МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
ИМЕНИ М.В. ЛОМОНОСОВА

На правах рукописи

Денисов Константин Юрьевич

Большие нижние локальные уклонения ветвящихся процессов в случайной среде

Специальность 1.1.4 —
Теория вероятностей и математическая статистика

Диссертация на соискание учёной степени
кандидата физико-математических наук

Научные руководители:
кандидат физико-математических наук,
доцент **Козлов Михаил Васильевич**,
кандидат физико-математических наук
Шкляев Александр Викторович

Москва — 2024

Оглавление

Введение

Актуальность темы. Диссертация посвящена большим уклонениям ветвящихся процессов в случайной среде (ВПСС). В работе рассматриваются ВПСС с геометрическим распределением числа потомков одной частицы (ВПССГ). Для данных процессов рассматривается асимптотика локальных вероятностей больших уклонений.

Изучение ветвящихся процессов в случайной среде началось с работ В. Смита и В. Вилкинсона [1] и К. Атрейи и С. Карлина [2]. Исторически наиболее удобным для изучения является случай ВПССГ — из ранних работ, рассматривающих данный случай, можно отметить, например, работы М.В. Козлова [3, 4]. Однако, в начале 21 века был сделан ряд значительных продвижений в общей теории больших уклонений для ВПСС без предположения геометричности распределения (см., например, [5], [6], [7]).

В данной работе будет рассматриваться только случай ВПССГ. Это существенное ограничение общности позволяет получить локальные предельные теоремы на основе результатов А. Агрести ([8, 9]). Полученная асимптотика вероятностей больших нижних уклонений для частного случая ВПССГ может быть использована для получения более общих результатов. Так, например, уже после написания данной работы вышла статья А.В. Шкляева [10], в которой один из наших результатов был обобщен на произвольное распределение числа потомков одной частицы. Кроме того, случай ВПССГ является важным случаем для приложения к теории случайных блужданий в случайной среде.

Для более полного ознакомления с теорией ветвящихся процессов в случайной среде читателю рекомендуется обратиться к книге В.А. Ватутина и Г. Кёрстинга [11].

Настоящая работа посвящена теории больших уклонений для ВПССГ.

Теория предельных теорем стала основой классической теории вероятностей. Методы, предложенные Г. Крамером [13], а именно, крамеровское преобразование мер, позволили расширить классические результаты в случае н.о.р. случайных величин на более широкую зону, включающую нормальные, умеренные и большие уклонения. С использованием крамеровского преобразования мер Р. Бахадур и Р. Рао [15] получили точную асимптотику больших уклонений для среднего сумм н.о.р. случайных величин. В той же задаче равномерная в крамеровской зоне асимптотика для сумм н.о.р. случайных величин была получена В.В. Петровым [16]. Отдельно отметим важные результаты Л. Шеппа [17] и Ч. Стоуна [18], которые получили интегро-локальную теорему о больших уклонениях, на которую в значительной мере опирается данная работа. В многомерном случае данная задача рассматривалась, например, А.А. Боровковым и А.А. Могульским [14].

Для более полного ознакомления с теорией больших уклонений читателю рекомендуется обратиться к книге А.А. Боровкова [19].

Для ветвящихся процессов в случайной среде хорошо изучена задача о больших верхних уклонениях размера популяции, то есть исследована асимптотика вероятностей $\mathbf{P}(Z_n > \exp(\theta n))$, где $\theta > \mu$, где μ — среднее шага сопровождающего блуждания, которое будет введено позднее. В частности, для ветвящихся процессов в случайной среде с геометрическим числом потомков асимптотика такого рода вероятностей была получена М.В. Козловым [20, 21], А.В. Шкляевым [22] и Д.В. Дмитрущенковым [23]. В общем случае (без предположения геометрического распределения числа потомков одной частицы) В. Бансайе и Ж. Берестицкий [24] получили логарифмическую асимптотику таких вероятностей. Затем рядом исследователей, таких как Д. Бурашевски и П. Дишевски [25], М.А. Струлёва и Е.И. Прокопенко [26] и А.В. Шкляев [27, 28, 29, 30], была получена и точная асимптотика вероятностей больших уклонений, а также описана траектория процесса при условии совершения им большого уклонения. Аналогичные результаты были получены А.В. Шкляевым [31] не только для ВПСС, но и для более общей модели ВПСС с частицами двух полов.

Задача о больших нижних уклонениях, то есть о нахождении асимптотики вероятностей $\mathbf{P}(1 \leq Z_n < \exp(\theta n))$, где $\theta < \mu$, исследована значительно хуже. Для этого случая В. Бансайе, К. Боингхофф и Ж. Берестицкий [32, 33, 34] получили только логарифмическую асимптотику. Отдельно отметим, что традиционно задача о больших нижних уклонениях формулируется только для надкритических ВПСС ($\mu > 0$), поэтому в данной работе большие нижние уклонения для $\mu \leq 0$ не рассматриваются.

Задача о больших уклонениях ВПСС в локальной форме, то есть об асимптотике вероятностей $\mathbf{P}(Z_n = \lfloor \exp(\theta n) \rfloor)$, также редко рассматривалась ранее, причём как для больших нижних уклонений, так и для больших верхних. В обоих случаях была получена только логарифмическая асимптотика и только для частных случаев. В. Бансайе и К. Боингхоффом [35], а также И. Грама с соавторами [36] была изучена асимптотика вероятностей $\mathbf{P}(Z_n = k)$, где k — константа, то есть для так называемых низких уровней. К. Боингхоффом [34] была изучена асимптотика для вероятностей $\mathbf{P}(Z_n = 1)$.

Цель работы. Целью работы является получение точной асимптотики локальных вероятностей $\mathbf{P}(Z_n = \lfloor \exp{(\theta n)} \rfloor)$ больших нижних уклонений (для $\theta < \mu$) для надкритического случая ($\mu > 0$), а также больших верхних уклонений (для $\theta > \mu$) для надкритического ($\mu > 0$), критического ($\mu = 0$), слабо и умеренно докритического ($\mu < 0, m(1) \geq 0$) и частично для строго докритического случаев ($\mu < 0, m(1) < 0$), где $m(1)$ — константа, которая будет определена далее.

Научная новизна. Впервые получена точная, а не логарифмическая асимптотика вероятностей больших нижних уклонений для надкритического ВПССГ. Также новым является рассмотрение в данной работе локальных вероятностей $\mathbf{P}(Z_n = \lfloor \exp{(\theta n)} \rfloor)$, а не классических интегральных $\mathbf{P}(1 \leq Z_n \leq \exp{(\theta n)})$ или исследуемых в некоторых современных работах интегро-локальных вероятностей $\mathbf{P}(Z_n \in [\exp{(\theta n)}\,; \exp{((\theta + \triangle)n)}])$. Таким образом, получен более сильный результат. В частности, для больших верхних уклонений ВПССГ точная асимптотика интегральных вероятностей была получена ранее, однако локальные вероятности ранее не рассматривались. В процессе работы получена вспомогательная лемма об экспоненциальном функционале, являющаяся полезным обобщением ранее известных вспомогательных утверждений такого рода.

Методы исследования. В работе использованы методы математической статистики и теории вероятностей, теории больших уклонений, случайных блужданий, а также ветвящихся процессов, метод крамеровского преобразования мер, а также интегро-локальный подход к предельным теоремам.

Теоретическая и практическая значимость. Диссертация носит теоретический характер. Ее результаты могут быть использованы для дальнейшего развития теории больших уклонений ветвящихся процессов, а также для практического моделирования биологических и физических процессов.

Положения, выносимые на защиту.

1. Получена лемма об экспоненциальном функционале.

2. Для надкритического ветвящегося процесса в случайной среде с геометрическим распределением числа потомков одной частицы (ВПССГ) для

первой зоны больших нижних уклонений найдена точная асимптотика вероятностей больших нижних уклонений.

3. Для надкритического ВПССГ для второй зоны больших нижних уклонений найдена точная асимптотика вероятностей больших нижних уклонений.

4. Для надкритического ВПССГ на границе первой и второй зон больших нижних уклонений найдена точная асимптотика вероятностей больших нижних уклонений.

5. Для ВПССГ для первой зоны больших верхних уклонений найдена точная асимптотика вероятностей больших верхних уклонений.

Апробация. Результаты диссертации докладывались на следующих научных семинарах и конференциях:

- Большой семинар кафедры теории вероятностей механико-математического факультета МГУ имени М.В. Ломоносова, Москва, 2024;

- Семинар "Случайные блуждания, ветвящиеся процессы" кафедры математической статистики и случайных процессов механико-математического факультета МГУ имени М.В. Ломоносова, Москва, Россия, 2018-2022;

- Семинар отдела дискретной математики МИАН, Москва, Россия, 2019;

- Workshop "St. Petersburg Youth Conference in Probability and Mathematical Physics", Санкт-Петербург, Россия, 21-24 декабря 2021;

- Международная конференция "Branching Processes, Random Walks and Probability on Discrete Structures", Москва, Россия, 21–24 июня 2022;

- Workshop "6-th St. Petersburg Youth Conference in Probability and Mathematical Physics", Санкт-Петербург, Россия, 20-22 декабря 2022;

- Branching Processes and Their Applications, Ташкент-Самарканд, Узбекистан, 18-22 сентября 2023.

Публикации. Результаты диссертации опубликованы в научных журналах "Дискретная математика" и "Сибирские электронные математические известия", индексируемых Web of Science, SCOPUS и RSCI. В научных журналах представлено 4 публикации — все без соавторов. В материалах международных конференций представлено 3 публикации. Список работ автора приведен в конце автореферата и диссертации.

Личный вклад. Автором лично доказаны все теоремы, выносимые на защиту.

Соответствие паспорту научной специальности. Тема диссертации соответствует паспорту специальности 1.1.4 - Теория вероятностей и математическая статистика (физико-математические науки). Области исследований: 6. Предельные теоремы, 10. Марковские процессы и поля, а также связанные с ними модели.

Объём и структура работы. Диссертация объемом 73 страницы состоит из введения, трех глав, заключения и списка литературы, насчитывающего 50 наименований. В диссертацию вошли результаты, выполненные при поддержке РНФ (грант №19-11-00111-П, руководитель гранта – профессор В.А. Ватутин).

Первая глава посвящена вспомогательным утверждениям о случайных блужданиях и об экспоненциальных функционалах от них, а также большим уклонениям случайных блужданий.

В ней приводятся необходимые в дальнейшей работе факты о крамеровском преобразовании мер (сопряжении) из [13], а также использующиеся в работе теоремы о случайных блужданиях: два обобщения интегро-локальной теоремы Стоуна-Шеппа из [19] для случая сопряженных величин и общего параметрического случая, а также теорема В.В. Петрова [16].

В главе доказывается несколько важных вспомогательных лемм о случайных блужданиях. Центральным утверждением главы является лемма об экспоненциальном функционале для общего параметрического случая. Данный результат является обобщением утверждений, полученных М.В. Козловым в [20].

Вторая глава посвящена большим нижним уклонениям надкритического ВПССГ.

На уровне грубой асимптотики известно (см. [32]), что есть два разных поведения функции уклонений $\Lambda(\theta)$ в случае больших нижних уклонений — будем называть их первой и второй зоной больших нижних уклонений. Также же существует пограничная зона между первой и второй зоной, в которой наблюдаются переходные явления.

Асимптотика локальных вероятностей для первой зоны больших нижних уклонений получена в работе автора [44]. Асимптотика локальных вероятностей для второй зоны больших нижних уклонений получена в работе автора [46]. Данные результаты уточняют и дополняют результат, полученный, в частности, К. Боингхоффом [34] — получена точная, а не логарифмическая, асимптотика для локальных, а не интегральных вероятностей.

По-видимому, впервые рассматривается переходная зона между первой и второй зонами уклонений для больших нижних уклонений ВПССГ, а именно исследуется асимптотическое поведение вероятностей $\mathbf{P}(Z_n = \lfloor \exp(\theta n) \rfloor)$ при соответствующих θ. В работах автора [47] и [46] получены обобщения результатов для первой и второй зоны больших нижних уклонений, частично захватывающие переходную зону. Также в [47] получен отдельный результат, полностью описывающий асимптотику вероятностей $\mathbf{P}(Z_n = \lfloor \exp(\theta n) \rfloor)$ для переходной зоны. Объединением результатов для трех рассматриваемых зон в разделе получен общий результат для асимптотики вероятностей больших нижних уклонений ВПССГ.

Третья глава посвящена большим верхним уклонениям ВПССГ.

Задача о больших верхних уклонениях, в отличие от больших нижних, может быть сформулирована не только для надкритических ВПСС ($\mu > 0$), но и для критических ($\mu = 0$) и докритических ($\mu < 0$). Кроме того, в строго докритическом случае ($\mu < 0, m(1) < 0$), также как и в строго надкритическом для больших нижних уклонений, можно выделить две зоны, определяющиеся разным поведением функции уклонений $\Lambda(\theta)$ — назовём их первой и второй зоной больших верхних уклонений ВПСС.

Результат работы автора [45] охватывает сразу случай надкритического, критического и слабо и умеренно докритического ВПССГ, а также первую зону строго докритического ВПССГ. Для этих случаев получена асимптотика локальных вероятностей $\mathbf{P}(Z_n = \lfloor \exp(\theta n) \rfloor)$ больших верхних уклонений ВПССГ, что уточняет и дополняет результаты, полученные М.В. Козловым в работе [20].

Благодарность. Автор выражает признательность своим научным руководителям: кандидату физико-математических наук Шкляеву Александру Викторовичу за постоянное внимание к работе и полезные обсуждения, а также кандидату физико-математических наук, доценту Козлову Михаилу Васильевичу за ценные замечания.

Глава 1

Большие уклонения для случайных блужданий и экспоненциального функционала от них

1.1 Условие Крамера и сопряженные распределения

Рассмотрим случайное блуждание $S_n = \sum_{i=1}^{n} \xi_i$, где ξ_i — независимые одинаково распределенные нерешетчатые случайные величины с функцией распределения $F(x)$, удовлетворяющие условию $0 < \mu := \mathbf{E}\xi < \infty$. Здесь и далее мы будем использовать символ ξ для обозначения случайной величины, имеющей такое же распределение, что и ξ_i.

Будем предполагать, что выполнено условие Крамера: то есть, что найдутся такие $h^- \le 0$ и $h^+ \ge 0$, что $R(h) = \mathbf{E}e^{h\xi} < \infty$ при $h^- \le h \le h^+$. Предполагая, что $\mathbf{E}\xi^2 \exp(h^-\xi) < \infty$ и $\mathbf{E}\xi^2 \exp(h^+\xi) < \infty$, для указанных значений параметра h положим

$$m(h) = (\ln R(h))' = \mathbf{E}\xi e^{h\xi}/R(h), \quad \sigma^2(h) = m'(h),$$
$$F^{(h)}(x) = R^{-1}(h) \int\limits_{-\infty}^{x} e^{hu}\mathbf{P}(\xi \in \mathrm{d}u). \tag{1.1}$$

Распределение, порожденное функцией $F^{(h)}$, назовем сопряженным с параметром h. Независимые одинаково распределённые величины, имеющие сопряженное распределение с параметром h, будем обозначать $\xi_i^{(h)}$. Нам также понадобится обозначение $S_n^{(h)} = \xi_1^{(h)} + \dots + \xi_n^{(h)}$.

Из определения сопряженного распределения следует, что

$$\mathbf{E}\xi_i^{(h)} = m\left(h\right), \; \mathbf{D}\xi_i^{(h)} = \sigma^2\left(h\right) > 0. \tag{1.2}$$

Следовательно, функция $m\left(h\right)$ монотонно возрастает при $h \in (h^-; h^+)$. Обозначим $m^- := \lim_{h\downarrow h^-} m\left(h\right)$, $m^+ := \lim_{h\uparrow h^+} m\left(h\right)$. Таким образом, при всех $\theta \in (m^-; m^+)$ найдётся единственное число h_θ, принадлежащее (h^-, h^+), такое что $m\left(h_\theta\right) = \theta$. Положим $\Lambda\left(\theta\right) = h_\theta\theta - \ln R\left(h_\theta\right)$. Функцию Λ назовем функцией уклонений.

Величины с сопряженным распределением также удовлетворяют условию Крамера. А именно, если $\widetilde{h} \in (h^-, h^+)$, то

$$R^{(\widetilde{h})}(h) := \mathbf{E}\exp\left(h\xi^{(\widetilde{h})}\right) = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} e^{hx}\mathbf{P}\left(\xi^{(\widetilde{h})} \in \mathrm{d}x\right) =$$

$$= \frac{1}{R\left(\widetilde{h}\right)} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} e^{\left(h+\widetilde{h}\right)x}\mathbf{P}\left(\xi \in \mathrm{d}x\right) = \frac{R\left(\widetilde{h}+h\right)}{R\left(\widetilde{h}\right)} \tag{1.3}$$

при $h \in \left(h^- - \widetilde{h}; h^+ - \widetilde{h}\right)$. Положим

$$m^{(\widetilde{h})}(h) = \left(\ln R^{(\widetilde{h})}(h)\right)'_h = \left(\ln R(h+\widetilde{h}) - \ln R(\widetilde{h})\right)'_h = m\left(h+\widetilde{h}\right).$$

По определению при каждом $\widetilde{h} \in (h^- - h_\theta; h^+ - h_\theta)$ величина $h_\theta^{(\widetilde{h})}$ должна удовлетворять уравнению

$$m^{(\widetilde{h})}\left(h_\theta^{(\widetilde{h})}\right) = \theta = m\left(h_\theta^{(\widetilde{h})} + \widetilde{h}\right).$$

Таким образом,

$$h_\theta^{(\widetilde{h})} = h_\theta - \widetilde{h}, \quad m^{(\widetilde{h})}\left(h_\theta^{(\widetilde{h})}\right) = m\left(h_\theta\right), \quad \sigma^{(\widetilde{h})}\left(h_\theta^{(\widetilde{h})}\right) = \sigma\left(h_\theta\right). \tag{1.4}$$

Нам понадобится следующее утверждение.

Теорема 1 ([19]). *Пусть задано семейство случайных величин ξ^α, $\alpha \in [\alpha_1, \alpha_2]$. При фиксированном α величины ξ_1^α, $\dots, \xi_n^\alpha$, $\dots$ — н.о.р. с.в. и имеют такое* *же распределение, как ξ^α. При фиксированном α введем $S_n^\alpha = \xi_1^\alpha + \dots + \xi_n^\alpha$ — семейство случайных блужданий с параметром α.*

1) Пусть $\mathbf{E}\xi^\alpha = m_\alpha$ и $\mathbf{D}\xi^\alpha = \sigma_\alpha^2 \in [\sigma_1^2, \sigma_2^2] \subset (0; \infty)$ при $\alpha \in [\alpha_1, \alpha_2]$.

2) Пусть

$$\psi_\alpha(t) := \mathbf{E} \exp(it\xi^\alpha) = 1 + im_\alpha t - \frac{t^2\left(\sigma_\alpha^2 + m_\alpha^2\right)}{2} + o(t^2),$$

где $o(t^2)$ равномерно мало по $\alpha \in [\alpha_1, \alpha_2]$ при $t \to 0$.

3) Пусть при любых фиксированных $0 < c_1 < c_2 < \infty$,

$$q_\alpha := \sup_{c_1 \le |t| \le c_2} |\psi_\alpha(t)| \le q < 1,$$

где q не зависит от α.

Тогда при любом фиксированном $\triangle > 0$ и $n \to \infty$

$$\mathbf{P}\left(S_n^\alpha - m_\alpha n \in [x; x + \triangle)\right) = \frac{\triangle}{\sqrt{2\pi n}\sigma_\alpha}\phi\left(\frac{x}{\sigma_\alpha\sqrt{n}}\right) + \frac{o(1)}{\sqrt{n}},$$

где $o(1)$ равномерно мало по всем действительным x и $\alpha \in [\alpha_1; \alpha_2]$.

Теорема 1 доказана в [19] (параграф 1.5, теорема 1.5.3). Там же рассмотрено необходимое нам следствие для случая сопряженных величин ([19], параграф 2.2, теорема 2.2.1).

Теорема 2 ([19]). *Пусть ξ — нерешетчатая с.в. с математическим ожиданием $\mathbf{E}\xi = \mu < \infty$. Пусть для ξ верно, что $\mathbf{E}\xi^2 \exp(h^-\xi) < \infty$ и $\mathbf{E}\xi^2 \exp(h^+\xi) < \infty$, и $h \in [h^-; h^+]$. Пусть $\xi_i^{(h)}$ — н.о.р. с.в., сопряженные к ξ с параметром h, $\mathbf{E}\xi^{(h)} = m(h)$ и $\mathbf{D}\xi^{(h)} = \sigma^2(h) < \infty$.*

Тогда при любом фиксированном $\triangle > 0$ и $n \to \infty$

$$\mathbf{P}\left(S_n^{(h)} \in [x; x + \triangle)\right) = \frac{\triangle}{\sqrt{2\pi n}\sigma(h)} \exp\left(\frac{-(x - m(h)n)^2}{2n\sigma^2(h)}\right) + \frac{o(1)}{\sqrt{n}},$$

где $o(1)$ равномерно мало по всем действительным x и $h \in [h_1; h_2] \subset [h^-; h^+]$.

Замечание 1. *Заметим, что, если $\mathbf{E}\xi^2 \exp(h^-\xi) < \infty$ и $\mathbf{E}\xi^2 \exp(h^+\xi) < \infty$, то для ξ выполнено и условие Крамера: $R(h) < \infty$ при $h^- \le h \le h^+$.*

Также, если условия Крамера выполнено для $h \in (\widetilde{h}^-; \widetilde{h}^+)$, то для любого отрезка $[h^-; h^+] \subset (\widetilde{h}^-; \widetilde{h}^+)$ будет верно, что $\mathbf{E}\xi^2 \exp(h\xi) < \infty$ при $h \in [h^-; h^+]$.

Замечание 2. *Согласно [37] (замечание 7.1 к теореме 7.1, глава 8, параграф 7) вместо фиксированного $\triangle$ в теореме 2 может быть взята положительная последовательность $\triangle_n$, стремящаяся к 0 при $n \to \infty$, пусть и достаточно медленно.*

Из теоремы 2 вытекает следующее необходимое нам обобщение центральной предельной теоремы.

Лемма 1. *Пусть a_n, b_n — произвольные последовательности, такие, что $|b_n| < B\sqrt{n}$, $A < b_n - a_n < B\sqrt{n}$ для всех n и некоторых положительных констант A и B. Пусть ξ_i — нерешетчатые н.о.р. с.в. с математическим ожиданием $\mathbf{E}\xi = 0$, дисперсией $\mathbf{D}\xi = 1$ и суммой $S_n = \xi_1 + \dots + \xi_n$. Тогда*

$$\mathbf{P}\left(S_n \in [a_n; b_n]\right) = (1 + o(1)) \left(\Phi\left(\frac{b_n}{\sqrt{n}}\right) - \Phi\left(\frac{a_n}{\sqrt{n}}\right)\right)$$

при $n \to \infty$.

Доказательство леммы 1. Пусть $\triangle_n$ — некоторая фиксированная последовательность достаточно медленно стремящаяся к 0. Используя классическую интегро-локальную теорему Стоуна-Шеппа из [19] (параграф 1.5, теорема 1.5.1), получим, что

$$\begin{aligned}\mathbf{P}\left(S_n \in [a_n; b_n]\right) &= \sum_{i=0}^{\lceil (b_n - a_n)/\triangle_n \rceil - 1} \mathbf{P}\left(S_n \in [a_n + i\triangle_n; a_n + (i+1)\triangle_n)\right) = \\ &= \sum_{i=0}^{\lceil (b_n - a_n)/\triangle_n \rceil - 1} (1 + o(1)) \frac{\triangle_n}{\sqrt{2\pi n}} \exp\left(-\frac{(a_n + i\triangle_n)^2}{2n}\right),\end{aligned}$$

где в последнем переходе мы также использовали тот факт, что $|a_n + i\triangle_n| < 2B\sqrt{n}$. Далее, так как $|b_n - a_n| > A$, получим, что

$$\begin{aligned}\mathbf{P}\left(S_n \in [a_n; b_n]\right) &= \frac{1 + o(1)}{\sqrt{2\pi n}} \sum_{i=0}^{\lceil (b_n - a_n)/\triangle_n \rceil - 1} \triangle_n \exp\left(-\frac{(a_n + i\triangle_n)^2}{2n}\right) = \\ &= \frac{1 + o(1)}{\sqrt{2\pi n}} \int\limits_{a_n}^{b_n} \exp\left(-\frac{x^2}{2n}\right) \mathrm{d}x = (1 + o(1)) \left(\Phi\left(\frac{b_n}{\sqrt{n}}\right) - \Phi\left(\frac{a_n}{\sqrt{n}}\right)\right)\end{aligned}$$

при $n \to \infty$. Что и требовалось доказать. □

Кроме того, мы будем использовать теорему Петрова, доказанную В.В. Петровым в [16].

Теорема 3 ([16]). *Пусть ξ_i — н.о.р. нерешетчатые с.в. с математическим ожиданием $\mathbf{E}\xi = \mu$, дисперсией $\mathbf{D}\xi = \sigma^2 < \infty$ и суммой $S_n = \xi_1 + \cdots + \xi_n$. Пусть $R(h) = \mathbf{E}e^{h\xi} < \infty$ при $0 < h < h^+$, $m^+ = \lim_{h\uparrow h^+} m(h)$. Тогда при всех $\theta \in (\mu; m^+)$ выполнено соотношение*

$$\mathbf{P}(S_n \geq \theta n) = \frac{1 + o(1)}{\sqrt{2\pi n} h_\theta \sigma(h_\theta)} e^{-\Lambda(\theta)n}$$

при $n \to \infty$, где $o(1)$ равномерно мало по $\theta \in [\theta_1; \theta_2] \subset (\mu; m^+)$.

Переходя к величинам $-\xi_i$, из теоремы 3 нетрудно получить аналогичное утверждение о вероятностях нижних уклонений.

Следствие 1. *Пусть ξ_i — н.о.р. нерешетчатые с.в. с математическим ожиданием $\mathbf{E}\xi = \mu$, дисперсией $\mathbf{D}\xi = \sigma^2 < \infty$ и суммой $S_n = \xi_1 + \cdots + \xi_n$. Пусть $R(h) = \mathbf{E}e^{h\xi} < \infty$ при $h^- < h < 0$. Тогда при всех $\theta \in (m^-, \mu)$ выполнено соотношение*

$$\mathbf{P}(S_n \leq \theta n) = \frac{1 + o(1)}{\sqrt{2\pi n}(-h_\theta)\sigma(h_\theta)} e^{-\Lambda(\theta)n}$$

при $n \to \infty$, где $o(1)$ равномерно мало по $\theta \in [\theta_1; \theta_2] \subset (m^-; \mu)$.

1.2 Лемма об экспоненциальном функционале

В дальнейшем нам будет удобно обозначать через $\rho_n = \rho_n(\theta, \theta_1, \theta_2)$ величины, стремящиеся к нулю при $n \to \infty$ равномерно по $\theta \in [\theta_1, \theta_2]$. При этом в разных местах ρ_n будет, вообще говоря, обозначать различные функции. Кроме того, в некоторых случаях мы будем использовать это обозначение для величин, стремящихся к нулю при $n \to \infty$ и не зависящих от θ.

Для доказательства основных результатов этой работы нам понадобится следующая лемма.

Лемма 2 (лемма об экспоненциальном функционале для общего параметрического случая). *Пусть задано семейство случайных величин ξ^α, $\alpha \in [\alpha_1, \alpha_2]$. При фиксированном α величины $\xi_1^\alpha, \ldots, \xi_n^\alpha, \ldots$ — н.о.р. с.в. и имеют такое же распределение, как ξ^α.*

1) Пусть $\mathbf{E}\xi^\alpha = m_\alpha > 0$, при $\alpha \in [\alpha_1, \alpha_2]$, при этом образом m_α является весь отрезок $[m_{\alpha_1}, m_{\alpha_2}]$. Также пусть $\mathbf{D}\xi^\alpha = \sigma_\alpha^2 \in [\sigma_1^2, \sigma_2^2] \subset (0; \infty)$ при $\alpha \in [\alpha_1, \alpha_2]$.

2) Пусть

$$\psi_\alpha(t) := \mathbf{E}\exp\left(it\xi^\alpha\right) = 1 + im_\alpha t - \frac{t^2\left(\sigma_\alpha^2 + m_\alpha^2\right)}{2} + o(t^2),$$

где $o(t^2)$ *равномерно мало по* $\alpha \in [\alpha_1, \alpha_2]$ *при* $t \to 0$.

3) Пусть при любых фиксированных $0 < c_1 < c_2 < \infty$,

$$q_\alpha := \sup_{c_1 \le |t| \le c_2} |\psi_\alpha(t)| \le q < 1,$$

где q *не зависит от* α.

4) Пусть ξ^α *обладает свойством стохастического доминирования по параметру* α, *то есть* $\mathbf{P}\left(\xi^\alpha < c\right)$ *монотонно убывает по* α *при* $\alpha \in [\alpha_1, \alpha_2]$ *для любой константы* c.

При фиксированном α *введём* $S_n^\alpha = \xi_1^\alpha + \dots + \xi_n^\alpha$ *— семейство случайных блужданий с параметром* α. *Обозначим*

$$U_n^\alpha = e^{-S_n^\alpha},\ V_n^\alpha = \sum_{i=0}^{n-1} e^{-S_i^\alpha},\ V_{r,n}^\alpha = \sum_{i=r}^{n-1} e^{-S_i^\alpha},\ V_\infty^\alpha = \sum_{i=0}^{\infty} e^{-S_i^\alpha},\ \widetilde{S}_n^\alpha = S_n^\alpha - nm_\alpha.$$

Тогда для произвольной константы a, *а также произвольных последовательностей* g_n *и* d_n *таких, что* $|g_n| < D\sqrt{n}$ *и* $G < d_n - g_n < D\sqrt{n}$ *для всех* n *и некоторых положительных констант* D *и* G, *верно, что*

$$\mathbf{P}\left(V_n^\alpha < a \middle| \widetilde{S}_n^\alpha \in [g_n, d_n]\right) \to \mathbf{P}\left(V_\infty^\alpha < a\right)$$

при $n \to \infty$, *причём сходимость равномерна по* $\alpha \in [\alpha_1; \alpha_2]$.

Введём следующие обозначения:

$$\widetilde{S}_n := S_n^{(h_\theta)} - \theta n,\ \widetilde{V}_n := \sum_{i=0}^{n-1} \exp\left(-S_i^{(h_\theta)}\right),\ \widetilde{V}_\infty = \sum_{i=0}^{\infty} \exp\left(-S_i^{(h_\theta)}\right).$$

Лемма 3 (лемма об экспоненциальном функционале для сопряженных величин)**.** *Пусть* $S_n = \xi_1 + \dots + \xi_n, n > 0$ *— случайное блуждание, где* ξ_1, ..., ξ_n, ... *— н.о.р. с.в., имеющие такое же распределение, как с.в.* ξ. *Пусть* ξ *является нерешетчатой,* $\mathbf{E}\xi = \mu < \infty$. *Пусть для* ξ *верно, что* $\mathbf{E}\xi^2 \exp\left(h^-\xi\right) < \infty$ *и* $\mathbf{E}\xi^2 \exp\left(h^+\xi\right) < \infty$.

Пусть $k(n) = k \in \mathbb{N}$ *таково, что* $\theta(n) = \theta := \ln k/n$. *Пусть* $\theta \in [\theta_1; \theta_2] \subset [m^-; m^+]$.

Тогда для произвольной константы a, а также произвольных последовательностей g_n и d_n таких, что $|g_n| < D\sqrt{n}$ и $G < d_n - g_n < D\sqrt{n}$ для всех n и некоторых положительных констант D и G, верно, что

$$\mathbf{P}\left(\widetilde{V}_n < a \middle| \widetilde{S}_n \in [g_n, d_n]\right) \to \mathbf{P}\left(\widetilde{V}_\infty < a\right)$$

при $n \to \infty$, причём сходимость равномерна по $\theta \in [\theta_1; \theta_2]$.

Доказательство леммы 2. Рассмотрим вероятность

$$\mathbf{P}\left(V_{r,n}^\alpha > \varepsilon \middle| \widetilde{S}_n^\alpha \in [g_n, d_n]\right), \; r \in [1, n-2].$$

При $\boldsymbol{\eta}$, принадлежащих множеству $\left\{\eta : \bigcap_{i=r}^{n-1} \{S_i^\alpha > m_\alpha i/2\}\right\}$, величину $V_{r,n}^\alpha$ можно оценить сверху:

$$V_{r,n}^\alpha \le \sum_{i=r}^{n-1} e^{-m_\alpha i/2} = e^{-m_\alpha r/2} \frac{1 - e^{-m_\alpha (n-r)/2}}{1 - e^{-m_\alpha/2}}.$$

Таким образом, для таких $\boldsymbol{\eta}$ для любого положительного ε найдётся r_0 такое, что для любых $r \ge r_0$ и $n \ge r+2$ выполнено неравенство $V_{r,n}^\alpha < \varepsilon$. Следовательно, для любого положительного ε при всех $r \ge r_0$ и $n \ge r+2$ верно, что

$$\left\{V_{r,n}^\alpha > \varepsilon\right\} \subseteq \bigcup_{i=r}^{n-1} \{S_i^\alpha \le m_\alpha i/2\}.$$

Отсюда при всех положительных ε и всех достаточно больших n и r выполнено следующее соотношение:

$$\mathbf{P}\left(V_{r,n}^\alpha > \varepsilon \middle| \widetilde{S}_n^\alpha \in [g_n, d_n]\right) \le \mathbf{P}\left(\bigcup_{i=r}^{n-1} \left\{S_i^\alpha \le \frac{m_\alpha i}{2}\right\} \middle| \widetilde{S}_n^\alpha \in [g_n, d_n]\right) =$$

$$= \mathbf{P}\left(\bigsqcup_{i=r}^{n-1} \left\{S_i^\alpha \le \frac{m_\alpha i}{2}, S_1^\alpha > m_\alpha/2, \; \ldots, S_{i-1}^\alpha > \frac{m_\alpha(i-1)}{2}\right\} \middle| \widetilde{S}_n^\alpha \in [g_n, d_n]\right).$$

Введём обозначение

$$A_i := \{S_i^\alpha \le m_\alpha i/2, S_1^\alpha > m_\alpha/2, \; \ldots, S_{i-1}^\alpha > m_\alpha(i-1)/2\}.$$

Тогда

$$\mathbf{P}\left(V_{r,n}^\alpha > \varepsilon \middle| \widetilde{S}_n^\alpha \in [g_n, d_n]\right) \le \sum_{i=r}^{n-1} \mathbf{P}\left(A_i \middle| \widetilde{S}_n^\alpha \in [g_n, d_n]\right), \tag{1.5}$$

при всех всех положительных ε и достаточно больших n и r.

Разобьём слагаемые в (1.5) на две группы: с индексами меньшими $n^{7/8}$ и с индексами больше или равными $n^{7/8}$. Для суммы слагаемых с индексами, принадлежащими $[\lfloor n^{7/8} \rfloor, n-1]$, выполнено неравенство

$$\sum_{i=\lfloor n^{7/8} \rfloor}^{n-1} \mathbf{P}\left(A_i \middle| \widetilde{S}_n^\alpha \in [g_n, d_n]\right) \leq$$

$$\leq \mathbf{P}\left(\widetilde{S}_n^\alpha \in [g_n, d_n]\right)^{-1} \sum_{i=\lfloor n^{7/8} \rfloor}^{n-1} \mathbf{P}(A_i) \leq C_1 \sqrt{n} \sum_{i=\lfloor n^{7/8} \rfloor}^{n-1} \mathbf{P}(A_i), \tag{1.6}$$

где в последнем переходе мы воспользовались теоремой 1. Заметим, что

$$\sum_{i=\lfloor n^{7/8} \rfloor}^{n-1} \mathbf{P}(A_i) \leq \mathbf{P}\left(\exists i \in [\lfloor n^{7/8} \rfloor, n-1] : S_i^\alpha \leq \frac{m_\alpha i}{2}\right) \leq$$

$$\leq \mathbf{P}\left(\exists i \in [\lfloor n^{7/8} \rfloor, n-1] : \widetilde{S}_i^\alpha \leq -\frac{m_\alpha i}{2}\right) \leq$$

$$\leq \mathbf{P}\left(\min_{i \in [\lfloor n^{7/8} \rfloor, n-1]} \widetilde{S}_n^\alpha \leq -\frac{m_\alpha n^{7/8}}{2}\right) \leq \frac{C_2 n}{m_\alpha^2 n^{7/4}} = \frac{C_2}{m_\alpha^2 n^{3/4}}, \tag{1.7}$$

где в последнем неравенстве мы воспользовались неравенством Колмогорова ([39], глава 4, параграф 2). Таким образом, из (1.6) и (1.7) получаем, что

$$\sum_{i=\lfloor n^{7/8} \rfloor}^{n-1} \mathbf{P}\left(A_i \middle| \widetilde{S}_n^\alpha \in [g_n, d_n]\right) \leq \frac{C_1 C_2}{m_\alpha^2 n^{1/4}} = o(1) \tag{1.8}$$

при $n \to \infty$.

Оценим слагаемые из правой части (1.5) с индексами, меньшими $n^{7/8}$.

Представим одно такое слагаемое в виде интеграла:

$$\mathbf{P}\left(A_i \,\middle|\, \widetilde{S}_n^\alpha \in [g_n, d_n]\right) = \frac{\mathbf{P}\left(A_i,\ \widetilde{S}_n^\alpha \in [g_n, d_n]\right)}{\mathbf{P}\left(\widetilde{S}_n^\alpha \in [g_n, d_n]\right)} = \frac{1}{\mathbf{P}\left(\widetilde{S}_n^\alpha \in [g_n, d_n]\right)} \times$$

$$\times \int\limits_{-\infty}^{m_\alpha i/2} \mathbf{P}\left(S_i^\alpha \in \mathrm{d}x,\ S_1^\alpha > m_\alpha/2,\ \ldots\right.$$

$$\left.\ldots,\ S_{i-1}^\alpha > m_\alpha(i-1)/2,\ \widetilde{S}_n^\alpha \in [g_n, d_n]\right) =$$

$$= \int\limits_{-\infty}^{-m_\alpha i/2} \mathbf{P}\left(\widetilde{S}_i^\alpha \in \mathrm{d}x,\ S_1^\alpha > m_\alpha/2,\ \ldots,\ S_{i-1}^\alpha > m_\alpha(i-1)/2\right) \times$$

$$\times \frac{\mathbf{P}\left(\widetilde{S}_n^\alpha - \widetilde{S}_i^\alpha \in [g_n - x, d_n - x]\right)}{\mathbf{P}\left(\widetilde{S}_n^\alpha \in [g_n, d_n]\right)}. \qquad (1.9)$$

Докажем, что для некоторой константы C_3 выполнено неравенство

$$\frac{\mathbf{P}\left(\widetilde{S}_n^\alpha - \widetilde{S}_i^\alpha \in [g_n - x, d_n - x]\right)}{\mathbf{P}\left(\widetilde{S}_n^\alpha \in [g_n, d_n]\right)} \le C_3 \qquad (1.10)$$

при $i \le n^{7/8}$, $x \in (-\infty; -m_\alpha i/2]$ и всех n. Представим вероятности из (1.10) в виде сумм:

$$\mathbf{P}\left(\widetilde{S}_n^\alpha - \widetilde{S}_i^\alpha \in [g_n - x, d_n - x]\right) = \sum_{j=0}^{\lfloor d_n - g_n \rfloor} \mathbf{P}\left(\widetilde{S}_n^\alpha - \widetilde{S}_i^\alpha \in [\widetilde{g}_j - x, \widetilde{d}_j - x]\right),$$

$$\mathbf{P}\left(\widetilde{S}_n^\alpha \in [g_n, d_n]\right) = \sum_{j=0}^{\lfloor d_n - g_n \rfloor} \mathbf{P}\left(\widetilde{S}_n^\alpha \in [\widetilde{g}_j, \widetilde{d}_j]\right), \qquad (1.11)$$

где

$$\widetilde{g}_j = g_n + \frac{j(d_n - g_n)}{\lfloor d_n - g_n \rfloor + 1},\ \widetilde{d}_j = g_n + \frac{(j+1)(d_n - g_n)}{\lfloor d_n - g_n \rfloor + 1}$$

для всех j. Согласно теореме 1

$$\mathbf{P}\left(\widetilde{S}_n^\alpha - \widetilde{S}_i^\alpha \in [\widetilde{g}_j - x, \widetilde{d}_j - x]\right) =$$

$$= \frac{\widetilde{d}_j - \widetilde{g}_j}{\sqrt{2\pi(n-i)}\sigma(\alpha)} \exp\left(-\frac{(\widetilde{g}_j - x)^2}{2(n-i)\sigma^2(\alpha)}\right) + \frac{\rho_n}{\sqrt{n-i}},$$

$$\mathbf{P}\left(\widetilde{S}_n^\alpha \in [\widetilde{g}_j, \widetilde{d}_j]\right) = \frac{\widetilde{d}_j - \widetilde{g}_j}{\sqrt{2\pi n}\sigma(\alpha)} \exp\left(-\frac{\widetilde{g}_j^{\,2}}{2n\sigma^2(\alpha)}\right) + \frac{\rho_n}{\sqrt{n}}. \qquad (1.12)$$

Обозначим

$$a_j(x) := \exp\left(-\frac{(\widetilde{g}_j - x)^2}{2(n-i)\sigma^2(\alpha)}\right), \; b_j := \exp\left(-\frac{\widetilde{g}_j^{\,2}}{2n\sigma^2(\alpha)}\right).$$

Тогда из (1.12) получаем, что

$$\mathbf{P}\left(\widetilde{S}_n^\alpha - \widetilde{S}_i^\alpha \in [\widetilde{g}_j - x, \widetilde{d}_j - x]\right) = \frac{a_j(x)(d_n - g_n)/(\lfloor d_n - g_n \rfloor + 1) + \rho_n}{\sqrt{2\pi n}\sigma(\alpha)},$$
$$\mathbf{P}\left(\widetilde{S}_n^\alpha \in [\widetilde{g}_j, \widetilde{d}_j]\right) = \frac{b_j(d_n - g_n)/(\lfloor d_n - g_n \rfloor + 1) + \rho_n}{\sqrt{2\pi n}\sigma(\alpha)}. \quad (1.13)$$

Используя (1.13) и (1.11), получаем, что

$$\frac{\mathbf{P}\left(\widetilde{S}_n^\alpha - \widetilde{S}_i^\alpha \in [g_n - x, d_n - x]\right)}{\mathbf{P}\left(\widetilde{S}_n^\alpha \in [g_n, d_n]\right)} =$$
$$= \frac{\sum\limits_{j=0}^{\lfloor d_n - g_n \rfloor}(a_j(x) + \rho_n)}{\sum\limits_{j=0}^{\lfloor d_n - g_n \rfloor}(b_j + \rho_n)} = \frac{\sum\limits_{j=0}^{\lfloor d_n - g_n \rfloor}(a_j(x) + \rho_n)}{\sum\limits_{j=0}^{\lfloor d_n - g_n \rfloor}(b_j + \rho_n)}. \quad (1.14)$$

Так как $a_j(x)$ и b_j лежат в полуинтервале $(0; 1]$ и

$$b_j \geq \exp\left(-\frac{D^2}{2\sigma_1^2}\right)$$

для любых j, то отношение в левой части (1.14) ограничено некоторой величиной C_3 при всех n и x, откуда следует (1.10). Подставляя (1.10) в (1.9), получаем, что

$$\mathbf{P}\left(A_i \middle| \widetilde{S}_n^\alpha \in [g_n, d_n]\right) \leq C_3 \mathbf{P}\left(A_i\right). \quad (1.15)$$

Используя (1.15), получаем, что

$$\sum_{i=r}^{\lfloor n^{7/8} \rfloor - 1} \mathbf{P}\left(A_i \middle| \widetilde{S}_n^\alpha \in [g_n, d_n]\right) \leq C_3 \left(\mathbf{P}\left(A_r\right) + \cdots + \mathbf{P}\left(A_{\lfloor n^{7/8} \rfloor - 1}\right)\right), \quad (1.16)$$

при всех положительных ε и достаточно больших n и r. Из соотношения (1.16) и определения событий A_i получаем, что

$$\sum_{i=r}^{\lfloor n^{7/8} \rfloor - 1} \mathbf{P}\left(A_i \middle| \widetilde{S}_n^\alpha \in [g_n, d_n]\right) \leq C_3 \mathbf{P}\left(\exists i > r : S_i^\alpha \leq m_\alpha i/2\right) \quad (1.17)$$

при всех всех положительных ε и достаточно больших n и r.

В силу условия леммы 2 получаем, что $m_{\alpha_1} > 0$. Таким образом, существует $l \in \mathbb{N}$ такое, что $m_{\alpha_1} < m_{\alpha_2}(2/3)^l$ и $m_{\alpha_1} \geq m_{\alpha_2}(2/3)^{l+1}$. Следовательно, можно разбить отрезок $[m_{\alpha_1}; m_{\alpha_2}]$ на отрезки $[m_{\alpha_1}; m_{\alpha_2}(2/3)^l]$, $[m_{\alpha_2}(2/3)^l; m_{\alpha_2}(2/3)^{l-1}]$, ..., $[m_{\alpha_2}2/3; m_{\alpha_2}]$. По условию леммы 2 образом m_α является весь отрезок $[m_{\alpha_1}, m_{\alpha_2}]$. Кроме того, так как ξ^α обладают свойством стохастического доминирования, m_α монотонно возрастает по α. Следовательно, на отрезке $[m_{\alpha_1}, m_{\alpha_2}]$ можно ввести функцию $\widetilde{a}(m)$, обратную к m_α. Обозначим $\widetilde{\alpha}_j := \widetilde{a}(m_{\alpha_2}(2/3)^j), j \in [0; l]$, а также $\widetilde{\alpha}_0 := \alpha_2, \widetilde{\alpha}_{l+1} := \alpha_1$.

Тогда, если мы докажем, что некоторое соотношение выполнено равномерно по $\alpha \in [\widetilde{\alpha}_{j+1}; \widetilde{\alpha}_j]$ для всех $j \in [0, l]$, то это соотношение будет выполнено равномерно по $\alpha \in [\alpha_1; \alpha_2]$. Пусть $\alpha \in [\widetilde{\alpha}_1; \widetilde{\alpha}_0]$, то есть $m_\alpha \in [2m_{\alpha_2}/3; m_{\alpha_2}]$. Для указанных α справедливы неравенства

$$\mathbf{P}\left(\exists i > r : S_i^\alpha \leq m_\alpha i/2\right) \leq \mathbf{P}\left(\exists i > r : S_i^\alpha \leq m_{\alpha_2} i/2\right) \leq \\ \leq \mathbf{P}\left(\exists i > r : S_i^{\widetilde{\alpha}_1} \leq m_{\alpha_2} i/2\right), \tag{1.18}$$

где последнее неравенство верно, так как по условию леммы 2 ξ^α обладают свойством стохастического доминирования, а, следовательно, и S_n^α тоже ([40], раздел 4, следствие 4.2.7). Заметим, что $\mathbf{E}S_i^{\widetilde{\alpha}_1} = 2im_{\alpha_2}/3$, откуда получаем, что

$$\mathbf{P}\left(\exists i > r : S_i^{\widetilde{\alpha}_1} \leq m_{\alpha_2} i/2\right) = \\ = \mathbf{P}\left(\exists i > r : S_i^{\widetilde{\alpha}_1} - m_{\alpha_2} i/2 \leq 0\right) =: f(r) \to 0 \tag{1.19}$$

при $r \to \infty$, так как известно, что момент последнего прихода в 0 у случайного блуждания с положительным средним конечен с вероятностью 1 ([41], глава 12, параграф 2, утверждение 2.7). Следовательно, из (1.18) и (1.19) получаем, что

$$\mathbf{P}\left(\exists i > r : S_i^\alpha \leq m_\alpha i/2\right) \leq f(r) \to 0 \tag{1.20}$$

при $r \to \infty$. Для отрезков $[\widetilde{\alpha}_{l+1}; \widetilde{\alpha}_l]$, ..., $[\widetilde{\alpha}_2; \widetilde{\alpha}_1]$ утверждение (1.20) доказывается полностью аналогично (1.18)-(1.19). Таким образом, получаем, что (1.20) выполнено равномерно по $\alpha \in [\alpha_1; \alpha_2]$. Откуда, используя (1.17) и (1.20), получаем, что

$$\sum_{i=r}^{\lfloor n^{7/8} \rfloor - 1} \mathbf{P}\left(A_i \middle| \widetilde{S}_n^\alpha \in [g_n, d_n]\right) \leq C_3 f(r) \to 0 \tag{1.21}$$

при $r \to \infty$.

Из (1.5), (1.8) и (1.21) получаем, что

$$\mathbf{P}\left(V_{r,n}^{\alpha} > \varepsilon \,\middle|\, \widetilde{S}_n^{\alpha} \in [g_n, d_n]\right) \le \sum_{i=r}^{\lfloor n^{7/8} \rfloor - 1} \mathbf{P}\left(A_i \,\middle|\, \widetilde{S}_n^{\alpha} \in [g_n, d_n]\right) + \\ + \sum_{i=\lfloor n^{7/8} \rfloor}^{n-1} \mathbf{P}\left(A_i \,\middle|\, \widetilde{S}_n^{\alpha} \in [g_n, d_n]\right) \le C_3 f(r) + \frac{C_2}{n^{3/4}} \tag{1.22}$$

при всех положительных ε и достаточно больших n и r.

Заметим, что

$$\mathbf{P}\left(V_r^{\alpha} < a - \varepsilon,\ V_{r,n}^{\alpha} \le \varepsilon \,\middle|\, \widetilde{S}_n^{\alpha} \in [g_n, d_n]\right) \le \\ \le \mathbf{P}\left(V_n^{\alpha} < a \,\middle|\, \widetilde{S}_n^{\alpha} \in [g_n, d_n]\right) \le \mathbf{P}\left(V_r^{\alpha} < a \,\middle|\, \widetilde{S}_n^{\alpha} \in [g_n, d_n]\right)$$

при $n \ge r$. При этом

$$\mathbf{P}\left(V_r^{\alpha} < a - \varepsilon,\ V_{r,n}^{\alpha} \le \varepsilon \,\middle|\, \widetilde{S}_n^{\alpha} \in [g_n, d_n]\right) \ge \\ \ge \mathbf{P}\left(V_r^{\alpha} < a - \varepsilon \,\middle|\, \widetilde{S}_n^{\alpha} \in [g_n, d_n]\right) - \mathbf{P}\left(V_{r,n}^{\alpha} > \varepsilon \,\middle|\, \widetilde{S}_n^{\alpha} \in [g_n, d_n]\right).$$

Таким образом, с помощью (1.22) получаем, что

$$\mathbf{P}\left(V_r^{\alpha} < a - \varepsilon \,\middle|\, \widetilde{S}_n^{\alpha} \in [g_n, d_n]\right) - C_3 f(r) - \frac{C_2}{n^{3/4}} \le \\ \le \mathbf{P}\left(V_n^{\alpha} < a \,\middle|\, \widetilde{S}_n^{\alpha} \in [g_n, d_n]\right) \le \mathbf{P}\left(V_r^{\alpha} < a \,\middle|\, \widetilde{S}_n^{\alpha} \in [g_n, d_n]\right) \tag{1.23}$$

при всех положительных ε и всех достаточно больших n и r.

Для окончания доказательства леммы 2 нам потребуется лемма 4:

Лемма 4. *В условиях леммы 2 при любом натуральном r и любых действительных a_1, ..., a_r, b_1, ..., b_r верно, что*

$$\mathbf{P}\left(\xi_1^{\alpha} \in [a_1, b_1],\ \ldots,\ \xi_r^{\alpha} \in [a_r, b_r] \,\middle|\, \widetilde{S}_n^{\alpha} \in [g_n, d_n]\right) \to \\ \to \mathbf{P}\left(\xi_1^{\alpha} \in [a_1, b_1],\ \ldots,\ \xi_r^{\alpha} \in [a_r, b_r]\right),$$

причем сходимость равномерна по $\alpha \in [\alpha_1; \alpha_2]$.

Отметим, что данная лемма обобщает теорему Бартфаи из [38].

Доказательство. Введём обозначения $\vec{\xi}^{\alpha} = (\xi_1^{\alpha}, \dots, \xi_r^{\alpha})$, $\vec{x} = (x_1, \dots, x_r)$. Положим для краткости $B = [a_1, b_1] \times \dots \times [a_r, b_r]$. Аналогично (1.9) получим, что

$$\mathbf{P}\left(\vec{\xi}^{\alpha} \in B \middle| \widetilde{S}_n^{\alpha} \in [g_n, d_n]\right) = \frac{1}{\mathbf{P}\left(\widetilde{S}_n^{\alpha} \in [g_n, d_n]\right)} \int\limits_{a_1}^{b_1} \cdots \int\limits_{a_r}^{b_r} \mathbf{P}\left(\vec{\xi}^{\alpha} \in \mathrm{d}\vec{x},\right.$$

$$\left.\widetilde{S}_n^{\alpha} - (S_r^{\alpha} - m_{\alpha} r) \in \left[g_n - \sum_{i=1}^{r} x_i + m_{\alpha} r, d_n - \sum_{i=1}^{r} x_i + m_{\alpha} r\right]\right) =$$

$$= \int\limits_{a_1}^{b_1} \cdots \int\limits_{a_r}^{b_r} \mathbf{P}\left(\vec{\xi}^{\alpha} \in \mathrm{d}\vec{x}\right) \times$$

$$\times \frac{\mathbf{P}\left(\widetilde{S}_n^{\alpha} - \widetilde{S}_r^{\alpha} \in [g_n - \sum_{i=1}^{r} x_i + m_{\alpha} r, d_n - \sum_{i=1}^{r} x_i + m_{\alpha} r]\right)}{\mathbf{P}\left(\widetilde{S}_n^{\alpha} \in [g_n, d_n]\right)}. \tag{1.24}$$

Докажем, что

$$\frac{\mathbf{P}\left(\widetilde{S}_n^{\alpha} - \widetilde{S}_i^{\alpha} \in [g_n - x, d_n - x]\right)}{\mathbf{P}\left(\widetilde{S}_n^{\alpha} \in [g_n, d_n]\right)} = 1 + \rho_n \tag{1.25}$$

при $i < n$ и $|x| \le c_0$, где c_0 — некоторая фиксированная константа. Соотношения (1.10)-(1.14) также верны для указанных i и x, следовательно, нам нужно показать, что

$$\frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{j=0}^{\lfloor d_n - g_n \rfloor} a_j(x) = \frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{j=0}^{\lfloor d_n - g_n \rfloor} b_j + \rho_n$$

при $|x| \le c_0$. Это следует из определений $a_j(x)$ и b_j, а также из того, что $|\widetilde{g}_j| \le 2D\sqrt{n}$, а $|b_j| \le 1$:

$$a_j(x) = \exp\left(-\frac{(\widetilde{g}_j - x)^2}{2(n-i)\sigma^2(-1)}\right) = \exp\left(-\frac{g_j^2}{2n\sigma^2(-1)} + \rho_n\right) = b_j + \rho_n.$$

Таким образом, получаем, что утверждение (1.25) верно, а значит, из (1.25) и (1.24) следует, что

$$\mathbf{P}\left(\vec{\xi}^{\alpha} \in B \middle| \widetilde{S}_n^{\alpha} \in [g_n, d_n]\right) = (1 + \rho_n)\mathbf{P}\left(\vec{\xi}^{\alpha} \in B\right).$$

Лемма 4 доказана. □

Используя лемму 4 и утверждение (1.23), получаем, что для любого положительного ε

$$\mathbf{P}\left(V_r^\alpha < a - \varepsilon\right) - C_3 f(r) - \frac{C_2}{n^{3/4}} \leq$$
$$\leq \mathbf{P}\left(V_n^\alpha < a \middle| \widetilde{S}_n^\alpha \in [g_n, d_n]\right) \leq \mathbf{P}\left(V_r^\alpha < a\right) + \rho_n$$

при всех достаточно больших n и r. Переходя к пределу по $n \to \infty$, заключаем, что

$$\mathbf{P}\left(V_r^\alpha < a - \varepsilon\right) - C_3 f(r) \leq \varliminf_{n\to\infty} \mathbf{P}\left(V_n^\alpha < a \middle| \widetilde{S}_n^\alpha \in [g_n, d_n]\right) \leq$$
$$\leq \varlimsup_{n\to\infty} \mathbf{P}\left(V_n^\alpha < a \middle| \widetilde{S}_n^\alpha \in [g_n, d_n]\right) \leq \mathbf{P}\left(V_r^\alpha < a\right).$$

В силу произвольности ε мы видим, что

$$\mathbf{P}\left(V_r^\alpha < a\right) - C_3 f(r) \leq \varliminf_{n\to\infty} \mathbf{P}\left(V_n^\alpha < a \middle| \widetilde{S}_n^\alpha \in [g_n, d_n]\right) \leq$$
$$\leq \varlimsup_{n\to\infty} \mathbf{P}\left(V_n^\alpha < a \middle| \widetilde{S}_n^\alpha \in [g_n, d_n]\right) \leq \mathbf{P}\left(V_r^\alpha < a\right). \tag{1.26}$$

Оценим

$$\mathbf{P}\left(V_\infty^\alpha - V_r^\alpha > \varepsilon\right) =$$
$$= \mathbf{P}\left(V_\infty^\alpha - V_r^\alpha > \varepsilon \middle| \forall i > r : S_i^\alpha > m_\alpha i/2\right) \mathbf{P}\left(\forall i > r : S_i^\alpha > m_\alpha i/2\right) +$$
$$+\mathbf{P}\left(V_\infty^\alpha - V_r^\alpha > \varepsilon \middle| \exists i > r : S_i^\alpha \leq m_\alpha i/2\right) \mathbf{P}\left(\exists i > r : S_i^\alpha \leq m_\alpha i/2\right). \tag{1.27}$$

Согласно (1.20) из (1.27) получаем, что

$$\mathbf{P}\left(V_\infty^\alpha - V_r^\alpha > \varepsilon\right) \leq$$
$$\leq \mathbf{P}\left(\sum_{i=r+1}^{\infty} \exp\left(-m_\alpha i/2\right) > \varepsilon\right) \mathbf{P}\left(\forall i > r : S_i^\alpha > m_\alpha i/2\right) +$$
$$+\mathbf{P}\left(V_\infty^\alpha - V_r^\alpha > \varepsilon \middle| \exists i > r : S_i^\alpha \leq m_\alpha i/2\right) f(r) \leq$$
$$\leq \mathbf{P}\left(\sum_{i=r+1}^{\infty} \exp\left(-m_\alpha i/2\right) > \varepsilon\right) + f(r) \to 0 \tag{1.28}$$

при $r \to \infty$ и всех положительных ε, так как $f(r) \to 0$ при $r \to \infty$, а ряд

$$\sum_{i=1}^{\infty} \exp\left(-m_\alpha i/2\right)$$

является суммой бесконечной геометрической прогрессии. Из (1.28) получаем, что ряд

$$V_\infty^\alpha = \sum_{i=1}^{\infty} e^{-S_i^\alpha}$$

сходится по вероятности при всех $\alpha \in [\alpha_1; \alpha_2]$. Осталось показать, что эта сходимость равномерна.

Предположим, что это не так. Тогда существует последовательность $\{\alpha_r\}$, такая что

$$\mathbf{P}\left(V_\infty^{\alpha_r} - V_r^{\alpha_r} > \varepsilon\right) \geq C_4$$

для некоторой константы $C_4 > 0$. Однако из (1.28) получаем, что для достаточно большого r

$$\mathbf{P}\left(V_\infty^{\alpha} - V_r^{\alpha} > \varepsilon\right) < C_4$$

для всех α, что приводит нас к противоречию. Следовательно, получаем, что ряд V_∞^α сходится по вероятности равномерно по $\alpha \in [\alpha_1; \alpha_2]$. Откуда, переходя к пределу при $r \to \infty$ в (1.26), получаем требуемое утверждение.

Лемма 2 доказана. □

Доказательство леммы 3. Выполнение условий 2-3 из леммы 2 для сопряженных величин проверяется в [19] при получении теоремы 2 из теоремы 1. Остальные упрощения следуют из определения сопряженного распределения. □

Глава 2

Большие нижние уклонения ВПССГ

2.1 Описание модели и постановка задачи

Пусть $\boldsymbol{\eta} = (\eta_1, \ \ldots)$ — последовательность независимых одинаково распределённых (н.о.р.) случайных величин (с.в.), а $\{\phi_y\}_{y\in\mathbb{R}}$ — семейство производящих функций (п.ф.). При фиксированной среде $\boldsymbol{\eta}$ рассмотрим набор независимых случайных величин $(X_{i,j}, i, j \in \mathbb{N})$, где $X_{i,j}$ имеют п.ф. ϕ_{η_i}.

Ветвящимся процессом $(Z_n, n \geq 0)$ в случайной среде $\boldsymbol{\eta}$ (ВПСС) назовём последовательность случайных величин, заданную соотношениями:

$$Z_0 = 1, \quad Z_{n+1} = X_{n+1,1} + \cdots + X_{n+1,Z_n}, \ n \geq 0.$$

Положим $\xi_i = \ln \phi'_{\eta_i}(1)\,, \mathbf{E}\xi_i = \mu$. Сопровождающим случайным блужданием ВПСС назовём последовательность случайных величин $S_n = \xi_1 + \cdots + \xi_n, n \geq 1$. Здесь и далее мы будем использовать символ ξ для обозначения случайной величины, имеющей такое же распределение, что и ξ_i.

В работе рассматривается случай геометрического семейства п.ф.:

$$\phi_y(s) = 1 - \left(1 + \frac{1}{\phi'_y(1)\,(1-s)}\right)^{-1}. \tag{2.1}$$

ВПСС в котором п.ф. числа потомков одной частицы задаются соотношением (2.1), будем называть ветвящимся процессом в случайной среде с геометрическим числом потомков (ВПССГ).

Назовём с.в. ζ решётчатой, если существуют такие вещественные числа a и b, $b > 0$, что

$$\mathbf{P}\left(\zeta \in \{a + bn, n \in \mathbb{Z}\}\right) = 1,$$

и нерешетчатой в ином случае. В работе рассматриваются ВПССГ, шаги ξ сопровождающих блужданий S_n которых имеют нерешетчатые распределения.

Также нам будут нужны следующие соотношения для ВПССГ, полученные в работе А. Агрести ([9]):

$$\begin{aligned} \mathbf{P}\left(Z_n > k | \, \boldsymbol{\eta}\right) &= \frac{1}{U_n + V_n}\left(1 + \frac{U_n}{V_n}\right)^{-k}, \\ \mathbf{P}\left(Z_n = k | \, \boldsymbol{\eta}\right) &= \frac{1}{U_n + V_n}\left(1 + \frac{U_n}{V_n}\right)^{-k}\frac{U_n}{V_n}, \end{aligned} \tag{2.2}$$

при всех натуральных k и n, где $U_n = e^{-S_n}$, $V_n = \sum_{i=0}^{n-1} e^{-S_i}$.

Существует общепринятая классификация ВПСС (см., например, [42], [43]). ВПСС $(Z_n, n \geq 0)$ называется докритическим, если $\mathbf{E}\xi = \mu < 0$, критическим, если $\mu = 0$, и надкритическим, если $\mu > 0$.

Кроме этого существует дополнительная классификация докритических и надкритических ВПСС, основанная в том числе на различии в поведении функции уклонений для больших верхних и больших нижних уклонений соответственно.

Пусть для ξ выполнено условие Крамера: $R\left(h\right) = \mathbf{E}e^{h\xi} < \infty$ при $0 < h < h^+$, где $h^+ > 1$. Тогда, согласно (1.1), для ξ определены сопряженные величины $\xi^{(h)}$ и, соответственно, их математические ожидания $\mathbf{E}\xi^{(h)} = m(h)$. Назовём ВПСС

- строго докритическим, если $\mu < 0$ и $m(1) < 0$;
- умеренно докритическим, если $\mu < 0$, $m(1) = 0$;
- слабо докритическим, если $\mu < 0$, $m(1) > 0$.

Пусть для ξ выполнено условие Крамера: $R\left(h\right) = \mathbf{E}e^{h\xi} < \infty$ при $h^- < h < 0$, где $h^- < -1$. Тогда назовём ВПСС

- слабо надкритическим, если $\mu > 0$ и $m(-1) < 0$;
- умеренно надкритическим, если $\mu > 0$, $m(-1) = 0$;

- строго надкритическим, если $\mu > 0$, $m(-1) > 0$.

Основная часть результатов данной работы исследует асимптотику локальных вероятностей больших нижних уклонений ВПССГ. Традиционно большие нижние уклонения определяются только для случая надкритических ВПССГ. На уровне грубой асимптотики известно ([32], [34]), что есть два разных поведения функции уклонений в случае больших нижних уклонений. В соответствии с этим поведением принято делить нижние уклонения на две зоны — первую и вторую зону больших нижних уклонений. Однако, сразу отметим, что вторая зона появляется только в случае строго надкритических ВПССГ.

Данная работа уточняет и дополняет результат, полученный К. Боингхоффом в [34], на примере которого можно рассмотреть различие двух зон больших нижних уклонений ВПССГ.

Теорема 4 (теорема 4.4.1 из [34]). *Пусть $(Z_n, n \geq 0)$ — ВПССГ со средой $\boldsymbol{\eta}$, порожденной последовательностью н.о.р. величин, $S_n = \xi_1 + \cdots + \xi_n, n > 0$, — его сопровождающее случайное блуждание,* $\mathbf{E}\xi = \mu > 0$. *Предположим также, что для ξ выполнено условие Крамера: $R(h) < \infty$ при $h^- < h < 0$.*

Пусть $\theta \in (0; \mu)$. Тогда

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \log \mathbf{P}\left(1 \leq Z_n \leq \exp(\theta n)\right) = -\chi(\theta),$$

где, если $h^- < -1$, то

$$\chi(\theta) = \begin{cases} \Lambda(\theta) & , \theta > m(-1) \\ -\theta - \log R(-1) & , \theta \leq m(-1) \end{cases},$$

иначе $\chi(\theta) = \Lambda(\theta)$.

Можно видеть, что, если $h^- < -1$, то вероятности больших нижних уклонений существенно отличаются при $\theta > m(-1)$ и $\theta < m(-1)$ даже на уровне логарифмической асимптотики. При этом в точке $\theta = m(-1)$ происходит переходное явление.

Определим первую и вторую зону больших нижних уклонений. Первая зона больших нижних уклонений определяется следующими условиями.

1) Если $(Z_n, n \geq 0)$ — строго надкритический процесс, то первой зоной уклонений называется случай, когда $\theta \in (m(-1); \mu)$.

2) Если $(Z_n, n \geq 0)$ — слабо или умеренно надкритический процесс, либо условие Крамера выполнено при $h^- < h < 0$, где $h^- \geq -1$, то первой зоной уклонений называется случай, когда $\theta \in (\max(0, m^-); \mu)$.

Вторая зона больших нижних уклонений определяется следующим образом: если $(Z_n, n \geq 0)$ — строго надкритический процесс, то второй зоной уклонений называется случай, когда $\theta \in (0; m(-1))$.

Граничной зоной между первой и второй зоной назовём случай, когда $(Z_n, n \geq 0)$ — строго надкритический процесс, $\theta = \theta(n)$ и $\theta \to m(-1)$ при $n \to \infty$.

2.2 Первая зона больших нижних уклонений

Положим множество K_1 равным $(m(-1); \mu)$, если $(Z_n, n \geq 0)$ — строго надкритический процесс, и равным $(\max(0, m^-); \mu)$, если $(Z_n, n \geq 0)$ — слабо или умеренно надкритический процесс.

Для первой зоны больших нижних уклонений надкритического ВПССГ получен следующий результат.

Теорема 5 (локальная теорема о больших нижних уклонениях надкритического ВПССГ в первой зоне уклонений, [44])**.** *Пусть* $(Z_n, n \geq 0)$ *— ВПССГ со средой* $\boldsymbol{\eta}$*, порожденной последовательностью н.о.р. величин,* $S_n = \xi_1 + \dots + \xi_n, n > 0,$ *— его сопровождающее случайное блуждание, где величина* ξ *предполагается нерешетчатой,* $\mathbf{E}\xi = \mu > 0$*. Предположим также, что для* ξ *выполнено условие Крамера:* $R(h) < \infty$ *при* $h^- < h < 0$*.*

Пусть $k(n) = k \in \mathbb{N}$*, а* $\theta(n) = \theta := \ln k/n \in [\theta_1; \theta_2]$*, где* θ_1 *и* θ_2 *фиксированы и принадлежат* K_1*. Тогда*

$$\mathbf{P}\left(Z_n = k\right) = \frac{(1+\rho_n)\Gamma(1+h_\theta)}{\sqrt{2\pi n}\sigma(h_\theta)} e^{-\Lambda(\theta)n - \theta n} \mathbf{E}\widetilde{V}_\infty^{h_\theta - 1},$$

где

$$\widetilde{V}_\infty := \sum_{i=0}^{\infty} \exp\left(-S_i^{(h_\theta)}\right).$$

Доказательство теоремы 5. Оценим $\mathbf{P}\left(Z_n = k\right)$ при $\theta \in [\theta_1; \theta_2]$, где θ_1 и θ_2 фиксированы и принадлежат K_1. Для этого зафиксируем положительное M и разобьём вероятность $\mathbf{P}(Z_n = k)$ на три части:

$$\mathbf{P}(Z_n = k) = \mathbf{P}(Z_n = k,\ S_n \le \theta n - M) +$$
$$+\mathbf{P}(Z_n = k,\ \theta n - M < S_n < \theta n + M) + \mathbf{P}(Z_n = k,\ S_n \ge \theta n + M). \quad (2.3)$$

Оценим отдельно каждое слагаемое в правой части (2.3).

В силу (2.2) и неравенства $V_n \ge 1$ при всех достаточно больших n выполнены неравенства

$$\mathbf{P}(Z_n = k, S_n \ge \theta n + M) < \mathbf{E}(U_n; S_n \ge \theta n + M) =$$
$$= \int\limits_{\theta n+M}^{+\infty} e^{\widetilde{h}u} e^{\left(-1-\widetilde{h}\right)u} \mathbf{P}(S_n \in \mathrm{d}u) \le e^{\left(-1-\widetilde{h}\right)(\theta n+M)} \int\limits_{\theta n+M}^{+\infty} e^{\widetilde{h}u} \mathbf{P}(S_n \in \mathrm{d}u) =$$
$$= e^{\left(-1-\widetilde{h}\right)(\theta n+M)} R^n(\widetilde{h}) \mathbf{P}\left(S_n^{(\widetilde{h})} \ge \theta n + M\right), \quad (2.4)$$

где $\widetilde{h}$ таково, что $h_{\theta_1} > \widetilde{h} > \max(h^-, -1)$. Поскольку при таком $\widetilde{h}$ верно, что $\theta > m(\widetilde{h})$, мы можем применить теорему 3:

$$\mathbf{P}\left(S_n^{(\widetilde{h})} \ge \theta n + M\right) = \frac{1 + \rho_n(\theta)}{\sqrt{2\pi n}\sigma^{(\widetilde{h})}\left(h^{(\widetilde{h})}_{\theta+M/n}\right) h^{(\widetilde{h})}_{\theta+M/n}} e^{-\Lambda^{(\widetilde{h})}(\theta+M/n)n}, \quad (2.5)$$

где

$$\Lambda^{(\widetilde{h})}(\theta) := h_\theta^{(\widetilde{h})}\theta - \ln R^{(\widetilde{h})}(h_\theta^{(\widetilde{h})})$$

обозначает функцию уклонений для сопряженного распределения $F^{(\widetilde{h})}$. Используя (1.4), получаем, что

$$\Lambda^{(\widetilde{h})}\left(\theta + \frac{M}{n}\right) = \left(\theta + \frac{M}{n}\right) h^{(\widetilde{h})}_{\theta+M/n} - \ln R^{(\widetilde{h})}\left(h^{(\widetilde{h})}_{\theta+M/n}\right) =$$
$$= \left(\theta + \frac{M}{n}\right) h_{\theta+M/n} - \ln R\left(h_{\theta+M/n}\right) - \left(\theta + \frac{M}{n}\right)\widetilde{h} + \ln R(\widetilde{h}) =$$
$$= \Lambda\left(\theta + \frac{M}{n}\right) - \left(\theta + \frac{M}{n}\right)\widetilde{h} + \ln R(\widetilde{h}). \quad (2.6)$$

Разложим $\Lambda(\theta + M/n)$ по формуле Тейлора в точке θ:

$$\Lambda\left(\theta + \frac{M}{n}\right) = \Lambda(\theta) + \Lambda'(\theta)\frac{M}{n} + o\left(\frac{M}{n}\right), \quad n \to \infty. \quad (2.7)$$

Подставляя (2.7) в (2.6) и используя то, что $\Lambda'(\theta) = h_\theta$, получаем, что

$$\Lambda^{(\widetilde{h})}\left(\theta + \frac{M}{n}\right) n = \Lambda(\theta)n + (h_\theta - \widetilde{h})M - \theta\widetilde{h}n + n\ln R(\widetilde{h}) + o(1) \quad (2.8)$$

при $n \to \infty$. В силу (1.4) и (2.8), получаем, что

$$\mathbf{P}\left(S_n^{(\widetilde{h})} \geq \theta n + M\right) = \frac{1+\rho_n(\theta)}{\sqrt{2\pi n}\sigma\left(h_\theta\right)\left(h_\theta - \widetilde{h}\right)} R^{-n}(\widetilde{h}) e^{-\Lambda(\theta)n} e^{\theta \widetilde{h} n + M(\widetilde{h} - h_\theta) + o(1)} \quad (2.9)$$

при $n \to \infty$. Отсюда в силу (2.4) соотношение

$$\mathbf{P}\left(Z_n = k,\ S_n \geq \theta n + M\right) < \frac{2}{\sqrt{2\pi n}\sigma\left(h_\theta\right)\left(h_\theta - \widetilde{h}\right)} e^{-\Lambda(\theta)n - \theta n} e^{-M(1+h_\theta)+1} \quad (2.10)$$

выполнено при всех достаточно больших n и $\theta \in [\theta_1; \theta_2]$.

Оценим $\mathbf{P}\left(Z_n = k,\ S_n \leq \theta n - M\right)$. Исходя из формулы (2.2), имеем

$$\mathbf{P}\left(Z_n = k | S_n \leq \theta n - M\right) = \mathbf{E}\left(\frac{1}{U_n + V_n}\frac{U_n}{V_n}\left(1 + \frac{U_n}{V_n}\right)^{-k} \middle| S_n \leq \theta n - M\right) \leq$$
$$\leq \mathbf{E}\left(g\left(\frac{U_n}{V_n}\right) \middle| S_n \leq \theta n - M\right),$$

где $g = x(1+x)^{-k}$. Поскольку

$$g'(x) = (1+x)^{-k-1}(1-(k-1)x), \quad x > 0, \quad \lim_{x\to 0} g(x) = \lim_{x\to+\infty} g(x) = 0,$$

то единственный ноль производной функции $g(x)$ будет её точкой максимума на $[0; \infty)$. Следовательно,

$$\mathbf{P}\left(Z_n = k | S_n \leq \theta n - M\right) \leq \sup_{[0;+\infty]} g(x) = g\left(\frac{1}{k-1}\right).$$

Таким образом,

$$\mathbf{P}\left(Z_n = k,\ S_n \leq \theta n - M\right) =$$
$$= \mathbf{P}\left(Z_n = k | S_n \leq \theta n - M\right) \mathbf{P}\left(S_n \leq \theta n - M\right) \leq$$
$$\leq g\left(\frac{1}{k-1}\right) \mathbf{P}\left(S_n \leq \theta n - M\right) = \frac{1}{ek}\frac{1+\rho_n(\theta)}{\sqrt{2\pi n}\sigma(h_\theta)(-h_\theta)} e^{-\Lambda(\theta - M/n)n}. \quad (2.11)$$

Последний переход в (2.11) использует следствие 1. Раскладывая $\Lambda(\theta - M/n)$ по формуле Тейлора в точке θ и подставляя результат в (2.11), получаем, что соотношение

$$\mathbf{P}\left(Z_n = k,\ S_n \leq \theta n - M\right) < \frac{2}{\sqrt{2\pi n}\sigma(h_\theta)(-h_\theta)} e^{-\Lambda(\theta)n - \theta n} e^{h_\theta M + 1} \quad (2.12)$$

выполнено при всех достаточно больших n и $\theta \in [\theta_1; \theta_2]$.

Оценим вероятность $\mathbf{P}(Z_n = k,\ \theta n - M < S_n < \theta n + M)$. Напомним, что

$$\widetilde{S}_n = S_n^{(h_\theta)} - \theta n, \quad \widetilde{V}_n = \sum_{i=0}^{n-1} \exp\left(-S_i^{(h_\theta)}\right), \quad \widetilde{V}_\infty = \sum_{i=0}^{\infty} \exp\left(-S_i^{(h_\theta)}\right).$$

Докажем, что

$$\mathbf{P}(Z_n = k,\ \theta n - M < S_n < \theta n + M) =$$
$$= \frac{1+\rho_n(\theta)}{\sqrt{2\pi n}\sigma(h_\theta)} e^{-\Lambda(\theta)n - \ln k} \int_1^{+\infty}\int_{-M}^{M} \frac{e^{-(1+h_\theta)y}}{x^2} \exp\left(-\frac{e^{-y}}{x}\right) \mathrm{d}y \mathbf{P}\left(\widetilde{V}_\infty \in \mathrm{d}x\right). \quad (2.13)$$

Для этого заметим, что при $S_n \geq \theta n - M$ и $k = [e^{\theta n}]$ справедливы неравенства

$$k\frac{U_n^2}{V_n^2} < kU_n^2 \leq e^{\theta n - 2S_n} \leq e^{\theta n - 2\theta n + 2M}. \quad (2.14)$$

Таким образом, если $S_n \geq \theta n - M$, то, с помощью (2.2), получаем, что

$$\mathbf{P}(Z_n = k | \boldsymbol{\eta}) = \frac{1}{U_n + V_n}\left(1 + \frac{U_n}{V_n}\right)^{-k} \frac{U_n}{V_n} =$$
$$= \frac{1}{U_n + V_n} e^{-k\ln\left(1+\frac{U_n}{V_n}\right)} \frac{U_n}{V_n} = \frac{U_n}{V_n^2} e^{-k\frac{U_n}{V_n}} (1 + o(1)) \quad (2.15)$$

при $n \to \infty$, где $o(1)$ равномерно мало по рассматриваемым $\boldsymbol{\eta}$.

Используя определение сопряженного распределения (1.1), а также представление (2.15), запишем искомую вероятность (2.13) в виде интеграла:

$$\mathbf{P}(Z_n = k,\ \theta n - M < S_n < \theta n + M) =$$
$$= \frac{R^n(h_\theta)}{R^n(h_\theta)} \int_1^{+\infty}\int_{\theta n - M}^{\theta n + M} e^{h_\theta y} \frac{e^{-(1+h_\theta)y}}{x^2} \exp\left(-\frac{ke^{-y}}{x}\right) \mathbf{P}\left(S_n \in \mathrm{d}y,\ \sum_{i=0}^{n-1} e^{-S_i} \in \mathrm{d}x\right) =$$
$$= R^n(h_\theta) \int_1^{+\infty}\int_{\theta n - M}^{\theta n + M} \frac{e^{-(1+h_\theta)y}}{x^2} \exp\left(-\frac{ke^{-y}}{x}\right) \mathbf{P}\left(S_n^{(h_\theta)} \in \mathrm{d}y,\ \sum_{i=0}^{n-1} e^{-S_i^{(h_\theta)}} \in \mathrm{d}x\right).$$

Производя замену y на $y - \theta n$, получаем, что

$$\mathbf{P}(Z_n = k,\ \theta n - M < S_n < \theta n + M) = \exp(-\Lambda(\theta)n - \theta n) \times$$
$$\times \int_1^{+\infty}\int_{-M}^{M} \frac{e^{-(1+h_\theta)y}}{x^2} \exp\left(-\frac{e^{-y}}{x}\right) \mathbf{P}\left(S_n^{(h_\theta)} - \theta n \in \mathrm{d}y,\ \sum_{i=0}^{n-1} e^{-S_i^{(h_\theta)}} \in \mathrm{d}x\right). \quad (2.16)$$

Соотношение (2.16) перепишем в виде

$$\mathbf{P}\left(Z_n = k,\ \theta n - M < S_n < \theta n + M\right) = \exp\left(-\Lambda(\theta)n - \theta n\right) \times$$
$$\times \int\limits_{1}^{+\infty} \int\limits_{-M}^{M} \frac{e^{(-1-h_\theta)y}}{x^2} \exp\left(-\frac{e^{-y}}{x}\right) \mathbf{P}\left(\widetilde{S}_n \in \mathrm{d}y,\ \widetilde{V}_n \in \mathrm{d}x \middle| \widetilde{S}_n \in [-M; M]\right) \times \quad (2.17)$$
$$\times \mathbf{P}\left(\widetilde{S}_n \in [-M; M]\right).$$

Заметим, что, согласно замечанию 1, для любого отрезка $[h_1; h_2] \subset (h^-; 0)$ будет верно условие теоремы 2 и, следовательно, леммы 3. Пользуясь тем, что последовательность $\{\widetilde{S}_n, n \geq 1\}$ является случайным блужданием с нулевым средним, применим к вероятности $\mathbf{P}\left(\widetilde{S}_n \in [-M; M]\right)$ теорему 2:

$$\mathbf{P}\left(\widetilde{S}_n \in [-M; M]\right) = \frac{2M + \rho_n(\theta)}{\sqrt{2\pi n}\sigma(h_\theta)}.$$

Подставляя полученное соотношение в (2.17), получаем, что

$$\mathbf{P}\left(Z_n = k,\ \theta n - M < S_n < \theta n + M\right) =$$
$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi n}\sigma(h_\theta)} e^{-\Lambda(\theta)n - \theta n} \left(2M + \rho_n(\theta)\right) \times$$
$$\times \int\limits_{1}^{+\infty} \int\limits_{-M}^{M} \frac{e^{(-1-h_\theta)y}}{x^2} \exp\left(-\frac{e^{-y}}{x}\right) \mathbf{P}\left(\widetilde{S}_n \in \mathrm{d}y,\ \widetilde{V}_n \in \mathrm{d}x \middle| \widetilde{S}_n \in [-M; M]\right). \quad (2.18)$$

Представим меру под знаком интеграла в (2.18) в виде

$$\mathbf{P}\left(\widetilde{V}_n < a,\ \widetilde{S}_n \in [-M; d] \middle| \widetilde{S}_n \in [-M; M]\right) =$$
$$= \mathbf{P}\left(\widetilde{V}_n < a \middle| \widetilde{S}_n \in [-M; d]\right) \mathbf{P}\left(\widetilde{S}_n \in [-M; d] \middle| \widetilde{S}_n \in [-M; M]\right). \quad (2.19)$$

В силу теоремы 2 последовательность мер $\left\{\mathbf{P}\left(\widetilde{S}_n \in \cdot \middle| \widetilde{S}_n \in [-M; M]\right), n \geq 1\right\}$ слабо сходится к мере, соответствующей равномерному распределению на отрезке $[-M, M]$. Пользуясь леммой 3 в соотношении (2.19), приходим к соотношению

$$\mathbf{P}\left(\widetilde{V}_n < a,\ \widetilde{S}_n \in [-M; d] \middle| \widetilde{S}_n \in [-M; M]\right) \to \mathbf{P}\left(\widetilde{V}_\infty < a\right) \frac{M + d}{2M},$$

сходимость в котором равномерна по $\theta \in [\theta_1; \theta_2]$ при $n \to \infty$. Поскольку меры в левой и правой частях являются вероятностными, отсюда вытекает слабая сходимость мер, то есть сходимость интегралов от непрерывных ограниченных функций. Таким образом,

$$(2M + \rho_n(\theta)) \times$$

$$\times \int\limits_1^{+\infty} \int\limits_{-M}^{M} \frac{e^{(-1-h_\theta)y}}{x^2} \exp\left(-\frac{e^{-y}}{x}\right) \mathbf{P}\left(\widetilde{S}_n \in \mathrm{d}y,\ \widetilde{V}_n \in \mathrm{d}x \middle| \widetilde{S}_n \in [-M; M]\right) \to$$

$$\to \int\limits_1^{+\infty} \int\limits_{-M}^{M} \frac{e^{(-1-h_\theta)y}}{x^2} \exp\left(-\frac{e^{-y}}{x}\right) \mathrm{d}y \mathbf{P}\left(\widetilde{V}_\infty \in \mathrm{d}x\right)$$

равномерно по $\theta \in [\theta_1; \theta_2]$ при $n \to \infty$. Подставляя это утверждение в выражение (2.19), получаем требуемое утверждение (2.13).

Положим

$$P_{2,n}(k) = \frac{1}{\sqrt{2\pi n}\sigma(h_\theta)} e^{-\Lambda(\theta)n - \theta n}.$$

В силу (2.3) имеем

$$\varliminf_{n\to\infty} P_{2,n}(k)^{-1} \mathbf{P}\left(Z_n = k,\ |S_n - \theta n| < M\right) \le \varliminf_{n\to\infty} P_{2,n}(k)^{-1} \mathbf{P}\left(Z_n = k\right) \le$$

$$\le \varlimsup_{n\to\infty} P_{2,n}(k)^{-1} \mathbf{P}\left(Z_n = k\right) \le \varlimsup_{n\to\infty} P_{2,n}(k)^{-1} \mathbf{P}\left(Z_n = k,\ S_n \le \theta n - M\right) +$$

$$+ \varlimsup_{n\to\infty} P_{2,n}(k)^{-1} \mathbf{P}\left(Z_n = k,\ |S_n - \theta n| < M\right) +$$

$$+ \varlimsup_{n\to\infty} P_{2,n}(k)^{-1} \mathbf{P}\left(Z_n = k,\ S_n \ge \theta n + M\right).$$

В силу леммы 3 и соотношений (2.10), (2.12) и (2.13) имеем

$$\int\limits_1^{+\infty} \int\limits_{-M}^{M} \frac{e^{-(1+h_\theta)y}}{x^2} \exp\left(-\frac{e^{-y}}{x}\right) \mathrm{d}y \mathbf{P}\left(\widetilde{V}_\infty \in \mathrm{d}x\right) \le \varliminf_{n\to\infty} P_{2,n}(k)^{-1} \mathbf{P}\left(Z_n = k\right) \le$$

$$\le \varlimsup_{n\to\infty} P_{2,n}(k)^{-1} \mathbf{P}\left(Z_n = k\right) \le 2\left(\frac{1}{-h_\theta} e^{h_\theta M + 1} + \frac{2}{h_\theta - \widetilde{h}} e^{-M(1+h_\theta)+1}\right) +$$

$$+ \int\limits_1^{+\infty} \int\limits_{-M}^{M} \frac{e^{-(1+h_\theta)y}}{x^2} \exp\left(-\frac{e^{-y}}{x}\right) \mathrm{d}y \mathbf{P}\left(\widetilde{V}_\infty \in \mathrm{d}x\right).$$

Переходя в полученных соотношениях к пределу по $M \to \infty$, приходим к соотношению

$$P_{2,n}(k)^{-1} \mathbf{P}(Z_n = k) \to \int_1^\infty \int_{-\infty}^\infty \frac{e^{-(1+h_\theta)y}}{x^2} \exp\left(-\frac{e^{-y}}{x}\right) \mathrm{d}y \mathbf{P}\left(\widetilde{V}_\infty \in \mathrm{d}x\right)$$

равномерно по $\theta \in [\theta_1; \theta_2]$ при $n \to \infty$. Производя замену $u = \exp(-y)/x$, получаем для двойного интеграла в правой части, что

$$\int\limits_1^{+\infty} \int\limits_0^{\infty} \frac{u^{h_\theta}}{x^{1-h_\theta}} e^{-u} \mathrm{d}u \mathbf{P}\left(\widetilde{V}_\infty \in \mathrm{d}x\right) = \Gamma(1+h_\theta) \int\limits_1^{+\infty} \frac{1}{x^{1-h_\theta}} \mathbf{P}\left(\widetilde{V}_\infty \in \mathrm{d}x\right).$$

Теорема 5 доказана. □

2.3 Вторая зона больших нижних уклонений

Вторая зона больших нижних уклонений существует только в случае строго надкритических ВПССГ ($h^- < -1$, $m(-1) > 0$) и определяется следующим условием: если $(Z_n, n \geq 0)$ — строго надкритический процесс, то второй зоной уклонений называется случай, когда $\theta \in (0; m(-1))$.

Для второй зоны больших нижних уклонений строго надкритического ВПССГ получен следующий результат.

Теорема 6 (локальная теорема о больших нижних уклонениях строго надкритического ВПССГ во второй зоне уклонений)**.** *Пусть $(Z_n, n \geq 0)$ — ВПССГ со средой $\boldsymbol{\eta}$, порожденной последовательностью н.о.р. величин, $S_n = \xi_1 + \cdots + \xi_n, n > 0$, — его сопровождающее случайное блуждание, где величина ξ предполагается нерешетчатой, $\mathbf{E}\xi = \mu > 0$, $m(-1) > 0$. Предположим также, что для ξ верно, что $\mathbf{E}\xi^2 \exp(-\xi) < \infty$.*

Пусть $k(n) = k \in \mathbb{N}$, а $\theta(n) = \theta := \ln k/n \in [0; \theta_2] \subset [0; m(-1))$, где θ_2 фиксировано. Тогда

$$\mathbf{P}(Z_n = k) = (1 + \rho_n) R^n(-1) \mathbf{E}\widehat{V}_\infty^{-2},$$

где

$$\widehat{V}_\infty := \sum_{i=0}^{\infty} \exp\left(-S_i^{(-1)}\right).$$

Отметим, что рассматриваемая асимптотика вероятностей во второй зоне уклонений не зависит от θ и, соответственно, от k — данное свойство проявляется только в случае рассмотрения локальных вероятностей (см. теорему 4).

Также в теорему 6 включён результат для случая так называемых низких уровней — то есть ситуации, когда k является константой, иначе говоря, когда θ стремится к 0 или равно 0. Данный результат дополняет и уточняет результат, полученный В. Бансайе и К. Боингхоффом в [35] (Corollary 2.3) для низких уровней.

В случае строго надкритического ВПССГ появляется переходная зона в окрестности точки $m(-1)$, разделяющая первую и вторую зону уклонений. Таким образом, можно сформулировать обобщение теоремы 6, частично рассматривающее переходную зону.

Теорема 7 (локальная теорема о больших нижних уклонениях строго надкритического ВПССГ во второй зоне уклонений и на границе зон)**.** *Пусть процесс* $(Z_n, n \geq 0)$ *удовлетворяет условиям теоремы 6.*

Пусть $k(n) = k \in \mathbb{N}$, *а* $\theta(n) = \theta := \ln k/n \in [0; \theta_2]$, *где* $\theta_2 = \theta_2(n) = m(-1) + c/\sqrt{n}$ *для некоторой произвольной константы* $c > 0$. *Тогда*

$$\mathbf{P}\left(Z_n = k\right) = \left(1 + \rho_n\right) R^n(-1)\mathbf{E}\widehat{V}_\infty^{-2}\left(1 - \Phi\left(\frac{\sqrt{n}(\theta - m(-1))}{\sigma(-1)}\right)\right).$$

Отметим одно полезное следствие из теоремы 7.

Следствие 2. *Пусть процесс* $(Z_n, n \geq 0)$ *удовлетворяет условиям теоремы 6.*

Пусть $k(n) = k \in \mathbb{N}$, *а* $\theta(n) = \theta := \ln k/n \in [\theta_1; \theta_2]$, *где* $\theta_1 = \theta_1(n) = m(-1) + cn^{-1/2} + r_1(n)$, $\theta_2 = \theta_2(n) = m(-1) + cn^{-1/2} + r_2(n)$ *для некоторого фиксированного* c *и некоторых фиксированных последовательностей* r_1 *и* r_2 *таких, что* $r_1(n) < r_2(n)$, $r_1(n) = o(n^{-1/2})$, $r_2(n) = o(n^{-1/2})$ *и отрезок* $[\exp(\theta_1(n)n); \exp(\theta_2(n)n)]$ *содержит хотя бы одно целое число при всех* n. *Тогда*

$$\mathbf{P}\left(Z_n = k\right) = \left(1 + \rho_n\right) R^n(-1)\mathbf{E}\widehat{V}_\infty^{-2}\left(1 - \Phi\left(\frac{c}{\sigma(-1)}\right)\right).$$

Доказательство теоремы 6 и следствия 2. Заметим, что теорема 6 и следствие 2 напрямую следуют из теоремы 7, поэтому мы будем доказывать только теорему 7.

□

Доказательство теоремы 7. Оценим $\mathbf{P}(Z_n = k)$ при $\theta \in [0; \theta_2]$, где $\theta_2 = \theta_2(n) = m(-1) + c/\sqrt{n}$ для некоторой произвольной константы $c > 0$. Согласно (2.2) имеем, что

$$\mathbf{P}(Z_n = k) = \mathbf{E}\left(\frac{1}{U_n + V_n}\frac{U_n}{V_n}\left(1 + \frac{U_n}{V_n}\right)^{-k}\right) =$$
$$= \frac{R^n(-1)}{R^n(-1)}\mathbf{E}\left(e^{-S_n}\frac{1}{(U_n + V_n)\,V_n}\left(1 + \frac{U_n}{V_n}\right)^{-k}\right) =$$
$$= R^n(-1)\mathbf{E}\left(\frac{1}{(\widehat{U}_n + \widehat{V}_n)\widehat{V}_n}\left(1 + \frac{\widehat{U}_n}{\widehat{V}_n}\right)^{-k}\right), \tag{2.20}$$

где $\widehat{U}_n = \exp(-S_n^{(-1)})$, $\widehat{V}_n = \sum_{i=0}^{n-1}\exp(-S_i^{(-1)})$. Также обозначим $\widehat{S}_n := S_n^{(-1)} - m(-1)n$. Зафиксируем положительное $M > c$ и представим математическое ожидание в правой части (2.20) как сумму математических ожиданий:

$$\mathbf{E}\left(\frac{1}{(\widehat{U}_n + \widehat{V}_n)\widehat{V}_n}\left(1 + \frac{\widehat{U}_n}{\widehat{V}_n}\right)^{-k}; \widehat{S}_n \le -M\sqrt{n}\right) +$$
$$+\mathbf{E}\left(\frac{1}{(\widehat{U}_n + \widehat{V}_n)\widehat{V}_n}\left(1 + \frac{\widehat{U}_n}{\widehat{V}_n}\right)^{-k}; \widehat{S}_n \in \left(-M\sqrt{n}; M\sqrt{n}\right)\right) +$$
$$+\mathbf{E}\left(\frac{1}{(\widehat{U}_n + \widehat{V}_n)\widehat{V}_n}\left(1 + \frac{\widehat{U}_n}{\widehat{V}_n}\right)^{-k}; \widehat{S}_n \ge M\sqrt{n}\right). \tag{2.21}$$

Обозначим математические ожидания из (2.21) через I_1, I_2 и I_3 соответственно. Заметим, что величина под знаком математического ожидания в I_1 не превосходит единицы. Следовательно, согласно центральной предельной теореме, верна следующая оценка:

$$I_1 \le \mathbf{P}\left(\frac{\widehat{S}_n}{\sqrt{n}\sigma(-1)} + \frac{M}{\sigma(-1)} \le 0\right) = (1 + \rho_n)\Phi\left(-\frac{M}{\sigma(-1)}\right). \tag{2.22}$$

Математическое ожидание I_3 оценивается аналогичным образом:

$$I_3 \le \mathbf{P}\left(\frac{\widehat{S}_n}{\sqrt{n}\sigma(-1)} - \frac{M}{\sigma(-1)} \ge 0\right) =$$
$$= (1 + \rho_n)\left(1 - \Phi\left(\frac{M}{\sigma(-1)}\right)\right) = (1 + \rho_n)\Phi\left(-\frac{M}{\sigma(-1)}\right). \tag{2.23}$$

В дальнейшем M будет выбрано достаточно большим, чтобы I_1 и I_3 оказались малы.

Далее преобразуем математическое ожидание I_2:

$$I_2 = (1+\rho_n)\int\limits_1^{+\infty}\int\limits_{-M\sqrt{n}}^{M\sqrt{n}} \frac{1}{x\left(x+e^{-y-m(-1)n}\right)}\times$$
$$\times\left(1+\frac{\exp(-y-m(-1)n)}{x}\right)^{-k}\mathbf{P}\left(\widehat{S}_n\in \mathrm{d}y,\ \widehat{V}_n\in \mathrm{d}x\right)=$$
$$=(1+\rho_n)\int\limits_1^{+\infty}\int\limits_{-M\sqrt{n}}^{M\sqrt{n}} \frac{1}{x\left(x+e^{-y-m(-1)n}\right)}\times$$
$$\times\exp\left(-\frac{\exp(-y-(m(-1)-\theta)n)}{x}\right)\mathbf{P}\left(\widehat{S}_n\in \mathrm{d}y,\ \widehat{V}_n\in \mathrm{d}x\right). \tag{2.24}$$

Обозначим $r_n := m(-1)-\theta$, $M_1 = M_1(n,\theta) := \max(-M\sqrt{n}, -nr_n - n^{1/3})$, $M_2 = M_2(n,\theta) := \max(-M\sqrt{n}, -nr_n + n^{1/3})$. Отметим, что r_n зависит от n так как θ, вообще говоря, зависит от n.

Разобьем внутренний интеграл в (2.24) на три интеграла J_1, J_2 и J_3 по промежуткам $[-M\sqrt{n}; M_1)$, $[M_1; M_2)$ и $[M_2; M\sqrt{n}]$ соответственно. Один или несколько из описанных выше промежутков интегрирования могут быть пустыми множествами, однако доказательству это не мешает. Рассмотрим интеграл J_1:

$$J_1 = (1+\rho_n)\int\limits_1^{+\infty}\int\limits_{-M\sqrt{n}}^{M_1} \frac{1}{x\left(x+e^{-y-m(-1)n}\right)}\times$$
$$\times\exp\left(-\frac{\exp(-y-(m(-1)-\theta)n)}{x}\right)\mathbf{P}\left(\widehat{S}_n\in \mathrm{d}y,\ \widehat{V}_n\in \mathrm{d}x\right). \tag{2.25}$$

Если n таково, что $-nr_n - n^{1/3} \le -M\sqrt{n}$, то $M_1 = -M\sqrt{n}$. В этом случае $J_1 = 0 = \rho_n$, так как является интегралом по пустому множеству. Пусть n таково, что $-nr_n - n^{1/3} > -M\sqrt{n}$. Тогда

$$M_1 = -nr_n - n^{1/3},\ -y-(m(-1)-\theta)n = -y - nr_n \ge n^{1/3},$$

следовательно,

$$J_1 \le 2 \int\limits_1^{+\infty} \frac{1}{x^2} \exp\left(-\frac{e^{n^{1/3}}}{x}\right) \mathbf{P}\left(\widehat{V}_n \in \mathrm{d}x\right) \le$$

$$\le 2 \max\left(\frac{1}{x^2} \exp\left(-\frac{e^{n^{1/3}}}{x}\right); x \ge 1\right) =: 2 \max(\widetilde{f}(x); x \ge 1). \tag{2.26}$$

Оценим максимум в правой части (2.26). Для этого заметим, что

$$\widetilde{f}'(x) = \exp\left(-\frac{e^{n^{1/3}}}{x}\right)\left(\frac{e^{n^{1/3}} - 2x}{x^4}\right),$$

$$\widetilde{f}\left(e^{n^{1/3}}/2\right) = \frac{1}{\exp\left(2n^{1/3} + 2\right)}, \quad \widetilde{f}(1) = \exp\left(-e^{n^{1/3}}\right).$$

Откуда, учитывая, что $\widetilde{f}(x) \to 0$ при $x \to \infty$ при достаточно больших n получаем, что

$$J_1 \le \frac{2}{\exp\left(2n^{1/3} + 2\right)} = \rho_n.$$

Откуда получаем, что

$$J_1 = \rho_n \tag{2.27}$$

при всех n. Для оценки интеграла J_3 заметим, что, если $y \in [M_2; M\sqrt{n}]$, то

$$|y| \le M\sqrt{n} = o\left(m(-1)n\right),$$

$$-y - nr_n \le -\max(-M\sqrt{n}, -nr_n + n^{1/3}) - nr_n. \tag{2.28}$$

Соответственно, при $y \in [M_2; M\sqrt{n}]$, если $nr_n - n^{1/3} < M\sqrt{n}$, то $-y - nr_n \le -n^{1/3}$. Если же $nr_n - n^{1/3} \ge M\sqrt{n}$, то $-y - nr_n \le M\sqrt{n} - nr_n \le -n^{1/3}$. Откуда, используя (2.28), получаем, что

$$J_3 = (1 + \rho_n) \int\limits_1^{+\infty} \int\limits_{M_2}^{M\sqrt{n}} \frac{1}{x\left(x + e^{-y-m(-1)n}\right)} \exp\left(-\frac{\exp\left(-y - nr_n\right)}{x}\right) \times$$

$$\times \mathbf{P}\left(\widehat{S}_n \in \mathrm{d}y,\ \widehat{V}_n \in \mathrm{d}x\right) =$$

$$= (1 + \rho_n) \int\limits_1^{+\infty} \frac{1}{x^2} \mathbf{P}\left(\widehat{S}_n \in [M_2; M\sqrt{n}],\ \widehat{V}_n \in \mathrm{d}x\right). \tag{2.29}$$

Представим меру в правой части (2.29) в виде

$$\mathbf{P}\left(\widehat{S}_n \in [M_2; M\sqrt{n}],\ \widehat{V}_n \in \mathrm{d}x\right) = \\ = \mathbf{P}\left(\widehat{V}_n \in \mathrm{d}x \middle|\ \widehat{S}_n \in [M_2; M\sqrt{n}]\right) \mathbf{P}\left(\widehat{S}_n \in [M_2; M\sqrt{n}]\right). \tag{2.30}$$

Применим лемму 1 к последней вероятности из (2.30):

$$\mathbf{P}\left(\widehat{S}_n \in [M_2; M\sqrt{n}]\right) = \mathbf{P}\left(\frac{\widehat{S}_n}{\sqrt{n}\sigma(-1)} \in \left[\frac{M_2}{\sqrt{n}\sigma(-1)}; \frac{M}{\sigma(-1)}\right]\right) = \\ = (1+\rho_n)\left(\Phi\left(\frac{M}{\sigma(-1)}\right) - \Phi\left(\frac{\max(-M, -\sqrt{n}r_n)}{\sigma(-1)}\right)\right). \tag{2.31}$$

Заметим, что, согласно замечанию 1, для любого отрезка $[h_1; h_2] \subset [-1; 0)$ будет верно условие теоремы 2 и, следовательно, леммы 3. Используя лемму 3 при $\theta = -1$, $g_n = M_2$ и $d_n = M\sqrt{n}$, получим, что

$$\mathbf{P}\left(\widehat{V}_n < a \middle|\ \widehat{S}_n \in [M_2; M\sqrt{n}]\right) \to \mathbf{P}\left(\widehat{V}_\infty < a\right). \tag{2.32}$$

Подставляя (2.31) и (2.32) в (2.29), получаем, что

$$J_3 = (1+\rho_n)\left(\Phi\left(\frac{M}{\sigma(-1)}\right) - \Phi\left(\frac{\max(-M, -\sqrt{n}r_n)}{\sigma(-1)}\right)\right)\mathbf{E}\widehat{V}_\infty^{-2}. \tag{2.33}$$

Интеграл J_2 можно оценить суммой интегралов:

$$J_2 = (1+\rho_n)\int\limits_1^{+\infty}\int\limits_{M_1}^{M_2} \frac{1}{x\left(x + e^{-y-m(-1)n}\right)} \times \\ \times \exp\left(-\frac{\exp(-y-(m(-1)-\theta)n)}{x}\right)\mathbf{P}\left(\widehat{S}_n \in \mathrm{d}y,\ \widehat{V}_n \in \mathrm{d}x\right) \le \\ \le 2\sum_{i \in \lfloor M_1 \rfloor}^{\lceil M_2 \rceil}\int\limits_1^{+\infty}\frac{1}{x^2}\mathbf{P}\left(\widehat{S}_n \in [i; i+1),\ \widehat{V}_n \in \mathrm{d}x\right) \tag{2.34}$$

при достаточно больших n. Используя лемму 3, из (2.34) получим, что

$$J_2 \le 2\sum_{i \in \lfloor M_1 \rfloor}^{\lceil M_2 \rceil}\int\limits_1^{+\infty}\frac{1}{x^2}\mathbf{P}\left(\widehat{S}_n \in [i; i+1)\right)\mathbf{P}\left(\widehat{V}_\infty \in \mathrm{d}x\right) = \\ = 2\mathbf{E}\widehat{V}_\infty^{-2}\sum_{i \in \lfloor M_1 \rfloor}^{\lceil M_2 \rceil}\mathbf{P}\left(\widehat{S}_n \in [i; i+1)\right) \tag{2.35}$$

при достаточно больших n. Применяя теорему 2 к вероятности в правой части (2.35), получаем, что

$$J_2 \leq 2\mathbf{E}\widehat{V}_\infty^{-2}(1+\rho_n)\frac{\lceil M_2\rceil - \lfloor M_1\rfloor}{\sqrt{2\pi n}\sigma(-1)} \leq 4\mathbf{E}\widehat{V}_\infty^{-2}\frac{2n^{1/3}+2}{\sqrt{2\pi n}\sigma(-1)} = \rho_n \tag{2.36}$$

при достаточно больших n, так как $|M_2 - M_1| \leq |\max(-M\sqrt{n}, -nr_n + n^{1/3}) - \max(-M\sqrt{n}, -nr_n - n^{1/3})| \leq 2n^{1/3}$.

Подставляя (2.33), (2.36) и (2.27) в (2.24), получаем, что

$$I_2 = (1+\rho_n)\left(\Phi\left(\frac{M}{\sigma(-1)}\right) - \Phi\left(\frac{\max(-M, -\sqrt{n}r_n)}{\sigma(-1)}\right)\right)\mathbf{E}\widehat{V}_\infty^{-2} + \rho_n \tag{2.37}$$

при достаточно больших n. Подставляя (2.37), (2.23) и (2.22) в (2.21), получаем, что

$$(1+\rho_n)\left(\Phi\left(\frac{M}{\sigma(-1)}\right) - \Phi\left(\frac{\max(-M, -\sqrt{n}r_n)}{\sigma(-1)}\right)\right)\mathbf{E}\widehat{V}_\infty^{-2} \leq$$
$$\leq \mathbf{E}\left(\frac{1}{(\widehat{U}_n+\widehat{V}_n)\widehat{V}_n}\left(1+\frac{\widehat{U}_n}{\widehat{V}_n}\right)^{-k}\right) \leq 2(1+\rho_n)\Phi\left(-\frac{M}{\sigma(-1)}\right) +$$
$$+(1+\rho_n)\left(\Phi\left(\frac{M}{\sigma(-1)}\right) - \Phi\left(\frac{\max(-M, -\sqrt{n}r_n)}{\sigma(-1)}\right)\right)\mathbf{E}\widehat{V}_\infty^{-2}. \tag{2.38}$$

Используя (2.38) и (2.20), получим, что

$$(1+\rho_n)R^n(-1)\left(\Phi\left(\frac{M}{\sigma(-1)}\right) - \Phi\left(\frac{\max(-M, -\sqrt{n}r_n)}{\sigma(-1)}\right)\right)\mathbf{E}\widehat{V}_\infty^{-2} \leq$$
$$\leq \mathbf{P}(Z_n = k) \leq (1+\rho_n)R^n(-1)\left(2\Phi\left(-\frac{M}{\sigma(-1)}\right) +\right.$$
$$\left.+\left(\Phi\left(\frac{M}{\sigma(-1)}\right) - \Phi\left(\frac{\max(-M, -\sqrt{n}r_n)}{\sigma(-1)}\right)\right)\mathbf{E}\widehat{V}_\infty^{-2}\right). \tag{2.39}$$

Положим

$$P_{1,n}(k) = R^n(-1)\left(1 - \Phi\left(-\frac{\sqrt{n}r_n}{\sigma(-1)}\right)\right), \tag{2.40}$$

где $r_n = m(-1) - \ln k/n$. Возьмём некоторое положительное фиксированное $\gamma \in (0;1)$. Заметим, что последовательность $1 - \Phi(-\sqrt{n}r_n/\sigma(-1))$ по условию теоремы 7 ограничена и отделена от 0. Следовательно, $(P_{1,n}(k))^{-1}R^n(-1)$ имеет конечный верхний предел. Отсюда следует, что с помощью выбора M можно сделать так, чтобы

$$\limsup_{n\to\infty}(P_{1,n}(k))^{-1}R^n(-1)\Phi\left(-\frac{M}{\sigma(-1)}\right)\leq\gamma \tag{2.41}$$

для любого наперёд заданного $\gamma>0$. Далее, заметим, что

$$\left(\Phi\left(\frac{M}{\sigma(-1)}\right)-\Phi\left(\frac{\max(-M,-\sqrt{n}r_n)}{\sigma(-1)}\right)\right):\left(1-\Phi\left(-\frac{\sqrt{n}r_n}{\sigma(-1)}\right)\right)\leq 1, \tag{2.42}$$

так как

$$\Phi\left(\frac{M}{\sigma(-1)}\right)\leq 1,\ \Phi\left(\frac{\max(-M,-\sqrt{n}r_n)}{\sigma(-1)}\right)\geq\Phi\left(-\frac{\sqrt{n}r_n}{\sigma(-1)}\right)$$

при всех n. Используя (2.39), (2.41) и (2.42), получаем, что

$$\limsup_{n\to\infty}(P_{1,n}(k))^{-1}\mathbf{P}\left(Z_n=k\right)\leq 2\gamma+\mathbf{E}\widehat{V}_\infty^{-2} \tag{2.43}$$

при достаточно больших M.

Пусть n таково, что $-\sqrt{n}r_n<-M$. Тогда

$$\Phi\left(-\frac{\sqrt{n}r_n}{\sigma(-1)}\right)\leq\Phi\left(\frac{-M}{\sigma(-1)}\right),$$

следовательно, с помощью выбора M можно сделать так, чтобы

$$\left(\Phi\left(\frac{M}{\sigma(-1)}\right)-\Phi\left(\frac{-M}{\sigma(-1)}\right)\right):\left(1-\Phi\left(-\frac{\sqrt{n}r_n}{\sigma(-1)}\right)\right)\geq 1-\gamma. \tag{2.44}$$

Пусть n таково, что $-\sqrt{n}r_n\geq -M$. Тогда, аналогично (2.44), с помощью выбора M можно сделать так, чтобы

$$\left(\Phi\left(\frac{M}{\sigma(-1)}\right)-\Phi\left(-\frac{\sqrt{n}r_n}{\sigma(-1)}\right)\right):\left(1-\Phi\left(-\frac{\sqrt{n}r_n}{\sigma(-1)}\right)\right)\geq 1-\gamma. \tag{2.45}$$

Следовательно, из (2.44) и (2.45) получаем, что

$$\begin{aligned}\left(\Phi\left(\frac{M}{\sigma(-1)}\right)-\Phi\left(\frac{\max(-M,-\sqrt{n}r_n)}{\sigma(-1)}\right)\right):\\ :\left(1-\Phi\left(-\frac{\sqrt{n}r_n}{\sigma(-1)}\right)\right)\geq 1-\gamma\end{aligned} \tag{2.46}$$

для любого n. Используя (2.39) и (2.46), получаем, что

$$\liminf_{n\to\infty}(P_{1,n}(k))^{-1}\mathbf{P}\left(Z_n=k\right)\geq(1-\gamma)\mathbf{E}\widehat{V}_\infty^{-2} \tag{2.47}$$

при достаточно больших M. Устремляя γ к 0, а M, соответственно, к ∞, из (2.43) и (2.47) получаем, что при $\theta \in [0; \theta_2]$ верно, что

$$\mathbf{P}\left(Z_n = k\right) = \left(1 + \rho_n\right) R^n(-1) \mathbf{E}\widehat{V}_\infty^{-2} \left(1 - \Phi\left(-\frac{\sqrt{n} r_n}{\sigma(-1)}\right)\right). \tag{2.48}$$

Теорема 7 доказана. □

2.4 Переходные явления между первой и второй зонами больших нижних уклонений

В данном разделе также рассматривается асимптотика локальных вероятностей больших нижних уклонений для строго надкритического ВПССГ ($h^- < -1$, $m(-1) > 0$). Как было описано ранее, в этом случае существует не только первая зона ($\theta \in (m(-1); \mu)$), но и вторая зона больших нижних уклонений ($\theta \in (0; m(-1))$). Соответственно, в окрестности точки $m(-1)$ появляется переходная зона между первой и второй зонами. Изучению переходных явлений в окрестности точки $m(-1)$ и посвящён данный раздел. Кроме того, в конце раздела приведена общая теорема для больших нижних уклонений ВПССГ.

Следующая теорема описывает поведение вероятности больших нижних уклонений в окрестности $m(-1)$.

Теорема 8 (локальная теорема о больших нижних уклонениях строго надкритического ВПССГ на границе первой и второй зон уклонений)**.** *Пусть* $(Z_n, n \geq 0)$ *— ВПССГ со средой* $\boldsymbol{\eta}$*, порожденной последовательностью н.о.р. величин,* $S_n = \xi_1 + \cdots + \xi_n, n > 0,$ *— его сопровождающее случайное блуждание, где величина* ξ *предполагается нерешетчатой,* $\mathbf{E}\xi = \mu > 0$, $m(-1) > 0$. *Предположим также, что для* ξ *верно, что* $\mathbf{E}\xi^2 \exp\left(-\xi\right) < \infty$.

Пусть $k(n) = k \in \mathbb{N}$, *а* $\theta(n) = \theta := \ln k/n \in [\theta_1; \theta_2] \subset (0; \mu)$, *где* $\theta_1 = \theta_1(n) \to m(-1)$ *и* $\theta_2 = \theta_2(n) \to m(-1)$ *при* $n \to \infty$. *Тогда*

$$\mathbf{P}\left(Z_n = k\right) = (1 + \rho_n) \mathbf{E}\widetilde{V}_\infty^{h_\theta - 1} e^{-\Lambda(\theta)n - \theta n} \times \tag{2.49}$$

$$\times \exp\left(\sigma^2(h_\theta) n (1 + h_\theta)^2/2\right) \left(1 - \Phi\left(\sigma(h_\theta)\sqrt{n}(1 + h_\theta)\right)\right), \tag{2.50}$$

где

$$\widetilde{V}_\infty := \sum_{i=0}^{\infty} \exp\left(-S_i^{(h_\theta)}\right).$$

Также нам понадобится обобщение теоремы 5, распространяющееся на часть переходной зоны.

Теорема 9 (локальная теорема о больших нижних уклонениях строго надкритического ВПССГ в первой зоне уклонений и на границе зон)**.** *Пусть процесс* $(Z_n, n \geq 0)$ *удовлетворяет условиям теоремы 8.*

Пусть $k(n) = k \in \mathbb{N}$, *а* $\theta(n) = \theta := \ln k/n \in [\theta_1; \theta_2] \subset (0; \mu)$, *где* $\theta_2 \in (m(-1); \mu)$ *фиксировано, а* $\theta_1 = \theta_1(n) = m(-1) + n^{-1/2}\varepsilon_n$ *для некоторой фиксированной положительной последовательности* $\varepsilon_n = o(\sqrt{n})$, *такой, что* $\varepsilon_n \to \infty$ *при* $n \to \infty$. *Тогда*

$$\mathbf{P}\left(Z_n = k\right) = \frac{(1+\rho_n)\Gamma(1+h_\theta)}{\sqrt{2\pi n}\sigma(h_\theta)} e^{-\Lambda(\theta)n - \theta n} \mathbf{E}\widetilde{V}_\infty^{h_\theta - 1}.$$

Теоремы 7, 8 и 9 полностью описывают асимптотику вероятностей больших нижних уклонений надкритических ВПССГ для $\theta \in [\theta_1; \theta_2] \subset [0; \mu)$. Соберём данные результаты воедино.

Теорема 10 (локальная теорема о больших нижних уклонениях надкритического ВПССГ)**.** *Пусть процесс* $(Z_n, n \geq 0)$ *удовлетворяет условиям теоремы 8. Пусть* $k(n) = k \in \mathbb{N}$, *а* $\theta(n) = \theta := \ln k/n \in [0; \theta_2] \subset [0; \mu)$. *Тогда*

$$\mathbf{P}\left(Z_n = k\right) = (1+\rho_n)\mathbf{E}(V_\infty^{(h_\alpha)})^{h_\alpha - 1} G(h_\alpha) \times$$
$$\times \exp\left(\frac{\sigma^2(h_\alpha n(1+h_\alpha)^2}{2}\right)\left(1 - \Phi\left(\frac{\sqrt{n}(\theta - m(-1))}{\sigma(\alpha)}\right)\right) e^{-\Lambda(\alpha)n - \alpha n},$$

где $\alpha := \max(m(-1), \theta)$, *а*

$$G(h_\alpha) = \begin{cases} \frac{\Gamma(1+h_\alpha)}{1+h_\alpha}, & h_\alpha > -1 \\ 1, & h_\alpha = -1 \end{cases}.$$

Доказательство теоремы 8. Оценим $\mathbf{P}\left(Z_n = k\right)$ при $\theta \in [\theta_1; \theta_2] \subset (0; \mu)$, где $\theta_1 = \theta_1(n) \to m(-1)$ и $\theta_2 = \theta_2(n) \to m(-1)$ при $n \to \infty$.

Для этого воспользуемся теоремой 7:

$$\mathbf{P}\left(Z_n = k\right) = (1+\rho_n)\, R^n(-1)\mathbf{E}\widehat{V}_\infty^{-2}\left(1 - \Phi\left(\frac{\sqrt{n}(\theta - m(-1))}{\sigma(-1)}\right)\right) \qquad (2.51)$$

равномерно по $\theta \in [0; \theta_4]$, где $\theta_4 = \theta_4(n, c) = m(-1) + cn^{-1/2}$ для некоторого фиксированного $c > 0$. Покажем, что выражение для $\mathbf{P}\left(Z_n = k\right)$ из (2.51) совпадает с необходимым нам выражением

$$\mathbf{P}\left(Z_n = k\right) = (1+\rho_n)\,\mathbf{E}\widetilde{V}_\infty^{-2} e^{-\Lambda(\theta)n-\theta n} \exp\left(n(1+h_\theta)^2\sigma^2(h_\theta)/2\right) \times \\ \times\left(1-\Phi\left(\sqrt{n}(1+h_\theta)\sigma(h_\theta)\right)\right) := P_{1,n}(k) \qquad (2.52)$$

на отрезке $[\theta_1;\theta_4]$, где $\theta_1 \to m(-1)$ при $n \to \infty$. Для этого преобразуем (2.52) в (2.51). Напомним, что

$$\widehat{V}_\infty := \sum_{i=0}^{+\infty} e^{-S_i^{(-1)}}.$$

Заметим, что при $\theta \in [\theta_1;\theta_2] \subset (0;\mu)$, где $\theta_1 \to m(-1)$ и $\theta_2 \to m(-1)$ при $n \to \infty$, верно, что

$$\mathbf{E}\widetilde{V}_\infty^{-2} = (1+\rho_n)\mathbf{E}\widehat{V}_\infty^{-2}, \;\; \sigma(h_\theta) = (1+\rho_n)\sigma(-1). \qquad (2.53)$$

Также отметим, что, так как $m(h_\theta) = \theta$, то $h'_\theta = 1/\sigma^2(h_\theta)$. Отсюда, согласно формуле Тейлора, при рассматриваемых в (2.53) θ получаем, что

$$h_\theta + 1 = (1+\rho_n)\frac{\theta - m(-1)}{\sigma^2(h_\theta)}. \qquad (2.54)$$

Используя (2.53), (2.54) и (2.52), получаем, что

$$\mathbf{P}\left(Z_n = k\right) = (1+\rho_n)\,\mathbf{E}\widehat{V}_\infty^{-2} e^{-\Lambda(\theta)n-\theta n} \exp\left(\frac{n(\theta - m(-1))^2}{2\sigma^2(-1)}\right) \times \\ \times\left(1-\Phi\left(\frac{\sqrt{n}(\theta-m(-1))}{\sigma(-1)}\right)\right) = \\ = (1+\rho_n)\,R^n(h_\theta)\mathbf{E}\widehat{V}_\infty^{-2}\left(1-\Phi\left(\frac{\sqrt{n}(\theta-m(-1))}{\sigma(-1)}\right)\right) \times \\ \times e^{-(1+h_\theta)\theta n} \exp\left(\frac{n\sigma^2(-1)(1+h_\theta)^2}{2}\right). \qquad (2.55)$$

Из (1.1) и формулы Тейлора с остаточным членом в форме Лагранжа имеем, что

$$\ln R(-1) = \ln R(h_\theta) + (-1-h_\theta)\left(\ln R\right)'(h_\theta) + \frac{(-1-h_\theta)^2}{2}\left(\ln R\right)''(h_\zeta) = \\ = \ln R(h_\theta) + (-1-h_\theta)\theta + \frac{(-1-h_\theta)^2}{2}\sigma^2(h_\zeta) = \\ = \ln R(h_\theta) - (1+h_\theta)\theta + (1+\rho_n)\frac{(1+h_\theta)^2}{2}\sigma^2(-1), (2.56)$$

где ζ лежит между θ и -1, а значит, $\zeta \to m(-1)$ при $n \to \infty$. Таким образом, из (2.56) получаем, что

$$R^n(-1) = R^n(h_\theta) \exp\left(-(1+h_\theta)\theta n\right) \exp\left((1+\rho_n)\frac{n(1+h_\theta)^2\sigma^2(-1)}{2}\right) =$$
$$= (1+\rho_n) R^n(h_\theta) \exp\left(-(1+h_\theta)\theta n\right) \exp\left(\frac{n(1+h_\theta)^2\sigma^2(-1)}{2}\right), \quad (2.57)$$

где в последнем переходе мы воспользовались тем, что при $\theta \in [\theta_1; \theta_4]$ имеем, что

$$1 + h_\theta = (1+\rho_n)\frac{\theta - m(-1)}{\sigma^2(h_\theta)} \le \frac{2c}{\sqrt{n}\sigma^2(h_\theta)},$$

то есть $n(1+h_\theta)^2 \le C_2$ для всех n и некоторой положительной константы C_2. Подставляя (2.57) в (2.55), получаем (2.51). Таким образом, из (2.51) следует, что представление для $\mathbf{P}\left(Z_n = k\right)$ из (2.52) справедливо при $\theta \in [\theta_1; \theta_4]$, где $\theta_1 \to m(-1)$ при $n \to \infty$, а $\theta_4 = \theta_4(n, c) = m(-1) + cn^{-1/2}$ для некоторого фиксированного $c > 0$.

Заметим, что утверждение (2.52) верно для любого фиксированного $c > 0$. Следовательно, для любой положительной величины ε и последовательности $\widehat{c}(i) = 2^i$ при $i \in \mathbb{N}$ существует такая величина n_i, что

$$\left|\frac{\mathbf{P}\left(Z_n = k\right)}{P_{1,n}(k)} - 1\right| < \varepsilon \quad (2.58)$$

при всех $\theta \in [\theta_1; \theta_4(n, \widehat{c}(i))]$, $n > n_i$. Для каждого $\varepsilon = 1/2^j$ и $\widehat{c}(i)$ обозначим соответствующее n_i как $n_i(j)$. Составим последовательность $c(n)$ следующим образом:

$$\begin{aligned} c(1) = c(2) = \cdots = c(n_1(1)) &= 1, \\ c(n_1(1)+1) = \cdots = c(n_2(2)) &= \widehat{c}(1), \\ c(n_2(2)+1) = \cdots = c(n_3(3)) &= \widehat{c}(2), \\ c(n_3(3)+1) = \cdots = c(n_4(4)) &= \widehat{c}(3) \cdots \end{aligned}$$

Из построения выше получим, что утверждение (2.51) выполнено равномерно по $\theta \in [\theta_1; \theta_4(n, c(n))]$, где $c(n)$ — некоторая положительная последовательность, стремящаяся к бесконечности, пусть и с неизвестной скоростью. Положим

$$\theta^* = \theta^*(n) = m(-1) + \frac{c(n)n^{-1/2}}{2}. \quad (2.59)$$

Таким образом, выражение для $\mathbf{P}(Z_n = k)$ из (2.52) верно при $\theta \in [\theta_1; \theta^*]$, где $\theta_1 \to m(-1)$ при $n \to \infty$.

Необходимо показать, что это же представление справедливо и при $\theta \in [\theta^*; \theta_2]$, где $\theta_2 \to m(-1)$ при $n \to \infty$. Докажем следующую лемму.

Лемма 5. *Пусть верны условия теоремы 8, а $\theta \in [\theta^*; \theta_2]$, где $\theta_2 \to m(-1)$ при $n \to \infty$, а θ^* определяется соотношением (2.59). Тогда*

$$\mathbf{P}(Z_n = k) = \frac{1+\rho_n}{\sqrt{2\pi n}\sigma(h_\theta)} \frac{\mathbf{E}\widetilde{V}_\infty^{h_\theta - 1}}{1+h_\theta} e^{-\Lambda(\theta)n - \theta n}$$

равномерно по $\theta \in [\theta^*; \theta_2]$, где

$$\widetilde{V}_\infty := \sum_{i=0}^{+\infty} e^{-S_i^{(h_\theta)}}.$$

Доказательство. Разобьём вероятность $\mathbf{P}(Z_n = k)$ на две части:

$$\begin{aligned} \mathbf{P}(Z_n = k) = \mathbf{P}(Z_n = k,\ S_n \le \theta n - 1) + \\ +\mathbf{P}(Z_n = k,\ S_n > \theta n - 1). \end{aligned} \tag{2.60}$$

Доказательство того, что

$$\mathbf{P}(Z_n = k,\ S_n \le \theta n - 1) < \frac{2}{\sqrt{2\pi n}\sigma(h_\theta)(-h_\theta)} e^{-\Lambda(\theta)n - \theta n} e^{h_\theta + 1} \tag{2.61}$$

полностью аналогично доказательству утверждения (2.12).

Аналогично (2.15), при $S_n > \theta n - 1$ получаем, что

$$\mathbf{P}(Z_n = k | \boldsymbol{\eta}) = \frac{U_n}{V_n^2} e^{-k\frac{U_n}{V_n}} (1 + o(1)) \tag{2.62}$$

при $n \to \infty$, где $o(1)$ равномерно мало по рассматриваемым $\boldsymbol{\eta}$. Используя (2.62), а также определение сопряженного распределения (1.1), получим, что

$$\begin{aligned} \mathbf{P}(Z_n = k,\ S_n > \theta n - 1) = \\ = R^n(h_\theta) \int\limits_1^{+\infty} \int\limits_{\theta n - 1}^{+\infty} e^{-(1+h_\theta)y} \frac{1}{x(x + e^{-y})} \exp\left(-\frac{\exp(-y)k}{x}\right) \times \\ \times \mathbf{P}\left(S_n^{(h_\theta)} \in \mathrm{d}y,\ \widetilde{V}_n \in \mathrm{d}x\right) = (1+\rho_n) e^{-\Lambda(\theta)n - \theta n} \times \\ \times \int\limits_1^{+\infty} \int\limits_{-1}^{+\infty} e^{-(1+h_\theta)y} \frac{1}{x^2} \exp\left(-\frac{\exp(-y)}{x}\right) \mathbf{P}\left(\widetilde{S}_n \in \mathrm{d}y,\ \widetilde{V}_n \in \mathrm{d}x\right), \end{aligned} \tag{2.63}$$

где $\widetilde{S}_n := S_n^{(h_\theta)} - \theta n$, а $\widetilde{V}_n = \sum_{i=0}^{n-1} \exp(-S_i^{(h_\theta)})$. Обозначим двойной интеграл в правой части (2.63) через I_1 и положим $a_n := \sqrt{1/(\theta_2(n) - m(-1))}$. Разобьем интеграл I_1 на четыре интеграла I_2, I_3, I_4 и I_5 по областям $[1;+\infty) \times (-1;0]$, $[1;+\infty) \times (0;a_n]$, $[1;+\infty) \times (a_n;\sqrt{n})$ и $[1;+\infty) \times [\sqrt{n};+\infty)$ соответственно. Отметим, что при достаточно больших n выполнены неравенства $0 < a_n < \sqrt{n}$, поскольку $\theta_2 - m(-1) > c(n)/\sqrt{n}$ при всех n, где $c(n)$ — положительная стремящаяся к бесконечности последовательность. Оценим интеграл I_2, используя то, что $1 + h_\theta \to 0$ при $n \to \infty$ равномерно по $\theta \in [\theta^*;\theta_2]$:

$$I_2 := \int\limits_1^{+\infty} \int\limits_{-1}^{0} e^{-(1+h_\theta)y} \frac{1}{x^2} \exp\left(-\frac{\exp(-y)}{x}\right) \mathbf{P}\left(\widetilde{S}_n \in \mathrm{d}y,\ \widetilde{V}_n \in \mathrm{d}x\right) \leq$$

$$\leq 2e^e \int\limits_1^{+\infty} \frac{1}{x^2} \mathbf{P}\left(\widetilde{S}_n \in (-1,0],\ \widetilde{V}_n \in \mathrm{d}x\right) \leq 4e^e \mathbf{E}\widetilde{V}_\infty^{-2} \mathbf{P}\left(\widetilde{S}_n \in (-1,0]\right) \tag{2.64}$$

при всех достаточно больших n, где в последнем переходе мы воспользовались леммой 3. Заметим, что условие теоремы 2 и, следовательно, леммы 3 выполняется для любого отрезка $[h_1;h_2] \subset [-1;0)$ согласно замечанию 1. Применив теорему 2 к вероятности в правой части (2.64), получаем, что

$$I_2 \leq \frac{8}{\sqrt{2\pi n}\sigma(h_\theta)} \mathbf{E}\widetilde{V}_\infty^{-2} e^e \tag{2.65}$$

при всех достаточно больших n. Оценим интеграл I_3, также используя лемму 3 и теорему 2:

$$I_3 = \int\limits_1^{+\infty} \int\limits_0^{a_n} e^{-(1+h_\theta)y} \frac{1}{x^2} \exp\left(-\frac{\exp(-y)}{x}\right) \mathbf{P}\left(\widetilde{S}_n \in \mathrm{d}y,\ \widetilde{V}_n \in \mathrm{d}x\right) \leq$$

$$\leq 2 \int\limits_1^{+\infty} \frac{1}{x^2} \mathbf{P}\left(\widetilde{S}_n \in (0,a_n],\ \widetilde{V}_n \in \mathrm{d}x\right) \leq 4\mathbf{E}\widetilde{V}_\infty^{-2} \mathbf{P}\left(\widetilde{S}_n \in (0,a_n]\right) \leq$$

$$\leq \frac{8a_n}{\sqrt{2\pi n}\sigma(h_\theta)} \mathbf{E}\widetilde{V}_\infty^{-2} = \rho_n \frac{1}{\sqrt{n}(1+h_\theta)}. \tag{2.66}$$

при всех достаточно больших n, где в последнем переходе мы воспользовались тем, что $a_n(1+h_\theta) \to 0$ при $n \to \infty$. Далее оценим интеграл I_5:

$$I_5 = \int\limits_1^{+\infty} \int\limits_{\sqrt{n}}^{+\infty} e^{-(1+h_\theta)y} \frac{1}{x^2} \exp\left(-\frac{\exp(-y)}{x}\right) \mathbf{P}\left(\widetilde{S}_n \in \mathrm{d}y,\ \widetilde{V}_n \in \mathrm{d}x\right) \leq$$

$$\leq 2 \int\limits_1^{+\infty} \int\limits_{\sqrt{n}}^{+\infty} e^{-(1+h_\theta)y} \frac{1}{x^2} \mathbf{P}\left(\widetilde{S}_n \in \mathrm{d}y,\ \widetilde{V}_n \in \mathrm{d}x\right) \leq 2e^{-(1+h_\theta)\sqrt{n}} \tag{2.67}$$

при всех достаточно больших n.

Заметим, что

$$I_4 = \int\limits_1^{+\infty} \int\limits_{a_n}^{\sqrt{n}} e^{-(1+h_\theta)y} \frac{1}{x^2} \exp\left(-\frac{\exp(-y)}{x}\right) \mathbf{P}\left(\widetilde{S}_n \in \mathrm{d}y,\ \widetilde{V}_n \in \mathrm{d}x\right) =$$

$$= (1+\rho_n) \int\limits_1^{+\infty} \int\limits_{a_n}^{\sqrt{n}} e^{-(1+h_\theta)y} \frac{1}{x^2} \mathbf{P}\left(\widetilde{S}_n \in \mathrm{d}y,\ \widetilde{V}_n \in \mathrm{d}x\right). \tag{2.68}$$

Оценим I_4 сверху:

$$I_4 \leq (1+\rho_n) \sum_{\lfloor a_n \rfloor}^{\lceil \sqrt{n} \rceil} e^{-(1+h_\theta)i} \int\limits_1^{+\infty} \frac{1}{x^2} \mathbf{P}\left(\widetilde{S}_n \in [i, i+1),\ \widetilde{V}_n \in \mathrm{d}x\right) =$$

$$= (1+\rho_n) \mathbf{E} \widetilde{V}_\infty^{-2} \sum_{\lfloor a_n \rfloor}^{\lceil \sqrt{n} \rceil} e^{-(1+h_\theta)i} \mathbf{P}\left(\widetilde{S}_n \in [i, i+1)\right), \tag{2.69}$$

где в последнем переходе мы вновь воспользовались леммой 3. Применим к правой части (2.69) теорему 2:

$$I_4 \leq (1+\rho_n) \mathbf{E} \widetilde{V}_\infty^{-2} \sum_{\lfloor a_n \rfloor}^{\lceil \sqrt{n} \rceil} e^{-(1+h_\theta)i} \times$$

$$\times \left(\frac{1}{\sqrt{2\pi n}\sigma(h_\theta)} \exp\left(-\frac{i^2}{2n\sigma^2(h_\theta)}\right) + \frac{\rho_n}{\sqrt{n}}\right). \tag{2.70}$$

Заметим, что при рассматриваемых i

$$\exp\left(-\frac{1}{2\sigma^2(h_\theta)}\right) \leq \exp\left(-\frac{i^2}{2n\sigma^2(h_\theta)}\right) \leq 1,$$

$$e^{1+h_\theta} \exp\left(\frac{(i+1)^2 - i^2}{2n\sigma^2(h_\theta)}\right) = 1 + \rho_n, \tag{2.71}$$

где в последнем равенстве мы воспользовались тем, что $i/n \to 0$ и $1 + h_\theta \to 0$ при $n \to \infty$. Используя (2.71), из (2.70) получим, что

$$I_4 \le (1+\rho_n)\mathbf{E}\widetilde{V}_\infty^{-2}\frac{1}{\sqrt{2\pi n}\sigma(h_\theta)}\sum_{\lfloor a_n \rfloor}^{\lceil \sqrt{n} \rceil} e^{-(1+h_\theta)i}\exp\left(-\frac{i^2}{2n\sigma^2(h_\theta)}\right) \le$$

$$\le (1+\rho_n)\mathbf{E}\widetilde{V}_\infty^{-2}\frac{1}{\sqrt{2\pi n}\sigma(h_\theta)}\sum_{\lfloor a_n \rfloor}^{\lceil \sqrt{n} \rceil} e^{-(1+h_\theta)(i+1)}\exp\left(-\frac{(i+1)^2}{2n\sigma^2(h_\theta)}\right) \times$$

$$\times e^{1+h_\theta}\exp\left(\frac{(i+1)^2 - i^2}{2n\sigma^2(h_\theta)}\right) \le$$

$$\le (1+\rho_n)\mathbf{E}\widetilde{V}_\infty^{-2}\frac{1}{\sqrt{2\pi n}\sigma(h_\theta)}\int\limits_{a_n - 1}^{\sqrt{n}+2} e^{-(1+h_\theta)y}\exp\left(-\frac{y^2}{2n\sigma^2(h_\theta)}\right)\mathrm{d}y. \tag{2.72}$$

Сделаем замену $u = (1+h_\theta)y$ в правой части (2.72):

$$I_4 \le (1+\rho_n)\frac{\mathbf{E}\widetilde{V}_\infty^{-2}}{1+h_\theta}\frac{1}{\sqrt{2\pi n}\sigma(h_\theta)} \times$$

$$\times \int\limits_{(a_n-1)(1+h_\theta)}^{(\sqrt{n}+2)(1+h_\theta)} e^{-u}\exp\left(-\frac{u^2}{2n(1+h_\theta)^2\sigma^2(h_\theta)}\right)\mathrm{d}u. \tag{2.73}$$

Обозначим отрезок $[(a_n-1)(1+h_\theta); (\sqrt{n}+2)(1+h_\theta)]$ через D_n. Рассмотрим интеграл в правой части (2.73):

$$\int\limits_{D_n} e^{-u}\exp\left(-\frac{u^2}{2n(1+h_\theta)^2\sigma^2(h_\theta)}\right)\mathrm{d}u =$$

$$= \int\limits_0^\infty e^{-u}\exp\left(-\frac{u^2}{2n(1+h_\theta)^2\sigma^2(h_\theta)}\right)\mathrm{I}\left(u \in D_n\right)\mathrm{d}u = \mathbf{E}f_n(T), \tag{2.74}$$

где T — стандартная экспоненциальная с.в., а

$$f_n(u) := \exp\left(-\frac{u^2}{2n(1+h_\theta)^2\sigma^2(h_\theta)}\right)\mathrm{I}\left(u \in D_n\right).$$

Согласно (2.54) отметим, что

$$a_n(1+h_\theta) = (1+\rho_n)\sqrt{\frac{1}{\theta_2(n) - m(-1)}\frac{\theta - m(-1)}{\sigma^2(h_\theta)}} \to 0$$

при $n \to \infty$. Также отметим, что из условия леммы 5 и (2.54), имеем, что

$$(1 + h_\theta)\sqrt{n} \to +\infty$$

при $n \to \infty$. Следовательно, $f_n(u)$ ограничена и поточечно сходится к 1 при всех $u \in (0; \infty)$ и $n \to \infty$. Откуда по теореме Лебега о мажорируемой сходимости из (2.74) получаем, что

$$\mathbf{E} f_n(T) = 1 + \rho_n. \tag{2.75}$$

Подставляя (2.75) в (2.73), имеем, что:

$$I_4 \le (1 + \rho_n) \frac{\mathbf{E}\widetilde{V}_\infty^{-2}}{1 + h_\theta} \frac{1}{\sqrt{2\pi n}\sigma(h_\theta)}. \tag{2.76}$$

Получим для I_4 оценку снизу. Используя (2.68), аналогично (2.69) имеем, что

$$I_4 \ge (1 + \rho_n) \sum_{\lceil a_n \rceil}^{\lfloor \sqrt{n} \rfloor} e^{-(1+h_\theta)(i+1)} \int\limits_1^{+\infty} \frac{1}{x^2} \mathbf{P}\left(\widetilde{S}_n \in [i, i+1),\ \widetilde{V}_n \in \mathrm{d}x\right) =$$

$$= (1 + \rho_n) \mathbf{E}\widetilde{V}_\infty^{-2} \sum_{\lceil a_n \rceil}^{\lfloor \sqrt{n} \rfloor} e^{-(1+h_\theta)(i+1)} \mathbf{P}\left(\widetilde{S}_n \in [i, i+1)\right), \tag{2.77}$$

где в последнем переходе мы применили лемму 3. Применив к правой части (2.77) теорему 2, получим что

$$I_4 \ge (1 + \rho_n) \mathbf{E}\widetilde{V}_\infty^{-2} \sum_{\lceil a_n \rceil}^{\lfloor \sqrt{n} \rfloor} e^{-(1+h_\theta)(i+1)} \times$$

$$\times \left(\frac{1}{\sqrt{2\pi n}\sigma(h_\theta)} \exp\left(-\frac{i^2}{2n\sigma^2(h_\theta)} \right) + \frac{\rho_n}{\sqrt{n}} \right). \tag{2.78}$$

Используя (2.71), а также то, что $\exp(-1 - h_\theta) = 1 + \rho_n$, из (2.78) получим, что

$$I_4 \ge (1 + \rho_n) \mathbf{E}\widetilde{V}_\infty^{-2} \frac{1}{\sqrt{2\pi n}\sigma(h_\theta)} e^{-1-h_\theta} \sum_{\lceil a_n \rceil}^{\lfloor \sqrt{n} \rfloor} e^{-(1+h_\theta)i} \exp\left(-\frac{i^2}{2n\sigma^2(h_\theta)} \right) \ge$$

$$\ge (1 + \rho_n) \mathbf{E}\widetilde{V}_\infty^{-2} \frac{1}{\sqrt{2\pi n}\sigma(h_\theta)} \int\limits_{a_n - 1}^{\sqrt{n}+2} e^{-(1+h_\theta)y} \exp\left(-\frac{y^2}{2n\sigma^2(h_\theta)} \right) \mathrm{d}y.$$

Далее оценка снизу для I_4 получается с помощью рассуждений аналогичных (2.73)-(2.76). Таким образом, получаем, что

$$I_4 = (1+\rho_n)\frac{\mathbf{E}\widetilde{V}_\infty^{-2}}{1+h_\theta}\frac{1}{\sqrt{2\pi n}\sigma(h_\theta)}. \tag{2.79}$$

Из (2.67), (2.66) и (2.65) получим, что

$$\begin{aligned} I_2 \leq \frac{8}{\sqrt{2\pi n}\sigma(h_\theta)}\mathbf{E}\widetilde{V}_\infty^{-2}e^e = \rho_n\frac{1}{\sqrt{n}(1+h_\theta)}, \\ I_3 \leq \rho_n\frac{1}{\sqrt{n}(1+h_\theta)}, \\ I_5 \leq 4e^{-\sqrt{n}(1+h_\theta)} = \rho_n\frac{1}{\sqrt{n}(1+h_\theta)}, \end{aligned} \tag{2.80}$$

где во втором выражении мы воспользовались тем, что $a_n(1+h_\theta) \to 0$ при $n \to \infty$. Таким образом, из (2.80) и (2.79) следует, что

$$I_1 = I_2 + I_3 + I_4 + I_5 = (1+\rho_n)I_4. \tag{2.81}$$

Используя (2.81), (2.79) и (2.62), имеем

$$\mathbf{P}\left(Z_n = k,\ S_n > \theta n - 1\right) = \frac{1+\rho_n}{\sqrt{2\pi n}\sigma(h_\theta)}\frac{\mathbf{E}\widetilde{V}_\infty^{-2}}{1+h_\theta}e^{-\Lambda(\theta)n-\theta n}. \tag{2.82}$$

Из (2.61) получаем, что

$$\begin{aligned} \mathbf{P}\left(Z_n = k,\ S_n \leq \theta n - 1\right) < \frac{2}{\sqrt{2\pi n}\sigma(h_\theta)(-h_\theta)}e^{-\Lambda(\theta)n-\theta n}e^{h_\theta+1} = \\ = \rho_n\frac{1}{\sqrt{n}(1+h_\theta)}e^{-\Lambda(\theta)n-\theta n}. \end{aligned} \tag{2.83}$$

Следовательно, подставляя (2.83) и (2.82) в (2.60), имеем, что

$$\mathbf{P}\left(Z_n = k\right) = \frac{1+\rho_n}{\sqrt{2\pi n}\sigma(h_\theta)}\frac{\mathbf{E}\widetilde{V}_\infty^{-2}}{1+h_\theta}e^{-\Lambda(\theta)n-\theta n}. \tag{2.84}$$

Лемма 5 доказана. □

Для окончания доказательства теоремы 8 нам необходимо показать, что выражение для $\mathbf{P}\left(Z_n = k\right)$ из (2.84) эквивалентно выражению для $\mathbf{P}\left(Z_n = k\right)$ из (2.52) при $\theta \in [\theta^*; \theta_2]$, где $\theta_2 \to m(-1)$ при $n \to \infty$, а θ^* определяется соотношением (2.59). Для этого достаточно доказать, что

$$\begin{aligned} \frac{1}{\sqrt{2\pi n}\sigma(h_\theta)}\frac{1}{1+h_\theta} = (1+\rho_n)\exp\left(n(1+h_\theta)^2\sigma^2(h_\theta)/2\right) \times \\ \times \left(1 - \Phi\left(\sqrt{n}(1+h_\theta)\sigma(h_\theta)\right)\right) \end{aligned} \tag{2.85}$$

при $\theta \in [\theta^*; \theta_2]$. Заметим, что при таких θ верно, что

$$\int\limits_0^\infty e^{-u} \exp\left(-\frac{u^2}{2n(1+h_\theta)^2\sigma^2(h_\theta)}\right) du = 1 + \rho_n. \tag{2.86}$$

Преобразуем подынтегральную функцию в левой части (2.86):

$$e^{-u} \exp\left(-\frac{u^2}{2n(1+h_\theta)^2\sigma^2(h_\theta)}\right) = \exp\left(-\frac{(u+n(1+h_\theta)^2\sigma^2(h_\theta))^2}{2n(1+h_\theta)^2\sigma^2(h_\theta)}\right) \times$$
$$\times \exp\left(n(1+h_\theta)^2\sigma^2(h_\theta)/2\right). \tag{2.87}$$

Подставляя (2.87) в (2.86), а (2.86) в (2.85), получаем, что

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi n}\sigma(h_\theta)} \frac{1}{1+h_\theta} = (1+\rho_n) \exp\left(n(1+h_\theta)^2\sigma^2(h_\theta)/2\right) \times$$
$$\times \frac{1}{\sqrt{2\pi n}(1+h_\theta)\sigma(h_\theta)} \int\limits_0^\infty \exp\left(-\frac{(u+n(1+h_\theta)^2\sigma^2(h_\theta))^2}{2n(1+h_\theta)^2\sigma^2(h_\theta)}\right) du =$$
$$= (1+\rho_n) \exp\left(n(1+h_\theta)^2\sigma^2(h_\theta)/2\right) \times$$
$$\times \left(1 - \Phi\left(\sqrt{n}(1+h_\theta)\sigma(h_\theta)\right)\right) \tag{2.88}$$

равномерно по $\theta \in [\theta^*; \theta_2]$. Таким образом, мы показали, что представление $\mathbf{P}(Z_n = k)$ из (2.52) верно для $\theta \in [\theta^*; \theta_2]$, где $\theta_2 \to m(-1)$ при $n \to \infty$.

Так как ранее мы уже показали, что данное представление верно для $\theta \in [\theta_1; \theta^*]$, где $\theta_1 \to m(-1)$ при $n \to \infty$, мы получаем требуемое утверждение.

Теорема 8 доказана. □

Доказательство теоремы 9. Для доказательства воспользуемся теоремой 5:

$$\mathbf{P}(Z_n = k) = \frac{1+\rho_n}{\sqrt{2\pi n}\sigma(h_\theta)} e^{-\Lambda(\theta)n - \theta n} \Gamma(1+h_\theta) \mathbf{E}\widetilde{V}_\infty^{h_\theta - 1} \tag{2.89}$$

равномерно по $\theta \in [\theta_3; \theta_4] \subset (m(-1); \mu)$, где θ_3 и θ_4 фиксированы. Откуда, аналогично рассуждениям (2.58)-(2.59), получим, что утверждение (2.89) верно равномерно по $\theta \in [\widetilde{\theta}(n); \theta_4]$, где $\widetilde{\theta}(n)$ — некоторая последовательность, стремящаяся к $m(-1)$, пусть и с неизвестной скоростью.

Заметим, что результат, полученный в лемме 5, верен для всех $\theta^* = m(-1) + c(n)/(2\sqrt{n})$ при любом $c(n)$, таком что $c(n) = o(\sqrt{n})$ и $c(n) \to \infty$ при $n \to \infty$. Следовательно, в условиях теоремы 8 из леммы 5 получим, что

$$\mathbf{P}(Z_n = k) = \frac{1+\rho_n}{\sqrt{2\pi n}\sigma(h_\theta)} \frac{\mathbf{E}\widetilde{V}_\infty^{-2}}{1+h_\theta} e^{-\Lambda(\theta)n - \theta n} \tag{2.90}$$

равномерно по $\theta \in [\theta^*, \theta_2]$, где $\theta_2 \to m(-1)$ при $n \to \infty$.

Отметим, что $\Gamma(x) = (1 + o(1))/x$ при $x \to 0$. Кроме того, при $\theta \in [\widetilde{\theta}(n); \theta_2]$, где $\theta_2 \to m(-1)$ при $n \to \infty$, выполнено соотношение $\mathbf{E}\widetilde{V}_\infty^{-2} = (1 + \rho_n)\mathbf{E}\widetilde{V}_\infty^{h_\theta - 1}$. Используя эти тождества, получим, что выражения для $\mathbf{P}\left(Z_n = k\right)$, полученные в (2.89) и (2.90), совпадают на общей области определения $[\widetilde{\theta}(n); \theta_2]$. Здесь мы без ограничения общности считаем, что $\theta^* = \theta^*(n) < \widetilde{\theta}(n)$ при всех n, так как, если это не так, мы можем положить $\widetilde{\theta} = 2\theta^*$.

Таким образом, их можно объединить в один результат и выражение для $\mathbf{P}\left(Z_n = k\right)$ из (2.89) верно для $\theta \in [\theta^*; \theta_4]$, где $\theta_4 \in (m(-1); \mu)$ и фиксировано. Полагая $c(n)$ в определении θ^* (2.59) равным $2\varepsilon_n$, получаем требуемый результат.

Теорема 9 доказана. □

Доказательство теоремы 10. Нам необходимо показать, что

$$\mathbf{P}\left(Z_n = k\right) = (1 + \rho_n)\mathbf{E}(V_\infty^{(h_\alpha)})^{h_\alpha - 1} G(h_\alpha) \times$$
$$\times \exp\left(\frac{\sigma^2(h_\alpha n(1 + h_\alpha)^2}{2}\right)\left(1 - \Phi\left(\frac{\sqrt{n}(\theta - m(-1))}{\sigma(\alpha)}\right)\right) e^{-\Lambda(\alpha)n - \alpha n}, \qquad (2.91)$$

где $\alpha := \max(m(-1), \theta)$, а

$$G(h_\alpha) = \begin{cases} \frac{\Gamma(1+h_\alpha)}{1+h_\alpha}, & h_\alpha > -1 \\ 1, & h_\alpha = -1 \end{cases},$$

равномерно по $\theta \in [0; \theta_2] \subset [0; \mu)$.

Отметим, что так как $\Gamma(x) = (1 + o(1))/x$ при $x \to 0$, то $G(h_\alpha)$ является непрерывной в точке -1. Используя этот факт, а также утверждения (2.53), получаем, что выражение для $\mathbf{P}\left(Z_n = k\right)$ из (2.91) совпадает с выражением для $\mathbf{P}\left(Z_n = k\right)$ из теоремы 8 на её области определения.

Откуда, аналогично рассуждениям (2.52)-(2.57) получим, что при $\theta \le m(-1) + c/\sqrt{n}$ выражение для $\mathbf{P}\left(Z_n = k\right)$ из (2.91) совпадает с выражением для $\mathbf{P}\left(Z_n = k\right)$ из теоремы 7.

Наконец, используя рассуждения аналогичные (2.85)-(2.88), получаем, что выражение для $\mathbf{P}\left(Z_n = k\right)$ из (2.91) совпадает с выражением для $\mathbf{P}\left(Z_n = k\right)$ из теоремы 5.

Таким образом, получаем, что требуемое утверждение следует из теорем 5, 7 и 9. □

Глава 3

Большие верхние уклонения ВПССГ

3.1 Постановка задачи

Кроме случая больших нижних уклонений, в работе также рассматривается случай больших верхних уклонений ВПССГ.

В данной главе, как и в главе про большие нижние уклонения, будем считать $(Z_n, n \geq 0)$ ветвящимся процессом в случайной среде $\boldsymbol{\eta}$, а $S_n = \xi_1 + \dots + \xi_n, n \geq 1$ — его сопровождающим блужданием. Будем использовать символ ξ для обозначения случайной величины, имеющей такое же распределение, что и ξ_i.

Также будем считать, что $(Z_n, n \geq 0)$ — ВПССГ, а ξ — нерешётчатая.

Обращаясь к типизации процессов из второй главы, отметим, что в отличие от больших нижних уклонений, большие верхние уклонения определены для всех типов процессов — докритических, критических и надкритических.

В работах [20] и [21] М.В. Козловым было обнаружено, что асимптотика вероятностей больших уклонений существенно отличается при изменении параметра в двух зонах уклонений, которые мы будем называть первой и второй зонами больших верхних уклонений. Сразу отметим, что вторая зона больших верхних уклонений определена только в случае строго докритического ВПССГ и она в данной работе рассматриваться не будет.

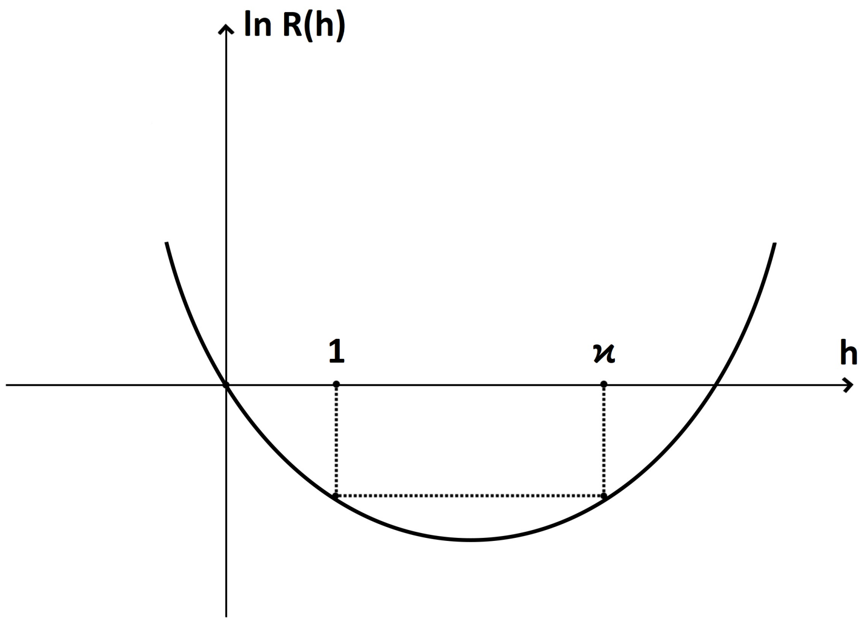
Первая зона больших верхних уклонений определяется следующими условиями.

1) Если $(Z_n, n \geq 0)$ — надкритический или критический процесс, то есть $\mu \geq 0$, то первой зоной уклонений называется случай, когда $\theta \in (\mu; m^+)$.

2) Если $(Z_n, n \geq 0)$ — слабо или умеренно докритический процесс, то есть, если $\mu < 0$ и условие Крамера выполнено при $0 < h < h^+$, где $h^+ > 1$ и $m(1) \geq 0$, то первой зоной уклонений называется случай, когда $\theta \in (0; m^+)$.

3) Если $(Z_n, n \geq 0)$ — строго докритический процесс, то есть, если $\mu < 0$, условие Крамера выполнено при $0 < h < h^+$, где $h^+ > 1$, $m(1) < 0$ и $\sup\limits_{1<h<h^+} R(h) > R(1)$, то первой зоной уклонений называется случай, когда $\theta \in (\gamma; m^+)$. Параметр γ равен $m(\varkappa)$, где точка $\varkappa$ определяется из уравнения $R(\varkappa) = R(1), \varkappa > 1$.

Докажем, что такое $\varkappa$ существует. Напомним, что согласно (1.1) функция $R(h)$ дважды дифференцируема, $(\ln R(h))' = m(h)$, а $m'(h) = \sigma^2(h)$. Так как $\ln R(0) = 0$, $m(0) = \mu < 0$, $m(1) < 0$, а $\sigma^2(h) > 0$, на отрезке $[0; 1]$ функция $\ln R(h)$ убывает, однако при некотором $h > 1$ начинает возрастать и возрастает до h^+. Так как $R(h)$ непрерывна, а $\sup\limits_{1<h<h^+} R(h) > R(1)$, необходимое нам $\varkappa$ существует.



Положим $\mu^* = \mu$ в первом случае, 0 во втором и γ в третьем.

3.2 Первая зона больших верхних уклонений ВПССГ

Для первой зоны больших верхних уклонений ВПССГ получен следующий результат.

Теорема 11 (локальная теорема о больших верхних уклонениях ВПССГ в первой зоне уклонений, [45]). *Пусть* $(Z_n, n \geq 0)$ *— ВПССГ со средой* $\boldsymbol{\eta}$, *порожденной последовательностью н.о.р. величин,* $S_n = \xi_1 + \cdots + \xi_n, n > 0$, *— его сопровождающее случайное блуждание, где величина* ξ *предполагается нерешетчатой. Предположим также, что для* ξ *выполнено условие Крамера:* $R\,(h) < \infty$ *при* $0 < h < h^+$.

Пусть $k(n) = k \in \mathbb{N}$, *а* $\theta(n) = \theta := \ln k/n \in [\theta_1; \theta_2] \subset (\mu^*, m^+)$, *где* θ_1 *и* θ_2 *фиксированы. Тогда*

$$\mathbf{P}\,(Z_n = k) = \frac{(1+\rho_n)\Gamma(1+h_\theta)}{\sqrt{2\pi n}\sigma(h_\theta)} e^{-\Lambda(\theta)n - \theta n} \mathbf{E} \widetilde{V}_\infty^{h_\theta - 1},$$

где

$$\widetilde{V}_\infty := \sum_{i=0}^{\infty} \exp\left(-S_i^{(h_\theta)}\right).$$

Настоящая работа оставляет за пределами своего изучения вторую зону больших верхних уклонений для строго докритических ВПССГ. В этом случае известна только интегральная асимптотика ([21], [29]). Локальная же асимптотика остаётся неисследованной.

Следствие 3. *Предположим, что верны условия теоремы 11.*

Тогда

$$\mathbf{P}\,(Z_n = k |\, Z_n > e^{wn}) = (h_w + o(1)) \left(\frac{k}{e^{wn}}\right)^{-h_w - 1} e^{-wn},$$

где $o(1)$ *равномерно по* $k \in \mathbb{N}$, *таким, что* $\ln k \in [wn; wn + r_n]$, *где* $r_n = o(\sqrt{n})$, *а* $w \in [\theta_1; \theta_2]$ *для любых заданных* $[\theta_1; \theta_2] \subset (\mu^*, m^+)$.

Доказательство теоремы 11. Оценим $\mathbf{P}\,(Z_n = k)$ при $\theta \in [\theta_1; \theta_2] \subset (\mu^*, m^+)$. Для этого зафиксируем натуральное положительное M и разобьем вероятность

$\mathbf{P}(Z_n = k)$ на три части

$$\mathbf{P}\left(Z_n = k\right) = \mathbf{P}\left(Z_n = k,\ S_n < \theta n - M\right) +$$

$$+\mathbf{P}\left(Z_n = k,\ \theta n - M \leq S_n \leq \theta n + M\right) + \mathbf{P}\left(Z_n = k,\ S_n > \theta n + M\right). \qquad (3.1)$$

Оценим $\mathbf{P}\left(Z_n = k,\ S_n > \theta n + M\right)$. Исходя из формулы (2.2), получаем, что

$$\mathbf{P}\left(Z_n = k | S_n > \theta n + M\right) = \mathbf{E}\left(\frac{1}{U_n + V_n}\frac{U_n}{V_n}\left(1 + \frac{U_n}{V_n}\right)^{-k}\middle| S_n > \theta n + M\right) \leq$$

$$\leq \mathbf{E}\left(g\left(\frac{U_n}{V_n}\right)\middle| S_n > \theta n + M\right),$$

где $g(x) = x(1+x)^{-k}$. Откуда, аналогично (2.11), получаем, что

$$\mathbf{P}\left(Z_n = k,\ S_n > \theta n + M\right) =$$

$$= \mathbf{P}\left(Z_n = k | S_n > \theta n + M\right)\mathbf{P}\left(S_n > \theta n + M\right) \leq$$

$$\leq g\left(\frac{1}{k-1}\right)\mathbf{P}\left(S_n > \theta n + M\right) = \frac{1}{ek}\frac{1 + \rho_n(\theta)}{\sqrt{2\pi n}\sigma(h_\theta)h_\theta}e^{-\Lambda(\theta + M/n)n}, \qquad (3.2)$$

где в последнем переходе мы воспользовались теоремой 3. Раскладывая $\Lambda(\theta + M/n)$ из (3.2) по формуле Тейлора с центром в точке θ, получим, что

$$\Lambda\left(\theta + \frac{M}{n}\right) = \Lambda(\theta) + \Lambda'(\theta)\frac{M}{n} + o\left(\frac{M}{n}\right)$$

при $n \to \infty$. Учитывая, что $\Lambda'(\theta) = h_\theta > 0$, получаем, что

$$\mathbf{P}\left(Z_n = k,\ S_n > \theta n + M\right) \leq \frac{2}{\sqrt{2\pi n}\sigma(h_\theta)h_\theta}e^{-\Lambda(\theta)n - \ln k}e^{-h_\theta M} \qquad (3.3)$$

при всех достаточно больших n.

Оценим $\mathbf{P}\left(Z_n = k,\ S_n < \theta n - M\right)$:

$$\mathbf{P}\left(Z_n = k,\ S_n < \theta n - M\right) =$$

$$= \mathbf{E}\left(\frac{1}{U_n + V_n}\frac{U_n}{V_n}\left(1 + \frac{U_n}{V_n}\right)^{-k}; S_n < \theta n - M\right) =$$

$$= \frac{R^n(h_\theta)}{R^n(h_\theta)}\mathbf{E}\left(e^{h_\theta S_n}\frac{1}{U_n + V_n}\frac{U_n^{h_\theta + 1}}{V_n}\left(1 + \frac{U_n}{V_n}\right)^{-k}; S_n < \theta n - M\right) =$$

$$= R^n(h_\theta)\mathbf{E}\left(\frac{\widetilde{U}_n^{h_\theta+1}}{(\widetilde{U}_n + \widetilde{V}_n)\widetilde{V}_n}\left(1 + \frac{\widetilde{U}_n}{\widetilde{V}_n}\right)^{-k}; S_n^{(h_\theta)} < \theta n - M\right). \qquad (3.4)$$

Представим математическое ожидание в правой части (3.4) в форме интеграла:

$$\int\limits_{1}^{+\infty}\int\limits_{-\infty}^{\theta n-M} \frac{e^{-y(h_\theta+1)}}{xe^{-y}+x^2}\left(1+\frac{e^{-y}}{x}\right)^{-k} \mathbf{P}\left(S_n^{(h_\theta)}\in \mathrm{d}y,\ \widetilde{V}_n\in \mathrm{d}x\right)=$$

$$= e^{-h_\theta \theta n-\theta n}\int\limits_{1}^{+\infty}\int\limits_{-\infty}^{-M} \frac{e^{-u(h_\theta+1)}}{xe^{-u-\theta n}+x^2}\left(1+\frac{e^{-u}}{xe^{\theta n}}\right)^{-k} \mathbf{P}\left(\widetilde{S}_n\in \mathrm{d}u,\ \widetilde{V}_n\in \mathrm{d}x\right), \quad (3.5)$$

где, как и ранее,

$$\widetilde{S}_n := S_n^{(h_\theta)}-\theta n,\ \widetilde{V}_n := \sum_{i=0}^{n-1}\exp\left(-S_i^{(h_\theta)}\right).$$

Обозначим U_1 множество таких x и u, что $\exp(u)/x>\exp(\sqrt[3]{n})$. Оценим интеграл в правой части (3.5):

$$\iint\limits_{[1;+\infty)\times(-\infty;-M]} \frac{e^{-u(h_\theta+1)}}{xe^{-u-\theta n}+x^2}\left(1+\frac{e^{-u}}{xe^{\theta n}}\right)^{-k} \mathbf{P}\left(\widetilde{S}_n\in \mathrm{d}u,\ \widetilde{V}_n\in \mathrm{d}x\right)\le$$

$$\le 2\iint\limits_{[1;+\infty)\times[M;+\infty)\bigcap\overline{U_1}} \frac{e^{u(h_\theta+1)}}{xe^{u-\theta n}+x^2}\exp\left(-\frac{e^{u}}{x}\right) \mathbf{P}\left(\widetilde{S}_n\in -\mathrm{d}u,\ \widetilde{V}_n\in \mathrm{d}x\right)+$$

$$+\iint\limits_{[1;+\infty)\times[M;+\infty)\bigcap U_1} \frac{e^{u(h_\theta+1)}}{xe^{u-\theta n}+x^2}\left(1+\frac{e^{u}}{xe^{\theta n}}\right)^{-k} \mathbf{P}\left(\widetilde{S}_n\in -\mathrm{d}u,\ \widetilde{V}_n\in \mathrm{d}x\right) \quad (3.6)$$

при достаточно больших n. Пусть $g_1(x)=x^{h_\theta+1}(1+x/k)^{-k}$. Тогда, поскольку

$$g_1'(x)=\frac{x^{h_\theta}k^k((h_\theta+1)(k+x)-kx)}{(k+x)^{k+1}},$$
$$\lim_{x\to 0} g_1(x)=\lim_{x\to+\infty} g_1(x)=0$$

при $x>0$ и достаточно больших n, то единственный ноль производной будет точкой $x_0=k(h_\theta+1)/(k-h_\theta-1)$, причем x_0 – точка максимума $g_1(x)$ на $(0;\infty)$. Заметим, что $x_0<2(h_\theta+1)<\exp(\sqrt[3]{n})$ при достаточно больших n. Следовательно, функция g_1 на луче $[\exp(\sqrt[3]{n});+\infty)$ при достаточно больших n достигает своего максимума в крайней левой точке. Используя этот факт, оценим сверху второй интеграл в правой части (3.6):

$$\iint\limits_{[1;+\infty)\times[M;+\infty)\bigcap U_1} \frac{x^{h_\theta-1}}{e^{u-\theta n}/x+1} g_1\left(\frac{e^u}{x}\right)\mathbf{P}\left(\widetilde{S}_n\in -\mathrm{d}u,\ \widetilde{V}_n\in \mathrm{d}x\right)\le$$

$$\le g_1\left(\exp(\sqrt[3]{n})\right)\iint\limits_{[1;+\infty)\times[M;+\infty)\bigcap U_1} x^{h_\theta-1}\mathbf{P}\left(\widetilde{S}_n\in -\mathrm{d}u,\ \widetilde{V}_n\in \mathrm{d}x\right)\le$$

$$\le 2e^{\sqrt[3]{n}(h_\theta+1)}e^{-\exp(\sqrt[3]{n})}\int\limits_1^{+\infty} x^{h_\theta-1}\mathbf{P}\left(\widetilde{V}_\infty\in \mathrm{d}x\right)=\frac{\rho_n}{\sqrt{2\pi n}}\int\limits_1^{+\infty} x^{h_\theta-1}\mathbf{P}\left(\widetilde{V}_\infty\in \mathrm{d}x\right) \qquad (3.7)$$

при достаточно больших n. Ниже будет показано, что интеграл в правой части (3.7) сходится. Далее оценим первый интеграл в правой части (3.6):

$$J_1:=\iint\limits_{[1;+\infty)\times[M;+\infty)\bigcap \overline{U_1}} \frac{e^{u(h_\theta+1)}}{xe^{u-\theta n}+x^2}\exp\left(-\frac{e^u}{x}\right)\mathbf{P}\left(\widetilde{S}_n\in -\mathrm{d}u,\ \widetilde{V}_n\in \mathrm{d}x\right)\le$$

$$\le\sum_{i=M}^{+\infty}\int\limits_1^{+\infty}\frac{e^{(i+1)(h_\theta+1)}}{x^2}\exp\left(-\frac{e^i}{x}\right)\mathbf{P}\left(\widetilde{V}_n\in \mathrm{d}x,\ \widetilde{S}_n\in[-(i+1);-i)\right). \qquad (3.8)$$

Положим

$$G_1(x)=\mathbf{P}\left(\widetilde{V}_n\ge x,\ \widetilde{S}_n\in[-(i+1);-i)\right).$$

Тогда, интегрируя по частям интеграл в правой части (3.8), получаем, что

$$J_2:=-\int\limits_1^{+\infty}\frac{e^{(i+1)(h_\theta+1)}}{x^2}\exp\left(-\frac{e^i}{x}\right)\mathrm{d}G_1(x)=$$

$$=e^{(i+1)(h_\theta+1)}\exp\left(-e^i\right)\mathbf{P}\left(\widetilde{S}_n\in[-(i+1);-i)\right)+$$

$$+\int\limits_1^{+\infty}G_1(x)\frac{e^i-2x}{x^4}\exp\left(-\frac{e^i}{x}\right)e^{(i+1)(h_\theta+1)}\mathrm{d}x. \qquad (3.9)$$

В последнем интеграле в (3.9) положим $u(x)=e^i/x$ и оценим его сверху величиной

$$J_3 := \int\limits_1^{+\infty} G_1(x)\frac{e^i}{x^4}\exp\left(-\frac{e^i}{x}\right)e^{(i+1)(h_\theta+1)}\mathrm{d}x =$$

$$= e^{-i/2}e^{h_\theta+1}\int\limits_1^{+\infty} u^{h_\theta+5/2}e^{-u}\frac{x^{h_\theta+5/2}}{x^4}G_1(x)\mathrm{d}x \le$$

$$\le C_1 e^{-i/2}\int\limits_1^{+\infty} x^{h_\theta-3/2}G_1(x)\mathrm{d}x, \tag{3.10}$$

где C_1 – некоторая константа. В последнем неравенстве мы воспользовались ограниченностью функции $u^{h_\theta+5/2}e^{-u}$ при $u > 0$ и $\theta \in [\theta_1; \theta_2]$. Обозначим

$$I_1 := I_{\widetilde{V}_n \ge x,\ \widetilde{S}_n \in [-(i+1); -i)}$$

и оценим вероятность в правой части (3.10) следующим образом:

$$G_1(x) = \mathbf{E}I_1 = \mathbf{E}\frac{\widetilde{V}_n^{h_\theta}}{\widetilde{V}_n^{h_\theta}}I_1 \le x^{-h_\theta}\mathbf{E}\left(\widetilde{V}_n I_1\right)^{h_\theta}. \tag{3.11}$$

Пусть $h_\theta > 1$, тогда

$$G_1(x) \le x^{-h_\theta}\left(\left(\mathbf{E}\left(\widetilde{V}_n I_1\right)^{h_\theta}\right)^{1/h_\theta}\right)^{h_\theta} \le$$

$$\le x^{-h_\theta}\left(\sum_{j=0}^{n-1}\left(\mathbf{E}\exp\left(-S_j^{(h_\theta)}h_\theta\right)I_1\right)^{1/h_\theta}\right)^{h_\theta}, \tag{3.12}$$

где в последнем переходе используется неравенство Минковского. При $h_\theta \in (0; 1]$ справедливо неравенство

$$G_1(x) \le x^{-h_\theta}\sum_{j=0}^{n-1}\mathbf{E}\exp\left(-S_j^{(h_\theta)}h_\theta\right)I_1. \tag{3.13}$$

В обоих случаях необходимо оценить $\mathbf{E}\exp\left(-S_j^{(h_\theta)}h_\theta\right)I_1$:

$$\mathbf{E}\exp\left(-S_j^{(h_\theta)}h_\theta\right)I_1 \le \mathbf{E}\exp\left(-S_j^{(h_\theta)}h_\theta\right)I_{\widetilde{S}_n\in[-(i+1);-i)} =$$

$$= \int\limits_{-\infty}^{+\infty} e^{-uh_\theta}\mathbf{P}\left(S_j^{(h_\theta)}\in \mathrm{d}u,\ \widetilde{S}_n\in[-(i+1);-i)\right) = \left(R^{(h_\theta)}(-h_\theta)\right)^j\times$$

$$\times\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\mathbf{P}\left(S_j\in\mathrm{d}u,\ S_n^{(h_\theta)}-S_j^{(h_\theta)}\in[\theta n-(i+1)-u;\theta n-i-u)\right) =$$

$$= R^{-j}(h_\theta)\int\limits_{-\infty}^{\infty}\mathbf{P}\left(S_j\in\mathrm{d}u\right)\times$$

$$\times\mathbf{P}\left(S_n^{(h_\theta)}-S_j^{(h_\theta)}\in[\theta n-(i+1)-u;\theta n-i-u)\right). \tag{3.14}$$

При $j\in[0;n/2]$ интеграл в правой части (3.14) можно оценить с помощью теоремы 2:

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\mathbf{P}\left(S_j\in\mathrm{d}u\right)\mathbf{P}\left(S_n^{(h_\theta)}-S_j^{(h_\theta)}\in[\theta n-(i+1)-u;\theta n-i-u)\right)\le$$

$$\le\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\left(\frac{1}{\sqrt{2\pi(n-j)}\sigma(h_\theta)}\exp\left(\frac{-(\theta j-(i+1)-u)^2}{2n\sigma^2(h_\theta)}\right)+\right.$$

$$\left.+\frac{1}{\sqrt{2\pi(n-j)}\sigma(h_\theta)}\right)\mathbf{P}\left(S_j\in\mathrm{d}u\right)\le\frac{2}{\sqrt{\pi n}\sigma(h_\theta)} \tag{3.15}$$

при достаточно больших n. Аналогично с помощью теоремы 2 при $j\in(n/2;n-1]$ тот же интеграл оценивается величиной

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\mathbf{P}\left(S_j\in\mathrm{d}u\right)\mathbf{P}\left(S_n^{(h_\theta)}-S_j^{(h_\theta)}\in[\theta n-(i+1)-u;\theta n-i-u)\right)=$$

$$=\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\mathbf{P}\left(S_n^{(h_\theta)}-S_j^{(h_\theta)}\in\mathrm{d}v\right)\mathbf{P}\left(S_j\in[\theta n-(i+1)-v;\theta n-i-v)\right)\le$$

$$\le\frac{2}{\sqrt{2\pi j}\sigma}\le\frac{2}{\sqrt{\pi n}\sigma} \tag{3.16}$$

при всех достаточно больших n. Обозначим $C_2=\sup\limits_{\theta\in[\theta_1;\theta_2]}2\sqrt{2}\max(1,\sigma(h_\theta)/\sigma)$.

Отсюда, при $h_\theta > 1$, пользуясь (3.12) и (3.14) - (3.16), имеем

$$G_1(x) \le x^{-h_\theta} \frac{C_2}{\sqrt{2\pi n}} \left(\sum_{j=0}^{n-1} R^{-j/h_\theta}(h_\theta) \right)^{h_\theta} =$$

$$= x^{-h_\theta} \frac{C_2}{\sqrt{2\pi n}} \left(\frac{1 - R^{-n/h_\theta}(h_\theta)}{1 - R^{-1/h_\theta}(h_\theta)} \right)^{h_\theta} \le x^{-h_\theta} \frac{C_3}{\sqrt{2\pi n}} \tag{3.17}$$

при достаточно больших n, где C_3 – некоторая константа. Аналогичным образом, используя (3.13)-(3.16), для некоторой C_3 можно получить оценку (3.17) в случае $h_\theta \in (0; 1]$. Таким образом, неравенство в правой части (3.17) верно для всех $\theta \in [\theta_1; \theta_2]$. Подставляя (3.17) в (3.10), получаем, что

$$J_3 \le \frac{C_1 C_3}{\sqrt{2\pi n}} e^{-i/2} \int_1^{+\infty} x^{-3/2} \mathrm{d}x \tag{3.18}$$

при всех достаточно больших n. Интеграл в (3.18) сходится при всех n и $\theta \in [\theta_1; \theta_2]$, то есть $J_3 \le C_4 e^{-i/2}/(\sqrt{2\pi n})$, где C_4 – некоторая константа. Подставляя эту оценку в (3.9), получаем, что

$$J_2 \le e^{(i+1)(h_\theta+1)} \exp\left(-e^i\right) \mathbf{P}\left(\widetilde{S}_n \in [-(i+1); -i)\right) + \frac{C_4}{\sqrt{2\pi n}} e^{-i/2} \tag{3.19}$$

при достаточно больших n. Из теоремы 2 следует, что

$$\mathbf{P}\left(\widetilde{S}_n \in [-(i+1); -i)\right) \le \frac{C_5}{\sqrt{2\pi n}} \tag{3.20}$$

при достаточно больших n, где C_5 – константа. Подставляя (3.19) и (3.20) в (3.8), имеем, что

$$J_1 \le \frac{C_5 + C_4}{\sqrt{2\pi n}} \sum_{i=M}^{+\infty} \left(e^{(i+1)(h_\theta+1)} \exp\left(-e^i\right) + e^{-i/2} \right) \tag{3.21}$$

при достаточно больших n. Поскольку сумма в правой части (3.21) представляет собой остаток ряда, равномерно сходящегося по $\theta \in [\theta_1; \theta_2]$, то, подставляя (3.21) и (3.7) в (3.6), а оттуда в (3.5), получаем, что

$$\mathbf{P}\left(Z_n = k,\ S_n < \theta n - M\right) \le \frac{C_6}{\sqrt{2\pi n}} e^{-\Lambda(\theta)n - \theta n} r(M) \tag{3.22}$$

при достаточно больших n, где $r(M) \to 0$ при $M \to \infty$ равномерно по $\theta \in [\theta_1; \theta_2]$.

Оценим вероятность $\mathbf{P}\left(Z_n = k,\ \theta n - M < S_n < \theta n + M\right)$. Необходимо доказать, что

$$\mathbf{P}\left(Z_n = k,\ \theta n - M < S_n < \theta n + M\right) = \tag{3.23}$$
$$= \frac{1+\rho_n(\theta)}{\sqrt{2\pi n}\sigma(h_\theta)} e^{-\Lambda(\theta)n - \ln k} \int\limits_1^{+\infty} \int\limits_{-M}^{M} \frac{e^{-(1+h_\theta)y}}{x^2} \exp\left(-\frac{e^{-y}}{x}\right) \mathrm{d}y \mathbf{P}\left(\widetilde{V}_\infty \in \mathrm{d}x\right).$$

Доказательство этого утверждения аналогично доказательству утверждения (2.13). Напомним, что

$$P_{2,n}(k) = \frac{1}{\sqrt{2\pi n}\sigma(h_\theta)} e^{-\Lambda(\theta)n - \theta n},$$

где $\theta = \ln k/n$. В силу (3.1) имеем

$$\begin{aligned}\varliminf_{n\to\infty} P_{2,n}(k)^{-1}\mathbf{P}\left(Z_n = k,\ |S_n - \theta n| < M\right) \le \varliminf_{n\to\infty} P_{2,n}(k)^{-1}\mathbf{P}\left(Z_n = k\right) \le \\ \le \varlimsup_{n\to\infty} P_{2,n}(k)^{-1}\mathbf{P}\left(Z_n = k\right) \le \varlimsup_{n\to\infty} P_{2,n}(k)^{-1}\mathbf{P}\left(Z_n = k,\ S_n \le \theta n - M\right) + \\ + \varlimsup_{n\to\infty} P_{2,n}(k)^{-1}\mathbf{P}\left(Z_n = k,\ |S_n - \theta n| < M\right) + \\ + \varlimsup_{n\to\infty} P_{2,n}(k)^{-1}\mathbf{P}\left(Z_n = k,\ S_n \ge \theta n + M\right).\end{aligned}$$

В силу соотношений (3.3), (3.22) и (3.23), верно, что

$$\begin{aligned}\int\limits_1^{+\infty} \int\limits_{-M}^{M} \frac{e^{-(1+h_\theta)y}}{x^2} \exp\left(-\frac{e^{-y}}{x}\right) \mathrm{d}y \mathbf{P}\left(\widetilde{V}_\infty \in \mathrm{d}x\right) \le \varliminf_{n\to\infty} P_{2,n}(k)^{-1}\mathbf{P}\left(Z_n = k\right) \le \\ \le \varlimsup_{n\to\infty} P_{2,n}(k)^{-1}\mathbf{P}\left(Z_n = k\right) \le \frac{2}{h_\theta} e^{-h_\theta M} + C_6 r(M) + \\ + \int\limits_1^{+\infty} \int\limits_{-M}^{M} \frac{e^{-(1+h_\theta)y}}{x^2} \exp\left(-\frac{e^{-y}}{x}\right) \mathrm{d}y \mathbf{P}\left(\widetilde{V}_\infty \in \mathrm{d}x\right).\end{aligned}$$

Переходя в полученных соотношениях к пределу при $M \to \infty$, приходим к соотношению

$$P_{2,n}(k)^{-1}\mathbf{P}(Z_n = k) \to \int_1^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{-(1+h_\theta)y}}{x^2} \exp\left(-\frac{e^{-y}}{x}\right) \mathrm{d}y \mathbf{P}\left(\widetilde{V}_\infty \in \mathrm{d}x\right).$$

Производя замену $u = \exp(-y)/x$, получаем для двойного интеграла в правой части, что

$$\int\limits_{1}^{+\infty}\int\limits_{0}^{\infty}\frac{u^{h_\theta}}{x^{1-h_\theta}}e^{-u}\mathrm{d}u\mathbf{P}\left(\widetilde{V}_\infty\in\mathrm{d}x\right)=$$

$$=\Gamma(1+h_\theta)\int\limits_{1}^{+\infty}x^{h_\theta-1}\mathbf{P}\left(\widetilde{V}_\infty\in\mathrm{d}x\right)=\Gamma(1+h_\theta)\mathbf{E}\widetilde{V}_\infty^{h_\theta-1}. \tag{3.24}$$

Осталось показать, что математическое ожидание в правой части (3.24) конечно.

Пусть $h_\theta\in(0;1]$. Тогда

$$\mathbf{E}\widetilde{V}_\infty^{h_\theta-1}=\int\limits_{1}^{+\infty}\frac{1}{x^{1-h_\theta}}\mathbf{P}\left(\widetilde{V}_\infty\in\mathrm{d}x\right)\le 1. \tag{3.25}$$

Пусть $h_\theta\in(1;2]$. Зафиксируем некоторое $\delta\in[0;h^+-h_\theta+1)$. Тогда, используя неравенство Ляпунова, получим, что

$$\mathbf{E}\widetilde{V}_\infty^{h_\theta-1}=\left(\left(\mathbf{E}\widetilde{V}_\infty^{h_\theta-1}\right)^{1/(h_\theta-1)}\right)^{h_\theta-1}\le\left(\left(\mathbf{E}\widetilde{V}_\infty^{h_\theta-1+\delta}\right)^{1/(h_\theta-1+\delta)}\right)^{h_\theta-1}.$$

Откуда, используя неравенство Минковского, получаем, что

$$\mathbf{E}\widetilde{V}_\infty^{h_\theta-1}\le\left(\sum_{j=0}^{\infty}\left(\mathbf{E}\exp\left(S_j^{(h_\theta)}(1-h_\theta-\delta)\right)\right)^{1/(h_\theta-1+\delta)}\right)^{h_\theta-1}. \tag{3.26}$$

При $h_\theta>2$ имеем, что

$$\mathbf{E}\widetilde{V}_\infty^{h_\theta-1}=\left(\left(\mathbf{E}\widetilde{V}_\infty^{h_\theta-1}\right)^{1/(h_\theta-1)}\right)^{h_\theta-1}\le$$

$$\le\left(\sum_{j=0}^{\infty}\left(\mathbf{E}\exp\left(S_j^{(h_\theta)}(1-h_\theta)\right)\right)^{1/(h_\theta-1)}\right)^{h_\theta-1}. \tag{3.27}$$

Используя (1.3), получим, что

$$\mathbf{E}\exp\left(S_j^{(h_\theta)}(1-h_\theta)\right)=\left(R^{(h_\theta)}(1-h_\theta)\right)^j=\left(\frac{R(1)}{R(h_\theta)}\right)^j,$$

$$\mathbf{E}\exp\left(S_j^{(h_\theta)}(1-h_\theta-\delta)\right)=\left(R^{(h_\theta)}(1-h_\theta-\delta)\right)^j=\left(\frac{R(1-\delta)}{R(h_\theta)}\right)^j.$$

Откуда получаем, что, чтобы математическое ожидание в левой части (3.26) и (3.27) было конечно, необходимо, чтобы $R(1)/R(h_\theta)$ и $R(1-\delta)/R(h_\theta)$ были меньше единицы и отделены от неё. Тогда ряды в правой части (3.26) и (3.27) будут суммой бесконечной геометрической прогрессии.

Напомним, что согласно соотношению (1.1) функция $R(h)$ дважды дифференцируема, $(\ln R(h))' = m(h)$, а $m'(h) = \sigma^2(h)$. Предположим, что $m(1) > 0$. Следовательно, $m(1-\delta)$ тоже больше 0 при достаточно малом $\delta > 0$. Отсюда $R(h)$ монотонно возрастает при всех $h \in [1-\delta; h^+)$. Следовательно, взяв достаточно малое $\delta > 0$, получим, что при $h_\theta > 1$ отношение $R(1-\delta)/R(h_\theta)$ будет меньше единицы и отделено от неё. Также как и отношение $R(1)/R(h_\theta)$ при $h_\theta > 2$.

Предположим, что $m(1) = 0$. Тогда, согласно условию, $\theta \in [\theta_1; \theta_2] \subset (0; m^+)$, то есть $h_\theta \in [h_{\theta_1}; h_{\theta_2}] \subset (1; h^+)$. Следовательно, $R(h_\theta) > R(1)$ и отделено от него. Взяв $\delta = 0$, получим требуемые неравенства.

Предположим, что $m(1) < 0$. Тогда, согласно условию, $\theta \in [\theta_1; \theta_2] \subset (\gamma; m^+)$, то есть $h_\theta \in [h_{\theta_1}; h_{\theta_2}] \subset (\varkappa; h^+)$, где $\varkappa > 1$ и $R(\varkappa) = R(1)$. Так как $(\ln R(h))'' = \sigma^2(h)$, функция $R(h)$ возрастает при $h \geq \varkappa$. Следовательно, получаем, что $R(h_\theta) > R(\varkappa) = R(1)$ и отделено от него. Аналогично случаю умеренно докритического процесса, взяв $\delta = 0$, получим необходимые утверждения.

Таким образом, ряды в правой части (3.26) и (3.27) сходятся при всех $\theta \in [\theta_1; \theta_2] \subset (\mu^*, m^+)$. Следовательно, из (3.25), (3.26) и (3.27), получаем, что $\mathbf{E}\widetilde{V}_\infty^{h_\theta - 1}$ конечно при всех $\theta \in [\theta_1; \theta_2] \subset (\mu^*, m^+)$.

Теорема 11 доказана. □

Доказательство следствия 3. Воспользовавшись теоремами 3 и 11, а также теоремой 1 из [20], получаем, что

$$\mathbf{P}\left(Z_n = k \middle| Z_n > e^{wn}\right) = \frac{\mathbf{P}\left(Z_n = k\right)}{\mathbf{P}\left(Z_n > e^{wn}\right)} = \frac{\mathbf{P}\left(Z_n = k\right)}{C(h_w)\mathbf{P}\left(S_n > wn\right)} =$$
$$= \frac{C(h_\theta) + \rho_n(\theta)}{C(h_w)\left(1 + \rho_n(w)\right)} \frac{\sqrt{2\pi n} h_w \sigma(h_w)}{\sqrt{2\pi n}\sigma(h_\theta)} \frac{1}{k} \exp\left(\Lambda(w)n - \Lambda\left(\frac{\ln k}{n}\right) n\right), \tag{3.28}$$

где θ, как и прежде, равна $\ln k/n$. Поскольку $C(h_\theta)$, h_θ и $\sigma(h_\theta)$ – непрерывные функции от θ и отделены от нуля, а $\theta \to w$ при $n \to \infty$, то

$$\mathbf{P}\left(Z_n = k \middle| Z_n > e^{wn}\right) = \left(h_w + \rho_n(w)\right) \exp\left(\Lambda(w)n - \Lambda\left(\frac{\ln k}{n}\right) n - \ln k\right). \tag{3.29}$$

Разложим Λ по формуле Тейлора с центром в точке w:

$$\Lambda\left(\frac{\ln k}{n}\right) = \Lambda(w) + \Lambda'(w)\left(\frac{\ln k}{n} - w\right) + O\left(\frac{r_n^2}{n^2}\right) =$$
$$= \Lambda(w) + h_w\left(\frac{\ln k}{n} - w\right) + o\left(\frac{1}{n}\right). \tag{3.30}$$

Подставляя (3.30) в (3.28), получаем, что

$$\mathbf{P}\left(Z_n = k \middle| Z_n > e^{wn}\right) = (h_w + o(1))\exp\left(-h_w \ln k + h_w wn - \ln k\right) =$$
$$= (h_w + o(1))\exp\left(-(h_w+1)(\ln k - wn) - wn\right) =$$
$$= (h_w + o(1))\left(\frac{k}{e^{wn}}\right)^{-h_w-1} e^{-wn},$$

где $o(1)$ равномерно по $k \in \mathbb{N}$, $\ln k \in [wn; wn + r_n]$, $r_n = o(\sqrt{n})$. Следствие 3 доказано. □

Заключение

В диссертации изучены локальные вероятности больших уклонений ВПССГ.

Для больших нижних уклонений рассматривались первая и вторая зоны уклонений, а также переходная зона. Были изучены локальные вероятности больших нижних уклонений для первой, второй и переходной зон. Также был получен обобщённый результат для локальных вероятностей больших нижних уклонений, соединяющий все три рассматриваемых зоны.

Для больших верхних уклонений рассматривались разные типы процессов — надкритический, критический и докритический. Для надкритических, критических, а также слабо и умеренно докритических процессов локальные вероятности больших верхних уклонений были изучены полностью. Для строго докритических — только в первой зоне больших верхних уклонений.

Основные результаты:

1. доказана лемма об экспоненциальном функционале для общего параметрического случая;

2. доказана локальная теорема о больших нижних уклонениях надкритического ВПССГ в первой зоне уклонений;

3. доказана локальная теорема о больших нижних уклонениях надкритического ВПССГ во второй зоне уклонений;

4. доказана локальная теорема о больших нижних уклонениях надкритического ВПССГ на границе первой и второй зон уклонений;

5. доказана локальная теорема о больших верхних уклонениях ВПССГ в первой зоне уклонений.

Результаты, полученные в работе, могут быть использованы для дальнейшего исследования ВПСС. В частности, для получения асимптотики вероятностей больших нижних и больших верхних уклонений для ВПСС без предположения о геометричности распределения. Также данные результаты могут быть использованы в теории случайных блужданий в случайной среде.

Литература

[1] Smith W.L., Wilkinson W.E. On branching processes in random environments // Ann. Math. Stat. 1969 Vol. 40, no. 3. P 814–827.

[2] Athreya K.B., Karlin S. On branching processes with random environments. I: Extinction probabilities // Ann. Math. Stat. 1971. Vol. 42, no 5. P. 1499–1520.

[3] Козлов М.В. Об асимптотике вероятности невырождения критических ветвящихся процессов в случайной среде // Теория вероятн. и ее примен. 1976. Т. 21, № 4. С. 813–825.

[4] Kozlov M. V. On the asymptotic behavior of the probability of non-extinction for critical branching processes in a random environment // Theory of Probability & Its Applications. 1977. Vol. 21, no. 4. P. 791-804.

[5] Birkner M., Geiger J., Kersting G. Branching processes in random environment–a view on critical and subcritical cases // Interacting stochastic systems. Springer, 2005. P. 269-291.

[6] Afanasyev V.I., Geiger J., Kersting G., Vatutin V. A. Criticality for branching processes in random environment // Ann. Probab. 2005. Vol. 33, no. 2. P. 645-673.

[7] Afanasyev V.I., Geiger J., Kersting G., Vatutin V.A. Functional limit theorems for strongly subcritical branching processes in random environment // Stochastic processes and their applications. 2005. Vol. 115, no. 10. P. 1658-1676.

[8] Agresti A. Bounds on the extinction time distribution of a branching process // Adv. Appl. Prob. 1974. Vol. 6, no. 2. P. 322-335.

[9] Agresti A. On the extinction times of varying and random environment branching processes // J. Appl. Prob. 1975. Vol. 12, no. 1. P. 39-46.

[10] Шкляев А.В. Нижние большие уклонения ветвящегося процесса в случайной среде // Дискрет. матем. 2024. Т. 36, № 3. С. 127–140

[11] Kersting G., Vatutin V. Discrete time branching processes in random environment. Wiley-ISTE, 2017.

[12] Гнеденко Б. В. О локальной предельной теореме теории вероятностей // Успехи математических наук. 1948. Т. 3, № 3. С. 187—194.

[13] Cramer H. Sur un nouveau theoreme-limite de la theorie des probabilities // Scientifiques et Industrielles. 1938. Vol. 736. P. 5—23.

[14] Боровков А. А., Могульский А. А. О больших и сверхбольших уклонениях сумм независимых случайных векторов при выполнении условия Крамера. I // Теория вероятностей и ее применения. 2006. Т. 51, № 2. С. 260—294.

[15] Bahadur R. R., Ranga Rao R. On Deviations of the Sample Mean // The Annals of Mathematical Statistics. 1960. Vol. 31, no. 4, P. 1015-1027.

[16] Петров В.В. О вероятностях больших уклонений сумм независимых случайных величин // Теория вероятн. и ее примен. 1965. Т. 10, № 2. С. 310-322.

[17] Shepp L.A. A Local Limit Theorem // The Annals of Mathematical Statistics. 1964. Vol. 35, no. 1. P. 419-423.

[18] Stone C. On local and ratio limit theorems // Proceedings of the Fifth Berkeley Symposium on Mathematical Statistics and Probability. 1966. Vol. 2, no. 2. P. 217-224.

[19] Боровков А.А. Асимптотический анализ случайных блужданий. Быстроубывающие распределения приращений. Изд.: Физматлит, 2013.

[20] Козлов М.В. О больших уклонениях ветвящихся процессов в случайной среде: геометрическое распределение числа потомков // Дискрет. матем. 2006. Т. 18, № 2. С. 29–47.

[21] Козлов М.В. О больших уклонениях строго докритических ветвящихся процессов в случайной среде с геометрическим распределением числа потомков // Теория вероятн. и ее примен. 2009. Т. 54, № 3. С. 439–465.

[22] Шкляев А.В. Большие уклонения ветвящихся процессов в случайной среде с произвольным начальным числом частиц // Дискрет. матем. 2012. Т. 24, № 4. С. 114–130.

[23] Дмитрущенков Д.В., Шкляев А.В. Большие уклонения ветвящихся процессов с иммиграцией в случайной среде // Дискрет. матем. 2016. Т. 28, № 3. С. 28–48.

[24] V. Bansaye and J. Berestycki. Large deviations for branching processes in random environment // Markov Process. Related Fields. 2009. Vol. 15, no. 3. P. 493–524.

[25] Buraczewski D., Dyszewski P. Precise large deviation estimates for branching process in random environment // arXiv:1706.03874 [math.PR]. 2017.

[26] Struleva M. A., Prokopenko E. I. Integro-local limit theorems for supercritical branching process in a random environment // Statistics & Probability Letters. 2022. Vol. 181. P. 109-234.

[27] Шкляев А.В. Большие уклонения ветвящегося процесса в случайной среде. I // Дискрет. матем. 2019. Т. 31, № 4. С. 102–115.

[28] Шкляев А.В. Большие уклонения ветвящегося процесса в случайной среде.II // Дискрет. матем. 2020. Т. 32, № 1. С. 135–156.

[29] Шкляев А.В. Большие уклонения строго докритического ветвящегося процесса в случайной среде // Труды МИАН. 2022. Т. 316. С. 316–335.

[30] Шкляев А.В. Условная функциональная предельная теорема для случайной рекуррентной последовательности при условии совершения ею большого уклонения // Теория вероятн. и ее примен. 2024. Т. 69, № 1. С. 125–147.

[31] Шкляев А.В. Большие уклонения ветвящегося процесса с частицами двух полов в случайной среде // Дискрет. матем. 2023. Т. 35, № 3. С. 125–142.

[32] V. Bansaye, C. Böinghoff. Lower large deviations for supercritical branching processes in random environment // Proceedings of the Steklov Institute of Mathematics. 2013. Vol. 282, no. 1. P. 15-34.

[33] V. Bansaye and J. Berestycki. Large deviations for branching processes in random environment // Markov Process. Related Fields. 2009. Vol. 15, no. 4. P. 493–524.

[34] C. Böinghoff. Branching Processes in Random Environment. Dissertation at Johann Wolfgang Goethe-Universität Frankfurt am Main, 2010.

[35] V. Bansaye, C. Böinghoff. Small positive values for supercritical branching processes in random environment // Annales de l'Institut Henri Poincaré — Probabilités et Statistiques. 2014. Vol. 50, no. 3. P. 770–805.

[36] Grama I., Liu Q., Miqueu E. Asymptotics of the distribution and harmonic moments for a supercritical branching process in a random environment // Annales de l'Institut Henri Poincare (B) Probabilites et statistiques. 2023. Vol. 59, no. 4. P. 1934-1950.

[37] Боровков А.А. Теория вероятностей. Изд.: Стереотип, 2016.

[38] Bártfai P. On a conditional limit theorem // Progress in statistics. 1972. Vol. 1. P. 85-91.

[39] Ширяев А.Н. Вероятность, Т.2. МЦНМО, 2004.

[40] S. Roch. Modern Discrete Probability: An Essential Toolkit. Cambridge University Press, 2024.

[41] Феллер В. Введение в теорию вероятностей и её приложение, Т.2. Изд.: Мир , 1967.

[42] Afanasyev V.I. Limit Theorems for a Strongly Supercritical Branching Process with Immigration in Random Environment // Stochastics and Quality Control. 2021. Vol. 36, no. 2. P. 129–143.

[43] Афанасьев В.И. Слабо надкритический ветвящийся процесс в неблагоприятной случайной среде // Дискрет. матем. 2022. Т. 34, № 3. С. 3-19.

Работы автора по теме диссертации

Статьи в рецензируемых научных изданиях, входящих в базы цитирования Scopus, Web of Science и RSCI

[44] Денисов К.Ю. Асимптотика локальных вероятностей нижних уклонений ветвящегося процесса в случайной среде при геометрических распределениях чисел потомков // Дискрет. матем. 2020. Т. 32, № 3. С. 24–37.

[45] Денисов К.Ю. Асимптотика локальных вероятностей больших уклонений ветвящегося процесса в случайной среде с геометрическим распределением числа потомков // Дискрет. матем. 2021. Т. 33, № 4. С. 19–31.

[46] Денисов К.Ю. Локальная асимптотика вероятностей нижних уклонений строго надкритических ветвящихся процессов в случайной среде с геометрическими распределениями чисел потомков // Дискрет. матем. 2022. Т. 34, № 4. С. 14–27.

[47] Денисов К.Ю. Локальная асимптотика вероятностей больших нижних уклонений сильно надкритических ветвящихся процессов в случайной среде с геометрическим распределением чисел потомков одной частицы // Сибирские электронные математические известия. 2024. Т. 21, № 1. С. 1-16.

Тезисы докладов в материалах научных конференций

[48] Denisov K.Y. Local lower deviations of branching process in random environment with geometric number of descendants. Международная конференция "Branching Processes, Random Walks and Probability on Discrete Structures", МИАН, Россия, Москва, с. 11-12, 2022.

[49] Денисов К.Ю. Локальная асимптотика нижних уклонений строго надкритических ветвящихся процессов в случайной среде с геометрическим распределением числа потомков. Workshop "6-th St. Petersburg Youth Conference in Probability and Mathematical Physics", Санкт-Петербургский международный математический институт им. Леонарда Эйлера, Россия, Санкт-Петербург, с. 6, 2022.

[50] Denisov K.Y. Lower Large Deviations of Strongly Supercritical Branching Process in Random Environment with Geometric Number of Descendants: Local Asymptotics. Branching Processes and Their Applications, Узбекистан, Ташкент, Самарканд, с. 20-21, 2023.