dq < 0 \quad (2.6)$$

ε^0 – деформация, определяющая объемный эффект (прямого) фазового перехода. μ_σ – параметр вида напряженного состояния (пункт 2.2.8); φ_f – материальная функция, аппроксимирующая диаграмму прямого перехода (пункт 2.3.2); f – материальная функция, определяющая отношение между процессами зарождения и развития мартенситных элементов (пункт 2.3.2).

¹ Индексы f и r обозначают прямой и обратный переходы, соответственно.

2.2.5 Приращение деформаций за счет структурных механизмов

Для описания неупругого деформирования СПФ, обусловленного структурными механизмами (пункт 1.1.2), используются соотношения, аналогичные классическим уравнениям теории пластического течения [36; 113; 127]. Далее понятия "накопление деформаций ассоциированное с структурными механизмами деформирования" и "структурное деформирование" считаются тождественным.

Приращения неупругих деформаций определяются дифференциальными, в общем случае неинтегрируемыми, соотношениями:

$$d\varepsilon_{ij}^{st} = d\lambda h_{ij} \quad (2.7)$$

$d\lambda \geq 0$ – бесконечно малый скалярный множитель, который, в зависимости от постановки, может являться функцией напряжений, температуры и внутренних параметров состояния; h_{ij} – тензорная функция, определяющая направление приращения неупругих деформаций.

Поверхность нагружения с комбинированным упрочнением:

$$f_s = s_i - s^* = 0, \quad s_i = \sqrt{\frac{3}{2}s_{ij}s_{ij}}, \quad s_{ij} = \sigma'_{ij} - a_{ij} \quad (2.8)$$

s_{ij} – тензор активных напряжений; s^* – радиус поверхности упрочнения; a_{ij} – тензор остаточных напряжений или трансляции.

Закон течения (2.7) предполагается ассоциированным с поверхностью комбинированного упрочнения (2.8):

$$h_{ij} = \frac{2}{3}s_i \frac{\partial f_s}{\partial s_{ij}} = s_{ij} \quad (2.9)$$

Изменение степени ориентированности мартенситных элементов, происходит только в том случае, когда выполняются условия активного нагружения:

$$f_s = df_s = 0, \quad d\lambda > 0 \quad (2.10)$$

Для завершения формулировки определяющих соотношений, описывающих структурное деформирование, необходимо определить уравнения описывающие эволюцию радиуса поверхности нагружения и тензора трансляции. В данной работе рассматриваются три набора таких уравнений:

1. Изотропное упрочнение [43]:

$$\rho_D^m(\mu_\sigma) q\varphi_m(\sigma^*, \mu_\sigma) = \int d\chi, \quad d\chi = \frac{\sigma'_{ij}}{\sigma_i} d\varepsilon_{ij}^{phst} \quad (2.11)$$

2. Комбинированное упрочнение [44]²:

$$q\varphi(s^*, \mu_s) = \max \left\{ \frac{\varepsilon_i^{phst}}{\rho_D^m(\mu_\varepsilon)} \right\} \quad (2.12)$$

$$qda_{ij} = g(\mu_s) d\varepsilon_{ij}^{st} \quad (2.13)$$

²Рассматриваемая в данной работе модель учитывает разносопротивляемость СПФ через параметр вида деформированного, а не напряженного состояния.

3. Комбинированное упрочнение [45]:

$$\rho_D^m(\mu_s)\varphi(s^*, \mu_s) = \max \{ \varepsilon_i^M \} \quad (2.14)$$

$$da_{ij} = g(\mu_s)d\varepsilon_{ij}^M \quad (2.15)$$

φ_m – материальная функция, аппроксимирующая диаграмму мартенситной неупругости (пункт 2.3.2); φ – материальная функция, определяющая радиус поверхности нагружения в моделях с комбинированным упрочнением (пункт 2.3.2); $\varepsilon_{ij}^M = \varepsilon_{ij}^{phst'}/q$ – девиатор собственной фазово-структурной деформации мартенсита; g – функция кинематического упрочнения (пункт 2.3.2).

Далее *Модели* деформирования СПФ будут, при необходимости, дополняться номером, который соответствует выбранному подходу к описанию структурного деформирования.

Объединенные модели деформирования с комбинированным упрочнением, предложенные в работах [44; 45], учитывают *взаимное* влияние фазового и структурного деформирования. Помимо учета влияния структурного деформирования на фазовое, за счет наличия в соотношениях (2.5) и (2.6) тензора фазово-структурных деформаций, для данных моделей девиатор тензора напряжений в (2.5) заменяется тензором активных напряжений. Последнее, в случае прямого фазового перехода, позволяет упростить вычисления и, в случае отсутствия трансляционного упрочнения, полностью совпадает с выражением (2.5). Однако влияние замены аргумента материальной функции φ_f интенсивностью активных напряжений недостаточно исследовано и в данной работе *Модели 2* и *3* используются совместно с уравнением (2.5), т.е. девиаторы тензоров напряжений и активных напряжений используются в выражениях для описания фазового и структурного деформирования, соответственно. Результаты использования аналогичных моделей представлены в следующих работах [23; 107; 108].

2.2.6 Параметр фазового состава

Объемная доля мартенситной фазы определяется непрерывно дифференцируемыми соотношениями [52]:

$$q = \frac{1}{2}[1 - \cos(\pi t)] \quad (2.16)$$

$$t = \frac{M_s^\sigma - T}{M_s^0 - M_f^0}, \quad M_s^\sigma = M_s^0 + \frac{\omega_{ij}^f \sigma'_{ij} + Z(\sigma_{ij}) + \varepsilon^0 \sigma_{kk}}{\Delta S}, \quad dq > 0 \quad (2.17)$$

$$t = 1 - \frac{T - A_s^\sigma}{A_f^0 - A_s^0}, \quad A_s^\sigma = A_s^0 + \frac{\omega_{ij}^r \sigma'_{ij} + Z(\sigma_{ij}) + \varepsilon^0 \sigma_{kk}}{\Delta S}, \quad dq < 0 \quad (2.18)$$

$$Z(\sigma_{ij}) = \frac{C}{2} \sigma_{kk}^2 + \frac{D}{2} \sigma_i^2, \quad C = \frac{1}{3} \frac{K_A - K_M}{K_A K_M}, \quad D = \frac{1}{3} \frac{G_A - G_M}{G_A G_M}$$

M_s^σ и A_s^σ – температуры точных верхней и нижней границ начала прямого и обратного фазовых переходов, соответственно, происходящих под действием напряжений σ_{ij} ; ΔS – изменение объемной плотности энтропии при осуществлении полного прямого или обратного фазового переходов. K_A и K_M – значения объемного модуля упругости в аустенитном и мартенситном фазовых состояниях.

2.2.7 Уравнение энергетического баланса

Замыкание модели нелинейного деформирования СПФ может быть осуществлено путем включения в ее состав связанного уравнения энергетического баланса, которое объединяет в себе первое и второе начала термодинамики. В данной работе для этого используется выражение аналогичное³ предложенному в работе [52]:

$$k_q \Delta T = C_\sigma \dot{T} + \alpha_q T \dot{\sigma}_{kk} - \left[\Delta U + \omega_{ij} \sigma'_{ij} + Z(\sigma_{ij}) + \varepsilon^0 \sigma_{kk} \right] \dot{q} - s_{ij} \dot{\varepsilon}_{ij}^{st} \quad (2.19)$$

k_q – коэффициент теплопроводности; C_σ – теплоемкость единицы объема при постоянном напряжении; ΔU – изменение объемной плотности внутренней энергии при осуществлении полного прямого или обратного фазового переходов.

2.2.8 Параметр вида напряженно-деформированного состояния тензора

Экспериментально установлено, что поведение СПФ существенным образом зависит от вида напряженно-деформированного состояния [54; 125]. Примером такой зависимости является разносопротивляемость при растяжении и сжатии во время фазового и структурного деформирования. Чтобы модель могла описывать явления такого рода, определяющие соотношения должны содержать параметры вида напряженно-деформированного состояния, которые в общем случае являются функциями от тензоров напряжений и деформаций.

Для изотропных металлов в качестве параметров вида напряженного состояния часто используют функции инвариантов тензора напряжений [123; 127; 136]: трехосность и параметр Лоде. Неупругое деформирование СПФ описывается девиаторными соотношениями, поэтому функции, содержащие в качестве переменной гидростатическое давление, такие как трехосность, не подходят в качестве параметров вида напряженного состояния для данных материалов. Поэтому в данной работе используется параметр вида состояния аналогичный параметру Лоде, который

³Особенностью уравнения (2.19) является то, что сверка тензора структурных деформаций осуществляется с тензором *активных* напряжений, в то время как в остальных слагаемых данного уравнения используется тензор напряжений.

для произвольного тензора второго ранга c_{ij} имеет следующий вид:

$$\mu_c = m \frac{Det(c'_{ij})}{c_i^3} \quad (2.20)$$

m_c – безразмерный коэффициент, значения которого подбираются таким образом, чтобы для одноосного растяжения и сжатия параметр вида состояния тензора принимал значения равные 1 и -1, соответственно⁴; $Det(c'_{ij})$ – определитель матрицы с компонентами $\| c_{ij} - c_{kk}/3\delta_{ij} \|$; c_i – интенсивность тензора c_{ij} .

В качестве тензора c_{ij} можно рассматривать напряжения, активные напряжения, фазово-структурные или полные деформации.

2.2.9 Допустимые напряжения

Макропластическое деформирование, даже в случае однократного нагружения, оказывает существенное негативное влияние на свойства СПФ [149]. В данной работе напряжения подбираются таким образом, чтобы пластическое деформирование не имело места. Граница области допустимых напряжений определяется критерием текучести Мизеса:

$$\sigma_i = \sigma_Y \quad (2.21)$$

σ_Y – дислокационный предел текучести.

Следует отметить, что стандартное определение предела текучести или, в общем случае, поверхности упрочнения является двойственным для СПФ, поскольку начало неупругого деформирования в данных материалах определяется фазово-структурными механизмами, а необратимое деформирование, обусловленное пластическими механизмами, происходит тогда, когда в материале уже накоплены значительные неупругие деформации.

2.3 Никелид титана

Материальные функции и значения констант, представленные в данном разделе, соответствуют поликристаллическому никелиду титана в равноатомной конфигурации.

2.3.1 Материальные константы

Плотность в аустенитном фазовом состоянии ρ и объемная деформация прямого фазового перехода нитинола считаются равными 6440 [кг/м³] и 0.1 % соответственно. Пластический предел

⁴Для тензоров напряжений и фазово-структурных деформаций параметр m_c равен 27/2 и 4.

текучности предполагается независимым от фазового состояния сплава и составляющим 400 [МПа]. Термоупругие и термодинамические характеристики никелида титана представлены в таблицах 1 и 2 соответственно.

Таблица 1 — Термоупругие характеристики в аустенитном (А) и мартенситном (М) фазовых состояниях.

Величина	Размерность	$C = A$	$C = M$
E_C	ГПа	84	28
ν_C	-	0.3	0.48
K_C	ГПа	700	23.3
G_C	ГПа	28.4	10.8
α_C	$1/^\circ C$	$1.1 \cdot 10^{-5}$	$6.6 \cdot 10^{-6}$

Таблица 2 — Значения термодинамических констант.

Величина	Размерность	Значение
M_s^0	$^\circ C$	60
M_f^0	$^\circ C$	40
A_s^0	$^\circ C$	70
A_f^0	$^\circ C$	90
ΔU	Дж / (кг · $^\circ C$)	30000
ΔS	Дж / (кг · $^\circ C$)	100
C_σ	Дж / (кг · $^\circ C$)	500

2.3.2 Материальные функции

В работах [53; 54] экспериментально установлено, что фазово-структурные деформации, накопленные в элементе из никелида титана во время прямого фазового перехода, происходящего под действием постоянной нагрузки, и при изотермическом нагружении в режиме мартенситной неупругости до того же значения нагрузки:

- существенно различаются количественно
- зависят от величины действующих напряжений и вида напряженно-деформированного состояния
- могут быть аппроксимированы с использованием интегральных функций гамма-распределения [86]:

$$\gamma = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^{\frac{x}{d}} t^{\alpha-1} e^{-t} dt \quad (2.22)$$

d – параметр масштаба; α – параметр формы; $\Gamma = \int_0^{\infty} \tau^{\alpha-1} e^{-\tau} d\tau$ – гамма-функция Эйлера [30].

Диаграмма прямого перехода

Фазово-структурные деформации, накопленные в результате прямого фазового перехода под действием постоянных одноосных напряжений, аппроксимируется следующей зависимостью:

$$\varepsilon^{phst} = \text{sign}(\sigma) \rho_D^f(\mu_\sigma) \varphi_f(|\sigma|, \mu_\sigma), \quad \varphi_f = \gamma[|\sigma|, \alpha_f(\mu_\sigma), d_f(\mu_\sigma)] \quad (2.23)$$

Значения материальных констант для случаев растяжения и сжатия, полученные в работе [54], представлены в таблице 3.

Таблица 3 — Материальные константы диаграмм прямого перехода при растяжении и сжатии.

	$\mu_\sigma = 1$	$\mu_\sigma = -1$
ρ_D^f	0.1085	0.07623
α_f	2.083	0.9552
d_f , [МПа]	64.15	204.3

Функция f

Функция $f(q)$ в случае прямого и обратного фазовых переходов определяет удельную скорость роста и деградации мартенситных мезоэлементов [60]. Данная материальная функция может быть аппроксимирована следующими аналитическими выражениями:

$$f(q) = \begin{cases} \frac{1}{q + C_0} & , dq > 0 \\ \frac{1}{q} & , dq < 0 \end{cases} \quad (2.24)$$

Значение материальной константы $C_0 = 2$ может быть найдено из данных опытов на ориентированный переход [52].

Диаграмма мартенситной неупругости

Материальная функция, описывающая накопление фазово-структурных деформаций при одноосном изотермическом нагружении из состояния хаотического мартенсита, имеет следующий вид:

$$\varepsilon^{phst} = \text{sign}(\sigma) \rho_D^m(\mu_\sigma) \varphi_m(|\sigma|, \mu_\sigma), \quad \varphi_m = \gamma[|\sigma|, \alpha_m(\mu_\sigma), d_m(\mu_\sigma)] \quad (2.25)$$

Таблица 4 — Материальные константы диаграмм мартенситной неупругости.

	$\mu_\sigma = 1$	$\mu_\sigma = -1$
ρ_D^m	0.0608	0.02
α_m	6.45	16.08
$d_{m,2}$ [МПа]	27.4	18

Функция кинематического упрочнения

Для описания трансляционного упрочнения в теории пластичности предложены различные конечные и дифференциальные, линейные и нелинейные модели [36; 136]. Возможность использования аналогичных моделей применительно к СПФ обсуждаются в работе [42].

Далее функция кинематического упрочнения g для *Моделей* с комбинированным упрочнением предполагается линейно зависящей от параметра вида тензора активных напряжений μ_s . Значение g для случая сжимающих активных напряжений $\mu_s = -1$, полученное в работе [108], равно 3066.4 [МПа]. Предполагается, что в случае действия растягивающих активных напряжений $g(1) = 1500$ [МПа].

Функция φ

В рамках *Моделей* с комбинированным упрочнением радиус поверхности нагружения s^* для произвольного состояния определяется уравнениями (2.12) и (2.14). Для процессов монотонного изотермического пропорционального нагружения (приложение А) хаотически ориентированного мартенсита в каждый момент должны выполняться следующие равенства⁵:

$$\frac{\varepsilon_i^{phst}}{\rho_D^m} = \varphi(s_i) = \varphi_m(\sigma_i) \quad (2.26)$$

Откуда следует, что функция φ должна удовлетворять тем же ограничениям, что и функция φ_m .

Поскольку в рассматриваемом процессе механическое нагружение происходит при постоянной температуре $T < A_s^0 \leq A_s^\sigma$:

- Фазовое деформирование не имеет места $dq \equiv q - 1 \equiv 0$.
- Конечные выражения для тензоров трансляций поверхностей нагружения для *Моделей* 2 и 3 существуют и равны между собой.

Действительно, используя тождество $q \equiv 1$ и учитывая начальное условие $\varepsilon_{ij}^{phst'}(1, \sigma'_{ij} = 0) = 0$, уравнения (2.13) и (2.15), можно легко проинтегрировать:

⁵Поскольку нагружение и деформирование являются пропорциональными и монотонными, зависимость максимальной кристаллографической деформации мартенсита от вида напряженного или деформированного состояния опускается

2.

$$a_{ij} = \frac{g}{q} \int_0^{\sigma'_{ij}} d\varepsilon_{ij}^{st} = g \int_0^{\sigma'_{ij}} d\varepsilon_{ij}^{phst'} = g\varepsilon_{ij}^{phst'}$$

3.

$$a_{ij} = g \int_0^{\sigma'_{ij}} d\left(\frac{\varepsilon_{ij}^{phst'}}{q}\right) = g\varepsilon_{ij}^{phst'}$$

Непосредственным следствием данного результата является конечное выражения для девиатора тензора активных напряжений:

$$s_{ij} = \sigma'_{ij} - g\varepsilon_{ij}^{phst'}$$

Учитывая пропорциональность нагружения и деформирования систему (2.26) можно переписать следующим образом:

$$s_{ij} = S\sigma_{ij}^0, \quad S = \sigma - \frac{3}{2}g\varepsilon^{phst}, \quad s_i = \left| \sigma - \frac{3}{2}g\varepsilon^{phst} \right| = |S|, \quad \varepsilon_{ij}^{phst'} s_{ij} = \varepsilon^{phst} S$$

$$\frac{|\varepsilon^{phst}|}{\rho_D^m} = \varphi \left(\left| \sigma - \frac{3}{2}g\varepsilon^{phst} \right| \right) = \varphi_m(|\sigma|) \quad (2.27)$$

На рис. 2.1 штрих-пунктирные линии изображают активные напряжения, которые получены из соотношения $S = \sigma - \text{sign}(\sigma) \frac{3}{2}g\rho_D^m \varphi_m(|\sigma|)$, для различных значений напряжений $\sigma = \sigma_k, k = 1, \dots, N$. Ввиду схожей формы диаграмм мартенситной неупругости и функции, описывающей зависимость фазово-структурных деформаций от величины активных напряжений, в качестве функции φ для случаев растяжения и сжатия принято решение использовать гамма распределение.

Для определения оптимальных значений материальных констант используется целевая функция:

$$\Sigma_\varphi^2 = \sum_{k=1}^N \left\{ \varphi_m(|\sigma_k|) - \gamma \left[\left| \sigma_k - \text{sign}(\sigma_k) \frac{3}{2}g\rho_D^m \varphi_m(|\sigma_k|) \right|, \alpha_\varphi, d_\varphi \right] \right\}^2$$

Минимизация функции $\Sigma_\varphi^2(\alpha_\varphi, d_\varphi)$ осуществляется при помощи алгоритма линейного поиска (пункт В.1.1). Найденные в результате оптимизации материальные константы для случаев растяжения и сжатия равны: $\alpha_\varphi(1) = 27.6, d_\varphi(1) = 3.73$ [МПа] и $\alpha_\varphi(-1) = 35.42, d_\varphi(-1) = 6.81$ [МПа].

2.4 Модельные задачи

Для верификации представленных в разделе 2.2 определяющих соотношений рассмотрим три процесса термомеханического нагружения:

- Прямой фазовый переход, происходящий под действием постоянных напряжений.
- Изотермическое нагружение из состояния хаотического мартенсита.

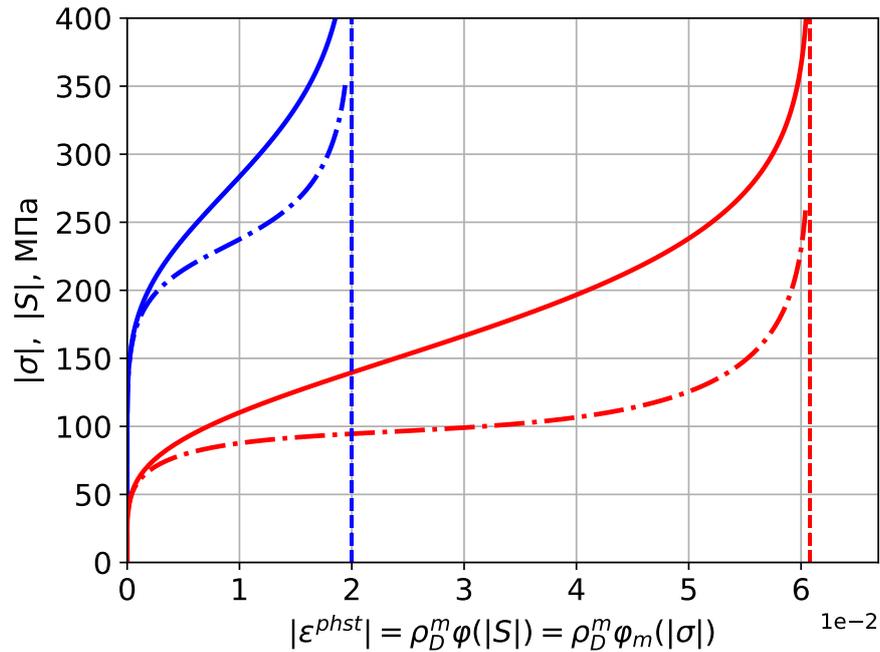


Рисунок 2.1 — Изотермическое деформирование представительного объема СПФ, находящегося в полностью мартенситном фазовом состоянии. Непрерывные **красные** и **синие** линии – диаграммы мартенситной неупругости для случаев **растяжения** и **сжатия**; Штрих-пунктирные красные и синие линии – зависимость активных напряжений от фазово-структурных деформаций для случаев **растяжения** и **сжатия**; Вертикальные пунктирные линии – предельные кристаллографические деформации мартенсита в заданном режиме деформирования.

– Обратный фазовый переход, происходящий под действием постоянных напряжений.

Согласно уравнению (2.1), приращения фазово-структурных деформаций СПФ могут быть представлены в виде суммы приращений связанных с фазовым (2.4), (2.5) и структурным (2.7) механизмами деформирования. Для произвольного процесса термомеханического нагружения фазово-структурные деформации зависят от пути и не могут быть представлены в виде конечных соотношений. При этом существует класс процессов в которых соотношение (2.1) является полным дифференциалом [90; 92]. Далее будет доказано, что все три рассматриваемых в данном разделе процесса деформирования, допускают представление фазово-структурных деформаций в аналитической или полу-аналитической форме.

Значения внутренних параметров состояния СПФ, таких как радиус и тензор трансляции поверхности нагружения, описывающей деформирование ассоциированное со структурными механизмами, и фазово-структурных деформаций определяются историей термомеханического нагружения, отсчитываемой от момента зарождения первых мартенситных образований. Для описания внутреннего состояния представительного объема СПФ будем использовать следующую форму записи:

$$\xi = \{q, \varepsilon_{ij}^{phst'}, s^*, a_{ij}\}$$

Необходимые условия структурного деформирования удобно представлять в сокращенной форме используя скобки Айверсона [15], которые для некоторого *логического* утверждения S определяются следующим образом:

$$[S] = \begin{cases} 1, & \text{если утверждение } S \text{ истинно} \\ 0, & \text{если утверждение } S \text{ ложно} \end{cases}$$

Если в квадратных скобках стоит выражение, не являющееся логическим (результатом вычисления которых является "истина" или "ложь"), то данные скобки следует интерпретировать, как обычные скобки, используемые в алгебраических выражениях.

Многие широко применяемые в механике и физике обозначения могут быть легко выражены при помощи скобок Айверсона: символ Кронекера $\delta_{ij} = [i = j]$, функция Хевисайда $H(x) = [x > 0]$, скобки Маколея $\langle x \rangle = [x > 0]x$.

2.4.1 Прямой переход под действием постоянных напряжений

Пусть в представительном объеме СПФ, находящемся в полностью аустенитном фазовом состоянии при температуре $T > M_s^\sigma$, реализуется однородное напряженное состояние σ_{ij} . Если равномерно охлаждать данный объем, сохраняя при этом его напряженное состояние неизменным, то при достижении температуры начала прямого фазового перехода в нем одновременно с монотонным увеличением упругих деформаций будут накапливаться фазово-структурные деформации прямого превращения.

Процесс деформирования, сопровождающийся или не сопровождающийся эволюцией внутреннего состояния материала, может быть описан при помощи системы дифференциальных уравнений (2.1), (2.4), (2.5), (2.7), (2.8), (2.9), (2.10), в которой радиус поверхности нагружения и тензор остаточных напряжений удовлетворяют одной из трех *Моделей* структурного деформирования (пункт 2.2.5): 1. (2.11) или 2. (2.12), (2.13) или 3. (2.14), (2.15).

Данная система, из которой исключены условия эволюции радиуса и тензора трансляции поверхности нагружения, зависящие от используемой *Модели* структурного деформирования может быть представлена следующим образом:

$$\begin{cases} d\varepsilon_{ij}^{phst'} = \omega_{ij}^f(q, \sigma_{ij}, \varepsilon_{ij}^{phst'})dq + [s_i = s^*]\langle d\lambda \rangle s_{ij}, dq > 0 \\ \omega_{ij}^f = \frac{3}{2}\rho_D^f \frac{\sigma'_{ij}}{\sigma_i} (1 - qf(q))\varphi_f(\sigma_i) + f(q)\varepsilon_{ij}^{phst'} \\ s_{ij} = \sigma'_{ij} - a_{ij} \\ \xi = \{0, \mathbf{0}, 0, \mathbf{0}\} \end{cases} \quad (2.28)$$

Поскольку вид напряженно-деформированного состояния во всех модельных задачах данной главы предполагается фиксированным, параметры μ_σ , μ_s и μ_ε не указываются явно.

Фазово-структурные деформации при прямом превращении, в отсутствие структурного деформирования, могут быть найдены при помощи интегрирования [92] уравнения (2.4), с учетом

(2.5) и (2.24), с начальным условием $\varepsilon_{ij}^{phst'}(0, \sigma_{ij}) = 0$:

$$\varepsilon_{ij}^{phst'} = e^{\int_0^q f(q) dq} \int_0^q \left[\frac{3}{2} \rho_D^f \frac{\sigma'_{ij}}{\sigma_i} \varphi_f(\sigma_i) (1 - qf(q)) e^{-\int_0^y f(x) dx} \right] dy = \frac{3}{2} \rho_D^f q \frac{\sigma'_{ij}}{\sigma_i} \varphi_f(\sigma_i) \quad (2.29)$$

На начальном этапе прямого превращения, когда по всему объему материала практически мгновенно возникают мартенситные зародыши (пункт 1.1.1) и объемная доля мартенситной фазы резко возрастает от 0 до $q = q_0 \ll 1$. Так как изменение степени ориентированности мартенситных структур и, соответственно, деформирование, связанное с структурными механизмами, может происходить только после появления первых мартенситных образований, фазово-структурные деформации представительного объема СПФ при $q = q_0$ определяется выражением (2.29).

Деформирование по структурным механизмам происходит только в том случае, когда выполняются условия активного нагружения 2.10. Для всех рассматриваемых *Моделей* фазово-структурного деформирования при $q = q_0$ компоненты тензора остаточных напряжений инициализируются нулевыми значениями⁶, а радиус поверхности нагружения, с учетом (2.29), определяется соотношением:

$$s^* = \varphi_m^{-1} \left[\frac{\rho_D^f}{\rho_D^m} \varphi_f(\sigma_i) \right] \quad (2.30)$$

Существование обратной функции φ_m^{-1} , с тем же характером монотонности, что и у функции φ_m , гарантируется строгой монотонностью функции φ_m [30].

После появления в представительном объеме СПФ первых мартенситных образований, при $q \in [q_0, 1]$, наличие или отсутствие структурного деформирования определяется выполнением или невыполнением условий активного нагружения (2.10).

Поскольку для никелида титана при любых ненулевых значениях интенсивности напряжений справедливо неравенство [54; 56]:

$$\rho_D^f \varphi_f(\sigma_i) \geq \rho_D^m \varphi_m(\sigma_i) \quad (2.31)$$

для $q = q_0$, в соответствии с (2.30), $\sigma_i < s^*$ и не выполняется первое условие (2.10) и фазово-структурные деформации определяются соотношением (2.29).

Точка, изображающая фиксированное напряженное состояние и находящаяся внутри поверхности нагружения, в отсутствие трансляционного упрочнения не может оказаться на данной поверхности. Таким образом, отсутствие трансляционного упрочнения в рассматриваемом случае гарантирует невозможность структурного деформирования. Следовательно, в *Модели 1* неупругое деформирование может происходить исключительно за счет фазовых механизмов.

В *Модели 2* структурное деформирование невозможно при $q = q_0$, следовательно, при $q = q_0 + \Delta q$ положение поверхности нагружения не меняется по сравнению с $q = q_0$, поскольку, согласно (2.13) и (2.30) $\Delta a_{ij} \sim \Delta \varepsilon_{ij}^{st} = 0$ и $s^* = s^*(\sigma_i)$, соответственно. Таким образом, при $q_0 + \Delta q$ структурное деформирование так же не имеет места, что влечет за собой невозможность структурного деформирования $\forall q \in [0, 1]$.

⁶В случае *Модели 3* принимается гипотеза, о возможности такой инициализации.

В *Модели 3* приращение тензора трансляции при $q = q_0$ удовлетворяет соотношению (2.15):

$$\Delta a_{ij} = g \left[\frac{\varepsilon_i^{phst}(q_0 + \Delta q, \sigma_i)}{q_0 + \Delta q} - \frac{\varepsilon_i^{phst}(q_0, \sigma_i)}{q_0} \right] = g \left[\rho_D^f \varphi_f(\sigma_i) - \rho_D^f \varphi_f(\sigma_i) \right] = 0$$

Поэтому, как и в случае *Модели 2*, можно заключить, что и для *Модели 3* структурное деформирование не может происходить ни при каком допустимом значении параметра фазового состава.

Установлено, что точка, описывающая фиксированное напряженное состояние представительного объема СПФ в каждый момент прямого превращения, в частности при $q = 1$, находится внутри поверхности нагружения, и неупругие деформации, накапливающиеся в результате прямого превращения под действием постоянных напряжений, определяются исключительно фазовыми механизмами деформирования. Поверхность нагружения является фиксированной с момента зарождения первых мартенситных элементов, а состояние представительного объема СПФ определяется соотношением:

$$\xi = \left\{ q, \frac{3}{2} \rho_D^f q \frac{\sigma'_{ij}}{\sigma_i} \varphi_f(\sigma_i), \varphi_m^{-1} \left[\frac{\rho_D^f}{\rho_D^m} \varphi_f(\sigma_i) \right], \mathbf{0} \right\} \quad (2.32)$$

Если прямой переход происходит при нулевых напряжениях, то поверхность нагружения вырождается в точку. Из экспериментов следует, что в таком случае образуется хаотически ориентированный мартенсит, фазово-структурная деформация которого равна ε^0 , а деформация формоизменения отсутствует.

Деформации, накапливаемые в материале в результате прямого фазового перехода, происходящего под действием постоянных напряжений, для случаев растяжения и сжатия изображены на рис. 2.2.

2.4.2 Монотонное нагружение из состояния хаотического мартенсита

В представительном объеме СПФ, находящемся в полностью мартенситном фазовом состоянии, монотонное увеличение напряжений приводит к упругому деформированию, одновременно с которым может происходить структурное деформирование. Чтобы последнее имело место, необходимо и достаточно, выполнения условий активного нагружения (2.10). Второе из условий активного нагружения позволяет определить множитель $d\lambda$ для *Моделей*:

1.

$$\begin{aligned} \underline{\rho_D^m \varphi_m(\sigma_i)} dq + \rho_D^m q \varphi'_m(\sigma_i) d\sigma_i &= \frac{\sigma'_{ij}}{\sigma_i} (\omega_{ij} dq + d\lambda \sigma'_{ij}) = \underline{\frac{\sigma'_{ij}}{\sigma_i} \omega_{ij} dq} + \frac{2}{3} \sigma_i d\lambda \\ \frac{2}{3} \sigma_i d\lambda &= \left[\rho_D^m \varphi_m(\sigma_i) - \frac{\sigma'_{ij}}{\sigma_i} \omega_{ij} \right] dq + \rho_D^m q \varphi'_m(\sigma_i) d\sigma_i \end{aligned} \quad (2.33)$$

2.

$$\rho_D^m [\varphi(\sigma_i) dq + q \varphi'(\sigma_i) d\sigma_i] = d\varepsilon_i^{phst}$$

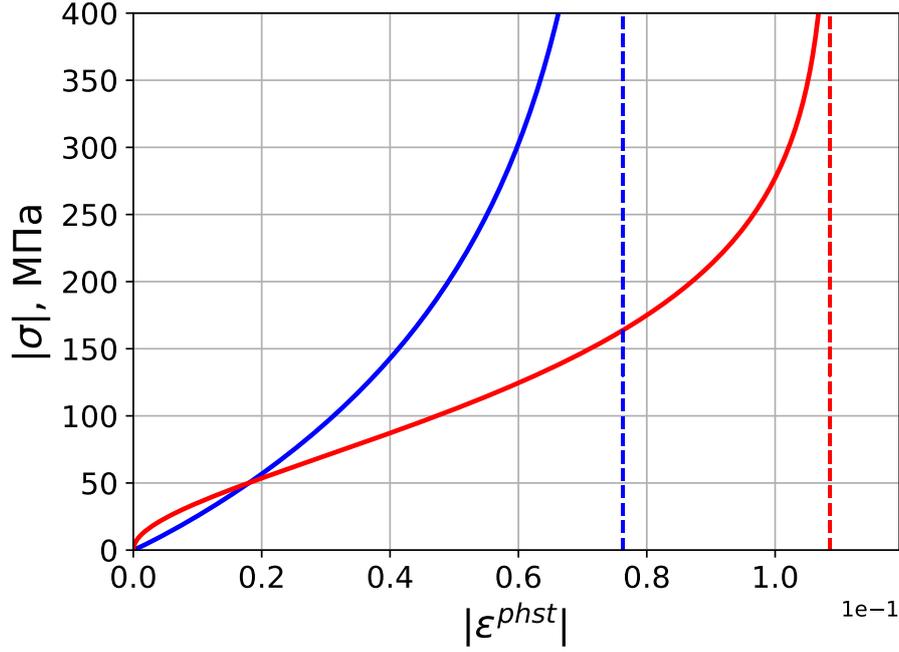


Рисунок 2.2 — Непрерывные линии соответствуют диаграммам прямого перехода, а вертикальные пунктирные – предельным кристаллографическим деформациям мартенсита при **растяжении/сжатии**.

$$\begin{aligned}
 ds_i &= \frac{1}{2s_i} \frac{3}{2} \mathfrak{Z}_{s_{ij}} ds_{ij} = \frac{3}{2} \frac{s_{ij}}{s_i} (d\sigma'_{ij} - da_{ij}) = \frac{3}{2} \frac{s_{ij}}{s_i} \left(d\sigma'_{ij} - \frac{g}{q} d\lambda s_{ij} \right) = \frac{3}{2} \frac{s_{ij}}{s_i} d\sigma'_{ij} - \frac{g}{q} s_i d\lambda \\
 d\varepsilon_i^{phst} &= \frac{1}{2\varepsilon_i^{phst}} \frac{2}{3} \mathfrak{Z}_{\varepsilon_{ij}^{phst'}} d\varepsilon_{ij}^{phst'} = \frac{2}{3} \frac{\varepsilon_{ij}^{phst'}}{\varepsilon_i^{phst}} (\omega_{ij} dq + d\lambda s_{ij}) \\
 \rho_D^m \left[\varphi(s_i) dq + q\varphi'(s_i) \frac{3}{2} \frac{s_{ij}}{s_i} d\sigma'_{ij} - g s_i \varphi'(s_i) d\lambda \right] &= \frac{2}{3} \frac{\varepsilon_{ij}^{phst'}}{\varepsilon_i^{phst}} (\omega_{ij} dq + d\lambda s_{ij}) \\
 d\lambda &= \frac{\left[\rho_D^m \varphi(s_i) - \frac{2}{3} \frac{\varepsilon_{ij}^{phst'}}{\varepsilon_i^{phst}} \omega_{ij} \right] dq + \frac{3}{2} \rho_D^m q \varphi'(s_i) \frac{s_{ij}}{s_i} d\sigma'_{ij}}{\frac{2}{3} \frac{\varepsilon_{ij}^{phst'}}{\varepsilon_i^{phst}} s_{ij} + g \rho_D^m s_i \varphi'(s_i)} \quad (2.34)
 \end{aligned}$$

3.

$$\rho_D^m \varphi'(s_i) ds_i = \frac{d\varepsilon_i^{phst}}{q} - \frac{\varepsilon_i^{phst}}{q^2} dq$$

$$ds_i = \frac{1}{2s_i} \frac{3}{2} \mathfrak{Z}_{s_{ij}} ds_{ij} = \frac{3}{2} \frac{s_{ij}}{s_i} (d\sigma'_{ij} - da_{ij}) = \frac{3}{2} \frac{s_{ij}}{s_i} \left(d\sigma'_{ij} + g \frac{\varepsilon_{ij}^{phst'}}{q^2} dq \right) - \frac{3}{2} \frac{g}{q} \frac{s_{ij}}{s_i} d\varepsilon_{ij}^{phst'}$$

$$d\varepsilon_i^{phst} = \frac{1}{2\varepsilon_i^{phst}} \frac{2}{3} \mathfrak{Z}_{\varepsilon_{ij}^{phst'}} d\varepsilon_{ij}^{phst'} = \frac{2}{3} \frac{\varepsilon_{ij}^{phst'}}{\varepsilon_i^{phst}} d\varepsilon_{ij}^{phst'}$$

$$\begin{aligned}
& \rho_D^m \varphi'(s_i) \left[\frac{3 s_{ij}}{2 s_i} \left(d\sigma'_{ij} + g \frac{\varepsilon_{ij}^{phst'}}{q^2} dq \right) - \frac{3 g s_{ij}}{2 q s_i} d\varepsilon_{ij}^{phst'} \right] = \frac{1}{q} \frac{2 \varepsilon_{ij}^{phst'}}{3 \varepsilon_i^{phst'}} d\varepsilon_{ij}^{phst'} - \frac{\varepsilon_i^{phst'}}{q^2} dq \\
& \frac{3}{2} \rho_D^m \varphi'(s_i) \frac{s_{ij}}{s_i} d\sigma'_{ij} + \frac{1}{q^2} \left[\frac{3}{2} g \rho_D^m \varphi'(s_i) \frac{s_{ij}}{s_i} \varepsilon_{ij}^{phst'} + \varepsilon_i^{phst'} \right] dq = \\
& = \frac{1}{q} \left[\frac{2 \varepsilon_{ij}^{phst'}}{3 \varepsilon_i^{phst'}} + \frac{3}{2} g \rho_D^m \varphi'(s_i) \frac{s_{ij}}{s_i} \right] (\omega_{ij} dq + d\lambda s_{ij}) \\
d\lambda = & \frac{\left\{ \frac{3}{2} \rho_D^m \frac{g}{q} \varphi'(s_i) \frac{s_{ij}}{s_i} \varepsilon_{ij}^{phst'} + \frac{\varepsilon_i^{phst'}}{q} - \left[\frac{2 \varepsilon_{ij}^{phst'}}{3 \varepsilon_i^{phst'}} + \frac{3}{2} g \rho_D^m \varphi'(s_i) \frac{s_{ij}}{s_i} \right] \omega_{ij} \right\} dq + \frac{3}{2} \rho_D^m q \varphi'(s_i) \frac{s_{ij}}{s_i} d\sigma'_{ij}}{\frac{2 \varepsilon_{ij}^{phst'}}{3 \varepsilon_i^{phst'}} s_{ij} + g \rho_D^m s_i \varphi'(s_i)}
\end{aligned} \tag{2.35}$$

Для *Модели 1* подстановка (2.33) в (2.7), (2.9), с учетом $q - 1 = dq \equiv 0$, дает:

$$\begin{cases} d\varepsilon_{ij}^{phst'} = [s_i = s^*][df_s = 0] \langle d\lambda \rangle \sigma'_{ij} \\ \frac{2}{3} \sigma_i d\lambda = \left[\rho_D^m \varphi_m(\sigma_i) - \frac{\sigma'_{ij}}{\sigma_i} \omega_{ij} \right] \underbrace{dq}_{=0} + \rho_D^m \underbrace{q}_{=1} \varphi'_m(\sigma_i) d\sigma_i = d[\rho_D^m \varphi_m(\sigma_i)] \end{cases}$$

или

$$d\varepsilon_{ij}^{phst'} = d \left[\frac{3}{2} \rho_D^m \varphi_m(\sigma_i) \right] \frac{\sigma'_{ij}}{\sigma_i}$$

Данное уравнение справедливо только в том случае, если одновременно выполняются условия активного нагружения (2.10) и, в частности, $d\lambda = \frac{3}{2} \rho_D^m \frac{\varphi'_m(|\sigma_i|)}{\sigma_i} d\sigma_i > 0$. Таким образом, неупругое деформирование в рамках *Модели 1* описывается интегро-дифференциальной системой:

$$\begin{cases} d\varepsilon_{ij}^{phst'} = \left\langle \frac{d \left[\frac{3}{2} \rho_D^m \varphi_m(\sigma_i) \right]}{\sigma_i} \right\rangle \sigma'_{ij} \\ \rho_D^m \varphi_m(\sigma_i) = \int \frac{\sigma'_{ij}}{\sigma_i} d\varepsilon_{ij}^{phst'} \\ \varepsilon_{ij}^{phst'}(1, 0) = 0 \end{cases} \tag{2.36}$$

Подстановка первого уравнения данной системы во второе дает верное тождество всегда, когда $d\lambda > 0$, откуда следует, что конечное условие активного нагружения для рассматриваемого процесса, справедливо вне зависимости от пути механического нагружения. Последнее условие активного нагружения, $d\lambda > 0$, справедливо для любых ненулевых значений интенсивности напряжений. В начале рассматриваемого процесса когда $\sigma_i = 0$, $\Delta\sigma_i > 0$:

$$d\lambda \sim \lim_{x \rightarrow +0} \frac{\varphi'_m(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow +0} x^{\alpha-2}$$

В работе [54] экспериментально установлено, что при одноосном нагружении параметр формы $\alpha > 6$, откуда следует, что $d\lambda = \mathcal{O}(\sigma_i^4)$. Чтобы *Модель 1* корректно описывала явление мартенситной неупругости, определим пороговое значение интенсивности напряжений $\sigma_i^m > 0$, которое определяет инициализацию⁷ поверхности структурного деформирования.

⁷При меньших уровнях напряжений поверхность нагружения является вырожденной

В случае пропорционального механического нагружения (приложение А) из состояния хаотического мартенсита параметр фазово-структурного деформирования определяется соотношением⁸:

$$\varepsilon^{phst} = \text{sign}(\sigma) \rho_D^m \varphi_m(|\sigma|) \quad (2.37)$$

При этом состояние рассматриваемого представительного представительного объема СПФ на протяжении всего процесса нагружения:

$$\xi = \left\{ 1, \frac{3}{2} \rho_D^m \frac{\sigma'_{ij}}{\sigma_i} \varphi_m(|\sigma|), \sigma_i, \mathbf{0} \right\} \quad (2.38)$$

Тензоры остаточных напряжений для *Моделей* с комбинированным упрочнением совпадают для рассматриваемых условий нагружения (пункт 2.3.2). Откуда, с учетом тождеств $1 - q = dq \equiv 0$, для данных моделей также следуют равенство тензоров активных напряжений, уравнений определяющих радиусы поверхностей нагружения (2.12) и (2.14), а также выражений для $d\lambda$ (2.34) и (2.35). Таким образом для *Моделей* 2 и 3 системы уравнений для определения фазово-структурных деформаций совпадают и имеют следующий вид:

$$\begin{cases} d\varepsilon_{ij}^{phst'} = \left\langle \frac{\frac{3}{2} \rho_D^m \varphi'(s_i) \frac{s_{ij}}{s_i} d\sigma'_{ij}}{\frac{2}{3} \varepsilon_{ij}^{phst'} + g \rho_D^m s_i \varphi'(s_i)} \right\rangle s_{ij}, & s_{ij} = \sigma'_{ij} - g \varepsilon_{ij}^{phst'} \\ \rho_D^m \varphi(s_i) = \max \{ \varepsilon_i^{phst} \} \\ \varepsilon_{ij}^{phst'}(1, 0) = 0 \end{cases}$$

В случае пропорционального нагружения данная система сводится к:

$$s_{ij} = S \sigma_{ij}^0, \quad S = \sigma - \frac{3}{2} g \varepsilon^{phst}, \quad s_i = \left| \sigma - \frac{3}{2} g \varepsilon^{phst} \right| = |S|, \quad \varepsilon_{ij}^{phst'} s_{ij} = \varepsilon^{phst} S$$

$$\frac{3}{2} d\varepsilon^{phst} \sigma_{ij}^0 = \left\langle \frac{\frac{3}{2} \rho_D^m \varphi'(|S|) \frac{2}{3} \text{sign}(S) d\sigma}{\frac{2}{3} \text{sign}(\varepsilon^{phst}) S + g \rho_D^m |S| \varphi'(|S|)} \right\rangle S \sigma_{ij}^0$$

$$d\varepsilon^{phst} = \left\langle \frac{\rho_D^m \varphi'(|S|) d\sigma}{\left[\text{sign}(\varepsilon^{phst}) S + \frac{3}{2} g \rho_D^m \varphi'(|S|) \right] S} \right\rangle S$$

$$\begin{cases} d\varepsilon^{phst} = \text{sign}(S) \left\langle \Lambda(\sigma, \varepsilon^{phst}) d\sigma \right\rangle, \\ \Lambda = \frac{\rho_D^m \varphi'(|S|)}{\left[\text{sign}(\varepsilon^{phst}) + \text{sign}(S) \frac{3}{2} g \rho_D^m \varphi'(|S|) \right]}, & S = \sigma - \frac{3}{2} g \varepsilon^{phst} \\ \rho_D^m \varphi(|S|) = \max \{ |\varepsilon^{phst}| \} \\ \varepsilon_{ij}^{phst'}(1, 0) = 0 \end{cases} \quad (2.39)$$

⁸При интегрировании первого уравнения системы (2.36) учтено, что в случае пропорционального нагружения в каждый момент процесса справедливо тождество $\frac{\sigma'_{ij}}{\sigma_i} \equiv \text{sign}(\sigma) \sigma_{ij}^0 = const.$

Численное решение полученной системы может быть найдено при помощи сеточных методов [34; 92; 112]. Выражение для параметра $d\lambda$ на начальном этапе нагружения не имеет конечного предела. Медленное накопление фазово-структурных деформаций при небольших уровнях напряжений приводит к проблемам, связанным с ошибками округления. Отмеченные проблемы не позволяют использовать явные схемы интегрирования в начале нагружения. Чтобы упростить получение численного решения примем гипотезу о существовании в пространстве напряжений начальной поверхности структурного деформирования, аналогичной поверхности текучести в теории пластичности. В процессах пропорционального нагружения данная поверхность может быть представлена пороговыми напряжениями $\sigma^s(\mu_\sigma)$, равными минимальным абсолютным значениям параметров нагружения, при которых структурное деформирование имеет место. Для случаев растяжения и сжатия предельные значения параметра σ^s составляют 30 [МПа] и 60 [МПа], соответственно. Если нагружение является сложным, то пороговые значения аппроксимируются линейной зависимостью. Также потребуем, чтобы параметр фазово-структурного деформирования, при достижении порогового значения параметра нагружения, удовлетворял условию:

$$\varepsilon^{phst} = \text{sign}(\mu_\sigma) \rho_D^m \varphi[\sigma^s(\mu_\sigma)]$$

Непосредственная проверка показывает, что результаты численного интегрирования системы (2.39), с учетом сделанных допущений и погрешности аппроксимации функции φ , находятся в хорошем согласовании с деформациями, полученными при помощи аналитической зависимости (2.37). Поэтому состояние представительного объема СПФ, выраженное через параметры пропорционального нагружения, на протяжении всего процесса нагружения можно представить следующим образом⁹:

$$\xi = \left\{ 1, \text{sign}(\sigma) \rho_D^m \varphi_m(|\sigma|) \varepsilon_{ij}^0, \left| \sigma - \frac{3}{2} g \varepsilon^{phst}(\sigma) \right|, g \varepsilon^{phst}(\sigma) \varepsilon_{ij}^0 \right\} \quad (2.40)$$

Таким образом установлено, что все *Модели* структурного деформирования, используемые в данной работе, корректно описывают явление мартенситной неупругости.

Диаграммы структурного деформирования представлены на рис. 2.1.

2.4.3 Обратный переход под действием постоянных напряжений

Пусть в представительном объеме СПФ, находящемся в полностью мартенситном фазовом состоянии при температуре $T < A_s^\sigma$, реализуется однородное напряженно-деформированное состояние $(\sigma_{ij}, \varepsilon_{ij}^{eT} + \varepsilon^0 q \delta_{ij} + \varepsilon_{ij}^*)$. Фазово-структурные деформации формоизменения ε_{ij}^* , могут быть получены при помощи различных путей термомеханического нагружения. Рассмотрим *Случаи*, когда обратному фазовому переходу предшествует один из следующих процессов деформирования:

⁹В результате численного решения системы (2.39) установлено, что в данном процессе знаки S и σ совпадают для всех допустимых значений напряжений.

I. Прямой переход в свободном от напряжений состоянии, за которым следует изотермическое деформирование, вызванное действием монотонно возрастающих нагрузок (пункт 2.4.2).

II. Прямой переход под действием постоянных напряжений (пункт 2.4.2).

Далее рассматриваются процессы пропорционального нагружения (приложение А). Для обоих *Случаев*, в соответствии с (2.32) и (2.38), (2.40), состояние на момент начала обратного фазового превращения полностью определяется величиной действующего напряжения. Таким образом, величины фазово-структурных деформаций определяются соотношениями¹⁰:

$$\varepsilon^* = \begin{cases} \varepsilon_I^{phst} = \text{sign}(\sigma) \rho_D^m \varphi_m(|\sigma|) \\ \varepsilon_{II}^{phst} = \text{sign}(\sigma) \rho_D^f \varphi_f(|\sigma|) \end{cases} \quad (2.41)$$

Деформирование во время обратного фазового перехода описывается дифференциальным уравнением:

$$\begin{aligned} d\varepsilon^{phst} &= \frac{\varepsilon^{phst}}{q} dq + d\varepsilon^{st} \\ \varepsilon^{phst} \Big|_{q=1} &= \varepsilon^*(\sigma) \end{aligned} \quad (2.42)$$

Структурное деформирование может происходить только в том случае если выполняются условия активного нагружения (2.10). Проверим выполнение данных условий для различных *Случаев* и *Моделей*. Уравнения (2.33), (2.34) и (2.35), с учетом постоянства напряженного состояния $d\sigma_{ij} = d\sigma_i \equiv 0$ и соотношения (2.6), принимают следующий вид¹¹:

1.

$$\frac{2}{3} \sigma_i d\lambda_1 = \left[\rho_D^m \varphi_m(\sigma_i) - \frac{\sigma'_{ij} \varepsilon_{ij}^{phst'}}{\sigma_i q} \right] dq \quad (2.43)$$

Множитель, стоящий перед dq в правой части равенства (2.43), с учетом постоянства действующих напряжений можно переписать следующим образом:

$$\rho_D^m \varphi_m(\sigma_i) - \frac{\sigma'_{ij} \varepsilon_{ij}^{phst'}}{\sigma_i q} = \rho_D^m \varphi_m(|\sigma|) - \text{sign}(\sigma) \frac{\varepsilon^{phst}}{q}$$

Данное выражение тождественно равно нулю, если выполняется конечное условие структурного деформирования (2.11):

$$\rho_D^m q \varphi_m(|\sigma|) = \int \frac{\sigma'_{ij}}{\sigma_i} d\varepsilon_{ij}^{phst'} = \text{sign}(\sigma) \int d\varepsilon^{phst}$$

2.

$$d\lambda_2 = \frac{\left[\rho_D^m \varphi(s_i) - \frac{\varepsilon_i^{phst}}{q} \right] dq}{\frac{2}{3} \frac{\varepsilon_{ij}^{phst'}}{\varepsilon_i^{phst}} s_{ij} + g \rho_D^m s_i \varphi'(s_i)} \quad (2.44)$$

Множитель в числителе правой части (2.34), стоящий перед dq , обращается в ноль, если выполняется конечное условие активного нагружения (2.12).

¹⁰Индексы в виде римских цифр обозначают рассматриваемый случай.

¹¹Нижний арабский индекс у $d\lambda$ соответствует номеру *Модели*.

3.

$$d\lambda_3 = \frac{\left\{ \frac{3}{2} \rho_D^m \frac{g}{q} \varphi'(s_i) \frac{s_{ij}}{s_i} \varepsilon_{ij}^{phst'} + \frac{\varepsilon_i^{phst}}{q} - \left[\frac{2}{3} \frac{\varepsilon_{ij}^{phst'}}{\varepsilon_i^{phst}} + \frac{3}{2} g \rho_D^m \varphi'(s_i) \frac{s_{ij}}{s_i} \right] \frac{\varepsilon_{ij}^{phst'}}{q} \right\} dq}{\frac{2}{3} \frac{\varepsilon_{ij}^{phst'}}{\varepsilon_i^{phst}} s_{ij} + g \rho_D^m s_i \varphi'(s_i)} \equiv 0 \quad (2.45)$$

Таким образом можно заключить, что, независимо от рассматриваемого *Случая* и используемой *Модели*, структурное деформирование во время обратного фазового перехода, происходящего при фиксированном напряженном состоянии, не имеет места. Фазово-структурные деформации с учетом (2.42) определяются соотношением:

$$\varepsilon^{phst} = \varepsilon^*(\sigma)q \quad (2.46)$$

Поскольку фазово-структурные деформации монотонно убывают с уменьшением объемной доли мартенситной фазы, радиусы поверхностей нагружения в *Моделях* 1, 2 и 3 для процессов пропорционального нагружения определяются соотношениями:

1.

$$\sigma^* = \varphi_m^{-1} \left[\frac{\text{sign}(\sigma) \varepsilon^*(\sigma)}{\rho_D^m} \right]$$

2.

$$s^* = \varphi^{-1} \left[\frac{|\varepsilon^*(\sigma)|}{\rho_D^m q} \right]$$

3.

$$s^* = \varphi^{-1} \left[\frac{|\varepsilon^*(\sigma)|}{\rho_D^m} \right]$$

радиус поверхности нагружения монотонно увеличивается с ростом q для *Модели* 2 и сохраняет постоянные значения при использовании *Моделей* 1 и 3.

Из соотношений (2.13) и (2.15), непосредственно следует, что в каждый момент обратного фазового перехода для всех рассматриваемых *Моделей* и *Случаев* тензор трансляции не получает приращений.

Обобщая результаты, полученные в данном разделе, получим:

$$\xi = \begin{cases} \xi_1 = \left\{ q, \varepsilon^*(\sigma)q\varepsilon_{ij}^0, \varphi_m^{-1} \left[\frac{\text{sign}(\sigma) \varepsilon^*(\sigma)}{\rho_D^m} \right], \mathbf{0} \right\} \\ \xi_{2I} = \left\{ q, \varepsilon_I^{phst}(\sigma)q\varepsilon_{ij}^0, \varphi^{-1} \left[\frac{\varphi_m(|\sigma|)}{q} \right], g\varepsilon_I^{phst}(\sigma)\varepsilon_{ij}^0 \right\} \\ \xi_{2II} = \left\{ q, \varepsilon_{II}^{phst}(\sigma)q\varepsilon_{ij}^0, \varphi^{-1} \left[\frac{\rho_D^f \varphi_f(|\sigma|)}{\rho_D^m q} \right], \mathbf{0} \right\} \\ \xi_{3I} = \left\{ q, \varepsilon_I^{phst}(\sigma)q\varepsilon_{ij}^0, \varphi^{-1} [\varphi_m(|\sigma|)], g\varepsilon_I^{phst}(\sigma)\varepsilon_{ij}^0 \right\} \\ \xi_{3II} = \left\{ q, \varepsilon_{II}^{phst}(\sigma)q\varepsilon_{ij}^0, \varphi^{-1} \left[\frac{\rho_D^f \varphi_f(|\sigma|)}{\rho_D^m} \right], \mathbf{0} \right\} \end{cases} \quad (2.47)$$

Нижние индексы у ξ , обозначенные арабскими цифрами соответствуют номеру *Модели*, а римскими *Случаю*.

Глава 3. Постановка задачи устойчивости для элементов из СПФ

Основными причинами выхода из строя элементов конструкций являются разрушение, потеря устойчивости или комбинации данных двух явлений [97]. Устойчивость элемента явным образом зависит от свойств материала, из которого он изготовлен, его геометрической формы и граничных условий. Далее приводится краткий обзор основных подходов к анализу устойчивости различных механических систем (раздел 3.1), и обсуждаются формулировки *статического метода Эйлера* (раздел 3.2), позволяющие проводить исследование устойчивости элементов из СПФ во время фазовых переходов, происходящих под действием постоянных нагрузок, с учетом их дважды термомеханически связанного поведения.

В данной главе используются результаты, полученные при непосредственном участии автора и опубликованные в статьях [47; 48; 50].

3.1 Формулировки задачи устойчивости

Аналитическому исследованию устойчивости различных механических систем посвящены работы [1; 2; 9; 31; 32; 71; 81; 96; 97]. Методы, позволяющие корректно описать явление потери устойчивости, основываются на подходах, в которых уравнения равновесия записываются для возмущенного состояния покоя или движения. Анализ устойчивости элемента может быть сведен к исследованию свойств системы дифференциальных уравнений, полученной при помощи одного из следующих методов:

- *Статического (Эйлер)* – позволяет определить величину консервативной квазистатической нагрузки, при которой существует, по крайней мере, одна форма, бесконечно близкая к исходной, и не позволяет сделать выводов об устойчивости или неустойчивости смежных форм равновесия.
- *Энергетического (Лагранж-Дирихле)* – применяется при анализе устойчивости равновесия конструкций, подверженных действию консервативных сил.
- *Динамического (Ляпунов, Болотин)* – универсальный метод, который может применяться для анализа устойчивости упругих и неупругих систем, подверженных воздействию консервативных и неконсервативных нагрузок.

Наиболее распространенными типами статического анализа являются бифуркационный (пункт 3.2.1) и энергетический. Бифуркационный критерий используется для определения минимальной нагрузки, при которой появляются смежные формы равновесия. Данный метод не позволяет проводить анализ послекритического поведения механических систем. Энергетический метод основан на применении теоремы Лагранжа-Дирихле, которая утверждает, что в состоянии устойчивого равновесия потенциальная энергия системы, содержащей только консервативные и диссипативные силы, имеет минимальное значение. Классическая вариационная задача [91]

возникает при использовании энергетического подхода для исследования устойчивости равновесия упругих систем. В этом случае бифуркационный критерий анализа устойчивости в малом приводит к линеаризованным уравнениям равновесия возмущенной конфигурации механической системы, которые совпадают с уравнением Эйлера соответствующей вариационной задачи. Функционал потенциальной энергии обычно не существует для систем, в которых происходит пластическое, вязко-упругое/пластическое или фазово-структурное деформирование.

Динамический подход обладает наибольшей общностью [71], но при этом является наиболее трудоемким из всех перечисленных [97]. Когда на механическую систему действуют только консервативные нагрузки, результаты применения статического и динамического анализа устойчивости эквивалентны.

Таким образом, при исследовании устойчивости неупругих механических систем в зависимости от целей анализа, свойств рассматриваемой системы, типа граничных условий и требуемой точности разыскиваемого решения рационально применять различные варианты статического или динамического методов. В данной работе для определения критических значений нагрузок используется бифуркационный критерий устойчивости, формулировке и обобщению которого посвящен следующий раздел.

3.2 Применение метода Эйлера

3.2.1 Статический метод Эйлера

*Статический метод Эйлера*¹ [71], заключается в изучении возможности существования форм квазистатического равновесия, смежных с исходной, при заданном значении нагрузки. Существуют различные обобщения данного метода, в которых учитываются неидеальности геометрии элемента и граничных условий, а также геометрическая нелинейность.

3.2.2 Тривиальный и возмущенный процессы

Историю термомеханических воздействий, которым подвергаются элементы из СПФ перед и непосредственно во время потери устойчивости, можно представить в виде последовательности, состоящей из следующих процессов:

¹Леонард Эйлер (1707-1783) – выдающийся математик и механик швейцарского происхождения, являющийся основоположником теории устойчивости форм равновесия упругих систем.

0. *Подготовительного* – фазово-структурное деформирование, предшествующее началу обратного фазового перехода. При рассмотрении прямого фазового перехода данный этап опускается.
1. *Тривиального* – деформирование, вызванное монотонным изменением температуры, при котором элемент сохраняет первоначальную форму равновесия. Предполагается, что до достижения критического состояния изменением геометрии элемента в результате эволюции термоупругих и фазово-структурных деформаций можно пренебречь и считать напряженно-деформированное состояние однородным по объему. При этом, ввиду постоянства действующих нагрузок, напряженное состояние, реализуемое в элементе, можно в первом приближении считать фиксированным. Отвод и подведение тепла при прямом и обратном фазовых переходах, соответственно, происходят достаточно медленно, чтобы распределение мартенситной и аустенитной фаз было равномерным по объему элемента в каждый момент рассматриваемого процесса.
2. *Возмущенного* – переход к смежной форме равновесия предполагается достаточно медленным, чтобы влиянием сил инерции можно было пренебречь. В зависимости от учета внутренних, описываемых в рамках определяющих соотношений, и внешних, определяемых граничными условиями, связей рассматриваются различные постановки задачи устойчивости. Для классификации внешних связей используются *концепции* (пункт 3.2.3), а внутренних – *термомеханические постановки* (пункт 3.2.4).

3.2.3 Концепции

Состояние элемента из СПФ, в котором происходят фазовые переходы и структурные превращения, зависит от истории изменения термомеханических нагрузок. Поэтому определение возмущенного процесса, используемое в классическом варианте статического метода Эйлера, следует обобщить так, чтобы критические нагрузки однозначным образом зависели от граничных условий. При анализе устойчивости пластически деформирующихся элементов, в частности стержней, применяются две концепции, определяющие допустимую степень изменения механической составляющей нагрузки, действующей на элемент во время перехода к смежной форме равновесия [71]. Первая, принадлежащая Карману, предполагает, что нагрузка во время потери устойчивости сохраняет фиксированное значение, а вторая, предложенная Шенли, что она может получать некоторые малые приращения. При исследовании устойчивости пластин за пределами упругости также применяются схожие допущения [32]. В данной работе используются аналоги данных подходов, учитывающие особенности термомеханического деформирования СПФ, которые носят названия концепций фиксированных (ФН) и варьированных (ВН) внешних нагрузок, соответственно. Поскольку одним из типов воздействий, вызывающих потерю устойчивости в рассматриваемых процессах, является отведение от или сообщение элементу тепла, приводящее к монотонному изменению температуры в тривиальном процессе, наряду с концепциями ВН и ФН можно также рассматривать концепции фиксированной (ФТ) и варьированной (ВТ) температуры.

Чтобы решение задачи устойчивости было корректным в концепциях ВН/ВТ будем предполагать, что приращения компонент тензора напряжений/температуры:

- Являются величинами того же порядка малости, что и вариации напряжений/температуры, возникающие при переходе элемента к смежной форме равновесия в случае фиксированных граничных условий.
- Должны входить в состав аргументов соответствующей целевой функции, по которым проводится оптимизация.

Согласно данному выше определению значения критических параметров, найденных для концепций ФН и ФТ, всегда превосходят аналогичные значения, полученные при помощи концепций ВН и ВТ, соответственно.

3.2.4 Термомеханические постановки

Во время перехода элемента к смежной форме равновесия компоненты тензоров полных деформаций и напряжений получают некоторые приращения, которые зависят от принятых кинематических гипотез и концепций, соответственно. Значения других параметров состояния рассматриваемой механической системы в возмущенном процессе могут как оставаться неизменными, так и получать вариации. Поскольку используемая в данной работе система определяющих соотношений является замкнутой, величины вариаций объемной доли мартенситной фазы и температуры, а также компонент фазово-структурных деформаций не являются независимыми и должны определяться в соответствии с уравнениями, представленными в пункте 2.2. Далее будем использовать три термомеханические постановки:

- *Несвязанная* – параметр фазового состава, фазово-структурные деформации и температура при переходе к смежной форме равновесия считаются неизменными.
- *Однократно связанная* – учитывает влияние действующих напряжений и накопленных фазово-структурных деформаций на параметр фазового состава, а также дополнительное фазово-структурное деформирование. Температура предполагается фиксированной и равной своему значению в момент времени, предшествующий потере устойчивости.
- *Дважды связанная* – обобщает однократно связанную за счет учета выделения/поглощения латентного тепла и диссипации энергии.

С точки зрения термодинамики однократно и дважды связанная постановки соответствуют **изотермическому** и **адиабатическому** процессам перехода к смежной форме равновесия. Дважды связанная постановка отличается от более общей концепции ВТ тем, что в последней приращения температуры вызваны *внешними* по отношению к рассматриваемой термодинамической системе воздействиями и могут принимать произвольные значения, в то время как при использовании дважды связанной постановки теплообменом с внешней средой пренебрегают, а вариации температуры однозначным образом определяются из уравнения энергетического баланса (2.19).

Глава 4. Решение краевых задач устойчивости элементов из СПФ

Данная глава посвящена исследованию устойчивости стойки Шенли на стержнях из СПФ (раздел 4.2), стержня (раздел 4.3) и пластины (раздел 4.4) из СПФ во время прямых и обратных фазовых переходов, происходящих под действием постоянных напряжений. Используемые модели нелинейного термомеханического деформирования СПФ и постановки задачи устойчивости описаны в главах 2 и 3, соответственно.

В этой главе используются результаты, полученные при непосредственном участии автора и опубликованные в статьях [23; 27; 28; 46—50; 107—109; 131].

4.1 Процессы

4.1.1 Подготовительный процесс

Анализ процесса тривиального деформирования (пункт 3.2.2) элемента из СПФ во время обратного фазового превращения требует определения *начального*, соответствующего мартенситной фазе, состояния (пункт 2.4) $\xi^* = (1, \varepsilon_{ij}^*, s^*, a_{ij})$. За *отсчетное* состояние элемента принимается полностью аустенитное состояние $\xi_0 = (0, \mathbf{0}, 0, \mathbf{0})$. Для прямого фазового перехода начальное, достигнутое на момент окончания подготовительного процесса, состояние совпадает с отсчетным. В случае обратного фазового перехода начальное состояние определяется историей термомеханического деформирования:

$$\xi_0 \xrightarrow{A-M} \xi^*$$

Наиболее простыми способами подготовки элементов являются *Случаи*, рассмотренные в пункте 2.4.3. Причем в *Случае II*, при осуществлении прямого фазового перехода, необходимо принимать меры для предотвращения потери устойчивости. Таким образом, состояние материала на момент начала прямого фазового перехода является тривиальным, а для обратного фазового перехода определяется, в зависимости от рассматриваемых *Модели* и *Случая*, соотношениями (2.32), (2.38) или (2.40).

Более сложные процессы создания предварительных фазово-структурных деформаций, содержащие этапы реверсивного механического нагружения, рассматриваются в пункте 4.3.5.

4.1.2 Тривиальный процесс

Во время прямого и обратного фазовых переходов, происходящих под действием постоянных нагрузок, состояния материала¹ в каждый момент, согласно результатам пунктов 2.4.1 и 2.4.3, описываются соотношениями (2.32) и (2.47), соответственно. При прямом переходе и обратном переходе в *Случае II* точка, изображающая напряженное состояние, находится внутри, соответствующей используемой *Модели* структурного деформирования поверхности нагружения. Для обратного фазового перехода в *Случае I* аналогичная точка принадлежит границе соответствующей поверхности нагружения.

4.1.3 Возмущенный процесс

Потеря устойчивости элемента имеет место, если данному элементу можно поставить в соответствие нетривиальное поле перемещений, являющееся решением замкнутой системы уравнений, включающей кинематические ограничения, уравнения равновесия и определяющие соотношения. Приращения перемещений, обусловленные переходом к смежной форме равновесия, ввиду кинематической и термодинамической связанности приводят к изменению термомеханических параметров, набор которых зависит от рассматриваемого процесса и используемых постановки, *Модели* и, для обратного фазового перехода, *Случая*. Для согласованности вариации всех параметров, соответствующие возмущенному процессу, обозначаются символом δ .

Приращения деформаций

Вариации полных деформаций определяются следующим выражением:

$$\delta \varepsilon_{ij} = \delta \varepsilon_{ij}^{eT} + \delta \varepsilon_{ij}^{ph} + \delta \varepsilon_{ij}^{st} \quad (4.1)$$

Приращения упругих деформаций могут быть найдены при помощи варьирования уравнений (2.2). Поскольку вид получаемых выражений существенно упрощается для одномерной задачи, в данном разделе приводятся соотношения только для вариаций осевых компонент упругих деформаций²:

$$\delta \varepsilon^e = \frac{\delta \sigma}{E} + B_E \sigma \delta q, \quad B_E = \frac{E_A - E_M}{E_A E_M} \quad (4.2)$$

¹Состояние предполагается однородным по объему элемента.

²Двумерный случай, возникающий при анализе устойчивости пластины, рассматривается отдельно в пункте 4.4.

Приращения термических деформаций являются малыми по сравнению с вариациями остальных составляющих тензора деформаций, поэтому они предполагаются равными нулю при анализе возмущенного процесса.

Приращения фазово-структурных деформаций, обусловленные фазовыми механизмами, определяются при помощи уравнения (2.4):

$$\delta \varepsilon_{ij}^{ph} = (\varepsilon^0 \delta_{ij} + \omega_{ij}) \delta q \quad (4.3)$$

Согласно результатам, полученным в пунктах 2.4.1 и 2.4.3, во время тривиального процесса справедливы следующие выражения:

$$\omega_{ij} = \begin{cases} \frac{3}{2} \rho_D^f \frac{\sigma'_{ij}}{\sigma_i} \varphi_f(\sigma_i), & dq > 0 \\ \varepsilon_{ij}^* = \varepsilon^*(\xi, \sigma) \varepsilon_{ij}^0, & dq < 0 \end{cases} \quad (4.4)$$

Изменение фазово-структурных деформаций за счет структурных механизмов могут происходить только при обратном фазовом переходе для *Случая I*, поскольку только тогда выполняется конечное условие активного нагружения (2.10). При этом вариации структурных деформаций, в зависимости от используемой *Модели*, с учетом соотношений (2.33), (2.34) и (2.35), определяются следующими выражениями:

$$\delta \varepsilon_{ij}^{st} = \langle \delta \lambda_l \rangle s_{ij}, \quad \delta \lambda_l = q \Lambda_{mn}^l(s_{ij}) \delta \sigma'_{mn} \quad (4.5)$$

$$\Lambda_{mn}^1 = \frac{9}{4} \rho_D^m \frac{\varphi'_m(\sigma_i)}{\sigma_i} \frac{\sigma'_{mn}}{\sigma_i}, \quad \Lambda_{mn}^3 = \Lambda_{mn}^2 = \frac{\frac{3}{2} \rho_D^m \varphi'(s_i) \frac{s_{mn}}{s_i}}{\frac{2}{3} \frac{\varepsilon_{ij}^{phst'}}{\varepsilon_i^{phst}} s_{ij} + g \rho_D^m s_i \varphi'(s_i)}$$

Отсутствие слагаемых связанных с изменением объемной доли мартенситной фазы объясняется тем, что для всех *Моделей*, как было показано в пункте 2.4.3, множители стоящие перед вариациями параметра фазового состава тождественно равны нулю для всех состояний, реализуемых в тривиальном процессе.

Поскольку объемная доля мартенситной фазы всюду неотрицательна и равна нулю только в полностью аустенитном фазовом состоянии условие положительности множителя $\delta \lambda_l$ для процессов, в которых компоненты тензора приращений напряжений меняются пропорционально одному параметру $\delta \sigma$, принимает следующий вид:

$$\delta \lambda_1 = \rho_D^m \varphi'_m(\sigma_i) \frac{3}{2} \frac{\sigma'_{mn}}{\sigma_i} \frac{3}{2} \frac{\delta \sigma'_{mn}}{\sigma_i} > 0 \quad \Leftrightarrow \quad \text{sign} \left(\frac{\delta \sigma}{\sigma} \right) = \text{sign}(\sigma \delta \sigma) > 0 \quad (4.6)$$

$$\delta \lambda_3 = \delta \lambda_2 = \frac{\frac{3}{2} \rho_D^m \varphi'(s_i) \frac{s_{mn}}{s_i}}{\frac{2}{3} \frac{\varepsilon_{ij}^{phst'}}{\varepsilon_i^{phst}} s_{ij} + g \rho_D^m s_i \varphi'(s_i)} \delta \sigma'_{mn} > 0 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{\text{sign}(S \delta \sigma)}{\text{sign}(\varepsilon^{phst} S) + \frac{3}{2} g \rho_D^m \varphi'(|S|)} > 0 \quad (4.7)$$

Второе слагаемое в знаменателе уравнения (4.7) является неотрицательным, откуда следует, что если $\text{sign}(S \varepsilon^{phst}) \equiv 1$, активный процесс нагружения определяется условием $S \delta \sigma > 0$.

Приращение параметра фазового состава

Чтобы выразить приращения компонент тензора деформаций через приращения напряжений, необходимо найти вариацию параметра фазового состава, которая определяется в соответствии с используемой постановкой (пункт 3.2.4). Для несвязанной постановки вариация объемной доли мартенситной фазы предполагается тождественно равной нулю. В связанных постановках приращение параметра фазового состава может быть найдено при помощи варьирования соотношения (2.16):

$$\frac{\delta q}{\lambda(q)} + \delta T = \begin{cases} \delta M_s^\sigma, & \delta q > 0 \\ \delta A_s^\sigma, & \delta q < 0 \end{cases}, \quad \lambda = \begin{cases} \frac{\pi\sqrt{q(1-q)}}{M_s^0 - M_f^0}, & \delta q > 0 \\ \frac{\pi\sqrt{q(1-q)}}{A_f^0 - A_s^0}, & \delta q < 0 \end{cases} \quad (4.8)$$

Вариация температуры δT в несвязанной и однократно связанной постановках по определению предполагается равной нулю. В дважды связанной постановке приращение температуры может быть найдено из уравнения энергетического баланса (2.19). После замены операций дифференцирования по времени на варьирование и принятия гипотезы об однородности распределения поля температур по объему элемента³ получим:

$$C_\sigma \delta T = -\alpha_q T \delta \sigma_{kk} + [\Delta U + \omega_{ij} \sigma'_{ij} + Z(\sigma_{ij}) + \varepsilon^0 \sigma_{kk}] \delta q + s_{ij} \delta \varepsilon_{ij}^{st} \quad (4.9)$$

Температура в тривиальном процессе однозначным образом определяется из соотношений (2.16), (2.17) и (2.18):

$$T = \begin{cases} M_s^0 + \frac{\omega_{ij}^f \sigma'_{ij} + Z(\sigma_{ij}) + \varepsilon^0 \sigma_{kk}}{\Delta S} - \frac{M_s^0 - M_f^0}{\pi} \arccos(1 - 2q), & dq > 0 \\ A_s^0 + \frac{\omega_{ij}^r \sigma'_{ij} + Z(\sigma_{ij}) + \varepsilon^0 \sigma_{kk}}{\Delta S} + (A_f^0 - A_s^0) \left[1 - \frac{1}{\pi} \arccos(1 - 2q) \right], & dq < 0 \end{cases} \quad (4.10)$$

Приращение температуры начала прямого фазового перехода определяется из соотношения (2.17):

$$\Delta S \delta M_s^\sigma = \delta \left[\omega_{ij}^f \sigma'_{ij} + Z(\sigma_{ij}) + \varepsilon^0 \sigma_{kk} \right] = \delta \omega_{ij}^f \sigma'_{ij} + \omega_{ij}^f \delta \sigma'_{ij} + D \sigma_i \delta \sigma_i + (\varepsilon^0 + \sigma_{mm}) \delta \sigma_{kk}$$

Поскольку для тривиального процесса деформирования справедливы равенства (2.29) и (4.4):

$$\delta \omega_{ij}^f = \frac{3}{2} \rho_D^f (1 - qf(q)) \frac{\varphi_f(\sigma_i)}{\sigma_i} \delta \sigma'_{ij} + \frac{3}{2} \rho_D^f \frac{\sigma'_{ij}}{\sigma_i} (1 - qf(q)) \left[\varphi_f'(\sigma_i) - \frac{\varphi_f(\sigma_i)}{\sigma_i} \right] \delta \sigma_i$$

Учитывая, что всегда справедливо тождество $\delta \sigma_i = \frac{3}{2} \frac{\sigma'_{ij}}{\sigma_i} \delta \sigma'_{ij}$, получим:

$$\delta \omega_{ij}^f \sigma'_{ij} = \rho_D^f [1 - qf(q)] \sigma_i \varphi_f(\sigma_i) \delta \sigma_i, \quad \omega_{ij}^f \delta \sigma'_{ij} = \rho_D^f \varphi_f(\sigma_i) \delta \sigma_i$$

³ $\Delta T = 0$.

Тогда вариация температуры начала прямого фазового перехода определяется выражением:

$$\Delta S \delta M_s^\sigma = A(q, \sigma_i) \delta \sigma_i + (\varepsilon^0 + C \sigma_{mm}) \delta \sigma_{kk}, \quad A = \rho_D^f \left\{ \varphi_f(\sigma_i) + [1 - qf(q)] \sigma_i \varphi'_f(\sigma_i) \right\} + D \sigma_i \quad (4.11)$$

Аналогичным образом приращение температуры начала обратного фазового перехода для процесса одноосного нагружения можно найти, проварьировав (2.18):

$$\Delta S \delta A_s^\sigma = \frac{1}{q} \sigma'_{ij} \delta \varepsilon_{ij}^{st} + \varepsilon_{ij}^* \delta \sigma'_{ij} + [\varepsilon^0 + C \sigma_{mm}] \delta \sigma_{kk}, \quad (4.12)$$

или, в случае пропорционального нагружения,

$$\Delta S \delta A_s^\sigma = \frac{\sigma}{q} \delta \varepsilon^{st} + [\varepsilon^0 + \varepsilon^*(\xi, \sigma) + 2B_1 \sigma] \delta \sigma, \quad 2B_1 = C + D \quad (4.13)$$

Подставляя (4.5), (4.11) и (4.12) в (4.8) получим:

$$\begin{aligned} \Theta \delta q &= \Upsilon_p \delta \sigma_{kk} + \Upsilon_{ij} \delta \sigma'_{ij} \\ \Theta &= 1 + \frac{\lambda(q)}{C_\sigma} \left[\Delta U + \omega_{ij} \sigma'_{ij} + \frac{D}{2} \sigma_i^2 + \frac{C}{2} \sigma_{kk}^2 + \varepsilon^0 \sigma_{kk} \right] \\ \frac{\Delta S}{\lambda(q)} \Upsilon_p &= \frac{\Delta S}{C_\sigma} \alpha_q T(q, \sigma_{ij}) + \varepsilon^0 + C \sigma_{mm} \end{aligned} \quad (4.14)$$

$$\frac{\Delta S}{\lambda(q)} \Upsilon_{ij} = \begin{cases} \frac{3}{2} A(q, \sigma_i) \frac{\sigma'_{ij}}{\sigma_i}, & dq > 0 \\ \varepsilon_{ij}^*(\xi, \sigma_{ij}) + [s_i = s^*][\delta \lambda_l > 0] \left(\sigma'_{mn} - \frac{\Delta S}{C_\sigma} q s_{mn} \right) s_{mn} \Lambda_{ij}^l(s_{ij}), & dq < 0 \end{cases}$$

Для одноосного нагружения справедливы тождества $\delta \sigma_i \equiv \delta |\sigma| \equiv \text{sign}(\sigma) \delta \sigma$ и (4.14) можно переписать следующим образом:

$$\begin{aligned} \Theta \delta q &= \Upsilon \delta \sigma \\ \Theta &= 1 + \frac{\lambda(q)}{C_\sigma} \left\{ \Delta U + [\omega(\xi, \sigma) + \varepsilon^0] \sigma + B_1 \sigma^2 \right\}, \quad \omega = \begin{cases} \text{sign}(\sigma) \rho_D^f \varphi_f(|\sigma|), & dq > 0 \\ \varepsilon^*(\xi, \sigma), & dq < 0 \end{cases} \\ \frac{\Delta S}{\lambda(q)} \Upsilon &= \frac{\Delta S}{C_\sigma} \alpha_q T(q, \sigma) + \varepsilon^0 + C \sigma + \\ &+ \begin{cases} \text{sign}(\sigma) A(q, |\sigma|), & dq > 0 \\ \varepsilon^*(\xi, \sigma) + [|\sigma| = s^*][\delta \lambda_l > 0] \left[\sigma - \frac{\Delta S}{C_\sigma} q S(\sigma) \right] \Lambda_l(\sigma), & dq < 0 \end{cases} \end{aligned} \quad (4.15)$$

$$\Lambda_1 = \rho_D^m \varphi'_m(|\sigma|), \quad \Lambda_3 = \Lambda_2 = \Lambda[S(\sigma)]$$

Равноатомный никелид титана является СПФ с широким гистерезисом, для которого всегда справедливо неравенство ($M_s < A_s$), поэтому изменение объемной доли мартенситной фазы, вызванное переходом к смежной форме равновесия, либо имеет тот же знак, что и приращение

параметра фазового состава в тривиальном процессе, либо равно нулю. Тогда, сохраняя прежние обозначения, доопределим вариацию параметра фазового состава следующим образом:

$$\delta q = [dq\delta q > 0]\delta q$$

, где δq в правой части равенства, определяется согласно (4.14).

Случай прямого фазового перехода, во время которого вариации компонент тензора напряжений могут меняться непропорциональным образом, рассматривается в пункте 4.4.4.

Приращения напряжений

При одноосном нагружении, подстановка (4.2), (4.3) и (4.5) в (4.1), позволяет получить следующее выражение для приращений полных деформаций:

$$\delta \varepsilon = \delta \varepsilon + \delta \varepsilon^{ph} + \delta \varepsilon^{st} = \frac{\delta \sigma}{E} + B_E \sigma \delta q + [\varepsilon^0 + \omega(\xi, \sigma)]\delta q + [|S(\sigma)| = s^*][\delta \lambda_l > 0]q \Lambda_l(\sigma) \delta \sigma$$

Данное уравнение с учетом (4.15) может быть разрешено относительно вариаций напряжений:

$$\delta \sigma = \frac{\delta \varepsilon}{\Psi}$$

$$\Psi = \frac{1}{E(q)} + [dq\delta q > 0] [\omega(\xi, \sigma) + B_E \sigma + \varepsilon^0] \frac{\Upsilon(\xi, \sigma, \text{sign}(\delta \sigma))}{\Theta(\xi, \sigma)} + [|S(\sigma)| = s^*][S\delta \sigma > 0]q \Lambda_l(\sigma) \quad (4.16)$$

Случай двухосного нагружения рассматривается отдельно в пункте 4.4.4.

4.2 Стойка Шенли

Данный раздел посвящен исследованию устойчивости стойки Шенли на стержнях из СПФ, при прямых и обратных фазовых переходах, происходящих под действием постоянных напряжений.

4.2.1 Геометрия и граничные условия

Стойка Шенли является идеализированной моделью деформируемого стержня, подверженного действию продольной нагрузки, [71; 97; 146]. Данная конструкция представляет из себя недеформируемую рамку прямоугольной формы ($b_c \times L_c$), шарнирно опирающуюся на два одинаковых линейно деформируемых стержня из СПФ (рис. 4.1).

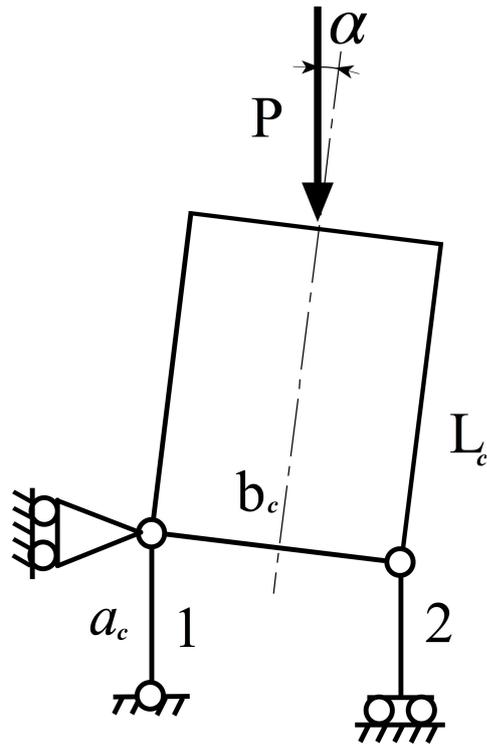


Рисунок 4.1 — Стойка Шенли

В недеформированном состоянии каждый из стержней стойки имеет длину a_c и площадь поперечного сечения A_c .

К середине верхней стороны рамки стойки приложена вертикальная сжимающая нагрузка $P < 0$. Для описания искривленной конфигурации стойки наряду с осевыми деформациями стержней ε_1 и ε_2 будем рассматривать угол отклонения оси симметрии рамки от вертикали α .

4.2.2 Тривиальный процесс

Вплоть до момента потери устойчивости направление нагрузки P совпадает с осью симметрии рамки, а ее величина меняется таким образом, чтобы осевые напряжения в опорных стержнях равнялись $\sigma = \frac{P}{2A_c}$.

Согласно результатам, полученным в пункте 2.4.1, состояние стержней во время прямого фазового перехода определяется соотношением (2.32), которое для одноосного нагружения принимает следующий вид:

$$\xi = \left\{ q, \text{sign}(\sigma) \rho_D^f q \varphi_f(|\sigma|), \varphi_m^{-1} \left[\frac{\rho_D^f}{\rho_m^m} \varphi_f(|\sigma|) \right], 0 \right\} \quad (4.17)$$

Эволюция состояния стержней во время обратного фазового перехода описывается выражением (2.47).

4.2.3 Возмущенный процесс

После перехода к смежной форме равновесия значения параметров состояния в каждом из опорных стержней отличаются от тех, которые они принимали в тривиальном процессе. Далее для обозначения принадлежности соответствующих величин к одному из стержней используются индексы, соответствующие номеру стержня стойки. После перехода к смежной форме равновесия угол отклонения стойки $\delta\alpha \approx \sin(\delta\alpha) \approx \text{tg}(\delta\alpha) > 0$ будет связан с линейными деформациями стержней следующим соотношением:

$$c\delta\alpha = \delta\varepsilon_1 - \delta\varepsilon_2, \quad c = \frac{b_c}{a_c} \quad (4.18)$$

Уравнения равновесия сил и моментов для смежной формы равновесия стойки имеют следующий вид [71]:

$$\begin{cases} \delta\sigma_1 + \delta\sigma_2 = 2\delta\sigma \\ 4L_b\sigma\delta\alpha + \delta\sigma_1 - \delta\sigma_2 = 0, \quad L_b = \frac{L_c}{b_c} \end{cases}$$

или

$$\begin{cases} \delta\sigma_1 = -2L_b\sigma\delta\alpha + \delta\sigma \\ \delta\sigma_2 = 2L_b\sigma\delta\alpha + \delta\sigma \end{cases} \quad (4.19)$$

Подстановка (4.19), с учетом (4.16), в (4.18) дает:

$$L_b = \frac{(\Psi_1 - \Psi_2)\tau_c - c}{2\sigma(\Psi_1 + \Psi_2)}, \quad \tau_c = \frac{\delta\sigma}{\delta\alpha}, \quad \Psi_\beta = \Psi_\beta[\xi, \sigma, \text{sign}(dq\delta q_\beta), \text{sign}(\delta\sigma_\beta)] \quad (4.20)$$

Если рассматривается несвязанная постановка задачи устойчивости $\Psi_1 = \Psi_2 = 1/E(q)$, то безразмерная критическая длина стойки L_b зависит от объемной доли мартенситной фазы и действующих напряжений следующим образом:

$$L_b^E = \frac{L_c^E}{b} = \frac{cE(q)}{4\sigma} \quad (4.21)$$

Поскольку жесткость опорных стержней стойки является монотонно убывающей функцией объемной доли мартенситной фазы, в формуле (4.21) следует положить $E \equiv E_M$.

В концепции ВН L_b линейным образом зависит от конечного параметра τ_c . Рассмотрим все значения, которые может принимать $\bar{\tau}_c = \tau_c/(2L_b\sigma)$:

- $\bar{\tau}_c < -1$: $\delta\sigma_1 > 0$, $\delta\sigma_2 > 0$

$$\Psi_2 = \Psi_1 = \frac{1}{E(q)} + [\Upsilon dq > 0] \left[\omega(\xi, \sigma) + B_E\sigma + \varepsilon^0 \right] \frac{\Upsilon(\xi, \sigma, 1)}{\Theta(\xi, \sigma)} \quad (4.22)$$

- $\bar{\tau}_c = -1$: $\delta\sigma_1 > 0$, $\delta\sigma_2 = 0$

$$\begin{aligned} \Psi_1 &= \frac{1}{E(q)} + [\Upsilon dq > 0] \left[\omega(\xi, \sigma) + B_E\sigma + \varepsilon^0 \right] \frac{\Upsilon(\xi, \sigma, 1)}{\Theta(\xi, \sigma)} \\ \Psi_2 &= \frac{1}{E(q)} \end{aligned}$$

- $-1 < \bar{\tau}_c < 1$: $\delta\sigma_1 > 0$, $\delta\sigma_2 < 0$

$$\begin{aligned}\Psi_1 &= \frac{1}{E(q)} + [\Upsilon dq > 0] \left[\omega(\xi, \sigma) + B_E \sigma + \varepsilon^0 \right] \frac{\Upsilon(\xi, \sigma, 1)}{\Theta(\xi, \sigma)} \\ \Psi_2 &= \frac{1}{E(q)} + [\Upsilon dq < 0] \left[\omega(\xi, \sigma) + B_E \sigma + \varepsilon^0 \right] \frac{\Upsilon(\xi, \sigma, -1)}{\Theta(\xi, \sigma)} + [|S(\sigma)| = s^*] q \Lambda_l(\sigma)\end{aligned}\quad (4.23)$$

Ввиду линейности связи между критической длиной и параметром τ_c можно заключить, что, с учетом независимости функций Ψ_β в данном интервале от τ_c , наименьшее значение критической длины будет достигаться в точках, максимально приближенных к границам рассматриваемого интервала, т.е. $\lim_{\bar{\tau}_c \rightarrow -1+0} \bar{\tau}_c$ и $\lim_{\bar{\tau}_c \rightarrow 1-0} \bar{\tau}_c$.

- $\bar{\tau}_c = 1$: $\delta\sigma_1 = 0$, $\delta\sigma_2 < 0$

$$\begin{aligned}\Psi_1 &= \frac{1}{E(q)} \\ \Psi_2 &= \frac{1}{E(q)} + [\Upsilon dq < 0] \left[\omega(\xi, \sigma) + B_E \sigma + \varepsilon^0 \right] \frac{\Upsilon(\xi, \sigma, -1)}{\Theta(\xi, \sigma)} + [|S(\sigma)| = s^*] q \Lambda_l(\sigma)\end{aligned}$$

- $\bar{\tau}_c > 1$: $\delta\sigma_1 < 0$, $\delta\sigma_2 < 0$

$$\Psi_2 = \Psi_1 = \frac{1}{E(q)} + [\Upsilon dq < 0] \left[\omega(\xi, \sigma) + B_E \sigma + \varepsilon^0 \right] \frac{\Upsilon(\xi, \sigma, -1)}{\Theta(\xi, \sigma)} + [|S(\sigma)| = s^*] q \Lambda_l(\sigma)\quad (4.24)$$

В концепции ВН из всех значений длин L_b , полученных для различных значений параметра τ_c , следует выбирать минимальное.

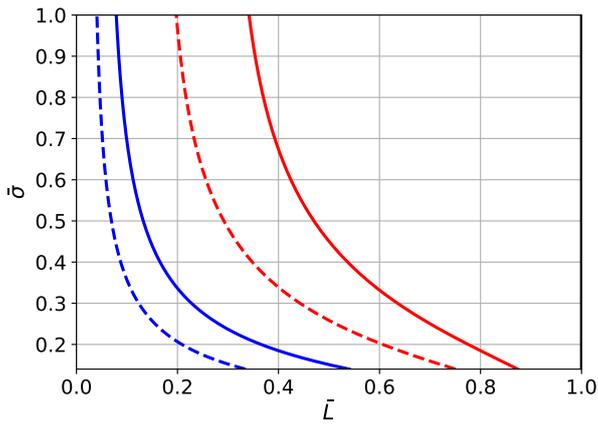
В концепции ФН $\tau_c = \bar{\tau}_c = \delta\sigma \equiv 0$ и, поскольку сжимающие напряжения считаются отрицательными, в первом и втором опорных стержнях при переходе к смежной форме равновесия, имеют место дополнительная разгрузка и догрузка, соответственно. Функции Ψ_β в таком случае определяются соотношением (4.23).

4.2.4 Результаты

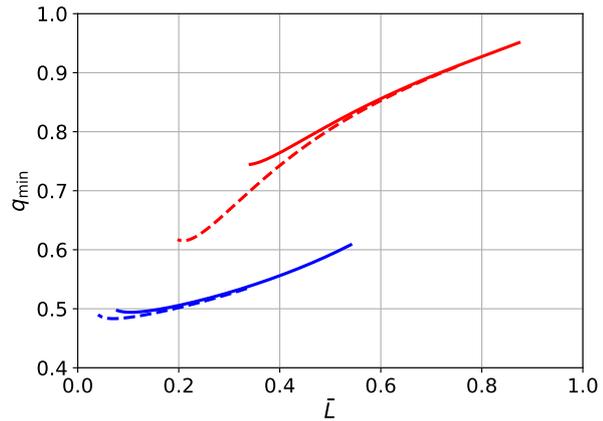
Для удобства дальнейшего анализа введем в рассмотрение безразмерные напряжения: $\bar{\sigma} = -\sigma/\sigma_Y$, поскольку предполагается, что пластическое деформирование не имеет места $|\bar{\sigma}| < 1$. При минимизации L_b относительно параметра фазового состава применяются методы непрерывной оптимизации, обсуждаемые в приложении В.1.1.

Прямой переход

На рис. 4.2 представлены зависимости критического напряжения и параметра фазового состава от безразмерной фиктивной длины стойки $\bar{L} = L_c/L_c^E$. Даже при умеренных значениях



а) Зависимость критических напряжений от безразмерной длины.



б) Зависимость критических значений параметра фазового состава от безразмерной длины.

Рисунок 4.2 — Красные и Синие линии – дважды и однократно связанные постановки, непрерывные и пунктирные линии – концепции ФН и ВН.

напряжений, составляющих порядка одной пятой от величины дислокационного предела текучести никелида титана, фиктивная критическая длина, полученная при помощи нелинейного анализа устойчивости, может быть ниже критической длины, определяемой упругим решением, на 40% и 80% в рамках дважды и однократно связанной постановок, соответственно. В связанных постановках независимо от рассматриваемой концепции увеличение гибкости стойки, характеризуемой величиной L_b^4 , приводит к снижению уровня напряжений, при котором возможно существование смежной с исходной формы равновесия. Несвязанной постановке соответствуют наибольшие значения критических нагрузок. Критические напряжения, получаемые в дважды связанной постановке или концепции ФН превосходят аналогичные значения, найденные при использовании однократно связанной постановки или концепции ВН, соответственно. Так как для стойки фиксированной длины существуют напряжения, при которых согласно дважды связанной постановке она не теряет устойчивость, а согласно однократно связанной теряет, можно сделать вывод о том, что процессы выделения латентного тепла и диссипации энергии препятствуют появлению смежной формы равновесия.

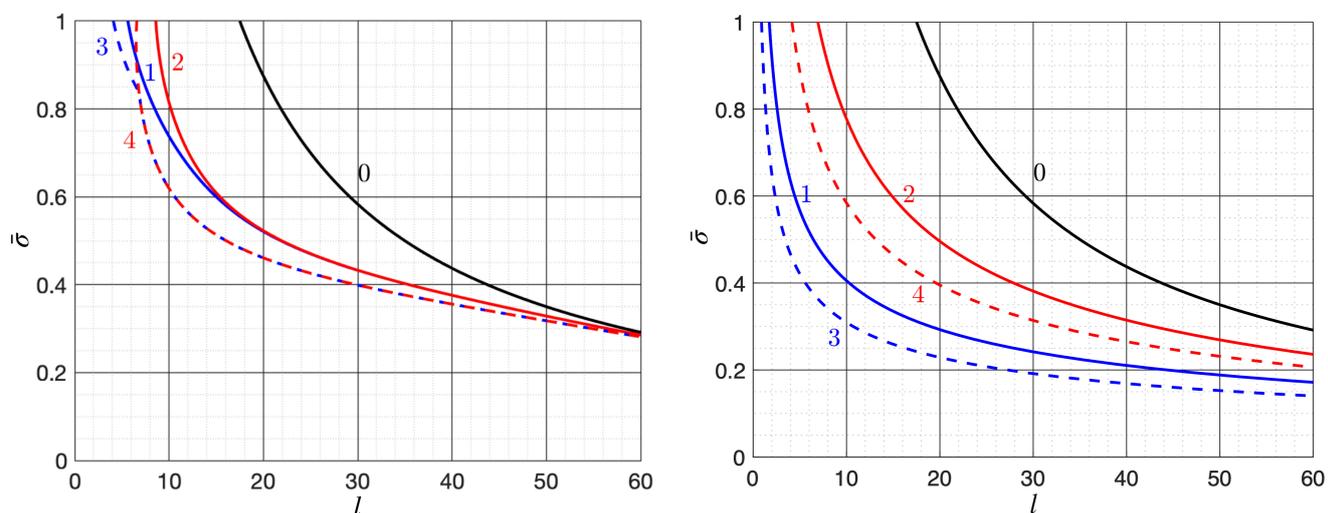
Из рис. 4.2 б) следует, что в однократно связанной постановке появление смежной формы равновесия происходит при более низких значениях параметра фазового состава или, согласно (2.32), фазово-структурных деформаций, чем в дважды связанной постановке. При этом критическая величина параметра фазового состава увеличивается с ростом фиктивной длины стойки.

Результаты, представленные в данном разделе, опубликованы в статье [48].

⁴Поскольку функции L_c^E и \bar{L} монотонно убывают с ростом действующих напряжений, а последняя из них не зависит от b , гибкость стойки также может быть описана при помощи величины \bar{L}

Обратный переход

Рассмотрим случай, когда для описания нелинейного деформирования, ассоциированного с структурными механизмами, используется *Модель 3*. На рис. 4.3 представлены зависимости критических напряжений от фиктивной длины стойки $l = a_c L_c / b_c^2$ для *Случаев I и II*.



а) *Случай I* – начальные деформации получены при помощи нагружения в режиме мартенситной неупругости.

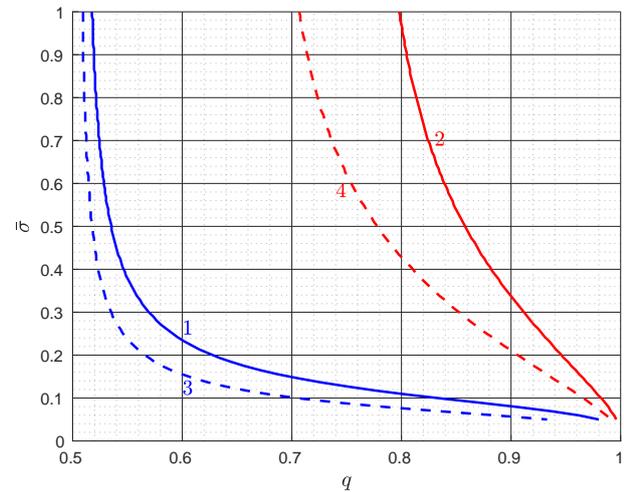
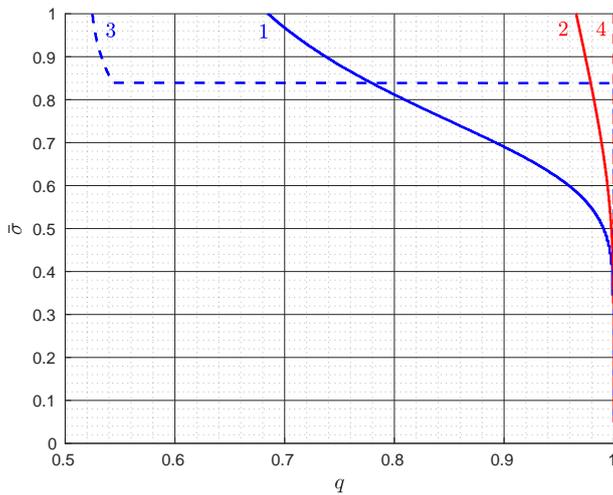
б) *Случай II* – начальные деформации накоплены в результате прямого превращения под действием постоянных напряжений.

Рисунок 4.3 — Зависимость безразмерных критических напряжений от фиктивной длины стойки. Черные линии – несвязанная постановка; Красные и Синие линии – дважды и однократно связанные постановки, непрерывные и пунктирные линии – концепции ФН и ВН.

Фиктивная критическая длина стойки зависит от способа подготовки ее опорных стержней. Различия между величинами фазово-структурных деформаций, полученных в результате деформирования в режиме мартенситной неупругости и прямого перехода, хорошо видны при сопоставлении рис. 2.1 и рис. 2.2. При одинаковых величинах конечных напряжений фазово-структурные деформации имеют существенно меньшие значения, если они были получены при помощи мартенситной неупругости, а не в результате прямого фазового перехода. Дополнительное фазовое деформирование, которое, согласно (4.3) и (4.4), явным образом зависит от величин фазово-структурных деформаций, достигнутых в тривиальном процессе, оказывает существенно большее влияние на процесс потери устойчивости в *Случае II*, чем в *Случае I*.

Согласно рис. 4.4 а) и б), дополнительное фазовое деформирование в *Случае I* не имеет места, пока деформации, накопленные в результате мартенситной неупругости, практически неотличимы от нулевых⁵, тогда как в *Случае II* оно имеет место при существенно меньших значениях напряжений. Таким образом, потеря устойчивости в *Случае I*, происходящая при относительно небольших значениях напряжений, аналогична появлению смежной формы равновесия, вызванному деформированием в режиме мартенситной неупругости. Разрыв касательной к кривой, изображающей критические состояния в *Случае I*, для однократно связанной постановки и

⁵Что соответствует $\bar{\sigma} < 0.4 \sim \sigma < 160$ [МПа].



а) *Случай I* – начальные деформации получены при помощи нагружения в режиме мартенситной неупругости.

б) *Случай II* – начальные деформации накоплены в результате прямого превращения под действием постоянных напряжений.

Рисунок 4.4 — Зависимость безразмерных критических напряжений от фиктивной длины стойки. Красные и Синие линии – дважды и однократно связанные постановки, непрерывные и пунктирные линии – концепции ФН и ВН.

концепции ВН (линия 3 на рис. 4.3 а)), наблюдаемый при монотонном увеличении действующих в стержнях стойки напряжений, обусловлен изменением основного механизма дополнительного деформирования. Действительно, согласно рис. 4.4 а), при умеренных напряжениях $\bar{\sigma} < 0.84$, потеря устойчивости происходит, когда стержни стойки находятся в полностью мартенситном фазовом состоянии, за счет дополнительного упругого и структурного деформирования, а при высоких напряжениях $\bar{\sigma} > 0.84$ при $q < 0.6$, т.е. из-за дополнительного упругого и фазового деформирования, которое согласно (4.22) не сопровождается дополнительным структурным деформированием.

Максимальные значения критических параметров соответствуют решению задач устойчивости в несвязанной постановке. Решение, полученное для однократно связанной постановки в рамках концепции ВН, соответствует наименьшим значениям критических длин среди всех рассматриваемых постановок и концепций. Дважды связанной постановке, независимо от используемой концепции, отвечают более высокие значения критических нагрузок, чем однократно связанной. Различия между постановками и *Случаями* тем выше, чем меньше гибкость стойки.

Основные результаты, представленные в этом разделе, опубликованы в работах [23; 27; 46; 47].

4.3 Стержень

Данный раздел посвящен исследованию устойчивости стержня из СПФ во время прямых и обратных фазовых переходов, происходящих под действием постоянных напряжений. В слу-

чае обратного фазового перехода проводится анализ зависимости величины критической длины стержня от способа его подготовки.

4.3.1 Геометрия и граничные условия

Пусть имеется прямолинейный стержень длины l постоянного поперечного сечения, которое обладает характерным линейным размером $h \ll l$ и двумя ортогональными осями симметрии. Введем ортонормированную положительно ориентированную систему координат $Ox_1x_2x_3$, начало которой, точка O , расположено в центре⁶ нижнего торцевого сечения стержня. Ось Ox_3 – направлена вертикально вверх, вдоль линии пересечения плоскостей симметрии стержня, совпадающей с осью прямолинейного стержня; оси Ox_1 и Ox_2 – принадлежат плоскостям симметрии.

Форма поперечного сечения задается четной непрерывной функцией, равной его ширине:

$$b = b(x_2) \quad (4.25)$$

Далее будем считать, что проведено обезразмеривание геометрических параметров стержня по отношению к высоте поперечного сечения: $x_2 \in [-1, 1]$, $b_0 = b(0) \geq 1$. В случае стержней прямоугольного и эллиптического поперечных сечений функция b определяется соотношениями $b \equiv b_0$ и $b = b_0\sqrt{1 - x_2^2}$. Площадь поперечного сечения стержня A_r и осевой момент инерции J_{x_1} , вычисляемый относительно оси x_1 , определяются соотношениями (4.26) и (4.27), соответственно.

$$A_r = 2 \int_0^1 b(y) dy \quad (4.26)$$

$$J_{x_1} = 2 \int_0^1 y^2 b(y) dy \quad (4.27)$$

Стержень шарнирно закреплен на нижнем конце и может свободно двигаться вдоль вертикальной оси Ox_3 на верхнем конце рис. 4.5. Прогиб $v = v_2(x_3)$ и изгибающий момент одновременно равны нулю в местах закрепления:

$$v(x_3) = v''(x_3) = 0, \quad x_3 = 0, l. \quad (4.28)$$

$(\cdot)' = d(\cdot)/dx_3$.

Перед началом прямого или обратного фазового перехода в верхнем торцевом сечении стержня действует осевая сила $P > 0$. В тривиальном процессе сила P сохраняет свое первоначальное направление, а ее величина меняется таким образом, чтобы значение осевого напряжения, действующего в поперечном сечении стержня, сохраняло фиксированное значение $\sigma = P/A_r$.

⁶Отождествляем с точкой пересечения осей симметрии сечения.

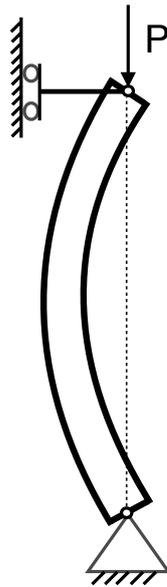


Рисунок 4.5 — Смежная форма равновесия шарнирно опертого стержня

4.3.2 Гипотеза плоских сечений

Для анализа деформаций, возникающих в стержнях при изгибе, применяют различные наборы кинематических гипотез [82; 97; 115].

Из анализа теории размерностей [73] следует, что при изгибе изотропной призматической балки замкнутого профиля, поперечное сечение которой является односвязной областью, а длина много больше характерного размера поперечного сечения ($L \gg b$), нормальные напряжения σ_{33} существенно превосходят значения всех остальных компонент. Для таких балок перемещения, вычисленные в соответствии с гипотезой Бернулли-Эйлера, хорошо соотносятся с результатами, полученным при использовании более точных теорий. Гипотеза плоских сечений может быть сформулирована следующим образом: поперечные сечения, ортогональные опорной линии стержня, плоские до деформирования, остаются плоскими и ортогональными этой линии после деформирования, а поперечными нормальными напряжениями можно пренебречь. Тогда приращения осевых деформаций имеют следующее представление:

$$\delta \varepsilon = \delta \varepsilon_0 - x_2 \delta \kappa \quad (4.29)$$

$\delta \varepsilon_0 = \delta \varepsilon_0(x_3)$ и $\delta \kappa = \delta \kappa_{x_2}(x_3)$ – вариации осевой деформации и кривизны опорной линии стержня.

Поскольку задача решается в линеаризованной постановке квадратом тангенса угла наклона касательной к опорной линии можно пренебречь. Тогда при вычислении приращения кривизны допустимо использовать следующее выражение:

$$\delta \kappa = \delta v'' \quad (4.30)$$

4.3.3 Уравнения равновесия

После выпучивания стержня уравнение равновесия сил в проекции на вертикальную ось Ox_3 , принимает следующий вид:

$$\int_{-1}^1 \delta \sigma b(y) dy = \delta P \quad (4.31)$$

В концепции ФН и ВН $\delta P \equiv 0$ и $\delta P \neq 0$, соответственно.

Уравнение равновесия изгибающего момента, вычисляемого относительно оси Ox_1 , которой соответствует наименьшее значение момента инерции⁷ сводится к:

$$\int_{-1}^1 \delta \sigma y b(y) dy = P \delta v \quad (4.32)$$

4.3.4 Эйлера критическая длина

Впервые анализ устойчивости упругого стержня, находящегося под действием продольной силы, был проведен Эйлером в 1744. В его основу легло точное решение дифференциального уравнения изгиба балки, связывающее величину действующей силы с кривой прогиба стержня, названную в последствии эластикой Эйлера. Наименьшая не равная нулю нагрузка $P = P_1$, при которой стержень теряет устойчивость, называется Эйлеровой критической силой. При анализе устойчивости бывает удобнее искать не критическое значение нагрузки, при которой стержень, обладающий фиксированной длиной, переходит к смежной форме равновесия, а критическую длину, при которой стержень, подверженный действию постоянной нагрузки, может находиться более чем в одном состоянии равновесия. Схожий результат может быть получен с помощью линеаризованной, относительно малых возмущений прогиба, постановки. Отличие заключается в том, что искривленные формы равновесия и соответствующие им критические нагрузки, найденные в данной постановке, образуют дискретное подмножество точных решений. Для произвольных условий закрепления линеаризованное уравнение равновесия изгибающего момента для смежных форм равновесия может быть записано следующим образом [97]:

$$(E J_{x_1} \delta v'')'' + (P \delta v')' = 0$$

или, с учетом однородности механических в объеме призматического стержня,

$$\delta v^{(4)} + k^2 \delta v'' = 0, \quad k = \sqrt{\frac{P}{E J_{x_1}}} \quad (4.33)$$

⁷Как будет продемонстрировано в пункте 4.3.4, критическая сила, полученная в несвязанной постановке, пропорциональна моменту инерции поперечного сечения и, следовательно, выпучивание будет происходить в направлении перпендикулярном оси, относительно которой момент инерции будет принимать минимальное значение.

Общее решение данного уравнения имеет следующий вид:

$$\delta v = \delta C_1 \sin(kx_3) + \delta C_2 \cos(kx_3) + \delta C_3 x_3 + \delta C_4$$

δC_j – бесконечно малые постоянные.

Чтобы найденное решение удовлетворяло граничным условиям (4.28) постоянные δC_2 , δC_3 и δC_4 должны равняться нулю и, при отличном от нуля δC_1 :

$$kl = \pi n, n \in \mathbb{N}$$

Эйлеровой критической длине соответствует случай $n = 1$:

$$l_r^E = \frac{\pi}{k} = \pi r \sqrt{\frac{E}{\sigma}} \quad (4.34)$$

$r = \sqrt{J_{x_1}/A_r}$ – радиус инерции поперечного сечения стержня.

Для стержней из СПФ значения модуля упругости и, соответственно, Эйлеровой критической длины, монотонно убывают с ростом объемной доли мартенситной фазы. Таким образом в несвязанной постановке критическая длина определяется формулой (4.34), в которой следует положить $E = E_M$.

4.3.5 Случаи

В случае обратного фазового перехода при использовании связанных постановок задачи устойчивости согласно результатам, полученным в пунктах 4.1.3 и 4.2.4, величины приращений параметров состояния и, соответственно, критических параметров зависят от истории термомеханического деформирования элемента. К способам подготовки элементов, соответствующим *Случаям* I и II, добавим еще два (рис. 4.6):

- III. Растяжение в режиме мартенситной неупругости, за которым следует разгрузка и последующее нагружение сжимающими напряжениями.
- IV. Нагружение, повторяющее *Случай* III, за которым следует увеличение действующих напряжений.

Из результатов экспериментов на реверсивное [125] и циклическое [128] нагружение образцов из никелид титана, находящихся в полностью мартенситном фазовом состоянии, следует, что во время структурного деформирования данный СПФ демонстрирует поведение, аналогичное эффекту Баушингера, наблюдаемому при пластическом деформировании металлов. Поэтому, при рассмотрении *Случаев* III и IV, следует использовать *Модели* с комбинированным упрочнением. Реверсивное монотонное нагружение (рис. 4.6) можно представить в виде последовательности состоящей из трех этапов:

- Упругого сжатия (*Случай* IV) – синяя вертикальная линия.
- Структурного деформирования, во время которого происходит упрочнение по трансляционному механизму (*Случай* III) – зеленая линия.

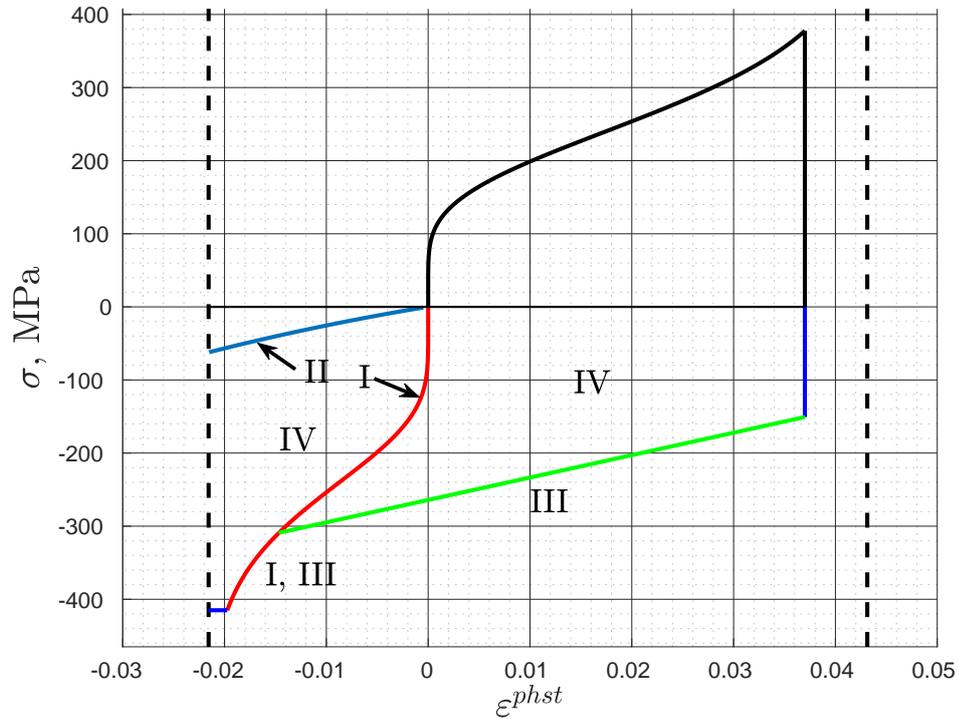


Рисунок 4.6 — Способы подготовки стержня.

- Структурного деформирования, во время которого имеет место комбинированное упрочнение (*Случай I*) – красная линия.

Важно отметить, что в *Случаях I* и *III* точки, изображающие состояние в пространстве напряжений, принадлежат поверхности активного нагружения, соответствующей рассматриваемому подготовительному процессу, а в *Случаях II* и *IV* не принадлежат.

4.3.6 Анализ устойчивости в термомеханически связанных постановках

При переходе стержня к смежной форме равновесия в его поперечном сечении возникают зоны дополнительной догрузки и разгрузки. Положение границы, разделяющей данные зоны, зависит от рассматриваемой постановки задачи устойчивости и, в концепции ВН, величины вариации внешней нагрузки. Рассмотрим сначала концепцию ВН, в которой области дополнительной разгрузки $\delta\sigma_1 > 0$ и догрузки $\delta\sigma_2 < 0$, разделены некоторой линией $x_2 = y_0 \in [-1, 1]$.

Из гипотезы плоских сечений (4.29) и выражений для приращений полных напряжений (4.16), с учетом соотношений (4.23), следует⁸:

$$\delta\sigma = \begin{cases} \frac{x_2 - y_0}{\Psi_1} |\delta\kappa|, & x_2 \geq y_0 \\ \frac{x_2 - y_0}{\Psi_2} |\delta\kappa|, & x_2 < y_0 \end{cases} \quad (4.35)$$

⁸Предполагается, что стержень выпучивается в направлении оси Ox_2 : $\delta\kappa = \delta v'' < 0$.

$y_0 = \frac{\delta \varepsilon_0}{\delta \kappa}$ – координата поперечного сечения стержня, разделяющая зоны дополнительной догрузки и разгрузки.

В концепции ВН уравнение равновесия сил (4.31), с учетом (4.35):

$$f^P(\tau_r, y_0) = \int_{-1}^{y_0} \frac{y - y_0}{\Psi_2} b(y) dy + \int_{y_0}^1 \frac{y - y_0}{\Psi_1} b(y) dy - \tau_r = 0, \quad \tau_r = \frac{\delta P}{|\delta \kappa|} \quad (4.36)$$

Предположим, что отношение приращения нагрузки и вариации кривизны опорной линии стержня τ_r принимает конечные значения.

Соотношение (4.36) можно рассматривать, как определение функции $y_0 = y_0(\tau_r)$. По теореме о неявной функции [30]:

$$\frac{dy_0}{d\tau_r} = -\frac{f_{,\tau_r}^P[\tau_r, y_0(\tau_r)]}{f_{,y_0}^P[\tau_r, y_0(\tau_r)]} = -\frac{\Psi_1}{A_r} \left[1 - \left(1 - \frac{\Psi_1}{\Psi_2} \right) \frac{1}{A_r} \int_{y_0}^1 b(y) dy \right]^{-1} \quad (4.37)$$

Если $\Psi_\beta > 0$ или $\Psi_\beta < 0$, то в формуле (4.37) множитель в квадратных скобках положителен и y_0 является монотонно убывающей или возрастающей функцией τ_r . Если Ψ_1 и Ψ_2 имеют противоположные знаки, тогда, согласно определению (4.35), во всем объеме стержня происходит дополнительная догрузка или разгрузка и должно выполняться равенство $\Psi_1 = \Psi_2$. Таким образом установлено, что знаки функций Ψ_1 и Ψ_2 должны совпадать.

Случаям, когда все поперечное сечение претерпевает дополнительную догрузку ($y_0 = 1$) и разгрузку ($y_0 = -1$), соответствуют значения τ_r равные⁹ $-A_r/\Psi_2$ и A_r/Ψ_1 . В стержне одновременно присутствуют зоны дополнительной догрузки и разгрузки, когда $-A_r/\Psi_2 < \tau_r < A_r/\Psi_1$.

Уравнение равновесия изгибающего момента (4.32) можно переписать следующим образом:

$$\delta v'' + \eta^2 \delta v = 0, \quad \eta^2 = A_r \sigma \left[\int_{-1}^{y_0} \frac{y - y_0}{\Psi_2} y b(y) dy + \int_{y_0}^1 \frac{y - y_0}{\Psi_1} y b(y) dy \right]^{-1} \quad (4.38)$$

Решение данного уравнения, удовлетворяющее граничным условиям (4.28), имеет следующий вид:

$$l = \frac{\pi}{\eta(\xi, \sigma, y_0)} \quad (4.39)$$

В концепции ФН положение границы разделяющей области дополнительной разгрузки и догрузки определяется из уравнения (4.36). В концепции ВН требуется минимизировать (4.39) относительно $y_0 \in [-1, 1]$. Чтобы определить характер зависимости критической длины стержня от положения нейтральной линии, про дифференцируем η^2 по y_0 :

$$\frac{d(\eta^2)}{dy_0} = \frac{\Psi_2 - \Psi_1}{\Psi_1 \Psi_2} \int_{y_0}^1 y b(y) dy$$

Поскольку интеграл в правой части данного равенства, с учетом ограничения $y_0 \geq -1$, может принимать только неотрицательные значения, критическая длина является монотонной функцией y_0 и достигает экстремумов при $y_0 = \pm 1$.

⁹Учтено, что интеграл от нечетной функции $y b(y)$ на отрезке от -1 до 1 равен нулю.

Во время прямого фазового перехода, происходящего под действием постоянных напряжений, состояние стержня в тривиальном процессе и, соответственно, значения функции η полностью определяются величинами действующего напряжения и объемной доли мартенситной фазы. При обратном фазовом переходе внутреннее состояние стержня зависит от способа его подготовки и определяется полным набором внутренних переменных ξ . В итоге для прямого и обратного фазовых переходов определение критической длины сводится к задаче одномерной оптимизации:

$$l_r = \frac{\pi}{\max_{0 \leq q \leq 1} \{\eta(\xi, \sigma)\}} \quad (4.40)$$

4.3.7 Результаты

Прямой переход

В данном пункте для аппроксимации диаграммы прямого перехода используется функция Лапласа:

$$\varepsilon^{phst} = \text{sign}(\sigma) \rho_D^f \varphi_f(|\sigma|), \quad \varphi_f = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^{\frac{x}{\sigma_0}} e^{-t^2} dt \quad (4.41)$$

σ_0 – параметр масштаба.

На рис. 4.7 изображены зависимости критических длин, нормированных относительно Эйлеровой критической длины, от безразмерных напряжений $\bar{\sigma} = -\sigma/\sigma_0$ для стержня круглого поперечного сечения при различных значениях параметра σ_0 . Из данного рисунка следует, что с увеличением параметра σ_0 критическая длина стержня уменьшается. Критические нагрузки, полученные при решении задачи устойчивости в дважды связанной постановке, больше, чем при решении задачи в однократно связанной постановке, и меньше, чем при решении задачи с использованием несвязанной постановки. Качественно полученные выводы полностью согласуются с результатами анализа устойчивости стойки Шенли на стержнях из СПФ (пункт 4.2.4).

Результаты испытаний, проведенных в работе [55], подтверждают тот факт, что решения, полученные с помощью связанных постановок существенно лучше описывают эмпирические данные, чем решения, полученные в несвязанной постановке. При этом авторы отмечают, что для исследуемых образцов, в роли которых выступали относительно тонкие цилиндрические стержни круглого поперечного сечения, экспериментальным данным лучше всего соответствуют решения, полученные в предположении об изотермическом характере процесса перехода в смежную форму равновесия. Следует отметить, что согласно дальнейшим экспериментальным исследованиям тех же авторов, элементы из СПФ, обладающие другой геометрической формой, такие как пластины, могут терять устойчивость при нагрузках, которые более точно описываются в рамках предположения об адиабатическом характере возмущенного процесса [58].

Представленные в данном разделе результаты опубликованы в работе [50; 131].

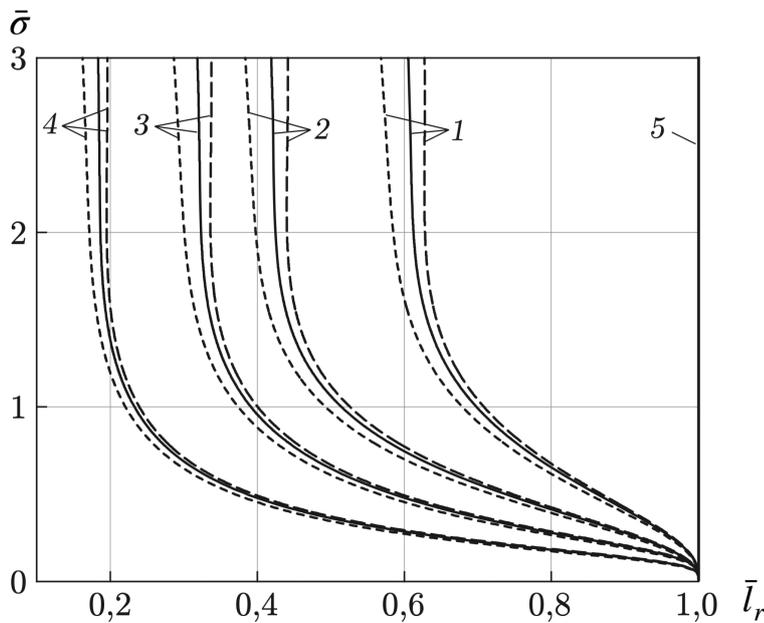


Рисунок 4.7 — \bar{l}_r — критическая длина, отнесенная к Эйлеровой длине, $\bar{\sigma}$ — безразмерные напряжения. Пунктирные/сплошные/штриховые линии — $\sigma_0 = 340/170/85$ [МПа]; 1, 2 — дважды связанная постановка, 3, 4 — однократно связанная постановка; 1, 3 — ФН, 2, 4 — ВН, 5 — несвязанная постановка.

Обратный переход

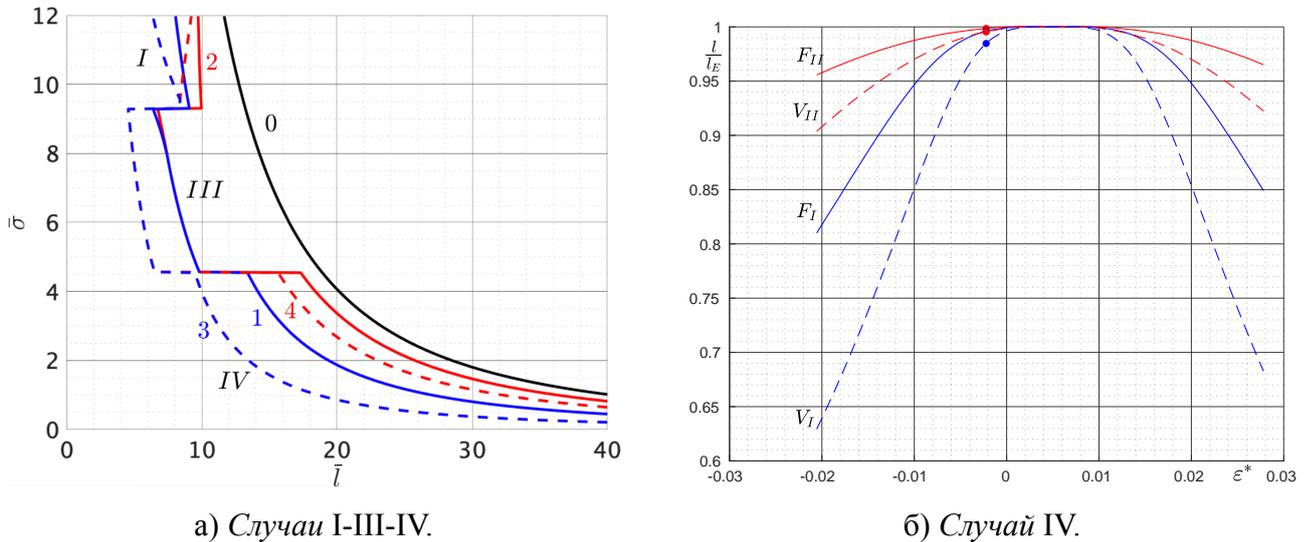
Рассмотрим цилиндрический стержень круглого поперечного сечения, начальные деформации которого определяются в соответствии с *Случаями*, описанными в пунктах 2.4.3 и 4.3.5. Для аппроксимации диаграмм прямого перехода и мартенситной неупругости используется функция гамма-распределения (2.22), с различными значениями параметров масштаба и формы. Дополнительное структурное деформирование, вызванное переходом к смежной форме равновесия, описывается в рамках *Модели 2*.

На рис. 4.8 а) представлены зависимости безразмерных критических длин стержня $\bar{l} = l_r/h^{10}$ от безразмерного напряжения $\bar{\sigma} = \sigma/d$, $d = 34.66$ [МПа]. Разрывы первого рода у критических кривых, полученных в рамках связанных постановок задачи устойчивости, связаны с резким изменением режима деформирования. При переходе от *Случая IV* к *Случаю III* в возмущенном процессе наряду с дополнительным упругим деформированием, в той части поперечного сечения стержня, где выполняются условия активного нагружения, имеет место дополнительное структурное деформирование, во время которого происходит упрочнение по трансляционному механизму. При переходе от *Случая III* к *Случаю I* дополнительное трансляционное упрочнение сменяется на комбинированное.

Качественно решения, найденные при рассмотрении *Случаев I* и *IV*, находятся в хорошем согласовании с результатами, полученными в пункте 4.2.4 для стойки Шенли. При этом *Случай IV* эквивалентен *Случаю II*. Поскольку решения, полученные для *Случая III* в связанных постановках

¹⁰ $h = 2$ согласно принятым в начале данного раздела допущениям относительно формы поперечного сечения стержня 4.3.1.

при использовании концепций ФН и ВН практически неразличимы, можно сделать вывод о том, что потеря устойчивости для рассматриваемого способа задания начальных фазово-структурных деформаций в стержне происходит в результате дополнительного структурного деформирования, которое не сопровождается дополнительным фазовым переходом и, согласно [108], соответствует полностью мартенситному фазовому состоянию. Также следует отметить, что наименьшие критические длины достигаются именно в *Случае III*.



а) *Случаи I-III-IV*.
 б) *Случай IV*.
 Рисунок 4.8 — 0 – несвязанная постановка, 1 (непрерывная) и 3 (пунктирная) – **однократно связанная постановка** в концепциях ФН и ВН, 2 (непрерывная) и 4 (пунктирная) – **дважды связанная постановка** в концепциях ФН и ВН.

На рис. 4.8 б) изображены зависимости критических длин, полученных в связанных постановках задачи устойчивости, от начальных фазово-структурных деформаций для *Случая IV* при $\sigma = 173$ [МПа]. Из данного графика видно, что с ростом абсолютных величин предварительных фазово-структурных деформаций, накопленных в стержне перед началом обратного фазового перехода, критическая длина уменьшается, причем, данная зависимость является строго монотонной и существенно нелинейной.

Взаимное расположение кривых для различных постановок и концепций практически не зависит от рассматриваемого *Случая*. Однократно связанная постановка и концепция ВН дают меньшие значения критических длин, чем дважды связанная постановка и концепция ФН, соответственно.

Представленные результаты опубликованы в работах [28; 49; 107; 108].

4.4 Пластина

Данный раздел посвящен анализу устойчивости пластин из СПФ, претерпевающих прямые фазовые переходы, происходящие под действием постоянных напряжений.

4.4.1 Соглашение об индексах

В данном разделе при работе с компонентами тензоров используются специальные правила именования индексов.

Одиночный нижний индекс i , в случае тензоров напряжений и деформаций, зарезервирован для обозначения интенсивностей данных тензоров. Греческие и латинские буквы используются для обозначения индексов, когда соотношения справедливы в двухмерных и трехмерных случаях, соответственно. При использовании в одном выражении индексов обозначенных разными буквами, подразумевается, что они принимают различные значения и удовлетворяют условиям круговой перестановки.

Немое суммирование по повторяющимся индексам подразумевается, если:

– В записи одной из компонент тензора используются повторяющиеся индексы α , k или m :

$$c_{\alpha\alpha} = c_{11} + c_{22}, \quad c_{kk} = c_{11} + c_{22} + c_{33} \neq c_{jj}, \quad j = 1, 2, 3.$$

– При свертке тензоров:

$$b_{\beta\alpha}c_{\alpha\gamma} = \sum_{\alpha=1}^2 b_{\beta\alpha}c_{\alpha\gamma}, \quad c_{ij}c_{ij} = \sum_{m=1}^3 \sum_{n=1}^3 c_{mn}^2$$

Наборы повторяющихся индексов, по которым не происходит внутреннее суммирование, при осуществлении суммирования отождествляются с одним индексом, соответствующим данному набору:

$$a_{\beta\beta}b_{\beta\beta} = a_{11}b_{11} + a_{22}b_{22}, \quad a_{\beta\gamma}b_{\gamma\gamma} = a_{\beta 1}b_{11} + a_{\beta 2}b_{22}$$

c_{ij} и b_{ij} – произвольные тензоры.

Если любое из указанных выше правил работы с индексами не выполняется, то это явно оговаривается в тексте.

4.4.2 Геометрия и граничные условия

Рассмотрим прямоугольную пластину из СПФ, которая имеет длину a_p , ширину b_p и толщину h_p . Далее для описания геометрии пластины будем использовать безразмерные параметры $\bar{h} = h_p/b_p$, $\bar{a} = a_p/b_p$. Тонкостенными будем называть пластинки, для которых $\bar{h} < 0.05$.

Введем правую прямоугольную декартову систему координат $Ox_1x_2x_3$ таким образом, чтобы плоскость Ox_1x_2 совпадала с срединной плоскостью пластины в недеформированном состоянии, а точка O находилась в одном из ее углов. Оси Ox_β принадлежат боковым граням пластины и направлены таким образом, чтобы длина отсчитывалась вдоль оси Ox_1 , а ширина вдоль оси Ox_2 .

Пластина шарнирно оперта по периметру:

$$\begin{aligned} w|_{x_1=0} = w|_{x_1=\bar{a}} = w_{,11}|_{x_1=0} = w_{,11}|_{x_1=\bar{a}} = 0 \\ w|_{x_2=0} = w|_{x_2=1} = w_{,22}|_{x_2=0} = w_{,22}|_{x_2=1} = 0 \end{aligned} \quad (4.42)$$

На параллельных боковых гранях пластины действуют одинаковые по величине и равномерно распределенные по длине соответствующих граней нормальные удельные усилия $N_{\beta\beta}$.

4.4.3 Гипотеза прямых нормалей

В качестве основы для кинематического описания формоизменения пластины используется классическая теория пластин Кирхгоффа [14; 70], в рамках которой предполагается, что:

- Прямолинейные материальные отрезки, перпендикулярные срединной плоскости пластины до изгиба, остаются после деформации прямыми, нормальными к изогнутой срединной поверхности после изгиба и сохраняют свою первоначальную длину.
- Нормальные напряжения на площадках, параллельных изогнутой срединной поверхности пластины малы по сравнению с другими компонентами тензора напряжений и поэтому ими можно пренебречь.
- Прогиб пластины мал по сравнению с ее толщиной и справедливы линейные соотношения между деформациями и перемещениями.

Приводимые далее кинематические соотношения получены в рамках линейной теории, которая основана на пренебрежении слагаемыми имеющими порядок величины $\bar{h} \ll 1$.

Перемещения произвольной точки пластины определяются соотношениями:

$$u_\beta = u_\beta^0 - x_3 w_{,\beta} \quad (4.43)$$

$u_\beta^0 = u_\beta^0(x_1, x_2)$ – перемещения точек пластины принадлежащих срединной плоскости, $w = w(x_1, x_2)$ – перемещения точек пластины вдоль оси x_3 . Из определения тензора малых деформаций, с учетом (4.43), получим:

$$\varepsilon_{\alpha\beta} = e_{\alpha\beta} - x_3 w_{,\alpha\beta}, \quad e_{\alpha\beta} = \frac{1}{2} (u_{\alpha,\beta}^0 + u_{\beta,\alpha}^0) \quad (4.44)$$

Условие совместности полных деформаций, с учетом выражения (4.44), принимает следующий вид [32]:

$$e_{11,22} + e_{22,11} = 2e_{12,12} \quad (4.45)$$

4.4.4 Уравнения равновесия

Уравнения равновесия сил и моментов для пластины, перешедшей к смежной форме равновесия, имеют следующий вид [88]:

$$\delta N_{\beta\alpha,\alpha} = \delta N_{\beta\beta}^{\Gamma} \quad (4.46)$$

$\delta N_{\alpha\beta}$ и $\delta N_{\beta\beta}^{\Gamma}$ – приращения удельных усилий и поверхностных сил, действующих в плоскости пластины и на ее боковых гранях, соответственно.

$$\delta Q_{\alpha,\alpha} = -(N_{\alpha\beta}\delta w_{,\alpha\beta} + w_{,\alpha\beta}\delta N_{\alpha\beta}) \quad (4.47)$$

Q_{β} – поперечные усилия, действующие на площадках с нормальными, коллинеарными осям Ox_{β} .

$$\delta M_{\beta\alpha,\alpha} = \delta Q_{\beta} \quad (4.48)$$

$M_{\beta\beta}$ и $M_{\alpha\beta}$ – изгибающие и крутящие моменты.

Вариации удельных усилий и моментов определяются уравнениями:

$$\delta N_{\alpha\beta} = \int_{-\frac{\bar{h}}{2}}^{\frac{\bar{h}}{2}} \delta \sigma_{\alpha\beta} dx_3 \quad (4.49)$$

и

$$\delta M_{\alpha\beta} = \int_{-\frac{\bar{h}}{2}}^{\frac{\bar{h}}{2}} \delta \sigma_{\alpha\beta} x_3 dx_3 \quad (4.50)$$

Поскольку в тривиальном процессе прогиб пластины и касательные усилия отсутствуют, а нормальные усилия $N_{\beta\beta}$ однородным образом распределены по объему пластины, уравнение (4.47) можно переписать следующим образом:

$$\delta Q_{\alpha,\alpha} = -N_{\beta\beta}\delta w_{,\beta\beta} \quad (4.51)$$

Исключив из данного выражения вариации перерезывающих сил, при помощи уравнений равновесия для приращений моментов (4.48), получим:

$$\delta M_{11,11} + 2\delta M_{12,12} + \delta M_{22,22} = -N_{\beta\beta}\delta w_{,\beta\beta} \quad (4.52)$$

Приращения деформаций

Вариации упругих деформаций определяются из соотношения (2.2):

$$\begin{aligned} \delta \varepsilon_{\beta\beta}^e &= (B_E \sigma_{\alpha\alpha} - B_G \sigma_{\gamma\gamma}) \delta q + \frac{\delta \sigma_{\alpha\alpha}}{E(q)} - \frac{\delta \sigma_{\gamma\gamma}}{2G(q)} \\ \delta \varepsilon_{12}^e &= B_G \sigma_{12} \delta q + \frac{\delta \sigma_{12}}{2G(q)}, \quad B_G = \frac{G_A - G_M}{2G_A G_M} \end{aligned} \quad (4.53)$$

Приращения фазовых деформаций задаются выражениями (4.3) и (4.4). Согласно результатам, полученным в пункте 4.1.3, при потере устойчивости, вызванной прямым фазовым переходом, происходящим под действием постоянных напряжений, вариации структурных деформаций для всех рассматриваемых концепций тождественно равны нулю.

Приращение параметра фазового состава

В тривиальном процессе деформирования касательные напряжения отсутствуют и вариация интенсивности напряжений определяется выражением:

$$\delta\sigma_i = \frac{3}{2} \frac{\sigma'_{ij}}{\sigma_i} \delta\sigma'_{ij} = \frac{1}{\sigma_i} \left[\left(\sigma_{11} - \frac{\sigma_{22}}{2} \right) \delta\sigma_{11} + \left(\sigma_{22} - \frac{\sigma_{11}}{2} \right) \delta\sigma_{22} \right], \quad \sigma_i = \sqrt{\sigma_{11}^2 + \sigma_{22}^2 - \sigma_{11}\sigma_{22}} \quad (4.54)$$

Продолжая преобразования для случае прямого фазового перехода, начатые в пункте (4.1.3), с учетом (4.54), перепишем уравнение (4.14) следующим образом¹¹:

$$\begin{aligned} \Theta \delta q &= \Upsilon_\beta \delta \sigma_{\beta\beta} \\ \Theta &= 1 + \frac{\lambda(q)}{C_\sigma} \left[\Delta U + \rho_D^f \sigma_i \varphi_f(\sigma_i) + \frac{D}{2} \sigma_i^2 + \frac{C}{2} \sigma_{kk}^2 + \varepsilon^0 \sigma_{kk} \right] \\ \frac{\Delta S}{\lambda(q)} \Upsilon_\gamma &= \left[C - \frac{A(q, \sigma_i)}{2\sigma_i} \right] \sigma_{\alpha\alpha} + 3 \frac{A(q, \sigma_i)}{2\sigma_i} \sigma_{\gamma\gamma} + \alpha_q \frac{\Delta S}{C_\sigma} T(q, \sigma_{11}, \sigma_{22}) + \varepsilon^0 \end{aligned} \quad (4.55)$$

Полученное выражение справедливо для дважды связанной постановки задачи устойчивости. При рассмотрении однократно связанной постановки в уравнении (4.55) следует положить:

$$\begin{aligned} \Theta &\equiv 1 \\ \frac{\Delta S}{\lambda(q)} \Upsilon_\gamma &= \left[C - \frac{A(q, \sigma_i)}{2\sigma_i} \right] \sigma_{\alpha\alpha} + 3 \frac{A(q, \sigma_i)}{2\sigma_i} \sigma_{\gamma\gamma} + \varepsilon^0 \end{aligned}$$

Поскольку рассматривается случай прямого перехода, дополнительный фазовый переход имеет место только в той части пластины, где приращение параметра фазового состава строго положительно. Таким образом, в выражениях для вариаций фазовых (4.3) и упругих (4.53) деформаций, можно переопределить вариацию объемной доли мартенситной фазы следующим образом:

$$\delta q = \langle \delta q \rangle = H(\delta q) \delta q \quad (4.56)$$

¹¹При выводе учтено, что в тривиальном процессе $\sigma_{12} \equiv 0$.

Приращения напряжений

Приращения полных деформаций с учетом (4.53), (4.3), (4.55) и (4.56) принимают следующий вид:

$$\begin{cases} S_\beta \delta\sigma_{11} + D_\beta \delta\sigma_{22} = \delta\varepsilon_{\beta\beta} \\ \frac{\delta\sigma_{12}}{2G} = \delta\varepsilon_{12} \end{cases}$$

$$\begin{aligned} S_1 &= \Upsilon_1 \eta_1 H(\delta q) + \frac{1}{E}, & S_2 &= \Upsilon_1 \eta_2 H(\delta q) + \frac{1}{E} - \frac{1}{2G}, \\ D_1 &= \Upsilon_2 \eta_1 H(\delta q) + \frac{1}{E} - \frac{1}{2G}, & D_2 &= \Upsilon_2 \eta_2 H(\delta q) + \frac{1}{E}, \\ \eta_\beta &= \frac{1}{\Theta} \left[B_E \sigma_{\alpha\alpha} - B_G \sigma_{\gamma\gamma} + \varepsilon^0 + \rho_D^f \frac{\varphi_f(\sigma_i)}{\sigma_i} \left(\sigma_{\beta\beta} - \frac{\sigma_{\gamma\gamma}}{2} \right) \right] \end{aligned} \quad (4.57)$$

При помощи стандартных алгебраических преобразований [84], пренебрегая зависимостью функций S_β и D_β от приращений напряжений, разрешим систему (4.57) относительно компонент вариаций напряжений:

$$\begin{cases} \delta\sigma_{\beta\beta} = K_\beta \delta\varepsilon_{11} + P_\beta \delta\varepsilon_{22} \\ \delta\sigma_{12} = 2G \delta\varepsilon_{12} \end{cases} \quad (4.58)$$

$$K_1 = \frac{D_2}{F}, \quad P_1 = -\frac{D_1}{F}, \quad K_2 = -\frac{S_2}{F}, \quad P_2 = \frac{S_1}{F}, \quad F = S_1 D_2 - S_2 D_1.$$

4.4.5 Решение задач устойчивости

Уравнение (4.52), используя определения вариаций моментов (4.50), с учетом выражений для приращений напряжений (4.58), можно записать следующим образом¹²:

$$D_{\beta\gamma} \delta w_{,\beta\gamma\beta\gamma} = N_{\beta\beta} \delta w_{,\beta\beta} \quad (4.59)$$

Выражения, определяющие значения функциональных коэффициентов $D_{\alpha\beta}$, меняются в зависимости от рассматриваемой постановки и концепции.

Решение уравнения (4.59), удовлетворяющее всем граничным условиям (4.42), может быть представлено в виде двойного тригонометрического ряда [81]:

$$\delta w = \sum_{m,n>0} \delta a_{mn} \sin\left(\frac{m\pi x_1}{a_p}\right) \sin\left(\frac{n\pi x_2}{b_p}\right) \quad (4.60)$$

бесконечно малые коэффициенты δa_{mn} предполагаются независимыми от x_1 и x_2 .

¹²При выводе учтено, что в тривиальном процессе $N_{12} \equiv 0$.

Несвязанная постановка

При решении задачи устойчивости в несвязанной постановке все функциональные коэффициенты $D_{\alpha\beta}$ в уравнении (4.59) одинаковы и равны цилиндрической жесткости пластины:

$$D = \frac{E(q)h_p^3}{12[1 - \nu^2(q)]} \quad (4.61)$$

После подстановки (4.61) и (4.60) в (4.59) условие существования нетривиальной формы равновесия пластины может быть записано следующим образом:

$$n^2 \bar{\sigma}_{22} = \bar{D}(q) \left[\left(\frac{m}{a} \right)^2 + n^2 \right]^2 - \left(\frac{m}{a} \right)^2 \bar{\sigma}_{11}, \quad \bar{D} = \frac{\pi^2 \bar{h}^2 \bar{E}(q)}{12(1 - \nu^2(q))} \quad (4.62)$$

$\bar{\sigma}_{\alpha\beta} = -\sigma_{\alpha\beta}/\sigma_Y$ – безразмерные напряжения.

Поскольку цилиндрическая жесткость пластины и, соответственно, функция \bar{D} монотонно убывает с ростом объемной доли мартенситной фазы, поиск области устойчивости в пространстве безразмерных главных напряжений сводится к решению задач безусловной дискретной оптимизации функции $\bar{\sigma}_{22}(\bar{\sigma}_{11} = const, q \equiv 1, m, n)$, явно заданной уравнением (4.62) для различных фиксированных значений $\bar{\sigma}_{11}$.

Связанные постановки

В общем случае выражения для вариаций напряжений (4.58) являются неявными, поскольку коэффициенты K_β и P_β зависят от знака вариации параметра фазового состава, определяемого уравнением (4.55). Чтобы определить истинные значения приращений напряжений и вариации параметра фазового состава в произвольной точке пластины, можно использовать следующий алгоритм:

1. Вычислять значения вариаций напряжений в предположении, что объемная доля мартенситной фазы получает некоторое положительное приращение.
2. Проверить выполнение необходимого условия дополнительного фазового перехода $\Upsilon_\beta \delta\sigma_{\beta\beta} > 0 \Leftrightarrow \delta q > 0$.
3. Если проверка, выполненная на предыдущем шаге, показывает, что вариация объемной доли мартенситной фазы отрицательна, провести повторное вычисление вариаций напряжений, предполагая, что дополнительное фазовое превращение в рассматриваемой точке отсутствует.

Недостатком описанного способа является то, что определение значений вариаций напряжений, которое должно осуществляться на первом и, в некоторых случаях, третьем шаге, требует введения ряда дополнительных гипотез относительно величин приращений перемещений точек, принадлежащих срединной поверхности пластины. Вместо того чтобы дальше развивать данный

подход, рассмотрим два альтернативных способа отыскания решения задачи устойчивости, основанных на применении концепций ВН и ФН.

Концепция ВН

Предположим, что за счет специального выбора значений приращений нормальных усилий, действующих на боковых гранях пластины, можно добиться выполнения условия $\delta q > 0$ во всех точках пластины одновременно. Тогда уравнения для приращений моментов (4.50) могут быть проинтегрированы с учетом выражений для вариаций напряжений (4.58):

$$\delta M_{\beta\beta} = -\frac{h_p^3}{12}(K_\beta^+ \delta w_{,11} + P_\beta^+ \delta w_{,22}), \quad \delta M_{\alpha\beta} = -\frac{h_p^3}{6} G \delta w_{,\alpha\beta} \quad (4.63)$$

Верхний индекс "+" у функциональных коэффициентов K_β и P_β означает, что при их вычислении следует положить $H(\delta q) \equiv 1$.

Подстановка (4.63) в (4.52) позволяет определить коэффициенты в уравнении (4.59), соответствующие рассматриваемой концепции:

$$D_{11} = \frac{h_p^3}{12} K_1^+, \quad D_{12} = D_{21} = \frac{h_p^3}{24} (P_1^+ + K_2^+ + 4G), \quad D_{22} = \frac{h_p^3}{12} P_2^+ \quad (4.64)$$

После подстановки (4.64) и (4.60) в (4.59) условие появления смежной формы равновесия пластины может быть представлено в следующем виде:

$$\left(\frac{m}{a}\right)^4 \bar{D}_{11} + \left(\frac{m}{a}\right)^2 (2n^2 \bar{D}_{12} - \bar{\sigma}_{11}) + n^4 \bar{D}_{22} - n^2 \bar{\sigma}_{22} = 0, \quad \bar{D}_{\alpha\beta} = \frac{\pi^2}{b_p^2 h_p} \frac{D_{\alpha\beta}}{\sigma_Y} \quad (4.65)$$

Поиск области устойчивости в пространстве безразмерных главных напряжений сводится к решению задач смешанной оптимизации функции $\bar{\sigma}_{22}(\bar{\sigma}_{11} = const, q, m, n)$, неявно заданной уравнением (4.65), для различных фиксированных значений $\bar{\sigma}_{11}$.

Концепция ФН

Пластина после перехода к смежной форме равновесия может быть разделена на зоны, в которых происходит и не происходит дополнительный фазовый переход [64]. Как было отмечено в пункте 4.4.5, уравнение равновесия моментов (4.59) и граничные условия (4.42) удовлетворяются тождественно, если прогиб пластины определяется выражением (4.60). В таком случае нетривиальная равновесная форма пластины может быть разбита на криволинейные ячейки, в которые перешли параллелепипеды со сторонами a_p/m , b_p/n и h_p . У смежных ячеек, имеющих общие грани, прогибы антисимметричны относительно срединной плоскости недеформированной пластины и соответствующей грани, а ячейки, имеющие одно общее ребро, симметричны,

относительно линии проходящей, через данное ребро. Таким образом, чтобы определить положение всех зон, в которых происходит дополнительный фазовый переход, достаточно определить границы этих зон в одной из ячеек периодичности пластины.

Поскольку знак вариации параметра фазового состава меняется на противоположный если одновременно меняются знаки обоих нормальных напряжений $\sigma_{\beta\beta}$, зоны, прилегающие к верхней и нижней граням ячейки должны различаться. Предположим, что каждая ячейка содержит ровно две зоны в одной из которых имеет место дополнительный фазовый переход и упругое деформирование, а во второй только упругое деформирование. Данные зоны разделяет некоторая поверхность $z = z(x_1, x_2)$, от положения которой зависят локальные значения вариаций напряжений.

4.4.6 Результаты

В данном разделе приводятся решения задач устойчивости квадратных пластин из СПФ при прямом фазовом переходе, происходящем под действием постоянных напряжений, для несвязанной, однократно и дважды связанных постановок в концепции ВН. Представленные результаты опубликованы в работе [109].

Пропорциональное нагружение

Рассмотрим два частных случая:

- На всех гранях пластины действуют одинаковые сжимающие напряжения:

$$\bar{\sigma}_{11} = \bar{\sigma}_{22} = p$$

- На двух параллельных гранях пластины действуют одинаковые сжимающие напряжения, а две другие грани свободны от напряжений:

$$\bar{\sigma}_{11} = p_1, \quad \bar{\sigma}_{22} = 0$$

Для двух данных типов граничных условий в напряжениях обозначим критические значения нагрузок, полученных в рамках несвязанной постановки, $p^E = p^E(\bar{h})$ и $p_1 = p_1^E(\bar{h})$.

На рис. 4.9 следует отметить важную качественную особенность – различия между решением, полученным в предположении об упругом характере потере устойчивости, и решениями, полученными в связанных постановках, монотонно увеличивается с ростом толщины пластины. Данная закономерность также наблюдалась в экспериментах, проведенных в работе [58]. Взаимное расположение кривых, полученных для различных постановок, остается таким же, как в случаях стойки Шенли и стержня: связанные постановки дают меньшие значения критических

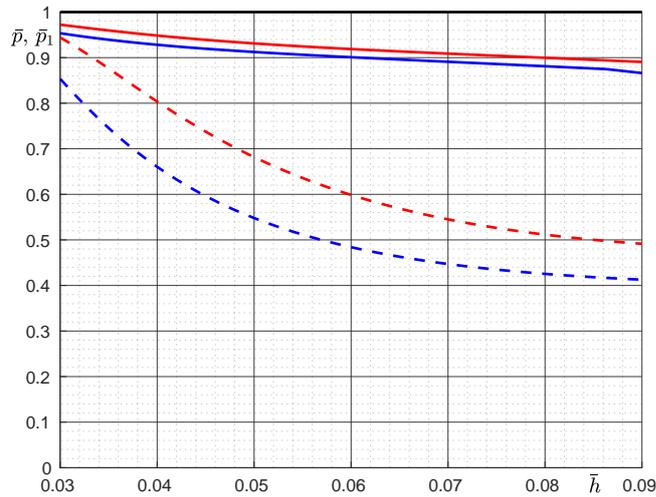


Рисунок 4.9 — Зависимость критических нагрузок \bar{p} (пунктирные линии) и \bar{p}_1 (непрерывные линии), нормированных относительно p^E и p_1^E , соответственно, от безразмерной толщины пластины.

Красные и синие линии соответствуют дважды и однократно связанным постановкам.

нагрузок, чем несвязанная постановка, а однократно связанная постановка ограничивает дважды связанную снизу.

Согласно экспериментальным данным, полученным в работе [58], при решении практических задач следует использовать постановку, которая занимает промежуточное положение между однократно и дважды связанной. Для этого можно совместно с дважды связанной постановкой использовать параметр потерь, который численно равен теплу, рассеиваемому в местах крепления элемента за счет теплопроводности и окружающую среду в результате процессов конвекции и излучения, во время перехода к смежной форме равновесия. Значения данного параметра должны зависеть от геометрических размеров пластины и могут быть найдены при помощи эмпирических, аналитических или численных методов.

Двухосное нагружение

Пусть на двух параллельных боковых гранях пластины действуют одинаковые равномерно распределенные нормальные напряжения σ_{11} , а на других двух гранях σ_{22} подбираются таким образом, чтобы данные напряжения имели минимальные по модулю значения, для которых возможно существование смежной формы равновесия.

Согласно рис. (4.10) область устойчивости пластины, полученная в рамках несвязанной постановки, является выпуклой и содержит аналогичные области для связанных постановок, границы которых не являются выпуклыми. Критическая поверхность, найденная при помощи однократно связанной постановки, соответствует наименьшей области устойчивости среди всех рассматриваемых постановок. Увеличение толщины пластины приводит к росту различий между решениями, полученными в различных постановках, причем, данные различия существенно больше при сравнении несвязанной и однократно или дважды связанной постановками, чем между

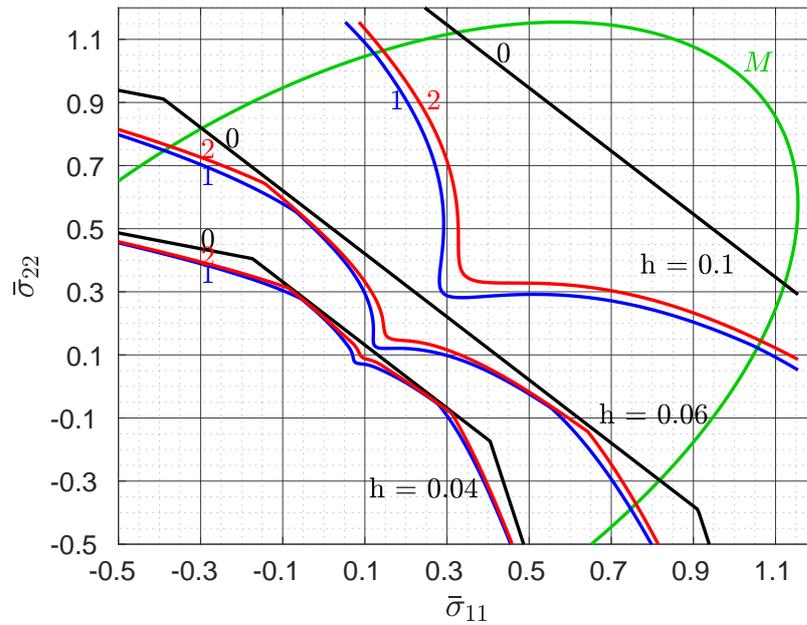


Рисунок 4.10 — Критические поверхности для пластин, обладающих толщинами $\bar{h} = 0.04, 0.06, 0.1$.

Черные линии – несвязанная (0) постановка (упругое решение),

Красные/Синие линии – дважды (2)/однократно (1) связанная постановка в концепции ВН,

Зеленая линия – поверхность текучести Мизеса.

связанными постановками. Наибольшие отличия между решениями, полученными в различных постановках задачи устойчивости, достигаются в случае двухосного нагружения одинаковыми сжимающими напряжениями.

Заключение

Основные результаты работы заключаются в следующем:

1. Термомеханически связанным постановкам соответствуют существенно меньшие значения критических параметров по сравнению с несвязанной постановкой.
2. Критические значения параметров, найденные при помощи дважды связанной постановки, превосходят аналогичные значения, полученные при использовании однократно связанной постановки.
3. Критические значения параметров, найденные для концепции ФН, превосходят аналогичные значения, полученные для концепции ВН.
4. При потере устойчивости, вызванной обратным фазовым переходом, дополнительное структурное деформирование не имеет места.
5. При потере устойчивости, вызванной обратным фазовым переходом, критическая нагрузка уменьшается с ростом абсолютных величин фазово-структурных деформаций, накопленных перед началом данного перехода.
6. С увеличением гибкости элемента, которая может выражаться в росте длины стержня или уменьшении толщины пластины, при сохранении остальных геометрических параметров неизменными, влияние дополнительного фазового перехода на процесс потери устойчивости существенно снижается.

Перспективными направлениями будущих исследований является решение задачи устойчивости пластины из СПФ при прямом и обратном фазовых переходах, происходящих при постоянных действующих напряжениях, в дважды термомеханически связанной постановке для концепции ФН.

В заключение автор выражает благодарность научному руководителю Мовчану А. А. за научное руководство, обсуждение промежуточных и итоговых результатов, а также ценные рекомендации по усовершенствованию диссертационной работы. Также автор благодарит создателей шаблона *Russian-Phd-LaTeX-Dissertation-Template* за помощь в оформлении диссертации.

Список сокращений и условных обозначений

δ_{ij}	символ Кронекера, стр. 21
$[S]$	Скобки Айверсона, возвращают значение 1, если логическое утверждение S истинно и 0 в противном случае, стр. 32
α	Угол отклонения вертикальной оси симметрии рамки стойки Шенли, стр. 52
α_φ	Параметр формы функции гамма распределения, аппроксимирующей φ , стр. 30
α_A	Коэффициент термического расширения в аустенитном фазовом состоянии, стр. 22
α_M	Коэффициент термического расширения в мартенситном фазовом состоянии, стр. 22
α_q	Коэффициент термического расширения, стр. 22
ξ	Набор параметров, значения которых однозначно определяют внутреннее состояние материала, стр. 31
ΔS	Изменение объемной плотности энтропии при осуществлении полного прямого или обратного фазового переходов, стр. 25
ΔU	Изменение объемной плотности внутренней энергии при осуществлении полного прямого или обратного фазового переходов, стр. 25
$\delta(\cdot)$	Приращение соответствующего параметра при переходе к смежной форме равновесия, стр. 46
$\langle \cdot \rangle$	Скобки Маколея, возвращают значение неотрицательного аргумента и ноль в противном случае, стр. 32
μ_c	Параметр вида тензора c_{ij} , стр. 22
ν	Коэффициент Пуассона, стр. 21
$\bar{\sigma}$	Напряжения нормированные относительно пластического предела текучести, стр. 53
ρ	Объемная плотность, стр. 26
σ_{ij}^0	направляющий тензор девиатора напряжений с единичной интенсивностью, все компоненты которого являются безразмерными константами, стр. 93
$\sigma_i = \sqrt{\frac{3}{2} \sigma'_{ij} \sigma'_{ij}}$	Интенсивность тензора напряжений, стр. 22
σ_Y	Дислокационный предел текучести, стр. 26
v	прогиб стержня, стр. 57
ε_{ij}^*	Фазово-структурные деформации на момент начала обратного фазового превращения, стр. 45
ε^0	Деформация, определяющая объемный эффект (прямого) фазового перехода, стр. 22
ε_{ij}^0	направляющий тензор девиатора фазово-структурных деформаций с единичной интенсивностью, стр. 93

ε_{ij}^e	Компоненты тензора упругих деформаций, стр. 21
ε_{ij}^M	Девиатор собственной фазово-структурной деформации мартенсита, стр. 24
ε_{ij}^T	Компоненты тензора температурных деформаций, стр. 21
ε_{ij}^{eT}	Компоненты тензора термоупругих деформаций, стр. 22
ε_{ij}^{phst}	Компоненты тензора фазово-структурных деформаций, стр. 21
$\varepsilon_i = \sqrt{\frac{2}{3}\varepsilon'_{ij}\varepsilon'_{ij}}$	Интенсивность тензора деформаций, стр. 22
φ	Материальная функция, определяющая радиус поверхности нагружения в моделях с комбинированным упрочнением, стр. 24
φ_f	Материальная функция, аппроксимирующая диаграмму прямого превращения, стр. 22
φ_m	Материальная функция, аппроксимирующая диаграмму мартенситной неупругости, стр. 24
A_c	Площадь опорного стержня стойки Шенли в недеформированном состоянии, стр. 51
a_c	Длина опорного стержня стойки Шенли в недеформированном состоянии, стр. 51
a_p	Длина пластины, стр. 66
A_r	площадь поперечного сечения стержня, стр. 57
a_{ij}	тензор остаточных напряжений или трансляции, стр. 23
b_c	Ширина рамки стойки Шенли, стр. 51
b_p	Ширина пластины, стр. 66
$c'_{ij} = c_{ij} - \frac{1}{3}c_{kk}\delta_{ij}$	Девиатор тензора c_{ij}
C_σ	Теплоемкость единицы объема при постоянном напряжении, стр. 25
D	Цилиндрическая жесткость пластины, стр. 71
$d\lambda$	Бесконечно малый скалярный множитель, который, в зависимости от постановки, может являться функцией напряжений, температуры и внутренних параметров состояния, стр. 23
$d\varepsilon_{ij}^{ph}$	Дифференциалы компонент тензора деформаций, связанные с структурными механизмами деформирования, стр. 21
$d\varepsilon_{ij}^{ph}$	Дифференциалы компонент тензора деформаций, связанные с фазовыми механизмами деформирования, стр. 21
$d\varphi$	Параметр масштаба функции гамма распределения, аппроксимирующей φ , стр. 30
E	Модуль Юнга, стр. 21
E_A	Значение модуля Юнга в аустенитном фазовом состоянии, стр. 21
E_M	Значение модуля Юнга в мартенситном фазовом состоянии, стр. 21
$e_{\alpha\beta}$	Деформации срединной поверхности пластины, стр. 67
f	Материальная функция, определяющая отношение между процессами зарождения и развития мартенситных элементов, стр. 22

f_s	поверхность нагружения с комбинированным упрочнением, стр. 23
G	Модуль сдвига, стр. 21
g	Функция кинематического упрочнения, стр. 24
G_A	Значение модуля сдвига в аустенитном фазовом состоянии, стр. 21
G_M	Значение модуля сдвига в мартенситном фазовом состоянии, стр. 21
H	Функция Хевисайда, возвращающая 1, если аргумент является неотрицательным числом и 0 в противном случае, стр. 32
h_p	Толщина пластины, стр. 66
J_{x_j}	осевой момент инерции относительно оси x_j , стр. 57
K	Объемный модуль упругости, стр. 25
K_A	Значение объемного модуля упругости в аустенитном фазовом состоянии, стр. 25
K_M	Значение объемного модуля упругости в мартенситном фазовом состоянии, стр. 25
k_q	Коэффициент теплопроводности, стр. 25
L_c	Высота рамки стойки Шенли, стр. 51
$M_{\alpha\beta}$	Крутящие моменты ($\alpha \neq \beta$), стр. 68
$M_{\beta\beta}$	Изгибающие моменты, стр. 68
$N_{\alpha\beta}^\Gamma$	Удельные усилия, действующие на боковых гранях пластины, стр. 68
$N_{\alpha\beta}$	Удельные усилия, действующие в плоскости пластины, стр. 68
q	параметр фазового состава или объемная доля мартенситной фазы, стр. 21
Q_β	Поперечные усилия, действующие на площадках с нормальными коллинеарными осями Ox_β , стр. 68
r	Радиус инерции поперечного сечения стержня, стр. 60
s^*	радиус поверхности упрочнения, стр. 23
s_{ij}	тензор активных напряжений, стр. 23
T	Температура, стр. 22
w	Прогиб пластины, стр. 67

Словарь терминов

СПФ : Сплавы с памятью формы

NiTi : Никелид титана или нитинол

Концепции : Определяют допустимую степень изменения граничных условий в момент потери элементом устойчивости

ФН : Концепция фиксированной внешней нагрузки

ВН : Концепция варьированной внешней нагрузки

ФТ : Концепция фиксированной температуры

ВТ : Концепция варьированной температуры

Термомеханические постановки : Определяют набор переменных состояния, которые могут получать нетривиальные приращения в момент потери элементом устойчивости

Список литературы

1. *Болотин, В. В.* Динамическая устойчивость упругих систем / В. В. Болотин. — Государственное издательство технико-теоретической литературы, 1956. — 600 с.
2. *Болотин, В. В.* Неконсервативные задачи теории упругой устойчивости / В. В. Болотин. — Государственное издательство физико-математической литературы, 1961. — 339 с.
3. *Бутрина, А. А.* Моделирование эффекта мартенситной неупругости в плоских композиционных пружинах, выполненных из сплава с эффектом памяти формы / А. А. Бутрина, С. М. Ганыш, С. С. Гаврюшин // Инженерный журнал: наука и инновации. — 2022. — Т. 67, № 1. — С. 845—851.
4. *Васильев, Ф. П.* Методы оптимизации / Ф. П. Васильев. — Факториал Пресс, 2002.
5. *Волков, А. Е.* Термомеханическая макромодель сплавов с эффектом памяти формы / А. Е. Волков // Известия Российской академии наук. Серия физическая. — 2002. — Т. 66, № 9. — С. 1290—1297.
6. *Волков, А. Е.* Расчет напряженно-деформированного состояния в цилиндре из TiNi при охлаждении под нагрузкой и разгрузке / А. Е. Волков, А. Кухарева // Известия Российской академии наук. Серия физическая. — 2008. — Т. 72, № 9. — С. 1337—1340.
7. *Волков, А. Е.* Термомеханическая макромодель сплавов с эффектом памяти формы / А. Е. Волков, В. Ю. Сахаров // Известия Российской академии наук. Серия физическая. — 2003. — Т. 67, № 6. — С. 845—851.
8. *Волков, А. Е.* Математическое моделирование мартенситной неупругости и эффектов памяти формы / А. Е. Волков [и др.] // Журнал технической физики. — 1996. — Т. 66, № 11. — С. 3—35.
9. *Вольмир, А. С.* Устойчивость деформируемых систем / А. С. Вольмир. — 2-е изд. — НАУКА, 1967. — 984 с.
10. *Гаврюшин, С. С.* Численное моделирование процессов деформирования элемента в форме винтовой цилиндрической пружины, выполненного из материала с эффектом памяти формы / С. С. Гаврюшин, С. М. Ганыш // Известия высших учебных заведений. — 2012. — № 8. — С. 15—20.
11. *Гаврюшин, С. С.* Расчет элементов коммутационных и исполнительных устройств, выполненных из сплавов с памятью формы / С. С. Гаврюшин, С. М. Ганыш // Проблемы машиностроения и надежности машин. — 2019. — № 7. — С. 6—14.
12. *Ганыш, С. М.* Применение сплавов с эффектом памяти формы в предохранительных механизмах / С. М. Ганыш, С. С. Гаврюшин // Приводы и компоненты машин. — 2019. — № 3/4. — С. 4—7.
13. *Ганыш, С. М.* Расчет и проектирование исполнительных устройств, выполненных из сплавов с эффектом памяти формы / С. М. Ганыш, С. С. Гаврюшин // Проблемы прочности, пластичности и устойчивости в механике деформируемого твердого тела : Материалы IX Международного научного симпозиума, посвященного 90-летию со дня рождения заслуженного деятеля науки и техники РФ профессора В.Г. Зубчанинова. — 2021. — С. 27—31.

14. *Гольденвейзер, А. Л.* Теория упругих тонких оболочек / А. Л. Гольденвейзер. — 2-е изд. — Москва : НАУКА, 1976. — С. 512.
15. *Грэхем, Р. Л.* Конкретная математика : Математические основы информатики / Р. Л. Грэхем, Д. Э. Кнут, О. Паташник. — 2-е изд. — И. Д. Вильямс, 2018. — С. 784.
16. *Думанский, С. А.* Устойчивость стержня из сплавов с памятью формы при обратном фазовом превращении под действием постоянной нагрузки / С. А. Думанский // 7-я всероссийская научная конференция "Механика композиционных материалов и конструкций, сложных и гетерогенных сред" им. И.Ф. Образцова и Ю.Г. Яновского. — 11.2017. — С. 74—76.
17. *Думанский, С. А.* Решение дважды связанной задачи о потере устойчивости стержнем из сплавов с памятью формы при обратном фазовом превращении с учетом разностойкости / С. А. Думанский // 8-я всероссийская научная конференция "Механика композиционных материалов и конструкций, сложных и гетерогенных сред" им. И.Ф. Образцова и Ю.Г. Яновского. — 12.2018. — С. 29.
18. *Думанский, С. А.* Решение дважды связанной задачи о потере устойчивости стержнем из сплавов с памятью формы при обратном фазовом превращении учитывающее разностойкость / С. А. Думанский // Третья международная конференция: "Деформирование и разрушение композиционных материалов и конструкций". — Ижевский институт компьютерных исследований (Ижевск), 2018. — С. 160—162.
19. *Думанский, С. А.* Анализ устойчивости стержня круглого поперечного сечения из сплавов с памятью формы при обратном фазовом превращении / С. А. Думанский // Международная инновационная конференция молодых учёных и студентов по современным проблемам машиноведения МИКМУС-2019. — 2019.
20. *Думанский, С. А.* Исследование потери устойчивости стержня круглого поперечного сечения из сплавов с памятью формы вследствие обратного фазового превращения под действием постоянной нагрузки / С. А. Думанский // 9-я всероссийская научная конференция "Механика композиционных материалов и конструкций, сложных и гетерогенных сред" им. И.Ф. Образцова и Ю.Г. Яновского. — 2019. — С. 31—32.
21. *Думанский, С. А.* Устойчивость стержней из сплавов с памятью формы при обратном фазовом превращении для растягивающих начальных фазово-структурных деформаций / С. А. Думанский // Второй международный форум "Ключевые тренды в композитах: наука и технологии". — 2019.
22. *Думанский, С. А.* Устойчивость тонкой прямоугольной пластинки из Сплавов с Памятью Формы при прямом фазовом превращении под действием постоянной нагрузки / С. А. Думанский // Международная научная конференция студентов, аспирантов и молодых учёных "Ломоносов-2020". — 11.2020.
23. *Думанский, С. А.* Анализ устойчивости стойки Шенли на стержнях из сплавов с памятью формы при обратном фазовом превращении в рамках объединенной модели фазово-структурного деформирования / С. А. Думанский // Механика композиционных материалов и конструкций. — 2021. — Т. 27, № 4. — С. 523—543.
24. *Думанский, С. А.* Stability of a rectangular Shape Memory Alloy plate during the forward phase transition for thermomechanically coupled statement / С. А. Думанский // Междуна-

- ная научно-техническая конференция ”Современные направления и перспективы развития технологий обработки и оборудования в машиностроении 2021” (ICMTMTE 2021). — СевГУ.-Севастополь, 2021.
25. *Думанский, С. А.* Анализ устойчивости стойки Шенли на стержнях из сплавов с памятью формы при обратном фазовом превращении в рамках объединенной модели фазово-структурного деформирования / С. А. Думанский // XI Всероссийская научная конференция ”Механика композиционных материалов и конструкций, сложных и гетерогенных сред” им. И.Ф. Образцова и Ю.Г. Яновского. — 11.2021.
 26. *Думанский, С. А.* Изучение устойчивости прямоугольных пластин из сплавов с памятью формы при прямом фазовом превращении в концепции фиксированной внешней нагрузки / С. А. Думанский // Международная научная конференция студентов, аспирантов и молодых учёных ”Ломоносов-2021”. — 04.2021.
 27. *Думанский, С. А.* Дважды связанная постановка задачи о потере устойчивости вызванной обратным термоупругим фазовым превращением в сплаве с памятью формы / С. А. Думанский, А. А. Мовчан // Известия Российской академии наук. Механика твердого тела. — 2017. — № 5. — С. 37—48.
 28. *Думанский, С. А.* Потеря устойчивости стержня из сплава с памятью формы, вызванная обратным мартенситным превращением / С. А. Думанский, А. А. Мовчан // Известия Российской академии наук. Механика твердого тела. — 2019. — № 4. — С. 94—108.
 29. *Жаворонок, С. И.* Решение задач о потере устойчивости и закритическом деформировании стержня с эффектом памяти в процессе фазового перехода / С. И. Жаворонок, Д. В. Нуштаев // Сборник трудов 7-й всероссийской научной конференции с международным участием им. И.Ф. Образцова и Ю.Г. Яновского. — 2017. — С. 86—89.
 30. *Зорич, В. А.* Математический анализ : Часть I / В. А. Зорич. — 10-е изд. — МЦНМО, 2019. — 564 с.
 31. *Зубчанинов, В. Г.* Устойчивость и пластичность : Устойчивость / В. Г. Зубчанинов. — Физматлит, 2007. — 446 с.
 32. *Ильюшин, А. А.* Пластичность : Часть первая. Уруго-пластические деформации / А. А. Ильюшин. — Государственное издательство технико-теоретической литературы, 1948. — 376 с.
 33. *Калиткин, Н. Н.* Численные методы : Численный анализ. Книга 1 / Н. Н. Калиткин, Е. А. Альшина. — Издательский центр Академия, 2013. — 304 с.
 34. *Калиткин, Н. Н.* Численные методы : Методы математической физики. Книга 2 / Н. Н. Калиткин, П. В. Корякин. — Издательский центр Академия, 2013. — С. 304.
 35. *Качанов, Л. М.* Основы теории пластичности / Л. М. Качанов. — 2-е изд. — НАУКА, 1969. — 420 с.
 36. *Кнетс, И. В.* Основные современные направления в математической теории пластичности / И. В. Кнетс. — Зинатне, 1971. — 146 с.
 37. *Корте, Б.* Комбинаторная оптимизация : Теория и алгоритмы / Б. Корте, Й. Фиген. — МЦНМО, 2015. — С. 720.

38. *Кохендерфер, М. Д.* Алгоритмы оптимизации / М. Д. Кохендерфер, Т. А. Уилер. — Диалектика, 2020. — С. 528.
39. *Курдюмов, Г. В.* О термоупругом равновесии при мартенситном превращении / Г. В. Курдюмов, Л. Г. Хандрос // ДАН СССР. — 1949. — Т. 66, № 2. — С. 211—215.
40. *Лихачев, В. А.* Эффект ориентированного превращения в никелиде титана / В. А. Лихачев, Ю. Патрикеев, В. Щуплецов // Физика металлов и металловедение. — 1986. — Т. 61, № 1. — С. 121—126.
41. *Малыгин, Г. А.* Эйлера неустойчивость двунаправленного эффекта памяти формы в ленте из никелида титана / Г. А. Малыгин // Физика твердого тела. — 2003. — Т. 45, № 12. — С. 2233—2237.
42. *Мишустин, И. В.* Аналог теории пластического течения для описания деформации мартенситной неупругости в сплавах с памятью формы / И. В. Мишустин, А. А. Мовчан // Механика твердого тела. — 2015. — № 2. — С. 78—95.
43. *Мовчан, А. А.* Модель влияния фазового механизма деформирования на структурный в сплавах с памятью формы / А. А. Мовчан // Деформация и разрушение материалов. — 2019. — № 7. — С. 14—23.
44. *Мовчан, А. А.* Объединенная модель фазово-структурного деформирования сплавов с памятью формы / А. А. Мовчан // Деформация и разрушение материалов. — 2020. — № 11. — С. 2—10.
45. *Мовчан, А. А.* Модель неупругого деформирования сплавов с памятью формы / А. А. Мовчан // Деформация и разрушение материалов. — 2021. — № 3. — С. 8—17.
46. *Мовчан, А. А.* Дважды связная задача о потере устойчивости стойки Шенли на стержнях из сплава с памятью формы при обратном мартенситном превращении в заневоленном состоянии / А. А. Мовчан, С. А. Думанский // Деформация и разрушение материалов. — 2017. — № 12. — С. 8—15.
47. *Мовчан, А. А.* Учет выделения и поглощения латентного тепла фазовых переходов и диссипативных эффектов при анализе устойчивости элементов из сплавов с памятью формы / А. А. Мовчан, С. А. Думанский // Вестник Тамбовского университета. Серия: Естественные и технические науки. — 2018. — Т. 23, № 123—1. — С. 454—458.
48. *Мовчан, А. А.* Связная и дважды связная задачи устойчивости для сплавов с памятью формы / А. А. Мовчан, С. А. Думанский, С. А. Казарина // Деформация и разрушение материалов. — 2017. — № 6. — С. 2—8.
49. *Мовчан, А. А.* Потеря устойчивости, вызванная фазовыми и структурными превращениями в сплавах с памятью формы: экспериментальные исследования, основные концепции, постановка и решение краевых задач / А. А. Мовчан, С. А. Думанский, С. А. Казарина, А. Л. Сильченко // XII Всероссийский съезд по фундаментальным проблемам теоретической и прикладной механики: сборник трудов в 4 томах. — Уфа, 2019. — С. 1221—1223.
50. *Мовчан, А. А.* Экспериментальные данные и результаты моделирования явления потери устойчивости, вызванной фазовыми и структурными превращениями в сплавах с памятью формы / А. А. Мовчан, С. А. Думанский, С. А. Казарина, А. Л. Сильченко // Механика композиционных материалов и конструкций. — 2019. — Т. 25, № 3. — С. 381—393.

51. *Мовчан, А. А.* Экспериментальное исследование явления потери устойчивости, вызванной термоупругими фазовыми превращениями под действием сжимающих напряжений / А. А. Мовчан, С. А. Казарина // Проблемы машиностроения и надежности машин. — 2002. — № 6. — С. 82—89.
52. *Мовчан, А. А.* Материалы с памятью формы как объект механики деформируемого твердого тела: экспериментальные исследования, определяющие соотношения, решение краевых задач / А. А. Мовчан, С. А. Казарина // Физическая мезомеханика. — 2012. — Т. 1, вып. 15. — С. 105—116.
53. *Мовчан, А. А.* Диаграммы мартенситной неупругости никелида титана при растяжении, сжатии и сжатии после растяжения / А. А. Мовчан, С. А. Казарина, А. Л. Сильченко // Механика композиционных материалов и конструкций. — 2015. — Т. 21, № 1. — С. 83—93.
54. *Мовчан, А. А.* Экспериментальная идентификация модели нелинейного деформирования сплавов с памятью формы при фазовых и структурных превращениях / А. А. Мовчан, С. А. Казарина, А. Л. Сильченко // Деформация и разрушение материалов. — 2018. — № 12. — С. 2—11.
55. *Мовчан, А. А.* Потеря устойчивости стержня круглого поперечного сечения из никелида титана, вызванная прямым термоупругим мартенситным превращением / А. А. Мовчан, С. А. Казарина, А. Л. Сильченко // Деформация и разрушение материалов. — 2019. — № 10. — С. 2—9.
56. *Мовчан, А. А.* Эффект перекрестного упрочнения сплава с памятью формы при сжатии / А. А. Мовчан, С. А. Казарина, А. Л. Сильченко // Деформация и разрушение материалов. — 2019. — № 4. — С. 2—9.
57. *Мовчан, А. А.* Экспериментальное исследование потери устойчивости стержней из никелида титана, вызванной обратным термоупругим мартенситным превращением / А. А. Мовчан, С. А. Казарина, А. Л. Сильченко // Деформация и разрушение материалов. — 2020. — № 9. — С. 2—7.
58. *Мовчан, А. А.* Экспериментальное исследование и теоретический анализ потери устойчивости пластин из никелида титана, обусловленной прямым термоупругим фазовым превращением под действием сжимающей нагрузки / А. А. Мовчан, С. А. Казарина, А. Л. Сильченко // Деформация и разрушение материалов. — 2023. — № 7. — С. 2—11.
59. *Мовчан, А. А.* Влияние структурного превращения и нелинейности процесса деформирования на устойчивость стержня из сплава с памятью формы / А. А. Мовчан, И. А. Мовчан, Л. Г. Сильченко // Механика твердого тела. — 2010. — № 6. — С. 137—147.
60. *Мовчан, А. А.* Микромеханическая модель нелинейного деформирования сплавов с памятью формы при фазовых и структурных превращениях / А. А. Мовчан, И. А. Мовчан, Л. Г. Сильченко // Механика твердого тела. — 2010. — № 3. — С. 118—130.
61. *Мовчан, А. А.* Устойчивость кольцевой пластины из сплава с памятью формы / А. А. Мовчан, И. А. Мовчан, Л. Г. Сильченко // Прикладная механика и техническая физика. — 2011. — № 2. — С. 144—155.

62. *Мовчан, А. А.* Устойчивость стержня, претерпевающего прямое или обратное мартенситные превращения под действием сжимающих напряжений / А. А. Мовчан, Л. Г. Сильченко // Прикладная механика и техническая физика. — 2003. — Т. 44, № 3. — С. 169—178.
63. *Мовчан, А. А.* Аналитическое решение связанной задачи об устойчивости пластины из сплава с памятью формы при обратном мартенситном превращении / А. А. Мовчан, Л. Г. Сильченко // Механика твердого тела. — 2004. — № 5. — С. 164—178.
64. *Мовчан, А. А.* Об устойчивости пластины из сплава с памятью формы при прямом термоупругом фазовом превращении / А. А. Мовчан, Л. Г. Сильченко // Прикладная математика и механика. — 2004. — Т. 68, № 1. — С. 60—72.
65. *Мовчан, А. А.* Устойчивость круглой пластины из сплава с памятью формы при прямом мартенситном превращении с учётом переменности поперечного размера зоны дополнительного фазового перехода / А. А. Мовчан, Л. Г. Сильченко // Прикладная математика и механика. — 2006. — Т. 70, № 5. — С. 871—883.
66. *Мовчан, А. А.* Потеря устойчивости круглой пластины из сплава с памятью формы, вызванная обратным термоупругим мартенситным превращением / А. А. Мовчан, Л. Г. Сильченко // Механика твердого тела. — 2008. — № 1. — С. 117—130.
67. *Мовчан, А. А.* Учет явления мартенситной неупругости при обратном фазовом превращении в сплавах с памятью формы / А. А. Мовчан, Л. Г. Сильченко // Механика твердого тела. — 2011. — № 2. — С. 44—56.
68. *Мовчан, А. А.* Анализ устойчивости при прямом термоупругом превращении под действием сжимающих напряжений / А. А. Мовчан, Л. Г. Сильченко, Т. Л. Сильченко // Механика твердого тела. — 2004. — № 2. — С. 132.
69. *Нестеров, Ю. Е.* Методы выпуклой оптимизации / Ю. Е. Нестеров. — МЦНМО, 2010. — 281 с.
70. *Новожилов, В. В.* Линейная теория тонких оболочек / В. В. Новожилов, К. Ф. Черных, Е. И. Михайловский. — Политехника, 1991. — С. 656.
71. *Пановко, Я. Г.* Устойчивость и колебания упругих систем : Современные концепции, парадоксы и ошибки / Я. Г. Пановко, И. И. Губанова. — 7-е изд. — ЛЕНАНД, 2015. — 352 с.
72. *Поляк, Б. Т.* Введение в оптимизацию / Б. Т. Поляк. — Наука, 1983. — С. 384.
73. *Работнов, Ю. Н.* Механика деформируемого твердого тела / Ю. Н. Работнов. — 3-е изд. — М.: ЛЕНАНД, 2019. — 712 с.
74. *Роговой, А. А.* Моделирование упруго-неупругих процессов при конечных деформациях в сплавах с памятью формы / А. А. Роговой, О. С. Столбова // Прикладная механика и техническая физика. — 2013. — Т. 54, № 2. — С. 148—162.
75. *Роговой, А. А.* Моделирование термомеханических процессов в ферромагнитных сплавах с памятью формы при конечных деформациях / А. А. Роговой, О. С. Столбова // Вестник Пермского национального исследовательского политехнического университета. Прикладная математика и механика. — 2014. — № 1. — С. 27—38.
76. *Роговой, А. А.* Конечные деформации в сплавах и полимерах с памятью формы / А. А. Роговой, О. С. Столбова // Ученые записки Комсомольского-на-Амуре государственного технического университета. — 2018. — Т. 1, № 35. — С. 6—17.

77. Саймон, Д. Алгоритмы эволюционной оптимизации / Д. Саймон. — "ДМК" Пресс, 2020. — С. 940.
78. Седов, Л. И. Механика сплошной среды : в 2 т. / Л. И. Седов. — 5-е изд. — М.: Наука, 1994.
79. Столяров, А. В. Введение в язык C++ : Учебное пособие / А. В. Столяров. — ДМК Пресс, 2021. — 160 с.
80. Страуструп, Б. Язык программирования C++ : Краткий курс / Б. Страуструп. — 2-е изд. — ООО "Диалектика", 2019. — 320 с.
81. Тимошенко, С. П. Устойчивость стержней, пластин и оболочек / С. П. Тимошенко. — НАУКА, 1967. — 808 с.
82. Тимошенко, С. П. Теория упругости / С. П. Тимошенко, Д. Гудьер. — НАУКА, 1975. — 576 с.
83. Тихонов, А. Н. Уравнения математической физики / А. Н. Тихонов, А. А. Самарский. — 6-е изд. — МГУ, 1999. — С. 798.
84. Тыртышников, Е. Е. Основы алгебры / Е. Е. Тыртышников. — МОСКВА ФИЗМАТЛИТ, 2017.
85. Уильямс, Э. C++ : Практика многопоточного программирования / Э. Уильямс. — 2-е изд. — Питер, 2020. — 640 с.
86. Феллер, В. Введение в теорию вероятностей и ее приложения. Т. 2 / В. Феллер. — 2-е изд. — Москва "МИР", 1984. — С. 738.
87. Фихтенгольц, Г. М. Основы математического анализа : Часть 1 / Г. М. Фихтенгольц. — 9-е изд. — Лань, 2008. — 448 с.
88. Цзы-Де, В. Прикладная теория упругости / В. Цзы-Де. — Государственное издательство физико-математической литературы, 1959. — 400 с.
89. Шкутин, Л. И. Анализ разветвленных форм изгиба арок и панелей / Л. И. Шкутин // Прикладная механика и техническая физика. — 2009. — Т. 50, № 6. — С. 155—160.
90. Эльсгольц, Л. Э. Лекции по теории обыкновенных дифференциальных уравнений / Л. Э. Эльсгольц. — Книжный дом ЛИБРОКОМ, 2017. — С. 240.
91. Эльсгольц, Л. Э. Вариационное исчисление / Л. Э. Эльсгольц. — ЛКИ, 2019. — С. 208.
92. Эльсгольц, Л. Э. Дифференциальные уравнения / Л. Э. Эльсгольц. — 9-е изд. — ЛЕНАНД, 2021. — С. 312.
93. Amini, M. R. Dynamic buckling and recovery of thin cylindrical shape memory shells / M. R. Amini, S. Nemat-Nasser // Smart Structures and Materials 2005: Active Materials: Behavior and Mechanics. Vol. 5761 / ed. by W. D. Armstrong. — International Society for Optics, Photonics. SPIE, 2005. — P. 450—453.
94. Aris, M. S. An experimental investigation into the deployment of 3-D, finned wing and shape memory alloy vortex generators in a forced air convection heat pipe fin stack / M. S. Aris, R. McGlen, I. Owen, C. J. Sutcliffe // Applied Thermal Engineering. — 2011. — Vol. 31, no. 14. — P. 2230—2240.
95. Auricchio, F. A macroscopic 1D model for shape memory alloys including asymmetric behaviors and transformation-dependent elastic properties / F. Auricchio, A. Reali, U. Stefanelli // Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering. — 2009. — Vol. 198, no. 17. — P. 1631—1637.

96. *Bazant, Z. P. Structural stability / Z. P. Bazant // International Journal of Solids and Structures. — 2000. — Vol. 37, no. 1. — P. 55—67.*
97. *Bazant, Z. P. Stability of structures : Elastic, inelastic, fracture and damage theories / Z. P. Bazant, L. Cedolin. — World Scientific Publishing, 2010. — 1038 p.*
98. *Brent, R. P. Algorithms for Minimization Without Derivatives / R. P. Brent. — Prentice-Hall, 1973. — P. 195.*
99. *Buehler, W. J. Effect of Low-Temperature Phase Changes on the Mechanical Properties of Alloys near Composition TiNi / W. J. Buehler, J. V. Gilfrich, R. C. Wiley // Journal of Applied Physics. — 1963. — Vol. 34, no. 5. — P. 1475—1477.*
100. *Calkins, F. T. Shape Memory Alloy Actuated Vortex Generators: Development and Flight Test / F. T. Calkins [et al.] // SMST 2022: Extended Abstracts from the International Conference on Shape Memory and Superelastic Technologies. — 2022. — P. 6—8. — (Shape Memory Proceedings).*
101. *Chang, W.-S. Use of shape-memory alloys in construction: a critical review / W.-S. Chang, Y. Araki // Proceedings of the Institution of Civil Engineers - Civil Engineering. — 2016. — Vol. 169, no. 2. — P. 87—95.*
102. *Cisse, C. A review of constitutive models and modeling techniques for shape memory alloys / C. Cisse, W. Zaki, B. Z. Tarak // International Journal of Plasticity. — 2016. — Vol. 76. — P. 244—284.*
103. *Coleman, B. D. Thermodynamics with Internal State Variables / B. D. Coleman, M. E. Gurtin // The Journal of Chemical Physics. — 1967. — Vol. 47, no. 2. — P. 597—613.*
104. *Concilio, A. Shape Memory Alloy Engineering : For Aerospace, Structural, and Biomedical Applications / A. Concilio [et al.]. — Elsevier, 2021.*
105. *Dolce, M. Implementation and testing of passive control devices based on shape memory alloys / M. Dolce, D. Cardone, R. Marnetto // Earthquake Engineering & Structural Dynamics. — 2000. — Vol. 29, no. 7. — P. 945—968.*
106. *Duerig, T. W. Engineering aspects of shape memory alloys / T. W. Duerig, K. N. Melton, D. Stöckel, C. M. Wayman. — Butterworth-heinemann, 1990.*
107. *Dumanskiy, S. A. Stability analysis of a round cross-section rod from Shape Memory Alloys at reverse phase transition / S. A. Dumanskiy // IOP Conference Series: Materials Science and Engineering. — Krakow, 2020. — Vol. 747. — P. 012001.*
108. *Dumanskiy, S. A. Stability of Shape Memory Alloy rods under reverse phase transformation in case of initial tensile phase-structural strains / S. A. Dumanskiy // IOP Conference Series: Materials Science and Engineering. — Krakow, 2020. — Vol. 934. — P. 012034—012034.*
109. *Dumanskiy, S. A. Stability of a Rectangular Shape Memory Alloy Plate during the Forward Phase Transition for Thermomechanically Coupled Statement / S. A. Dumanskiy // Key Engineering Materials. — 2022. — Vol. 910. — P. 1104—1114.*

110. *Flugge, W.* Tensor Analysis and Continuum Mechanics / W. Flugge. — 1st ed. — Springer-Verlag, 1972.
111. *El-Ghazali, T.* Metaheuristics: from design to implementation / T. El-Ghazali. — John Wiley & Sons, 2009.
112. *Gottschling, P.* Discovering Modern C++ : An Intensive Course for Scientists, Engineers, and Programmers / P. Gottschling. — 2nd ed. — Addison-Wesley Professional, 2021. — 523 p.
113. *Han, W.* Plasticity : Mathematical Theory and Numerical Analysis / W. Han, B. D. Reddy. — 2nd ed. — Springer, 2013. — 424 p.
114. *Hartl, D. J.* Aerospace applications of shape memory alloys / D. J. Hartl, D. C. Lagoudas // Proceedings of the Institution of Mechanical Engineers, Part G: Journal of Aerospace Engineering. — 2007. — Vol. 221, no. 4. — P. 535—552.
115. *Hodges, D. H.* Nonlinear Composite Beam Theory / D. H. Hodges. — American Institute of Aeronautics, Astronautics, 2006. — 307 p.
116. *Jiang, D.* Buckling and recovery of NiTi tubes under axial compression / D. Jiang, N. J. Bechle, C. M. Landis, S. Kyriakides // International Journal of Solids and Structures. — 2016. — Vol. 80. — P. 52—63.
117. *Kibey, S.* Energy landscape for martensitic phase transformation in shape memory NiTi / S. Kibey, H. Sehitoglu, D. D. Johnson // Acta Materialia. — 2009. — Vol. 57, no. 5. — P. 1624—1629.
118. *Kirkpatrick, S.* Optimization by simulated annealing / S. Kirkpatrick, C. D. Gelatt Jr, M. P. Vecchi // science. — 1983. — Vol. 220, no. 4598. — P. 671—680.
119. *Kumar, P.* Introduction to Shape Memory Alloys / P. Kumar, D. Lagoudas // Shape Memory Alloys: Modeling and Engineering Applications. — Springer US, 2008. — P. 1—51.
120. *Kunavar, J.* Geometry optimization in buckling of a shape memory alloy column due to constrained recovery / J. Kunavar, F. Kosel, A. Pukšič, T. Videnič // Journal of Intelligent Material Systems and Structures. — 2012. — Vol. 23, no. 1. — P. 65—76.
121. *Lagoudas, D. C.* Applications of shape memory alloys to bioengineering and biomedical technology / D. C. Lagoudas, O. K. Rediniotis, M. M. Khan // Scattering Theory and Biomedical Engineering Modelling and Applications. — 2000. — P. 195—207.
122. *Lagoudas, D. C.* Constitutive model for the numerical analysis of phase transformation in polycrystalline shape memory alloys / D. C. Lagoudas [et al.] // International Journal of Plasticity. — 2012. — Vol. 32/33. — P. 155—183.
123. *Lemaitre, J.* Mechanics of solid materials / J. Lemaitre, J. L. Chaboche. — Cambridge University Press, 1990.
124. *Lexcellent, C.* Shape-memory Alloys Handbook / C. Lexcellent. — Wiley, 2013. — 379 p.
125. *Liu, Y.* Asymmetry of stress–strain curves under tension and compression for NiTi shape memory alloys / Y. Liu, Z. Xie, J. Van Humbeeck, L. Delaey // Acta Materialia. — 1998. — Vol. 46, no. 12. — P. 4325—4338.

126. *Liu, Y.* Detwinning in shape memory alloy / Y. Liu, Z. Xie // Progress in smart materials and structures. — 2007. — Vol. 3. — P. 29.
127. *Lubliner, J.* Plasticity Theory / J. Lubliner. — Dover Publications, 2008. — 544 p.
128. *Melton, K. N.* Fatigue of NITI thermoelastic martensites / K. N. Melton, O. Mercier // Acta Metallurgica. — 1979. — Vol. 27, no. 1. — P. 137—144.
129. *Michailidis, P.* Superelasticity and stability of a shape memory alloy hexagonal honeycomb under in-plane compression / P. Michailidis, N. Triantafyllidis, J. A. Shaw, D. S. Grummon // International Journal of Solids and Structures. — 2009. — Vol. 46, no. 13. — P. 2724—2738.
130. *Morgan, N. B.* Medical shape memory alloy applications—the market and its products / N. B. Morgan // Materials Science and Engineering: A. — 2004. — Vol. 378, no. 1. — P. 16—23. — European Symposium on Martensitic Transformation and Shape-Memory.
131. *Movchan, A. A.* Solution of the twice-coupled problem of instability of a rod of shape memory alloy caused by a direct thermo-elastic phase transformation / A. A. Movchan, S. A. Dumansky // Journal of Applied Mechanics and Technical Physics. — 2018. — Vol. 59, issue 4. — P. 716—723.
132. *Nemat-Nasser, S.* Experimental observation of high-rate buckling of thin cylindrical shape-memory shells / S. Nemat-Nasser, J. Y. Choi, J. B. Isaacs, D. W. Lischer // Smart Structures and Materials 2005: Active Materials: Behavior and Mechanics. Vol. 5761 / ed. by W. D. Armstrong. — International Society for Optics, Photonics. SPIE, 2005. — P. 347—354.
133. *Nemat-Nasser, S.* Quasi-static and dynamic buckling of thin cylindrical shape-memory shells / S. Nemat-Nasser, J. Y. Choi, J. B. Isaacs, D. W. Lischer // Journal of Applied Mechanics. — 2006. — Vol. 73.
134. *Otsuka, K.* Physical metallurgy of Ti–Ni-based shape memory alloys / K. Otsuka, X. Ren // Progress in Materials Science. — 2005. — Vol. 50, no. 5. — P. 511—678.
135. *Otsuka, K.* Shape Memory Materials / K. Otsuka, C. M. Wayman. — Cambridge University Press, 1998. — P. 284.
136. *Ottosen, N. S.* The mechanics of constitutive modelling / N. S. Ottosen, M. Ristinmaa. — Elsevier, 2005.
137. *Rahman, M. A.* Effect of Cross Section Geometry on the Response of an SMA Column / M. A. Rahman, S. R. Akanda, M. A. Hossain // Journal of Intelligent Material Systems and Structures. — 2008. — Vol. 19, no. 2. — P. 243—252.
138. *Rahman, M. A.* Buckling and postbuckling characteristics of the superelastic SMA columns / M. A. Rahman, J. Qiu, J. Tani // International Journal of Solids and Structures. — 2001. — Vol. 38, no. 50. — P. 9253—9265.
139. *Rahman, M. A.* Buckling and Postbuckling Characteristics of the Superelastic SMA Columns – Numerical Simulation / M. A. Rahman, J. Qiu, J. Tani // Journal of Intelligent Material Systems and Structures. — 2005. — Vol. 16, no. 9. — P. 691—702.

140. *Rahman, M. A.* Buckling and Postbuckling Characteristics of the Superelastic SMA Columns – Numerical Simulation / M. A. Rahman, J. Tani // *Applied Mechanics and Engineering*. — 2006. — Vol. 11, no. 4. — P. 941–955.
141. *Richter, F.* Finite-Element Simulation of the Anti-Buckling-Effect of a Shape Memory Alloy Bar / F. Richter, O. Kastner, G. Eggeler // *Journal of Materials Engineering and Performance*. — 2011. — Vol. 20, no. 4. — P. 719–730.
142. *Rogovoy, A. A.* Mathematical Modeling of Finite Deformations in Shape Memory Materials / A. A. Rogovoy, O. S. Stolbova // *Materials Today: Proceedings*. — 2017. — Vol. 4. — P. 4611–4615.
143. *Rogovoy, A. A.* Mathematical Modeling of Finite Deformations in Shape Memory Materials / A. A. Rogovoy, O. S. Stolbova // *Lobachevskii Journal of Mathematics*. — 2021. — Vol. 42, no. 8. — P. 2037–2046.
144. *Saburi, T.* Ti-Ni shape memory alloys / T. Saburi // *Shape Memory Materials*. — Cambridge University Press, 1998. — P. 284.
145. *Scalet, G.* A three-dimensional phenomenological model for shape memory alloys including two-way shape memory effect and plasticity / G. Scalet [et al.] // *Mechanics of Materials*. — 2019. — Vol. 136. — P. 103085.
146. *Shanley, F. R.* Inelastic Column Theory / F. R. Shanley // *Journal of the Aeronautical Sciences*. — 1947. — Vol. 14, no. 5. — P. 261–268.
147. *Shape Memory Alloys : Modeling and Engineering Applications* / ed. by D. C. Lagoudas. — Springer, Boston, MA, 2008. — P. 436.
148. *Shaw, J. A.* Initiation and propagation of localized deformation in elasto-plastic strips under uniaxial tension / J. A. Shaw, S. Kyriakides // *International Journal of Plasticity*. — 1997. — Vol. 13, no. 10. — P. 837–871.
149. *Shaw, J. A.* Thermomechanical aspects of NiTi / J. A. Shaw, S. Kyriakides // *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*. — 1995. — Vol. 43, no. 8. — P. 1243–1281.
150. *Skiena, S. S.* The Algorithm Design Manual / S. S. Skiena. — 3rd ed. — Springer Cham, 2020. — P. 793.
151. *Tang, Z.* Experimental investigation of axial impact buckling response of pseudo-elastic NiTi cylindrical shells / Z. Tang, D. Li // *International Journal of Impact Engineering*. — 2012. — Vol. 39, no. 1. — P. 28–41.
152. *Tang, Z.* Quasi-static axial buckling behavior of NiTi thin-walled cylindrical shells / Z. Tang, D. Li // *Thin-Walled Structures*. — 2012. — Vol. 51. — P. 130–138.
153. *Thamburaja, P.* Constitutive equations for martensitic reorientation and detwinning in shape-memory alloys / P. Thamburaja // *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*. — 2005. — Vol. 53, no. 4. — P. 825–856.
154. *Uchil, J.* Thermal expansion in various phases of Nitinol using TMA / J. Uchil [et al.] // *Physica B: Condensed Matter*. — 1999. — Vol. 270, no. 3. — P. 289–297.

155. *Urshiyama, Y.* Buckling of Shape Memory Alloy Columns / Y. Urshiyama, D. Lewinnek, J. Qiu, J. Tani // JSME International Journal. — 2003. — Vol. 46, no. 1. — P. 60—67.
156. *Van Humbeeck, J.* Non-medical applications of shape memory alloys / J. Van Humbeeck // Materials Science and Engineering: A. — 1999. — Vol. 273—275. — P. 134—148.
157. *Volkov, A. E.* Model of the Evolution of Deformation Defects and Irreversible Strain at Thermal Cycling of Stressed TiNi Alloy Specimen / A. E. Volkov, F. S. Belyaev, M. E. Evard, N. A. Volkova // MATEC Web of Conferences. — 2015. — Vol. 33. — P. 03013.
158. *Waitz, T.* Martensitic phase transformations in nanocrystalline NiTi studied by TEM / T. Waitz, V. Kazykhanov, H. P. Karnthaler // Acta Materialia. — 2004. — Vol. 52, no. 1. — P. 137—147.
159. *Watkins, R. T.* Uniaxial, pure bending, and column buckling experiments on superelastic NiTi rods and tubes / R. T. Watkins, B. Reedlunn, S. Daly, J. A. Shaw. — 2018.
160. *Williams, E. A.* Control of an automotive shape memory alloy mirror actuator / E. A. Williams, G. Shaw, M. Elahinia // Mechatronics. — 2010. — Vol. 20, no. 5. — P. 527—534.
161. *Wolpert, D. H.* No free lunch theorems for optimization / D. H. Wolpert, W. G. Macready // IEEE transactions on evolutionary computation. — 1997. — Vol. 1, no. 1. — P. 67—82.
162. *Yamauchi, K.* Shape Memory and Superelastic Alloys : Applications and Technologies / K. Yamauchi, I. Ohkata, K. Tsuchiya, S. Miyazaki. — Woodhead Publishing Series in Metals, Surface Engineering, 2011.
163. *Ziolkowski, A.* Pseudoelasticity of shape memory alloys: theory and experimental studies / A. Ziolkowski. — Butterworth-Heinemann, 2015.

Приложение А

Пропорциональное нагружение

Будем называть механическое нагружение пропорциональным, если в каждый момент девиатор тензора напряжений может быть представлен в виде линейной функции одной переменной [35]:

$$\sigma'_{ij} = \sigma \sigma_{ij}^0 \quad (\text{A.1})$$

σ_{ij}^0 – направляющий тензор девиатора напряжений, все компоненты которого являются безразмерными константами, σ – параметр нагружения, имеющий размерность напряжений.

Без ограничения общности можно считать, что для направляющего тензора σ_{ij}^0 выполняется условие нормировки относительно интенсивности напряжений:

$$\sigma_i^0 = \sqrt{\frac{3}{2} \sigma_{ij}^0 \sigma_{ij}^0} = 1, \quad \sigma_i = |\sigma|$$

Из-за структуры определяющих соотношений, описанных в разделе 2.2, деформации, накапливаемые при пропорциональном нагружении, также меняются пропорциональным образом:

$$\varepsilon_{ij}^{phst'} = \varepsilon^{phst} \varepsilon_{ij}^0 \quad (\text{A.2})$$

ε_{ij}^0 – направляющий тензор девиатора фазово-структурных деформаций, ε^{phst} – параметр деформирования.

Условие нормировки для направляющего тензора ε_{ij}^0 имеет следующий вид:

$$\sqrt{\frac{2}{3} \varepsilon_{ij}^0 \varepsilon_{ij}^0} = 1, \quad \varepsilon_i^{phst} = |\varepsilon^{phst}|, \quad \varepsilon_{ij}^0 = \frac{3}{2} \sigma_{ij}^0$$

Приложение Б

Технические средства

Для проведения научных вычислений, таких как обработка экспериментальных данных и моделирование физических явлений, исследователи прибегают к помощи различных технических средств [112]. В широком смысле технические средства могут быть разделены на платформы и традиционные языки программирования. Обе категории подразумевают возможность использования специализированных библиотек, расширяющих встроенный функционал. Под платформами подразумеваются среды, написанные на традиционных языках программирования, предназначенные для интерактивного написания научных программ с помощью специально разработанных языков программирования.

Наиболее распространенными платформами для научных расчетов являются проприетарные MATLAB и Mathematica, а также свободно распространяемый Octave. Преимуществом при использовании платформ является возможность быстрого написания небольших программ, использующих встроенные библиотеки и графические интерфейсы. К недостаткам применения платформ можно отнести необходимость изучения узкоспециализированных языков программирования, функционал которых часто не обеспечивает достаточной гибкости для проектирования пользовательских программ со сложной структурой, и вынужденное повсеместное использование высокоуровневых абстракций, часто приводящее к проблемам с производительностью и отладкой.

В современном научном программировании используются широкий набор языков программирования, от высокоуровневых, не требующих непосредственного управления ресурсами компьютера, динамически типизируемых языков, примерами которых являются Julia и Python, до низкоуровневых статически типизируемых, таких как C. Особое место среди них занимает C++ [79; 80; 112], который с одной стороны является явно типизируемым и допускает управление ресурсами на машинном уровне, а с другой стороны позволяет реализовывать высокоуровневые абстракции. Помимо высокой производительности, наличия большого числа научных библиотек, написанных на этом языке, возможности использовать различные парадигмы программирования и абстракции при написании программ, данный язык в полной мере поддерживает многопоточные вычисления [85].

Из-за ограниченности имеющихся вычислительных ресурсов и относительно большого количества нетривиальных вычислений было принято решение использовать для реализации алгоритмов язык программирования C++ , а для построения графиков библиотеку Matplotlib языка программирования Python.

Приложение В

Оптимизация

Задача безусловной оптимизации [38] может быть поставлена при помощи определения пары (X, f) :

- Множество X – пространство поиска, формируемое допустимыми решениями
- Отображение $f : X \rightarrow Y$ – целевая функция¹

Целью оптимизации является поиск глобально оптимального решения:

$$\mathbf{x}^* = \arg \min_{\mathbf{x} \in X} f(\mathbf{x}) \quad (\text{B.1})$$

В данной работе множество X может быть как одномерным $X = X_q$, так и многомерным $X = X_q \times X_m \times X_n$. Критериальное пространство Y , напротив, всегда одномерно.

Помимо явно заданных областей изменения переменных в задаче оптимизации также могут присутствовать дополнительные условия или ограничения, которые представляются в виде системы равенств и/или неравенств:

$$\begin{cases} \mathbf{h}(\mathbf{x}) = 0 \\ \mathbf{g}(\mathbf{x}) < 0 \end{cases} \quad (\text{B.2})$$

В.1 Методы оптимизации

Оптимальное решение в случае дискретного ограниченного пространства поиска может быть найдено при помощи полного перебора. Данный подход применяется, когда оценка и сравнение всех допустимых решений может быть выполнено за приемлемое время.

Результат применения детерминированных методов, основанных на концепции локального поиска, сильно зависит от выбора начальных приближений и рельефа целевой функции [33]. Когда пространство поиска очень велико и информация о его структуре отсутствует, а стоимость вычисления целевой функции и/или ограничений являются высокими, для решения задачи оптимизации используют стохастические модификации локальных методов [33; 38] и эвристические стратегии поиска [77; 111]. Данные методы позволяют вместо глобально оптимального решения найти "достаточно качественное" решение, которое является наименьшим из найденных локальных оптимумов или лучшим из проверенных решений.

Математически доказано, что все алгоритмы оптимизации работают одинаково хорошо при усреднении по всем возможным задачам [161]. Поэтому при выборе метода минимизации для решения конкретной задачи следует использовать максимальное количество информации об упорядоченности пространства поиска, а также структуре целевой функции и ограничений.

¹В задачах минимизации также называемая функцией стоимости или ошибок.

В.1.1 Оптимизация непрерывных функций

В данной работе задачи минимизации гладких функций одной и двух переменных возникают при решении задач устойчивости (глава 4) и определении значений материальных констант, обеспечивающих наилучшую интерполяцию экспериментальных данных (пункт 2.3.2), соответственно.

Непрерывные задачи оптимизации можно решать при помощи дискретизации и применения исчерпывающего или эвристического поиска [37; 77], детерминированных локальных методов различных порядков [33], а также стохастических модификаций данных подходов [38].

Если целевая функция является дифференцируемой, то при ее минимизации рационально применять градиентные методы первого и второго порядков, которые позволяют быстро найти локальный, а при выполнении определенных условий [4; 69; 72] и глобальный, экстремум. Когда вычисление производных является дорогостоящей операцией и информация о рельефе целевой функции отсутствует вместо или совместно с дифференциальными методами высших порядков можно применять прямые методы нулевого порядка [98], не требующие вычисления производных.

Для поиска оптимальных значений одномерных и двухмерных функций использовались алгоритм Брента-Деккера [98] и линейный поиск, основанный на методе градиентного спуска [38], соответственно.

В.1.2 Дискретная многомерная оптимизация

Анализ устойчивости пластин, как было показано в разделе 4.4, сводится к минимизации функции двух дискретных переменных. Поиск решения существенно осложняется тем фактом, что каждая из данных переменных может принимать сколь угодно большие значения. Задачи такого типа могут, за счет искусственного ограничения пространства поиска, решаться при помощи методов комбинаторной оптимизации [37] или эвристических подходов [77; 118; 150].