

Отзыв научного руководителя на диссертационную работу
Грозной Анастасии Юрьевны
«Свойства типа несвязности и однородность топологических пространств»,
представленную на соискание ученой степени
кандидата физико-математических наук
по специальности 1.1.3 – геометрия и топология (01.01.04 — геометрия и топология)

Напомним, что топологическое пространство называется *экстремально несвязным*, если замыкания любых двух непересекающихся открытых множеств в этом пространстве не пересекаются. Несмотря на то, что это определение может показаться несколько экзотическим, экстремальная несвязность — одно из самых старых и классических понятий общей топологии. Так, абсолюты компактов (регулярных пространств), т.е. проективные объекты в категории компактов и непрерывных отображений (в категории регулярных топологических пространств и совершенных отображений) — это в точности экстремально несвязные компакты (регулярные пространства). В теории булевых алгебр экстремальная несвязность пространства Стоуна характеризует полноту алгебры. В теории колец непрерывных функций экстремальная несвязность пространства X равносильна условной полноте решётки непрерывных функций $C(X)$. Естественным обобщением экстремально несвязных пространств являются F -пространства — это пространства, в которых любые два непересекающихся функционально открытых множества функционально отделимы. Эти пространства играют особенно важную роль в теории колец и полуколец непрерывных функций.

Давно известно, что экстремальная несвязность плохо уживается с другим важнейшим топологическим свойством — однородностью (топологическое пространство *однородно*, если любую его точку можно перевести в любую другую точку автогомеоморфизмом): еще в 1968 г. Фролик доказал, что всякий экстремально несвязный однородный компакт конечен (в частности, рост $\beta\omega \setminus \omega$ стоун-чеховской компактификации счетного дискретного пространства не экстремально несвязен, хотя сама компактификация $\beta\omega$ экстремально несвязна). Кунену удалось распространить этот результат на компакты, являющиеся произведениями F -пространств.

Перед Анастасией была поставлена задача найти более широкий класс пространств, на который обобщаются результаты Фролика и Кунена. С этой задачей она блестяще справилась. А именно, она ввела классы \mathcal{R}_1 -, \mathcal{R}_2 - и \mathcal{R}_3 -пространств и доказала общие теоремы, из которых вытекает, в частности, неоднородность компактов из этих классов (для класса \mathcal{R}_3 пришлось ввести дополнительные теоретико-множественные предположения). Помимо прочих преимуществ введённые Анастасией классы пространств обладают качеством, имеющим фундаментальное значение, — они полностью определяются свойствами счётных подпространств. Важность и удобство этого факта невозможно переоценить.

В процессе работы над поставленной задачей выяснилось, что решение требует глубокого анализа сходимости последовательностей по ультрафильтрам в исследуемых пространствах и, как следствие, изучения свойств самих ультрафильтров на ω , главным образом в контексте порядков на ультрафильтрах. В результате Анастасия «переоткрыла» введённый Баумгартнером в 1995 году класс дискретных ультрафильтров, которому до сих пор уделялось незаслуженно мало внимания. Оказалось, что сходимость по дискретным и связанными с ними ультрафильтрам играет важную роль в вопросах однородности топологических пространств, не говоря о том, что сами эти ультрафильтры весьма интересны и заслуживают внимания. Изучение дискретных ультрафильтров, их связи с другими типами ультрафильтров и порядков на множестве ультрафильтров на ω вылилось в самостоятельное очень интересное исследование, которое составило содержание первой главы диссертации.

Новые классы пространств, введённые Анастасией, содержат класс F -пространств (и первоначально были замыслены как его прямое обобщение). Поскольку F -пространства представ-

ляют большой интерес в теории колец и полуколец непрерывных функций и активно исследовались в этом контексте, возникла естественная задача — изучить алгебраические свойства колец и полуколец непрерывных функций на \mathcal{R}_i -пространствах. Эта задача была полностью выполнена; свойствам идеалов и их решёток в таких кольцах и полукольцах, характеризующим рассматриваемые классы этих пространств, посвящена третья глава. В процессе работы над ней Анастасия получила новый результат, особенно интересный для топологов: *Тихоновское пространство является F' -пространством тогда и только тогда, когда каждая его точка является F -точкой.* (Понятие F -точки было введено в фундаментальной статье Е. М. Вечтомова, А. В. Михалёва и В. В. Сидорова «Полукольца непрерывных функций»; оно интересно тем, что допускает как определение в терминах идеалов кольца непрерывных функций, так и прозрачно связанное с ним определение в терминах нуль-множеств непрерывных функций.)

Результаты диссертации представляют собой полное и завершённое решение поставленных перед диссертантом актуальных задач общей топологии. Диссертация содержит также исследование по теории ультрафильтров и функциональной алгебре, интересные сами по себе и имеющие широкие перспективы. Я считаю, что А. Ю. Грознова проделала большую, очень важную и полезную работу. Диссертация хорошо и аккуратно оформлена, все утверждения чётко сформулированы и снабжены полными и правильными доказательствами. Работа демонстрирует высокую математическую культуру, широкие познания и большой творческий потенциал автора.

В целом работа А. Ю. Грозновой имеет большое теоретическое и практическое значение и является серьёзным вкладом в общую топологию. Её диссертация представляет собой законченное научное исследование. Все включённые в неё результаты получены автором самостоятельно и прошли всестороннюю квалифицированную апробацию, опубликованы в ведущих научных журналах.

Основные результаты диссертации А. Ю. Грозновой изложены в четырёх статьях в рецензируемых научных изданиях, определенных п. 2.3 Положения о присуждении ученых степеней в Московском государственном университете имени М.В. Ломоносова. Представленные публикации полно и правильно отражают результаты выполненных исследований. На протяжении обучения в аспирантуре А. Ю. Грознова неоднократно принимала участие в международных математических конференциях и выступала на научных семинарах с высокопрофессиональными докладами об основных результатах диссертации.

Считаю, что диссертация А. Ю. Грозновой полностью соответствует критериям, установленным в «Положении о присуждении ученых степеней в Московском государственном университете имени М.В. Ломоносова», и рекомендую её к защите в диссертационном совете МГУ.011.4(01.17) ФГБОУ ВО МГУ по специальности 1.1.3 — геометрия и топология (01.01.04 — геометрия и топология).

Научный руководитель
доктор физико-математических наук
профессор

Сипачева

О. В. Сипачева

1 ноября 2022 г.

*Подпись
награду*

завершено
Сипачева

специально по
Сипачева

