

МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
имени М.В. ЛОМОНОСОВА

На правах рукописи

МИХАЙЛОВ Евгений Александрович

**ЭВОЛЮЦИОННЫЕ МОДЕЛИ ПРОМЕЖУТОЧНОГО ТИПА
ДЛЯ МАГНИТНОГО ПОЛЯ В ПРОВОДЯЩЕЙ СРЕДЕ**

Специальность 1.3.3 – теоретическая физика

АВТОРЕФЕРАТ

диссертации на соискание ученой степени

доктора физико-математических наук

Москва – 2023

Диссертация подготовлена на кафедре математики физического факультета
МГУ имени М.В.Ломоносова

- Научный консультант** – *Соколов Дмитрий Дмитриевич, д.ф.-м.н., профессор*
- Официальные оппоненты** – *Петросян Аракел Саркисович, д.ф.-м.н., профессор,
Институт космических исследований РАН (г.Москва), заведующий сектором*
*Желиговский Владислав Александрович, д.ф.-м.н.,
Институт теории прогноза землетрясений и математической геофизики РАН (г.Москва), главный научный сотрудник*
*Холодова Светлана Евгеньевна, д.ф.-м.н., доцент,
Университет ИТМО (г.Санкт-Петербург), доцент*

Защита диссертации состоится «01» июня 2023 г. в 15 часов 30 минут на заседании диссертационного совета МГУ.011.2 Московского государственного университета имени М.В.Ломоносова по адресу: 119991, ГСП-1, Москва, Ленинские горы, МГУ, дом 1, строение 2, физический факультет, физическая аудитория им. Р.В.Хохлова

E-mail: ff.dissovet@gmail.com

С диссертацией можно ознакомиться в отделе диссертаций научной библиотеки МГУ имени М.В. Ломоносова (Ломоносовский просп., д. 27) и на портале <https://dissovet.msu.ru/dissertation/011.2/2451>

Автореферат разослан «___» _____ 2023 г.

Ученый секретарь
диссертационного совета,
доктор физико-математических наук,
профессор

П.А. Поляков

Актуальность

Исследование эволюции магнитных полей в проводящей среде представляет собой достаточно важную задачу с точки зрения теоретической физики [1] [2]. Особенно серьезную роль подобные процессы играют в различных астрофизических приложениях при исследовании магнитных полей галактик [3] [4], аккреционных дисков [5], Солнца [6] [7], звезд [8], планет [9] и т.д. Для этого требуется разработка новых математических методов теории поля, которые в случае космического магнетизма обычно связаны с механизмом динамо [6] [10] [11] [12]. Она описывает процесс генерации магнитных полей, основываясь на совместном действии альфа-эффекта, являющегося характеристикой турбулентности, и дифференциального вращения, суть которого заключается в нетвердотельном характере вращения астрофизических объектов. Им противодействует турбулентная диффузия, стремящаяся размывать регулярные структуры магнитного поля [12]. Таким образом, при исследовании полей необходимо изучение неравновесных процессов, связанных с турбулентностью в космической среде. На начальном этапе изучения строились сугубо качественные модели, которые позволяли описать процесс генерации с помощью грубых оценок на уровне характерных масштабов и времен [2]. Вполне очевидно, что в современных условиях подобный подход недостаточен: результаты данных оценок имеют недостаточную точность даже по сравнению с возможностями наблюдений. В настоящий момент все большую популярность приобретают методы, связанные с прямым численным моделированием [13]. Тем не менее, подобный подход тоже очевидно имеет ряд проблем. Так, до сих пор нет возможности провести трехмерные расчеты, которые бы обладали достаточной степенью детализации и описывали все необходимые особенности решения. Кроме того, каждый результат подобного численного расчета является по сути итогом эксперимента при данном наборе параметров, и понять, каким образом решение зависит от тех или иных величин является затруднительным. Кроме того, параметры, которые необходимо включать в трехмерные модели теории поля, часто неизвестны. По этой причине весьма актуальными являются эволюционные модели для магнитного поля промежуточного типа, которые используют ряд свойств симметрии задачи (которые, как

правило, выполнены в случае астрофизических приложений). Они дают возможность, с одной стороны, построить решение задачи для базовых примеров с помощью аналитических методов, с другой – компьютерное моделирование требует достаточно умеренных вычислительных ресурсов. Вместе с тем, решения оказываются достаточно точными и соответствуют физической природе объектов. Таким образом, подобные эволюционные модели промежуточного типа сочетают в себе целый ряд достоинств, делающих их достаточно эффективными. В данном направлении, например, можно выделить работы Мосса с соавторами [14] про поля галактик работы Дейнцера, Гроссера и Шмитта [15], посвященные моделированию магнитных полей в торах.

Похожим образом обстоит дело и в случае процессов, происходящих в жидких металлах. Особую роль играют так называемые электровихревые течения. Их возникновение связано с распространением тока меняющейся плотности в среде с высокой проводимостью [16] [17]. Существуют различные примеры данного процесса, привязанные к различной геометрии и играющие важную роль в приложениях [18] [19] [20]. В наши дни существует большое число работ, посвященных изучению эволюции течения путем численного моделирования (чаще всего – с использованием стандартных вычислительных пакетов) [21]. Вместе с тем, они не дают ответа на большое число вопросов, связанных с характерной зависимостью параметров электровихревого течения от различных внешних факторов. К сожалению, в настоящий момент существует крайне небольшое число работ, посвященных исследованию соответствующих процессов [22] [23], поэтому возникает необходимость построения моделей промежуточного типа, использующих свойства симметрии задачи, но при этом позволяющих достаточно точно описывать происходящие процессы

Цель и задачи

Основной целью работы является развитие направления теоретической физики, связанного с математическими методами исследования магнитных полей в сплошных средах с высокой проводимостью. Для этого разрабатываются модели, которые сочетают возможность аналитического решения и высокую точность результатов. Также предполагается использование данных моделей для ряда приложений

Это достигается путем решения следующих задач:

1. Построение модели эволюции магнитного поля в дисковых объектах. Разработка математических методов для расчета поля в рамках данного подхода и сравнение полученных результатов с данными численного моделирования. Изучение вопроса о том, возможно ли существование решений той или иной симметрии.
2. Исследование с помощью модели для генерации магнитных полей в дисках магнитных полей в различных астрофизических объектах: галактиках и аккреционных дисках. Изучение поведения магнитного поля на внутренней границе аккреционного диска, возникновения инверсий магнитного поля в галактиках, его распространения во внешние области галактик, влияния процессов звездообразования.
3. Построение модели для эволюции магнитного поля в объектах тороидальной формы. Для этого необходимо изучение вертикальной структуры магнитного поля, опирающееся на современные представления о динамо.
4. Построение двумерных моделей для электровихревого течения. Отдельную важность представляют течение в полусферическом сосуде, а также электровихревое течение между двумя плоскостями. Необходима разработка математических методов для его исследования.
5. Исследование вопроса о возникновении «затравочных» магнитных полей в галактиках на больших красных смещениях, разработка математической модели для структуры поля.
6. Изучение процесса усиления магнитного поля с помощью конвективных ячеек при использовании моделей двумерного типа.

Научная новизна

В настоящей работе построен новый класс моделей, которые описывают эволюцию магнитных полей в проводящих средах, сочетая преимущества как численных, так и полуаналитических методов. достаточно полная модель эволюции магнитного поля в дисковых объектах.

Для дисков галактик с помощью спектральных методов показывается, что неосесимметричные конфигурации поля, которые рассматривались в некоторых предшествующих работах, являются неустойчивыми. Вопреки предположениям ряда авторов о том, что активное звездообразование может приводить к усилению крупномасштабного магнитного поля, показано, что подобные

процессы за счет диффузии приводят к разрушению регулярных структур поля. Построена модель динамо в торе для внешних колец галактик, в рамках которой возможна генерация магнитных полей дипольного типа.

Показано, что механизм динамо в аккреционных дисках действует принципиально иначе, нежели в дисках галактик, что связано с радиальными потоками среды при аккреции. С учетом данного факта разработана модель глобального строения поля, эволюция которого обусловлена действием динамо в аккреционных дисках, окружающих белые карлики, нейтронные звезды и черные дыры.

Разработаны математические методы решения магнитогидродинамических задач для электровихревых течений. Получены асимптотические модели для течений между плоскостями и в полусферическом сосуде. Важно, что данные приближения согласуются как с численными расчетами, так и с экспериментом.

Создана математическая модель возникновения магнитного поля галактики на больших красных смещениях с помощью механизма Бирмана, которая, в отличие от более ранних работ, учитывает его структуру в пространстве. Изучено, как конвективные течения проводящей среды влияют на поведение магнитного поля, исследована возможность коллапса в магнитной гидродинамике. Показано, что несмотря на несжимаемость среды, конвективные потоки приводят к сжатию линий поля и его быстрому нарастанию.

По сравнению с более ранними работами, посвященных решению уравнений для полей в трехмерном пространстве методами прямого численного моделирования, а также качественными оценками о порядках величин полей, удалось построить модели промежуточного типа, которые совмещают в себе простоту реализации и высокую точность. Подобные модели дают возможность как теоретического исследования решений, так и компьютерного моделирования при умеренных потребностях в вычислительных ресурсах.

Теоретическая и практическая значимость работы

В рамках настоящей работы построен качественно новый тип моделей эволюции магнитных полей в аккреционных и галактических дисках. Данные представления позволяют в деталях исследовать генерацию магнитного поля и получить его пространственную

структуру, при этом они не требуют чрезмерных объемов вычислений. Теоретическое исследование дифференциальных операторов, которые описывают действие динамо в тонких дисках, дает возможность изучить устойчивость структур поля различного типа. Изучены важные астрофизические приложения данных моделей, связанные с возникновением инверсий магнитного поля, влияния звездообразования на его поведение, генерацию полей во внешних галактических кольцах.

Получено, что эволюция магнитных полей аккреционных дисков происходит существенно иначе, нежели в галактиках. Показана важная роль радиальных потоков среды и накопления магнитного поля на внутренней границе объекта.

Результаты исследования электровихревых течений важны для приложений, связанных с электрометаллургией: электросваркой и электрошлаковым переплавом металлов.

Изучено влияние конвекции на структуру магнитного поля и возможность коллапса в проводящей среде. Исследовано, как истечение потока плазмы из центрального объекта приводит к генерации магнитных полей галактик на больших красных смещениях.

В диссертации разработаны модели промежуточного типа для процессов в магнитной гидродинамике, которые сочетают простоту, аккуратность теоретического анализа, а также высокую точность, которая дает возможность воспроизводить данные экспериментов и астрономических наблюдений.

Методология исследования

При изучении процессов использовались различные подходы, опирающиеся как на физическую природу явления, так и на современные математические методы. Ключевым моментом являлось выделение различных видов симметрии, которые позволяли определенным образом упростить процесс решения возникающих задач и построить модели промежуточного типа. После этого проводились аналитические оценки решений (с использованием различных спектральных методов), а также численное решение возникающих уравнений.

Положения, выносимые на защиту

1. Построен ряд моделей промежуточного типа для эволюции магнитного поля в проводящей среде, которые сочетают возможность теоретического анализа и высокую точность решений.

2. Сформулирована модель динамо в тонком диске, основанная на представлениях о P -неинвариантности альфа-эффекта и учитывающая современные представления о галактических объектах. Исследованы различные приближения, получены спектральные разложения решений. Показана устойчивость осесимметричных структур магнитного поля

3. Рассмотрены приложения планарного приближения. Показано, что в случае учета радиальных потоков и исключения концентрации магнитного поля на внутренней границе аккреционного диска, поле в плоскости диска не превышает уровня равномерного распределения и не приводит к его разрушению. В рамках нелинейной модели динамо в тонком диске получена реалистичная структура магнитного поля, соответствующая инверсиям. Для внешних колец галактик построены оценки как с помощью планарного приближения, так и в рамках модели динамо в торе, учитывающей более сложную вертикальную структуру магнитного поля. Показана принципиальная возможность возникновения квадрупольных и дипольных структур магнитного поля в рамках данной модели.

4. Построены аналитические модели для электровихревых течений в полусфере с центральным электродом конечных размеров и между двумя плоскостями.

5. Предложен метод, позволяющий на основе батарейного механизма Бирмана описать начальное магнитное поле в галактике. С помощью обобщения уравнений движения в предположении быстрой релаксации построена модель, позволяющая найти детальную структуру магнитного поля.

6. Показано, что при наличии конвективных потоков магнитное поле экспоненциально растет на границах конвективных ячеек. Построены аналитические и численные модели для эволюции поля.

Степень достоверности и апробация результатов

Достоверность результатов, представленных в диссертации, обеспечивается аккуратностью постановок задач и учетом влияния

всех основных физических процессов. Теоретические результаты подтверждаются численными расчетами, экспериментальными и наблюдательными данными.

Основные результаты работы представлялись на следующих международных и всероссийских конференциях:

- PAMIR International Conference: Fundamental and Applied MHD (2014, Рига, Латвия; 2016, Кальяри, Италия; 2019, Реймс, Франция);
- Serbian-Bulgarian Astronomical Conference (Белград, Сербия, 2016; Белградчик, Болгария, 2018);
- 2nd Conference on Natural Dynamos (Вальтице, Чехия, 2017);
- MREP-2017/UKMHD (Кембридж, Великобритания, 2017);
- Instability Phenomena and Evolution of the Universe (Бюракан, Армения, 2018);
- Compact White Dwarf Binaries (Ереван, Армения, 2019);
- EAS-2020 (Лейден, Нидерланды, 2020 – в дистанционной форме);
- Space Sciences and Technologies (Бюракан, Армения, 2022);
- Electromagnetic Processing of Materials (Рига, Латвия, 2021 – в дистанционной форме);
- Российская конференция по магнитной гидродинамике (Пермь, 2015, 2018, 2021 – в дистанционной форме);
- НеЗаТеГиУс-2018 (Звенигород, 2018);
- Волны и вихри в сложных средах (Москва, 2017, 2018, 2019, 2020, 2021);
- Всероссийская Астрономическая Конференция (Санкт-Петербург, 2013; Москва, 2021 – в дистанционной форме);
- Актуальные проблемы внегалактической астрономии (Пушино, 2012, 2013, 2014, 2015, 2016, 2017, 2018, 2019);
- Современная звездная астрономия (Ростов-на-Дону, 2014; Екатеринбург, 2017; Карачаево-Черкесия, 2019);
- Школа-семинар академика А.И.Леонтьева «Проблемы газодинамики и теплообмена в энергетических установках» (Санкт-Петербург, 2017; Москва, 2019);
- XI Семинар ВУЗов по теплофизике и энергетике (Санкт-Петербург, 2019);
- Современные проблемы теплофизики и энергетики (Москва, 2017, 2021);
- Российская национальная конференция по теплообмену (Москва, 2022);

- Международная научная конференция «Современные проблемы математики и механики», посвященная 80-летию академика В. А. Садовниченко (Москва, 2019);
 - Астрономия – 2015 (Москва, 2015);
 - Астрономия – 2018 (Москва, 2018);
 - Астрофизика высоких энергий сегодня и завтра (Москва, 2019)
- а также других конференциях.

Результаты работы также представлялись на различных научных семинарах: семинаре «Космическая электродинамика и теория динамо» (НИВЦ МГУ), семинаре НИИ механики МГУ, семинаре «Нелинейные волны» (Сколковский институт науки и технологий), семинаре отдела релятивистской астрофизики ГАИШ МГУ, семинаре «Математический коллоквиум МГТУ имени Н.Э.Баумана», семинаре лаборатории физической гидродинамики (Институт механики сплошной среды УрО РАН), научном семинаре ИТПЗ РАН, семинаре Научно-исследовательской лаборатории гидроаэродинамики (СПбГПУ Петра Великого), семинаре Главной (Пулковской) Астрономической обсерватории, семинаре кафедры гидроаэромеханики математико-механического факультета СПбГУ, семинаре кафедры математики физического факультета МГУ.

На докладах по результатам работы присутствовали такие признанные специалисты, как Д.Д.Соколов, А.Г.Куликовский, В.Е.Захаров, Е.А.Кузнецов, Н.И.Шакура, К.А.Постнов, В.О.Мантуров, К.Ю.Федоровский, А.В.Филиновский, П.Г.Фрик, В.А.Желиговский, Е.М.Смирнов, Е.В.Кустова, С.Е.Холодова, С.Ю.Маламанов, Н.Р.Ихсанов, А.Т.Байкова, Н.Н.Нефёдов, А.Н.Боголюбов и другие.

Публикации

По результатам работы был опубликован ряд статей в рецензируемых научных журналах, индексируемых в базах данных «Scopus» и «Web of Science Core Collection»:

A1. Mikhailov E., Sokoloff D., Zasov A., Kasparova A., Moss D., Beck R. Magnetic fields near the peripheries of galactic discs // *Astronomy and Astrophysics*. – 2014. – V. 568. – A66. [«Web of Science Core Collection», IF=6.240]

A2. Moss D., Mikhailov E., Sokoloff D., Silchenko O., Horellou C., Beck R. Magnetic fields in ring galaxies // *Astronomy and*

Astrophysics. – 2016. – V.592. – A44 [«Web of Science Core Collection», IF=6.240]

A3. Boneva D.V., Mikhailov E.A., Pashentseva M.V., Sokoloff D.D. Magnetic fields in the accretion discs for various inner boundary conditions. *Astronomy and Astrophysics*. – 2021. – V.652. – A38. [«Web of Science Core Collection», IF=6.240]

A4. Mikhailov E.A. Wavefronts of the magnetic field in galaxies: asymptotic and numerical approaches // *Magnetohydrodynamics*. – 2016. – V.52, No.1. – P. 117 – 124. [«Web of Science Core Collection», IF=0.753]

A5. Mikhailov E.A. Galactic magnetic field reversals and vorticity of transition layers // *Magnetohydrodynamics*. – 2017. – V. 53, No.2. – P. 357-363 [«Web of Science Core Collection», IF=0.753]

A6. Mikhailov E.A., Sibgatullin I.N. Magnetic fields in the outer rings of galaxies and turbulent motions // *Magnetohydrodynamics*. – 2019. – V.55, No.1-2. – P. 133 – 140. [«Web of Science Core Collection», IF=0.753]

A7. Mikhailov E., Pushkarev V. Influence of star formation on galactic magnetic fields in a model with vertical structure // *Magnetohydrodynamics*. – 2020. – V.56, No.2-3. – P.81 – 87. [«Web of Science Core Collection», IF=0.753]

A8. Mikhailov E. A. Symmetry of the magnetic fields in galactic dynamo and the material arms // *Magnetohydrodynamics*. — 2020. — Vol. 56, no. 4. — P. 403–414. [«Web of Science Core Collection», IF=0.753]

A9. Mikhailov E.A., Khokhryakova A.D. Torus dynamo in the outer rings of galaxies // *Geophysical and Astrophysical Fluid Dynamics*. – 2019. – V.113, No.1-2. – P. 199 – 207. [«Web of Science Core Collection», IF=1.590]

A10. Кузнецов Е.А., Михайлов Е.А. Заметки о коллапсе в магнитной гидродинамике // *Журнал экспериментальной и теоретической физики*. – 2020. – Т.158, №3. – С.561 – 572. [переводная версия индексируется в «Web of Science Core Collection», IF=1.111]

A11. Михайлов Е.А., Чудновский А.Ю. Асимптотическое разложение решения уравнения для медленного осесимметричного электровихревого течения между двумя плоскостями // *Сибирский журнал индустриальной математики*. – 2020. – Т.23, №4. – С. 88 – 100. [переводная версия индексируется в «Scopus», IF=0.391]

A12. Михайлов Е.А. Задачи с малым параметром и распространение фронтов в теории галактического динамо // Вестник Московского университета. Серия 3: Физика. Астрономия. – 2015. – №2. – С.27 – 31. [переводная версия индексируется в «Web of Science Core Collection», IF=0.536]

A13. Михайлов Е.А., Тепляков И.О. Аналитическое решение задачи об электровихревом течении в полусфере с электродами конечного размера в стоковом приближении // Вестник Московского университета. Серия 3: Физика. Астрономия. – 2018. – №2. – С.39 – 44. [переводная версия индексируется в «Web of Science Core Collection», IF=0.536]

A14. Михайлов Е.А. Спектральное разложение решения задачи о генерации магнитных полей галактик в планарном приближении // Вестник Московского университета. Серия 3: Физика. Астрономия. – 2020. – №5. – С.40 – 45. [переводная версия индексируется в «Web of Science Core Collection», IF=0.536]

A15. Mikhailov E. A., Elistratov S. A., Grachev D. A. The magnetic correlation tensor in the dynamo theory // Computational Mathematics and Modeling. — 2021. — Vol. 32, no. 1. — P. 45–51. [«Scopus», SJR=0.191]

A16. Mikhailov E.A., Teplyakov I.O. Construction asymptotic solution while studying electrovortex flow in hemispherical container using Stokes approximation // Journal of Physics: Conference Series. – 2017. – V.891. – 012060. [«Scopus», SJR=0.210]

A17. Mikhailov E. A., Teplyakov I. O., Fedotov I. A. Research of the electro-vortex flows in the liquid metals at different currents // Journal of Physics: Conference Series. — 2020. — Vol. 1565. — 012076. [«Scopus», SJR=0.210]

A18. Georgievskaya E.P., Mikhailov E.A., Teplyakov I.O. Simulation of the electrovortex flow in a linear approximation under the action of the external magnetic field // Journal of Physics: Conference Series. – 2020. – V.1683. – 022039. [«Scopus», SJR=0.210]

A19. Михайлов Е.А. Галактическое динамо с учетом потоков спиральности. // Письма в Астрономический журнал: Астрономия и космическая астрофизика. – 2013. – Т.39, №7. – С.474 – 480. [переводная версия индексируется в «Web of Science Core Collection», IF=1.194]

A20. Михайлов Е.А. Звездообразование и модель галактического динамо с потоками спиральности // Письма в *Астрономический журнал: Астрономия и космическая астрофизика*. – 2014. – Т.40, №7. – С.398 – 405. [переводная версия индексируется в «Web of Science Core Collection», IF=1.194]

A21. Михайлов Е.А. Динамо в торе для описания магнитных полей во внешних кольцах галактик // *Астрономический журнал*. – 2017. – Т.94, №9. – С.741 – 748. [переводная версия индексируется в «Web of Science Core Collection», IF=1.192]

A22. Андреасян Р.Р., Михайлов Е.А., Андреасян А.Р. Структура и особенности формирования инверсий галактического магнитного поля // *Астрономический журнал*. – Т.64, №3. – С.189 – 198. [переводная версия индексируется в «Web of Science Core Collection», IF=1.192]

A23. Михайлов Е. А., Андреасян Р. Р. Батарейный механизм Бирмана и структура начального магнитного поля в галактиках // *Астрономический журнал*. — 2021. — Т. 98, № 10. — С. 795–803. [переводная версия индексируется в «Web of Science Core Collection», IF=1.192]

A24. Михайлов Е.А., Пушкарев В.В. Влияние звездообразования на крупномасштабные структуры галактического магнитного поля // *Астрофизический бюллетень*. – 2018. – Т.73, №4. – С. 451 – 456. [переводная версия индексируется в «Web of Science Core Collection», IF=1.022]

A25. Mikhailov E.A., Pushkarev V.V. Fluctuating governing parameters in galaxy dynamo // *Astronomical and Astrophysical Transactions*. – 2018. – V.30, No.3. – P.343 – 350 [«Scopus», SJR=0.125]

A26. Mikhailov E.A. Torus dynamo model for study of magnetic fields in the outer rings of galaxies // *Astrophysics*. – 2018. – V. 61, No. 2. – P. 147 – 159. [«Web of Science Core Collection», IF=0.673]

A27. Mikhailov E., Khasaeva T. Evolution of the magnetic field reversals in galaxies // *Bulgarian Astronomical Journal*. – 2019. V. 31, No.2. – P.39 – 50. [«Scopus», SJR=0.138]

A28. Mikhailov E., Boneva D., Pashentseva M. No-z model for magnetic fields of different astrophysical objects and stability of the solutions // *Data*. — 2021. — Vol. 6, no. 1. — 4. [«Scopus», SJR=0.560]

Так же часть материалов диссертационного исследования вошла в книгу: Е.А.Михайлов. Магнитная гидродинамика и теория

динамо. М.: Физический факультет МГУ, 2018 (ISBN 978-5-8279-0157-0).

Личный вклад автора

Роль автора в получении всех основных результатов, вошедших в диссертацию, была определяющей. В работах, опубликованных в соавторстве, вклад автора был основополагающим. Автор принимал активное участие в формулировке модельных представлений, постановке задач, построении и анализе их решений.

При этом необходимо отметить следующее. В работе [A1] модельные представления о магнитном поле формулировались совместно с Д.Д.Соколовым и Д.Моссом, А.В.Каспаровой и А.В.Засовым были представлены данные о скоростях среды, использованные автором для построения моделей, Р.Беком составлен обзор наблюдений. В работе [A2] модельные представления формулировались совместно с Д.Д.Соколовым и Д.Моссом, О.К.Сильченко были представлены данные о внешних кольцах галактик, использованные для построения моделей, К.Орелу был представлен обзор наблюдательных перспектив в данной области. В работе [A3] модельные представления формулировались совместно с Д.Д.Соколовым, Д.В.Боневой был написан обзор астрономических данных, М.В.Пашенцевой получен ряд численных результатов на основе уравнений, сформулированных автором. В работе [A6] И.Н.Сибгатуллиным было проведено численное исследование течений на основе модельных представлений о магнитном поле, подготовленных автором диссертации. В работах [A7], [A24] и [A25] В.В.Пушкаревым был получен ряд численных решений уравнений, сформулированных автором на основе разработанных им модельных представлений для магнитных полей в галактиках и их внешних кольцах. В работе [A9] А.Д.Хохряковой получен ряд численных решений уравнений, сформулированных в рамках разработанных им модельных представлений для торов прямоугольного течения. В работе [A10] теоретические оценки для магнитного поля были получены совместно с Е.А.Кузнецовым, также ему принадлежит общая идея данной статьи. В работе [A11] основные вопросы, связанные с постановкой задачи, обсуждались с А.Ю.Чудновским. В работах [A13] и [A16] модельные представления формулировались совместно с И.О.Тепляковым. В работе [A15] общие вопросы,

связанные с постановкой задачи, обсуждались с Д.А.Грачевым, С.А.Елистратову принадлежит ряд численных результатов для решения уравнений, сформулированных автором. В работе [A17] модельные представления формулировались совместно с И.О.Тепляковым, И.А.Федотову принадлежит ряд численных результатов для решения уравнений, сформулированных автором. В работе [A18] модельные представления формулировались совместно с И.О.Тепляковым, Е.П.Георгиевской был получен ряд численных решений уравнений, сформулированных автором. В работе [A22] Р.Р.Андреасяном и А.Р.Андреасян были представлены данные астрономических наблюдений, полностью подтверждающих результаты, полученные в рамках модели, сформулированной автором, также проводилось общее обсуждение всех основных вопросов. В работе [A23] формулировка модельных представлений проводилась совместно с Р.Р.Андреасяном. В работе [A27] Т.Т.Хасаевой был получен ряд численных результатов для решения уравнений, сформулированных автором в рамках разработанных им модельных представлений. В работе [A28] общая проблема была сформулирована совместно с Д.В.Боневой, М.В.Пашенцевой был проведен ряд вычислений на основе модельных представлений, сформулированных автором.

Важно отметить, что все результаты, вошедшие в диссертацию, получены автором лично.

Структура и объем работы

Диссертационная работа состоит из 6 глав, Введения, Заключение и списка литературы. Объем диссертации составляет 302 страницы, включая 47 рисунков и список литературы из 252 наименований

Благодарности

Автор выражает глубокую признательность своему учителю – профессору Дмитрию Дмитриевичу Соколову, благодаря которому он смог состояться в науке и на протяжении многих лет чувствовал поддержку в своих начинаниях.

Автор также благодарен своим коллегам, с которыми он подготовил совместные работы и у которых смог многому научиться: Е.А.Кузнецову (ФИАН), Р.Р.Андреасяну (БАО, Армения), Д.Моссу (Манчестерский университет, Великобритания), А.В.Засову (ГАИШ МГУ), О.К.Сильченко (ГАИШ МГУ), А.Ю.Чудновскому (Латвийский

университет, Латвия), Р.Беку (Радиоастрономический институт Макса Планка, Германия), К.Орелу (Уппсальская обсерватория, Швеция).

Хотелось бы поблагодарить соавторов, многие из которых стали за это время добрыми друзьями: А.Р.Андреасян (БАО, Армения), К.И.Смирнову (УрФУ), Д.А.Грачева (НИУ ВШЭ), И.О.Теплякова (ОИВТ РАН), А.В.Каспарову (ГАИШ МГУ), И.Н.Сибгатуллина (Институт океанологии РАН), Д.В.Боневу (ИКИТ БАН, Болгария).

Автор хотел бы выразить благодарность людям, чья поддержка в разное время сыграла для него важную роль: Н.Н.Нефедову, А.Н.Боголюбову, Н.Е.Шапкиной, Н.И.Шакуре, Р.В.Шамину, К.А.Постнову.

Наконец, автор не может не упомянуть своих более молодых коллег и учеников: Т.Т.Хасаеву, В.В.Пушкарева, М.В.Пашенцеву, Е.П.Георгиевскую, И.А.Федотова, С.А.Елистратова, К.Ю.Мальшеву, А.Д.Хохрякову, М.Г.Сердюкова, А.А.Таранюка, А.П.Степанову, Е.Н.Жихареву.

Содержание работы

Первая глава посвящена магнитным полям в проводящей среде и методам их описания. Она носит в целом вводный характер. В §1 приводится изложение общей истории вопроса. Излагается опыт изучения космических магнитных полей начиная со средневековых времен и вплоть до наших дней. Рассказывается о том, как была создана теория динамо, и каким образом раньше строились решения возникающих уравнений. Отдельное внимание уделено первым двумерным моделям, таким как динамо Паркера [1]. В §2 приводится процедура вывода уравнения Штеенбека – Краузе – Рэдлера [1]. Для этого уравнение индукции переписывается с использованием лагранжевых переменных. Далее с учетом закона их изменения со временем записывается уравнение динамо средних полей. Для этого применяется так называемое короткокоррелированное случайное течение, которое было впервые рассмотрено в работах Казанцева [24]. В нем содержится альфа-эффект, связанный с неравновесными процессами в астрофизике, и члены, описывающие диссипацию:

$$\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = \text{rot}[\mathbf{V}, \mathbf{B}] + \text{rot}(\alpha \mathbf{B}) + \nu \Delta \mathbf{B};$$

где \mathbf{B} – величина индукции магнитного поля, \mathbf{V} – скорость крупномасштабных движений (ее можно получить путем усреднения по характерным турбулентным масштабам), $\alpha = -\frac{\tau}{3} \langle (\mathbf{u}, \text{rot} \mathbf{u}) \rangle$ – альфа-эффект (\mathbf{u} – скорость мелкомасштабных движений, τ – корреляционное время), ν – коэффициент турбулентной вязкости [2]. Отметим, что для магнитного поля ключевую роль играет P -неинвариантность альфа-эффекта.

В §3 описываются вопросы, связанные с насыщением роста магнитного поля. Так, уравнение индукции является линейным и может описывать бесконечный рост. Нелинейность может быть введена с помощью закона сохранения энергии:

$$\frac{1}{2} \rho u^2 + \frac{B^2}{8\pi} = \frac{1}{2} \rho u_0^2;$$

где ρ – плотность среды. Учитывая, что коэффициент, описывающий альфа-эффект, пропорционален квадрату скорости, данное уравнение приводит нас к следующему механизму подавления альфа-эффекта:

$$\alpha = \alpha_0 - \frac{\alpha_0 B^2}{4u_0^2 \pi \rho};$$

где α_0 – начальное значение альфа-эффекта. Если ввести так называемое поле равнораспределения $B_0 = 2u_0 \sqrt{\pi \rho}$, то процесс подавления альфа-эффекта возможно описывать при помощи такого выражения

$$\alpha = \alpha_0 \left(1 - \frac{B^2}{B_0^2} \right).$$

Отметим, что такой закон подавления несколько отличается от стандартного механизма, часто используемого в работах по теории динамо (в которых $\alpha \propto (1 + B^2 / B_0^2)^{-1}$), однако дает принципиально такие же результаты.

Тем не менее, процесс насыщения роста магнитного поля гораздо лучше описывается при помощи уравнения для эволюции спиральности. Она вводится по следующему правилу [25]:

$$\chi = (\mathbf{A}, \mathbf{H});$$

где \mathbf{H} – напряженность магнитного поля, \mathbf{A} – его векторный потенциал. В результате усреднения получается следующее уравнение (записанное в лагранжевых переменных):

$$\frac{d\langle\chi\rangle}{dt} = -2\eta_m \langle(\text{rot}\mathbf{H}, \mathbf{H})\rangle;$$

где η_m – коэффициент магнитной вязкости. Если разделить магнитное поле и ток на мелкомасштабную и усредненную составляющие, то получим следующее равенство [26]:

$$\frac{d\langle\chi\rangle}{dt} = -\frac{8\pi\eta_m}{c} \langle((\mathbf{J} + \mathbf{j}), (\mathbf{B} + \mathbf{b}))\rangle.$$

В результате усреднения мы получаем такие равенства:

$$\frac{d\langle\chi\rangle}{dt} = -2c(\mathbf{E}, \mathbf{B}) - \frac{8\pi\eta_m}{c} \langle(\mathbf{j}, \mathbf{b})\rangle;$$

В работе показано, что

$$\langle(\mathbf{j}, \mathbf{b})\rangle = \frac{c}{4\pi l^2} \langle\chi\rangle.$$

Проведя несложные преобразования, мы получим такое уравнение в лагранжевых переменных:

$$\frac{d\chi}{dt} = 2\alpha(\mathbf{B}, \mathbf{B}) - 2\eta(\mathbf{B}, \text{rot}\mathbf{B}) - \frac{2\eta_m}{l^2} \chi.$$

Если мы перейдем к эйлеровым переменным и проведем процедуру усреднения, то можно получить:

$$\frac{\partial\chi}{\partial t} + (\mathbf{V}, \nabla)\chi = 2\alpha(\mathbf{B}, \mathbf{B}) - 2\eta(\mathbf{B}, \text{rot}\mathbf{B}) - \frac{2\eta_m}{l^2} \chi + \eta\Delta\chi.$$

Далее определяется, каким образом спиральность магнитного поля может быть взаимосвязана с закрученностью турбулентных движений и может влиять на их характер. Если учесть, что решение довольно быстро выходит на стационарное значение, уравнение Навье – Стокса сводится к виду:

$$\langle (\mathbf{u}, \nabla) \mathbf{u} \rangle = -\frac{1}{\rho} \langle \nabla p \rangle + \frac{1}{c} \langle [\mathbf{J}, \mathbf{B}] \rangle + \frac{1}{c} \langle [\mathbf{j}, \mathbf{b}] \rangle.$$

Проведя несложные преобразования (приведенные в тексте диссертации), в таком случае получено, что [27] [28] [29]

$$\alpha = \alpha_0 + \alpha_m;$$

где

$$\alpha_m \approx -\frac{\tau}{12\pi l^2} \chi.$$

Здесь получен способ описать процесс нелинейного насыщения роста магнитного поля с помощью учета спиральности, являющейся интегралом движения.

В целом, первая глава связана с общими соображениями, относящимися к генерации магнитных полей и возникающими при этом эволюционными уравнениями. Как уже говорилось выше, они являются достаточно сложными как для прямого численного моделирования, так и для построения приближенных аналитических решений. В связи с этим дальнейшие главы связаны с созданием моделей промежуточного типа в случае объектов различной геометрии.

Вторая глава посвящена планарному приближению в теории динамо. В §1 говорится о том, каким образом можно описывать магнитные поля в случае тонких дисков, к которым относятся галактики и аккреционные диски около массивных астрофизических объектов. Сначала с учетом классических работ Д.Мосса [14], К.Субраманиана и Л.Местеля [30] излагаются общие соображения, связанные с геометрией дисков, объясняется, что основная часть магнитного поля лежит в экваториальной плоскости, а производная вертикальной составляющей может быть выражена при помощи условия бездивергентности магнитного поля.

После этого производится разложение решения задачи в ряд по основным модам. Показано, что как компоненты магнитного поля, так и альфа-эффект могут быть достаточно точно приближены с помощью старшей из вертикальных мод:

$$B_r(r, \varphi, z, t) = X_1(r, \varphi, t) \cos\left(\frac{\pi z}{2h}\right);$$

$$B_\varphi(r, \varphi, z, t) = Y_1(r, \varphi, t) \cos\left(\frac{\pi z}{2h}\right);$$

$$\alpha = \alpha_0 \sin\left(\frac{\pi z}{2h}\right);$$

где $X_1(r, \varphi, t)$ и $Y_1(r, \varphi, t)$ – составляющие разложения, а α_0 – характерное значение альфа-эффекта, h – полутолщина диска.

Достаточно часто компоненты магнитного поля заменяют на составляющие разложения. Кроме того, время удобно измерять в единицах $\frac{h^2}{\eta}$, а расстояния – в единицах радиуса диска R . Тогда система уравнений планарного приближения записывается в такой форме:

$$\frac{\partial B_r}{\partial t} = -R_\alpha B_\varphi - R_\omega \Omega \frac{\partial B_r}{\partial \varphi} - \frac{\pi^2 B_r}{4} +$$

$$\lambda^2 \left\{ \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial B_r}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 B_r}{\partial \varphi^2} - \frac{B_r}{r^2} - \frac{2}{r^2} \frac{\partial B_\varphi}{\partial \varphi} \right\};$$

$$\frac{\partial B_\varphi}{\partial t} = R_\alpha B_r - R_\omega \Omega \frac{\partial B_\varphi}{\partial \varphi} + R_\omega r \frac{\partial \Omega}{\partial r} B_r - \frac{\pi^2 B_\varphi}{4} +$$

$$+ \lambda^2 \left\{ \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial B_\varphi}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 B_\varphi}{\partial \varphi^2} - \frac{B_\varphi}{r^2} + \frac{2}{r^2} \frac{\partial B_r}{\partial \varphi} \right\}.$$

В данном случае коэффициент R_α характеризует альфа-эффект, R_ω – вращение объекта, λ – диссипацию в плоскости диска. В большинстве реально существующих астрофизических объектов, таких как спиральные галактики или аккреционные диски, $R_\alpha = O(1)$, $R_\omega = O(10)$, $\lambda = O(10^{-2})$

Также, если измерять магнитные поля в единицах равномерного распределения, то можно сделать замену $R_\alpha \rightarrow R_\alpha(1 - B_r^2 - B_\varphi^2)$ и получить систему уравнений с учетом нелинейного насыщения.

В §2 проведен анализ решений данной системы уравнений в так называемом локальном приближении, когда можно пренебречь диссипативными процессами.

В линейном приближении для показателя экспоненциального роста магнитного поля можно получить выражение

$$\beta = -\frac{\pi^2}{4} \pm \sqrt{-R_\alpha R_\omega r \frac{\partial \Omega}{\partial r}}, \quad \text{что приводит к следующему условию}$$

генерации: $D = R_\alpha R_\omega > D_{cr}(r)$, где $D_{cr}(r) = -\frac{\pi^4}{16r \frac{\partial \Omega}{\partial r}}$. Для данной

величины можно получить [31] приближенное равенство $D_{cr} \approx 6.08$.

В нелинейном случае получены следующие стационарные решения [32]:

$$B_r^{(+)} = \sqrt{\frac{\frac{\pi^4}{16} + R_\alpha R_\omega r \frac{\partial \Omega}{\partial r}}{R_\alpha R_\omega r \frac{\partial \Omega}{\partial r} \left(1 + \frac{16}{\pi^4} R_\omega^2 r^2 \left(\frac{\partial \Omega}{\partial r} \right)^2 \right)}};$$

$$B_\varphi^{(+)} = \sqrt{\frac{R_\omega r \frac{\partial \Omega}{\partial r} \left(1 + \frac{16}{\pi^4} R_\alpha R_\omega r \frac{\partial \Omega}{\partial r} \right)}{R_\alpha \left(1 + \frac{16}{\pi^4} R_\omega^2 r^2 \left(\frac{\partial \Omega}{\partial r} \right)^2 \right)}};$$

$$B_r^{(-)} = -\sqrt{\frac{\frac{\pi^4}{16} + R_\alpha R_\omega r \frac{\partial \Omega}{\partial r}}{R_\alpha R_\omega r \frac{\partial \Omega}{\partial r} \left(1 + \frac{16}{\pi^4} R_\omega^2 r^2 \left(\frac{\partial \Omega}{\partial r} \right)^2 \right)}};$$

$$B_{\varphi}^{(-)} = - \sqrt{\frac{R_{\omega} r \frac{\partial \Omega}{\partial r} \left(1 + \frac{16}{\pi^4} R_{\alpha} R_{\omega} r \frac{\partial \Omega}{\partial r} \right)}{R_{\alpha} \left(1 + \frac{16}{\pi^4} R_{\omega}^2 r^2 \left(\frac{\partial \Omega}{\partial r} \right)^2 \right)}}.$$

В работе был проведен анализ устойчивости решений [33]. В зависимости от соотношения между параметрами данные решения представляют собой либо устойчивый фокус, либо устойчивый узел.

На рис.1 – 2 показан вид решений в обеих ситуациях. Видно, что при различных значениях динамо-числа возможно добиться как одного, так и другого результата.

В §3 рассмотрен случай уравнений планарного приближения в линейном осесимметричном случае. Его решение ищется при помощи спектрального разложения [31]. Вводятся две вспомогательные функции:

$$y(r, t) = \frac{B_{\varphi}(r, t) \sqrt{R_{\alpha}} - B_r(r, t) \sqrt{R_{\omega}}}{\sqrt{R_{\alpha} R_{\omega}}};$$

$$z(r, t) = \frac{B_r(r, t) \sqrt{R_{\omega}} + B_{\varphi}(r, t) \sqrt{R_{\alpha}}}{\sqrt{R_{\alpha} R_{\omega}}}.$$

Тогда система уравнений записывается в форме:

$$\frac{\partial y}{\partial t} = y \sqrt{R_{\alpha} R_{\omega}} - \frac{\pi^2}{4} y + \lambda^2 \left\{ \frac{\partial^2 y}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial y}{\partial r} - \frac{y}{r^2} \right\};$$

$$\frac{\partial z}{\partial t} = -z \sqrt{R_{\alpha} R_{\omega}} - \frac{\pi^2}{4} z + \lambda^2 \left\{ \frac{\partial^2 z}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial z}{\partial r} - \frac{z}{r^2} \right\}.$$

Если искать решение в виде:

$$y(r, t) = \tilde{y}(r) \exp(pt),$$

то первое из уравнений сведется к спектральной задаче [31]:

$$p \tilde{y}(r) = \tilde{y}(r) \sqrt{R_{\alpha} R_{\omega}} - \frac{\pi^2}{4} \tilde{y}(r) + \lambda^2 \left\{ \tilde{y}''(r) + \frac{1}{r} \tilde{y}'(r) - \frac{1}{r^2} \tilde{y}(r) \right\}.$$

Собственные значения будут описываться с помощью выражений:

$$p_n = \sqrt{R_\alpha R_\omega} - \frac{\pi^2}{4} - \lambda^2 (j_{1,n})^2;$$

а отвечающие им собственные функции:

$$\tilde{y}_n(r) = J_1(r \cdot j_{1,n});$$

Аналогично можно представить решение для второй из функций:

$$z(r, t) = \tilde{z}(r) \exp(qt);$$

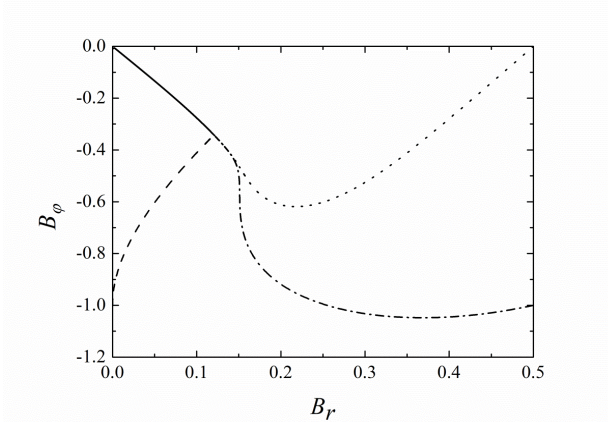


Рис. 1. Поведение решения на фазовой плоскости при $D=8$ в

окрестности неподвижной точки $\begin{pmatrix} B_r^{(-)} \\ B_\phi^{(-)} \end{pmatrix}$.

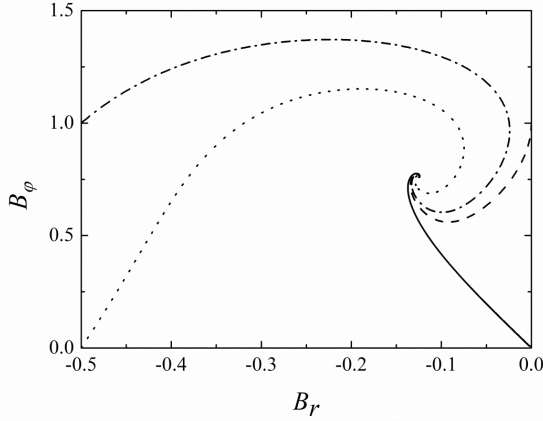


Рис. 2. Поведение решения на фазовой плоскости при $D=15$ в

окрестности неподвижной точки $\begin{pmatrix} B_r^{(+)} \\ B_\varphi^{(+)} \end{pmatrix}$.

$$q\tilde{z}(r) = -\tilde{z}(r)\sqrt{R_\alpha R_\omega} - \frac{\pi^2}{4}\tilde{z}(r) + \lambda^2 \left\{ \tilde{z}''(r) + \frac{1}{r}\tilde{z}'(r) - \frac{\tilde{z}(r)}{r^2} \right\}.$$

Для собственных значений и собственных функций можно получить:

$$q_n = -\sqrt{R_\alpha R_\omega} - \frac{\pi^2}{4} - \lambda^2(j_{1,n})^2;$$

$$\tilde{z}_n(r) = J_1(r \cdot j_{1,n}).$$

Полное решение связано с таким разложением:

$$B_r(r, t) = -\sqrt{R_\alpha} \sum_{n=1}^{\infty} Y_n J_1(r \cdot j_{1,n}) \exp \left\{ \left[\sqrt{R_\alpha R_\omega} - \frac{\pi^2}{4} - \lambda^2(j_{1,n})^2 \right] t \right\} +$$

$$+ \sqrt{R_\alpha} \sum_{n=1}^{\infty} Z_n J_1(r \cdot j_{1,n}) \exp \left\{ \left[-\sqrt{R_\alpha R_\omega} - \frac{\pi^2}{4} - \lambda^2(j_{1,n})^2 \right] t \right\};$$

$$B_\varphi(r, t) = \sqrt{R_\omega} \sum_{n=1}^{\infty} Y_n J_1(r \cdot j_{1,n}) \exp \left\{ \left[\sqrt{R_\alpha R_\omega} - \frac{\pi^2}{4} - \lambda^2 (j_{1,n})^2 \right] t \right\} + \\ + \sqrt{R_\omega} \sum_{n=1}^{\infty} Z_n J_1(r \cdot j_{1,n}) \exp \left\{ \left[-\sqrt{R_\alpha R_\omega} - \frac{\pi^2}{4} - \lambda^2 (j_{1,n})^2 \right] t \right\};$$

где Y_n и Z_n – коэффициенты разложения, связанные с начальными условиями.

Возможность роста магнитного поля описывается с помощью динамо-числа $D = R_\alpha R_\omega$ [31] (оценка приведена при $\lambda = 0.03$):

$$D > \left(\frac{\pi^2}{4} + \lambda^2 (j_{1,n})^2 \right)^2 \approx 6.15.$$

Эта оценка выше чем то, что было получено в рамках локального приближения. Отметим, что данный результат был получен с учетом условия осевой симметрии.

Вместе с тем, в астрономической литературе часто говорится, что магнитные поля галактик являются неосесимметричными и в целом соответствуют спиральной структуре галактик. Изучению возможности генерации полей подобной структуры посвящен §4. Тогда, используя те же вспомогательные функции, можно записать такое уравнение для y (что касается z , то оно будет достаточно быстро затухать и станет пренебрежимо малым) [34]:

$$\frac{\partial y(r, \varphi, t)}{\partial t} = \sqrt{R_\alpha R_\omega} y(r, \varphi, t) - \frac{\pi^2}{4} y(r, \varphi, t) - R_\omega \frac{\partial y(r, \varphi, t)}{\partial \varphi} + \\ \lambda^2 \frac{\partial^2 y(r, \varphi, t)}{\partial r^2} + \lambda^2 \frac{1}{r} \frac{\partial y(r, \varphi, t)}{\partial r} - \lambda^2 \frac{y(r, \varphi, t)}{r^2} + \\ + \frac{\lambda^2}{r^2} \frac{\partial^2 y(r, \varphi, t)}{\partial \varphi^2} + \lambda^2 \left(\sqrt{\frac{R_\omega}{R_\alpha}} - \sqrt{\frac{R_\alpha}{R_\omega}} \right) \frac{1}{r^2} \frac{\partial y(r, \varphi, t)}{\partial \varphi}.$$

Будем искать решение в виде [34]:

$$y(r, \varphi, t) = R(r) Y \left(\varphi - R_\omega t + \frac{\lambda^2}{r^2} \left(\sqrt{\frac{R_\omega}{R_\alpha}} + \sqrt{\frac{R_\alpha}{R_\omega}} \right) t \right) T(t).$$

Эволюция со временем может характеризоваться следующим законом:

$$T_m(t) = \exp(p_m t).$$

Для структуры по φ получим следующее:

$$\begin{aligned} Y_m^1 & \left(\varphi - R_\omega t + \frac{\lambda^2}{r^2} \left(\sqrt{\frac{R_\omega}{R_\alpha}} + \sqrt{\frac{R_\alpha}{R_\omega}} \right) t \right) = \\ & = \cos \left(m \left(\varphi - R_\omega t + \frac{\lambda^2}{r^2} \left(\sqrt{\frac{R_\omega}{R_\alpha}} + \sqrt{\frac{R_\alpha}{R_\omega}} \right) t \right) \right); \\ Y_m^2 & \left(\varphi - R_\omega t + \frac{\lambda^2}{r^2} \left(\sqrt{\frac{R_\omega}{R_\alpha}} + \sqrt{\frac{R_\alpha}{R_\omega}} \right) t \right) = \\ & = \sin \left(m \left(\varphi - R_\omega t + \frac{\lambda^2}{r^2} \left(\sqrt{\frac{R_\omega}{R_\alpha}} + \sqrt{\frac{R_\alpha}{R_\omega}} \right) t \right) \right). \end{aligned}$$

Для радиальной части в таком случае получено следующее уравнение:

$$\begin{aligned} p_m R_m(r) = \sqrt{R_\alpha R_\omega} R_m(r) - \frac{\pi^2}{4} R_m(r) + \lambda^2 R_m''(r) + \frac{\lambda^2}{r} R_m'(r) - \\ - \frac{\lambda^2}{r^2} R_m(r) - \frac{m^2 \lambda^2}{r^2} R_m(r); \end{aligned}$$

которое имеет следующее решение:

$$R_{nm}(r) = J_1 \left(r \cdot j_{\sqrt{1+m^2}, n} \right).$$

Полное решение можно записать в виде:

$$\begin{aligned} y(r, \varphi, t) = \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} A_{m,n} J_{\sqrt{1+m^2}} \left(\pi \left(n + \frac{\sqrt{1+m^2}}{2} - \frac{1}{4} - n_0 \right) r \right) \times \\ \times \cos \left(m \left(\varphi - R_\omega t + \frac{\lambda^2}{r^2} \left(\sqrt{\frac{R_\omega}{R_\alpha}} + \sqrt{\frac{R_\alpha}{R_\omega}} \right) t \right) \right) \times \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & \times \exp \left\{ \left(\sqrt{R_\alpha R_\omega} - \frac{\pi^2}{4} - \lambda^2 \pi^2 \left(n + \frac{\sqrt{1+m^2}}{2} - \frac{1}{4} - n_0 \right)^2 \right) t \right\} + \\
 & + \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} B_{m,n} J_{\sqrt{1+m^2}} \left(\pi \left(n + \frac{\sqrt{1+m^2}}{2} - \frac{1}{4} - n_0 \right) r \right) \times \\
 & \times \sin \left(m \left(\varphi - R_\omega t + \frac{\lambda^2}{r^2} \left(\sqrt{\frac{R_\omega}{R_\alpha}} + \sqrt{\frac{R_\alpha}{R_\omega}} \right) t \right) \right) \times \\
 & \times \exp \left\{ \left(\sqrt{R_\alpha R_\omega} - \frac{\pi^2}{4} - \lambda^2 \pi^2 \left(n + \frac{\sqrt{1+m^2}}{2} - \frac{1}{4} - n_0 \right)^2 \right) t \right\}.
 \end{aligned}$$

Возможность генерации старшей неосесимметричной моды ($m=1$) описывается с помощью следующего условия [34]:

$$D > D_1 \approx 6.08 \cdot (1 + 33.9 \cdot \lambda^2)^2 > D_{cr}.$$

Можно отметить, что условия для генерации неосесимметричной компоненты будут жестче. Также можно отметить, что скорость роста неосесимметричной составляющей магнитного поля будет меньше. Таким образом, если начальное магнитное поле содержит одинаковые составляющие, соответствующие осесимметричному и неосесимметричному полю, то их соотношение при типичных значениях параметров будет меняться по закону:

$$M_t = \frac{0.533 \cdot B_0 \times \exp(0.486t)}{0.273 \cdot B_0 \times \exp(0.541t)} = 1.95 \cdot \exp(-0.055t).$$

Таким образом, время, за которое они становятся сравнимы, можно оценить как $T = \frac{1}{0.055} \approx 18$. Кроме того, за счет размывания функции Y , неосесимметричные структуры разрушаются за время:

$$t = \frac{\pi}{48\lambda^2 \left(\sqrt{\frac{R_\omega}{R_\alpha}} + \sqrt{\frac{R_\alpha}{R_\omega}} \right)} \approx 1.88.$$

Результат численного расчета показан на рис.3 – 5. Распределение достаточно быстро приходит к осесимметричному полю [34].

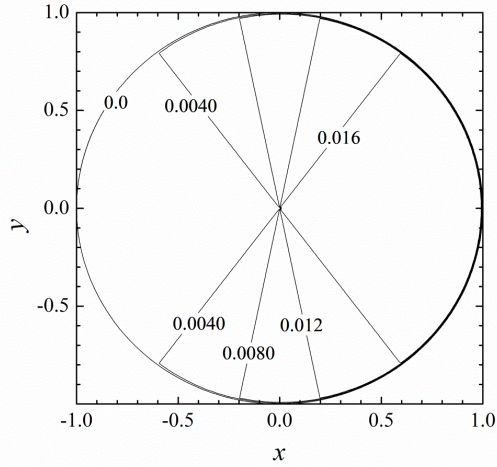


Рис. 3. Начальное азимутальное магнитное поле в смешанном случае

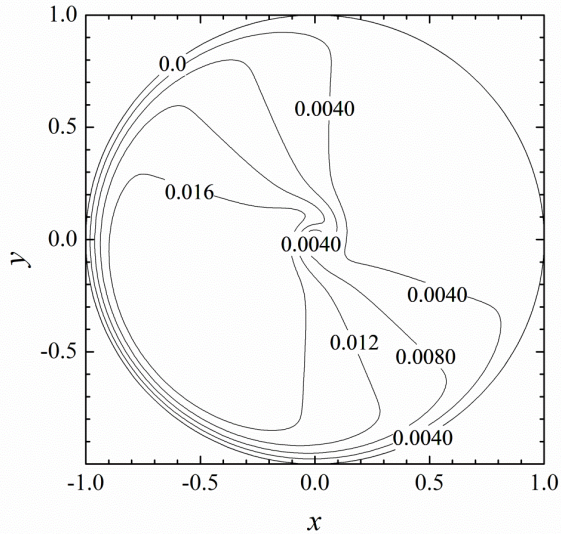


Рис. 4. Азимутальное магнитное поле при смешанных начальных условиях при $t=1$.

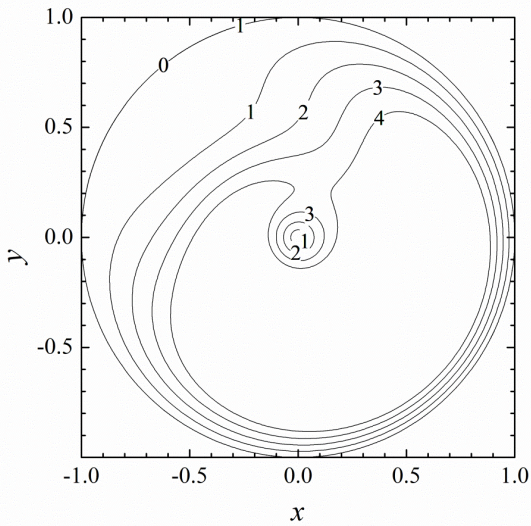


Рис. 5. Азимутальное магнитное поле при смешанных начальных условиях при $t=10$.

Как видно, в данном исследовании впервые в рамках планарного приближения было показано, что неосесимметричные магнитные поля для типичных течений являются неустойчивыми. Это позволяет нам в дальнейшем пользоваться осесимметричными моделями.

Третья глава посвящена некоторым приложениям планарного приближения в различных задачах астрофизики. В §1 речь идет о генерации инверсий магнитного поля [32] [35] [36]. Они связаны с тем, что магнитное поле в различных частях галактики имеют противоположное направление [37]. С точки зрения решаемых уравнений этот процесс оказывается связан с асимптотической теорией контрастных структур [38].

Приближенно можно считать [35], что компоненты магнитного поля имеют соотношение $B_r \approx -B_\varphi \sqrt{\frac{R_\alpha}{R_\omega r \frac{\partial \Omega}{\partial r}}}$. Тогда

уравнение для угловой составляющей магнитного поля будет выглядеть таким образом:

$$\frac{\partial B_\varphi}{\partial t} = B_\varphi \sqrt{R_\alpha R_\omega r \frac{\partial \Omega}{\partial r}} (1 - B_\varphi^2) - \frac{\pi^2}{4} B_\varphi + \lambda^2 \left\{ \frac{\partial^2 B_\varphi}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial B_\varphi}{\partial r} - \frac{B_\varphi}{r^2} \right\}.$$

Рассмотрим стационарное решение, и будем искать магнитное поле в виде $B_\varphi(r) = u(x)$, где $x = \frac{r - r^*}{\lambda}$. Тогда уравнение можно переписать в виде (здесь сохранены только слагаемые, пропорциональные λ) [35]:

$$u \sqrt{R_\alpha R_\omega r \frac{\partial \Omega}{\partial r}} (1 - u^2) - \frac{\pi^2}{4} u + u'' = 0.$$

Его решение будет представляться в следующей форме:

$$u = \text{th} \left(\sqrt{\frac{\gamma_0}{2}} x \right);$$

где $\gamma_0 = \sqrt{R_\alpha R_\omega r^* \frac{\partial \Omega}{\partial r}} - \frac{\pi^2}{4}$.

Если учесть зависимость от времени, то решение для магнитного поля оказывается таковым [35]:

$$B_{\varphi}(r,t) = u \left(\frac{r - r^* - ct}{\lambda} \right);$$

где $c = \lambda^2 \left(\frac{1}{2} \frac{\gamma'(r^*)}{\gamma_0} - \frac{1}{r^*} \right)$.

Полное решение имеет смысл искать численно, решая исходную систему уравнений. Возникновение магнитного поля с инверсиями показано на рис. 6. Эта картина в целом похожа на то, что генерируется в случае Млечного Пути (там наблюдаются две инверсии магнитного поля) [36].

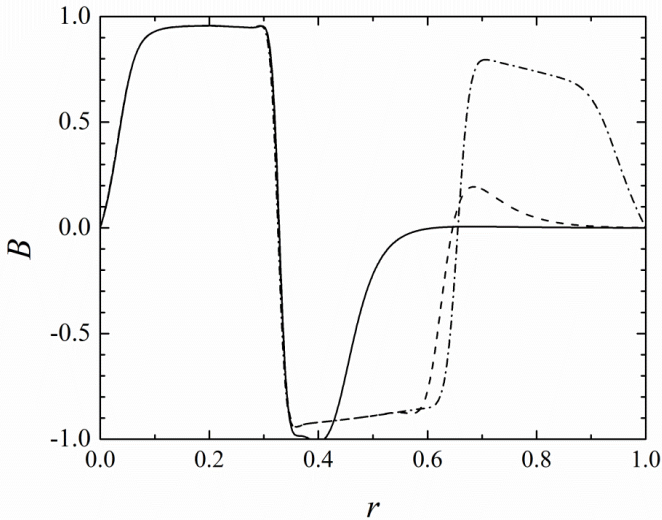


Рис. 6. Эволюция азимутальной компоненты магнитного поля со временем. Сплошная кривая – $t = 3$, пунктирная – $t = 5$, штрихпунктирная – $t = 10$.

В §2 обсуждается процесс, который описывается с помощью близких уравнений [39] [40]. Он связан с возможностью генерации магнитных полей в крайних областях и во внешних кольцах галактик [41]. На рис. 7. показано, что хотя во внешних областях галактик ($r > 1$) генерация *in situ* и затруднительна, они могут там

возникнуть с помощью волны, связанной с так называемым эффектом Колмогорова – Петровского – Пискунова [42].

Также представляет интерес вопрос о внешних кольцах [43], характеризуемых значениями координат $R - a < r < R + a$, $-h < z < h$. Промежуток между внешним кольцом и центральной частью заполнен средой с достаточно небольшой плотностью. С точки зрения уравнений это приводит к малым значениям поля равнораспределения.

Результат численного моделирования поля представлен на рис. 8. Можно видеть, что магнитное поле может распространяться из центральной части галактики в сторону внешнего кольца.

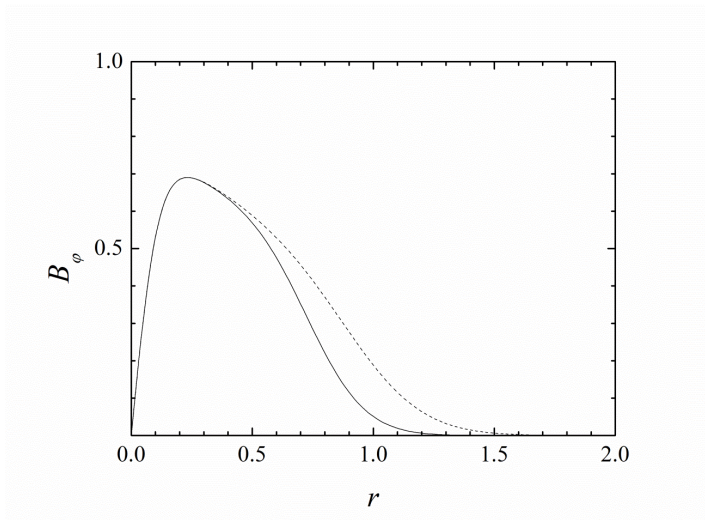


Рис. 7. Зависимость азимутального магнитного поля от расстояния. Сплошная линия показывает момент времени при $t = 20$, пунктирная $t = 50$.

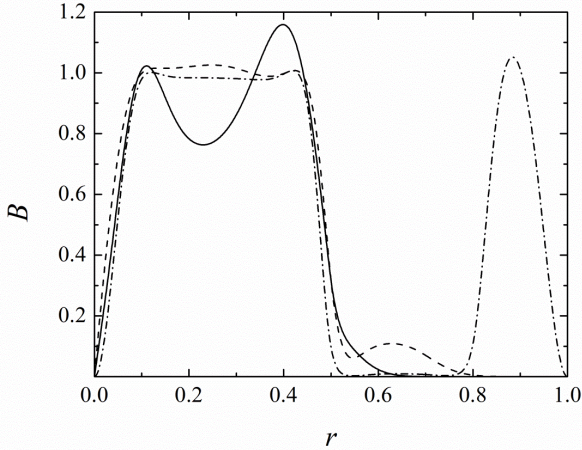


Рис. 8. Поле во внешнем кольце. Сплошная кривая – $t = 1$, пунктирная – $t = 2$, штрихпунктирная – $t = 5$.

В §3 изучен вопрос о том, как влияет звездообразование на магнитное поле [44] [45] [46] [47] [48]. Поскольку расположение областей звездообразования является случайным, а их существование длится в течение короткого времени, то разумно использовать уравнения со случайными коэффициентами. Воспользуемся, так же как и раньше, локальным приближением [45]:

$$\frac{dB_r}{dt} = -R_\alpha B_\varphi - k B_r;$$

$$\frac{dB_\varphi}{dt} = -R_\omega B_r - k B_\varphi;$$

где k - коэффициент, характеризующий диффузию магнитного поля в вертикальном направлении и пропорциональный скорости движений.

Коэффициент k меняется с интервалом Δt , принимает одно из случайных значений, одно из которых связано с активными процессами в межзвездной среде, а другое – со «спокойной» частью галактик:

$$k = \begin{cases} 2.5 \text{ с вероятностью } (1 - p); \\ 7.5 \text{ с вероятностью } p. \end{cases}$$

Вероятность p пропорциональна величине звездообразования. Результат применения подобного приближения показан на рис. 9 [45].

Отдельное внимание заслуживает так называемая перемежаемость, которая сводится к тому, что чем выше номер момента, тем больше скорость его экспоненциального роста.

§4 посвящен эволюции поля в аккреционных дисках [49] (рис.10). Основной особенностью является то, что скорость вращения аккреционного диска меняется по кеплеровскому закону [50]. Также особую роль играет внутреннее граничное условие. От него зависит то, будет ли магнитное поле превышать уровень равномерного распределения.

Четвертая глава посвящена модели динамо в торе. Отметим, что именно такая форма оказывается намного более подходящей при исследовании магнетизма во внешних кольцах, которыми обладают многие галактики [43]. В таком случае характерные размеры объекта в вертикальном и в горизонтальном направлении оказываются сопоставимы. В такой ситуации стандартные представления планарного приближения оказываются неприменимы.

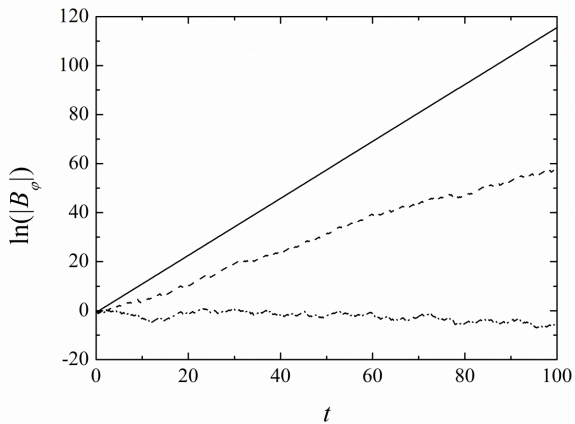


Рис. 9. Эволюция поля в рамках модели со случайными коэффициентами. Случай $p = 0$ показан сплошной линией, $p = 0.12$ — пунктирной, $p = 0.25$ — штрихпунктирной.

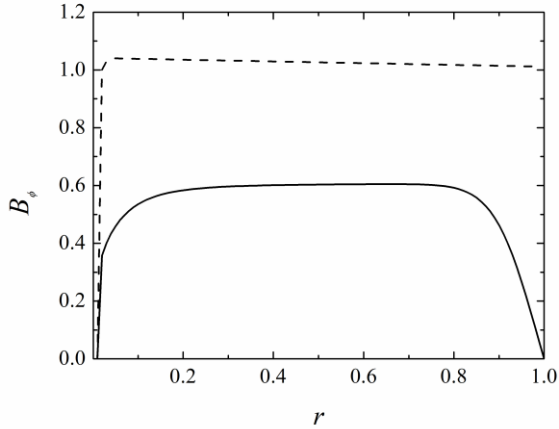


Рис. 10. Магнитное поле в аккреционном диске при $t = 10$.

В §1 приведены основные уравнения [51] [52]. В данном случае необходимо учитывать вертикальное магнитное поле. Поле представляется в виде следующей комбинации [6] [15]

$$\mathbf{B} = B\mathbf{e}_\varphi + \text{rot}(\mathbf{A}\mathbf{e}_\varphi).$$

Будем предполагать, что центр тора соответствует расстоянию R до оси вращения. Для магнитного поля в таком случае можно получить следующие уравнения:

$$\frac{\partial A}{\partial t} = \alpha_0 \frac{z}{h} B \left(1 - \frac{B^2}{B^{*2}} \right) + \eta \Delta A;$$

$$\frac{\partial B}{\partial t} = -r\omega \frac{\partial A}{\partial z} + \eta \Delta B;$$

где

$$\omega = \left. \frac{d\Omega}{dr} \right|_{r=R}.$$

Также можно рассматривать линейную модификацию данных уравнений (когда можно пренебречь квадратом магнитного поля в первом из уравнений).

В §2 обсуждается тор кругового сечения (рис. 11) [51].

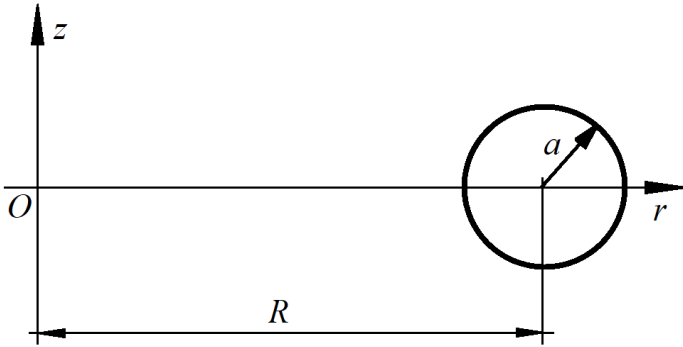


Рис. 11. Тор кругового сечения

В уравнениях используются безразмерные единицы (расстояния измеряются в R , времена – в $\frac{a^2}{\eta}$):

$$\frac{\partial A}{\partial t} = R_1 z B + \lambda^2 \Delta A;$$

$$\frac{\partial B}{\partial t} = R_2 \frac{\partial A}{\partial z} + \lambda^2 \Delta B;$$

где $R_1 = \frac{R a \alpha_0}{\eta}$, $R_2 = -\frac{R^2 a^2 \omega}{\eta}$, $\lambda = \frac{a}{R}$.

Зависимость магнитного поля при различных значениях параметров показана на рис. 12. Интересно, что допустимо как поле квадрупольной симметрии ($B(z)=B(-z)$), так и принципиально невозможное для генерации в планарном приближении дипольное ($B(z)=-B(-z)$).

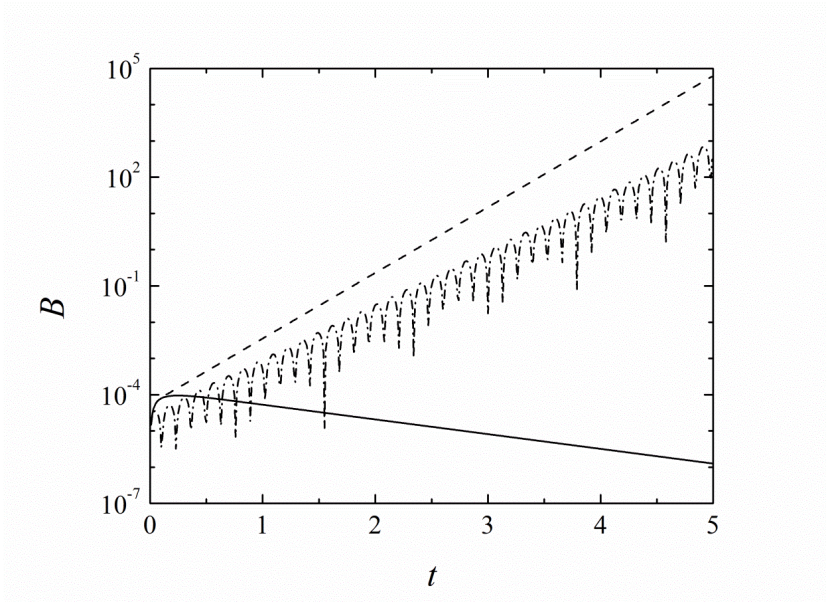


Рис. 12. Вектор-потенциал при $R_1 = 5$ в случае использования линеаризованной модели эволюции. Сплошная линия показывает случай $R_2 = 5$, пунктирная – $R_2 = 40$, штрихпунктирная – $R_2 = 300$.

Рост квадрупольной составляющей возможен при

$$Q_{1+} < Q < Q_{2+}$$

и при

$$Q_{2-} < Q < Q_{1-}.$$

Наконец, рост дипольной составляющей магнитного поля может происходить при условиях:

$$Q > Q_{2+}$$

или

$$Q < Q_{2-}.$$

Результаты для моделирования магнитного поля в квадрупольном и дипольном случае показаны на рис. 13 – 14.

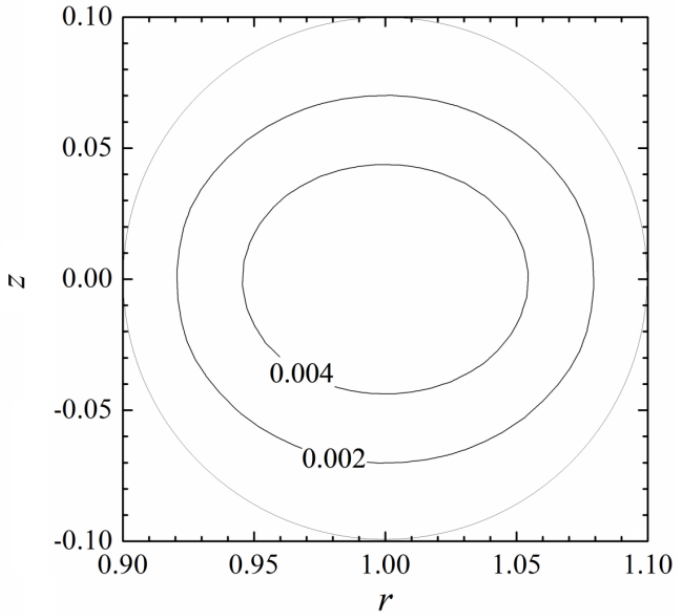


Рис. 13. Пространственная структура тороидального магнитного поля в случае квадрупольной симметрии

В таком случае в безразмерных единицах уравнения для магнитного поля запишутся в форме:

$$\frac{\partial A}{\partial t} = S_{\alpha} z B + \lambda^2 \Delta A;$$

$$\frac{\partial B}{\partial t} = S_{\omega} \frac{\partial A}{\partial z} + \lambda^2 \Delta B;$$

где $S_{\alpha} = \frac{\Omega l^2 a^2}{\eta h^2}$, $S_{\omega} = \frac{\Omega a^2}{\eta}$, $\lambda = \frac{a}{R}$.

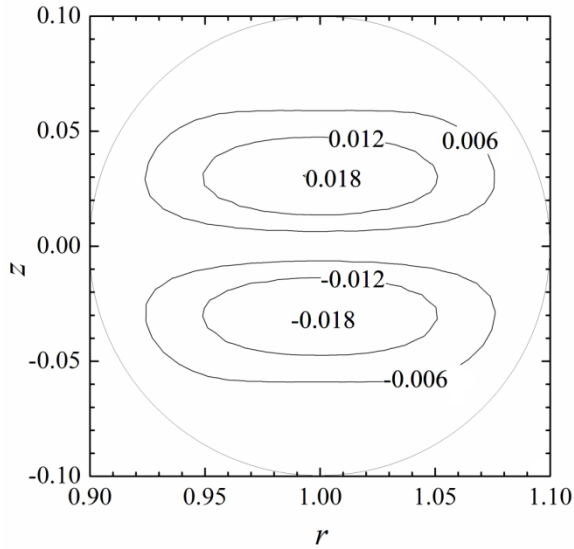


Рис. 14. Тороидальная компонента магнитного поля в случае дипольной симметрии.

В §3 обсуждается генерация магнитного поля в случае тора прямоугольного сечения (рис. 15) [52] [53].

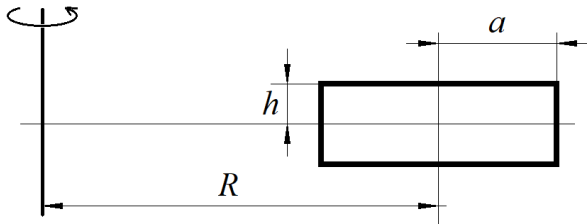


Рис. 15. Основные параметры внешнего кольца.

Эволюция магнитного поля в случае тора квадратного сечения показана на рис. 16.

Магнитное поле в нелинейном случае приближается выражением

$$B = B^* \cos\left(\frac{\pi(r-1)}{2\lambda}\right) \cos\left(\frac{\pi z}{2\lambda}\right).$$

Это может соответствовать следующему силовому полю [54]
[55]

$$\mathbf{f} = \frac{1}{c\rho} [\mathbf{j}, \mathbf{B}] =$$

$$= \frac{B^{*2}}{16\rho r\lambda} \left(\cos^2\left(\frac{\pi kz}{2\lambda}\right) \sin\left(\frac{\pi(r-1)}{\lambda}\right) \mathbf{e}_r + k \cos^2\left(\frac{\pi(r-1)}{2\lambda}\right) \sin\left(\frac{\pi kz}{\lambda}\right) \mathbf{e}_z \right).$$

Было проанализировано влияние данного силового поля на характер турбулентности, показано, что в таком случае заметно меняется ее пространственный спектр и растет кинетическая энергия течений.

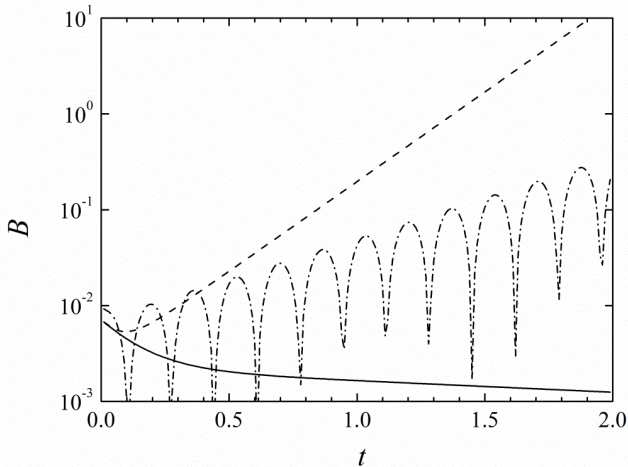


Рис. 16. Изменение со временем поля при $S_\alpha = 5$ и $k = 1$. Сплошная кривая – $S_\omega = 5$, пунктирная – $S_\omega = 40$, штрихпунктирная – $S_\omega = 200$. В первых двух случаях использовано квадрупольное начальное поле, в последнем оно предполагалось дипольным.

В **пятой главе** исследуются модели промежуточного типа для электровихревых течений. Они связаны с прохождением меняющегося тока через среду, обладающую достаточно высокой проводимостью [16] [17] [18]. В таком случае ток начинает взаимодействовать с

порождаемым им магнитным полем. Это вызывает возникновение завихренных течений среды.

В §1 рассказано о том, что в прошлом был накоплен большой опыт исследований электровихревых течений. Так, нельзя не упомянуть работы специалистов Латвийского университета, которые с 1970-х годов изучали их как с экспериментальной, так и с теоретической точки зрения [16]. Огромный вклад в изучение электровихревых течений внесли ученые Института механики сплошных сред (г.Пермь) [56]. Большое количество приложений исследовано в МГТУ им. Носова [19]. Также электровихревые течения активно изучаются в Объединенном институте высоких температур РАН [17]. В странах дальнего зарубежья можно отметить работы, проводившиеся в Великобритании [22] и Австрии [21].

Первые теоретические работы, связанные с изучением электровихревых течений, были выполнены в рамках простых, качественных моделей. С развитием вычислительной техники все большее значение стали приобретать методы прямого численного моделирования. Подобные решения обладают рядом недостатков: часто с их помощью достаточно трудно понять принципиальные закономерности и взаимосвязи. Особенно важны двумерные модели, которые допускают аналитическое решение, а также дают возможность численного решения с намного меньшими затратами.

В настоящей работе исследуются два основных вида электровихревых течений в сосудах различной геометрии. Так, особое значение с точки зрения приложений имеют электровихревые течения в полусфере. Они возникают в большом количестве задач, связанных с электрошлаковым переплавом металлов.

В §2 рассмотрен полусферический сосуд, в центре которого находится малый электрод (рис.17) [57] [58] [59] [60]. Электрический ток силы J растекается по объему сосуда. Уравнение Навье – Стокса для течения записывается следующим образом:

$$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + (\mathbf{v}, \nabla) \mathbf{v} = -\frac{1}{\rho} \nabla p + \mathbf{f} + \eta \Delta \mathbf{v};$$

где ρ – плотность жидкого металла, η – вязкость,

$\mathbf{f} = -\frac{J^2(1 - \cos \theta)}{\pi c^2 r^3 \sin \theta} \mathbf{e}_\theta$ – плотность силы Лоренца. Особый интерес

представляют медленные установившиеся течения. В таком случае

можно использовать стоксово приближение, а задачу решать с помощью переменных «векторный потенциал скорости Ψ – завихренность ω ». Обе векторные функции описываются с помощью азимутальной компоненты (т.е. $\Psi = \psi e_\varphi$, $\omega = \omega e_\varphi$). Тогда уравнения для данных функций запишутся в виде [58]:

$$\frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial \psi}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial \psi}{\partial \theta} \right) - \frac{\psi}{r^2 \sin^2 \theta} = -\omega r^2;$$

$$\frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial \omega}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial \omega}{\partial \theta} \right) - \frac{\omega}{r^2 \sin^2 \theta} = -\frac{A(1 - \cos \theta)}{r^4 \sin \theta}.$$

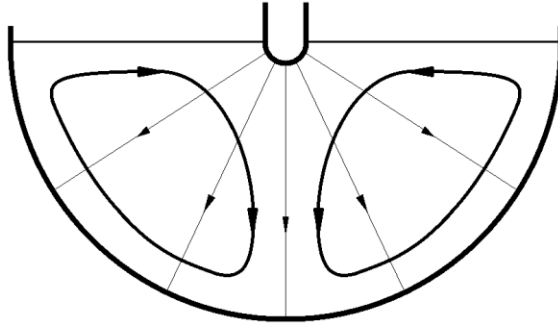


Рис. 17. Схема электровихревого течения в полусферическом сосуде

В данном случае уравнения записаны в безразмерных единицах: расстояния измеряются в радиусах внешнего электрода, а скорости – в единицах $\frac{J}{cR\sqrt{\rho}}$. Также введен безразмерный параметр

$$A = \frac{2J}{\pi\eta\sqrt{\rho}c}.$$

В простейшем случае используются следующие граничные условия:

$$\psi|_{r=1} = \psi|_{r=a} = \psi|_{\theta=\frac{\pi}{2}} = 0;$$

$$\omega|_{r=1} = \omega|_{r=a} = \omega|_{\theta=\frac{\pi}{2}} = 0;$$

где a – радиус внутреннего электрода (измеренный в единицах радиуса внешней полусферы).

В таком случае векторный потенциал описывается с помощью функции:

$$\psi = \sum_{l=1}^{\infty} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\Psi_{lk}}{\sqrt{r}} \left(J_{n+1/2} \left(r\sqrt{\lambda_n^k} \right) + g_n \left(a, \lambda_n^k \right) N_{n+1/2} \left(r\sqrt{\lambda_n^k} \right) \right) P_{2l}^{(1)}(\cos \theta).$$

В данном случае введена функция

$$g_n \left(a, \lambda_n^k \right) = \frac{J_{n+1/2} \left(a\sqrt{\lambda_n^k} \right)}{N_{n+1/2} \left(a\sqrt{\lambda_n^k} \right)}.$$

Коэффициенты разложения описываются следующим образом:

$$\Psi_{lk} = -\frac{AQ_{lk}M_l}{S_{kl} \left(\lambda_{2l}^k \right)^2}.$$

Введены следующие обозначения:

$$\begin{aligned} S_{kl} = & \int_a^1 \left(\frac{1}{\sqrt{r}} \left(J_{n+1/2} \left(r\sqrt{\lambda_n^k} \right) + g_n \left(a, \lambda_n^k \right) N_{n+1/2} \left(r\sqrt{\lambda_n^k} \right) \right) P_{2l}^{(1)}(\cos \theta) \right)^2 r^2 dr \times \\ & \times \int_0^{\pi/2} \left(P_{2l}^{(1)}(\cos \theta) \right)^2 \sin \theta d\theta = \frac{\pi(2l+1)}{(4l+1)\lambda_{2l+1/2}^k} \left(\left(J'_{2l+1/2} \left(\sqrt{\lambda_{2l+1/2}^k} \right) - \right. \right. \\ & \left. \left. - g_{2l} \left(\lambda_{2l+1/2}^k, a \right) N'_{2l+1/2} \left(\sqrt{\lambda_{2l+1/2}^k} \right) \right)^2 - a^2 \left(J'_{2l+1/2} \left(a\sqrt{\lambda_{2l+1/2}^k} \right) - \right. \right. \\ & \left. \left. - g_{2l} \left(\lambda_{2l+1/2}^k, a \right) N'_{2l+1/2} \left(a\sqrt{\lambda_{2l+1/2}^k} \right) \right)^2 \right) \end{aligned}$$

$$M_l = \int_0^{\pi/2} P_{2l}^{(1)}(\cos \theta) (1 - \cos \theta) d\theta = \frac{(-1)^l C_{2l}^l}{2^{2l}},$$

$$Q_{lk} = \int_a^1 \frac{1}{r^{5/2}} \left(J_{n+1/2} \left(r\sqrt{\lambda_n^k} \right) + g_n \left(a, \lambda_n^k \right) N_{n+1/2} \left(r\sqrt{\lambda_n^k} \right) \right) dr =$$

$$\begin{aligned}
 & {}_2F_1\left(\frac{2l-1}{2}, \frac{2l+1}{2}, \frac{4l+3}{2}, -\frac{1}{4}\lambda_{2l}^k\right) \cdot \left(\sqrt{\lambda_{2l}^k}\right)^{2l+\frac{1}{2}} \\
 &= \frac{\quad}{2^{2l+\frac{1}{2}}(2l-1)\Gamma\left(2l+\frac{3}{2}\right)} - \\
 & {}_2F_1\left(\frac{2l-1}{2}, \frac{2l+1}{2}, \frac{4l+3}{2}, -\frac{1}{4}a^2\lambda_{2l}^k\right) \cdot \left(a\sqrt{\lambda_{2l}^k}\right)^{2l+\frac{1}{2}} \\
 &= \frac{\quad}{2^{2l+\frac{1}{2}}(2l-1)a^{\frac{3}{2}}\Gamma\left(2l+\frac{3}{2}\right)} - \\
 & - 2^{2l-\frac{1}{2}}g_{2l}\left(\lambda_{2l}^k, a\right) \frac{{}_2F_1\left(-l+1, -\frac{4l-1}{2}, -l, -\frac{1}{4}\lambda_{2l}^k\right)}{\left(\sqrt{\lambda_{2l}^k}\right)^{2l+\frac{1}{2}}(l+1)\Gamma\left(\frac{1}{2}-2l\right)} + \\
 & + 2^{2l-\frac{1}{2}}g_{2l}\left(\lambda_{2l}^k, a\right) \frac{{}_2F_1\left(-l+1, -\frac{4l-1}{2}, -l, -\frac{1}{4}a^2\lambda_{2l}^k\right)}{\left(a\sqrt{\lambda_{2l}^k}\right)^{2l+\frac{1}{2}}(l+1)a^{\frac{3}{2}}\Gamma\left(\frac{1}{2}-2l\right)}.
 \end{aligned}$$

Величины λ_{2l}^k связаны с нулями следующей функции:

$$J_{2l+1/2}\left(\sqrt{\lambda_{2l}^k}\right) + g_n\left(a, \lambda_{2l}^k\right)N_{2l+1/2}\left(\sqrt{\lambda_{2l}^k}\right) = 0.$$

Старший из членов разложения, которые описывает основные черты решения, выглядит следующим образом [57]:

$$\begin{aligned}
 \psi &\cong \frac{\Psi_{11}}{\sqrt{r}}\left(J_{5/2}\left(r\sqrt{\lambda_2^1}\right) + g_2\left(a, \lambda_2^1\right)N_{5/2}\left(r\sqrt{\lambda_2^1}\right)\right)P_2^{(1)}(\cos\theta) \cong \\
 &\cong -\frac{A}{\sqrt{r}}\left(1.547 \cdot 10^{-2} - 3.0423 \cdot 10^{-2}a\right)J_{5/2}(5.763r) - 1271.4a^5N_{5/2}(5.763r)\sin\theta\cos\theta.
 \end{aligned}$$

Более тонкие эффекты могут быть учтены с помощью численного решения. В таком случае для граничных условий можно использовать приближенные условия Тома [61]:

$$\psi|_{r=a} = \psi|_{r=1} = \psi|_{\theta=\frac{\pi}{2}} = \psi|_{\theta=0} = 0;$$

$$\omega|_{\theta=0} = 0; \quad \omega|_{r=a+h} = -\frac{2}{h^2}\psi|_{r=a};$$

$$\omega|_{r=1-h} = -\frac{2}{h^2}\psi|_{r=1}; \quad \omega|_{\theta=\frac{\pi}{2}-g} = -\frac{2}{h^2}\psi|_{\theta=\frac{\pi}{2}}.$$

Задача решалась с помощью счета на установление [62], а результат показан на рис.19. Отметим, что линии уровня являются линиями тока жидкости.

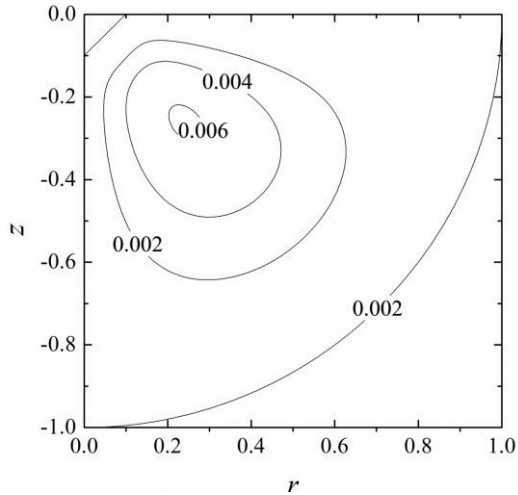


Рис. 19. Завихренность векторного потенциала скорости, полученная с помощью численного моделирования

В §3 описано электровихревое течение между двумя плоскостями [63]. Каждая из плоскостей является электродами одноименной полярности. Второй электрод располагается на достаточно большом расстоянии. Распространение тока схематически показано на рис. 20.

Скорость электровихревого течения также можно искать с использованием векторного потенциала. В данном случае тоже

существенна только его азимутальная компонента. Тогда уравнение для него выглядит так:

$$-\frac{\partial^3 \psi}{\partial z^2 \partial t} - \frac{\psi}{r} \frac{\partial^3 \psi}{\partial z^3} = -\frac{8\pi}{c^2 \rho} \frac{I^2 r}{L^2} \left(z - \frac{L}{2} \right) - \eta \frac{\partial^4 \psi}{\partial z^4}.$$

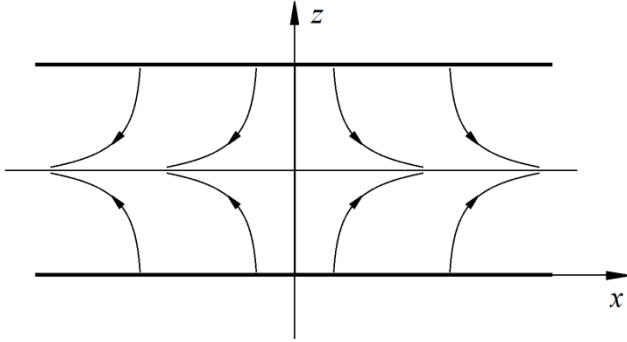


Рис. 20. Примерная структура течения

Также можно использовать безразмерные единицы. В качестве единиц измерения для расстояний можно выбрать L , в качестве

единиц для времени $\frac{L^2}{\eta}$. Если сделать замену $\psi = rF(z, t)$, то

уравнение в стационарном случае запишется так (здесь введен безразмерный параметр $S = \frac{8\pi I^2 L^4}{\eta c^2 \rho}$):

$$F \frac{d^3 F}{dz^3} + S \left(z - \frac{1}{2} \right) + \frac{d^4 F}{dz^4} = 0.$$

Граничные условия выглядят так:

$$F|_{z=0} = F|_{z=1} = \frac{dF}{dz} \Big|_{z=0} = \frac{dF}{dz} \Big|_{z=1} = 0.$$

Решение удобно искать в виде следующего ряда [64]:

$$F(z) = S^1 F_1(z) + S^2 F_2(z) + \dots + S^n F_n(z)$$

С помощью методов теории возмущений в работе построены первые два слагаемых:

$$F_1(z) = -\frac{1}{120} \left(z^5 - \frac{5}{2} z^4 + 2z^3 - \frac{1}{2} z^2 \right).$$

$$F_2(z) = \frac{z^2(z-1)^2 \left(z - \frac{1}{2} \right)}{199584000} \left(105z^6 - 315z^5 + 295z^4 - 65z^3 - 19z^2 - z + 3 \right).$$

Характерное решение показано на рис. 21.

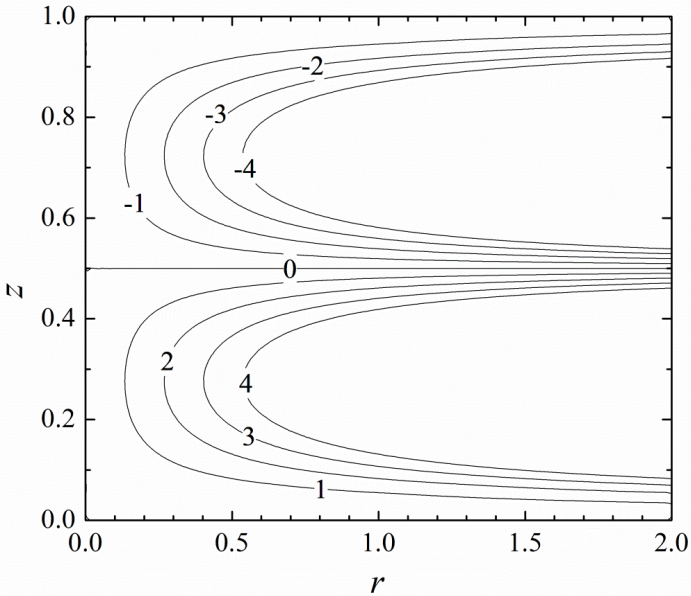


Рис. 21. Азимутальная компонента векторного потенциала скорости при $S = 10^5$.

В **шестой главе** описана генерация магнитных полей с помощью движений специальной структуры. В §1 обсуждаются общие вопросы. Так, генерация магнитных полей с помощью механизма динамо требует начальных условий, которые должны быть связаны с некоторыми другими механизмами [4]. Также обсуждается вопрос о том, что магнитные поля в ряде астрофизических объектов могут заметно усиливаться при помощи конвективных механизмов [65] [66] [67]

В §2 обсуждается механизм Бирмана [68], который возникает в том случае, когда поток частиц распространяется от центрального объекта. За счет того, что протоны и электроны имеют разную массу, они по-разному взаимодействуют с вращающейся средой и создают различные круговые токи. Это приводит к возникновению круговых токов, порождающих магнитные поля. В безразмерных переменных (магнитные поля в $\frac{eNh\Omega V\tau_p}{c}$, расстояния – в радиусах диска) они

описываются при помощи уравнения [69]:

$$B(r') = -2 \int_a^1 J\left(\frac{r'}{r}\right) \frac{dr}{r} - \lambda \int_a^1 J\left(\frac{r'}{r}\right) B(r) dr,$$

где введена вспомогательная функция

$$J(x) = \int_0^\pi \frac{(1 - x \sin \theta) d\theta}{(1 + x^2 - 2x \sin \theta)^{3/2}}.$$

Также введен параметр $\lambda = \frac{e^2 NR}{mc^2}$. В большинстве реальных задач он достаточно велик, поэтому в безразмерных единицах магнитное поле может быть описано с помощью функции:

$$B(r) = -\frac{2}{\lambda r}.$$

Она характеризует начальное магнитное поле, которое может быть вполне достаточным в качестве начальных условий.

В §3 описывается генерация магнитных полей с помощью конвективных течений. Рассмотрена двумерная турбулентность, которая описывается с помощью следующих величин [70]:

$$v_x = -\sin x \cos y;$$

$$v_y = \cos x \sin y.$$

Для z-компоненты векторного потенциала можно записать следующее уравнение:

$$\frac{\partial a}{\partial t} + v_x \frac{\partial a}{\partial x} + v_y \frac{\partial a}{\partial y} = \eta_m \Delta a + v_x H_0.$$

В данном случае H_0 – начальное магнитное поле, а векторный потенциал представляется в виде:

$$A = -H_0x + a.$$

Если в начальный момент векторный потенциал a является нулевым, то решение для векторного потенциала показано на рис. 22.

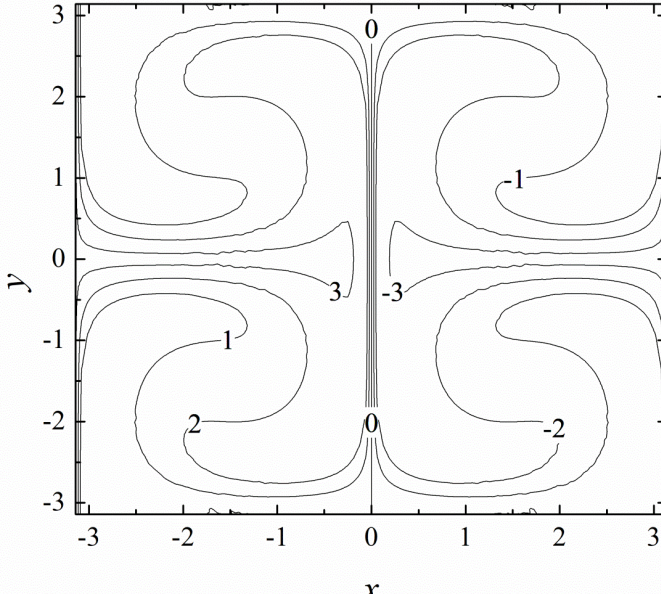


Рис. 22. Векторный потенциал магнитного поля при $\eta_m = 0$, $t = 5$.

Заключение

В настоящей работе была рассмотрена эволюция магнитного поля в проводящей среде как в астрофизике, так и прикладных задачах. Продемонстрировано, что в весьма значительной части они могут быть описаны при помощи моделей промежуточного типа, позволяющих значительно экономить вычислительные ресурсы и делать определенные качественные оценки поведения магнитных полей и формирования течений. Вместе с тем, они дают результаты, которые являются физически обоснованными и соответствуют данным наблюдений и экспериментов. Как мы показали в настоящей работе, применение моделей промежуточного типа для исследования

эволюции магнитных полей в проводящей среде является оправданным и имеет значительные перспективы в будущем.

Хотелось бы отметить следующие предметные результаты, которые представлены в рамках данной диссертационной работы.

1. Детально исследованы решения уравнений планарного приближения, описывающего эволюцию магнитных полей в тонких дисках, связанную с P -неинвариантностью альфа-эффекта. Продемонстрировано, что в большинстве реально встречающихся задач можно ожидать генерации магнитных полей, обладающих осевой симметрией, в то время как рост неосесимметричных полей, рассматривавшихся ранее, оказывается существенно подавленным. Для данных моделей были разработаны математические методы, связанные со спектральным анализом встречающихся в задаче дифференциальных операторов. Также проведен подробный анализ того, что происходит в случае включения в уравнения нелинейных слагаемых, которые описывают влияние магнитного поля на неравновесные процессы в межзвездной среде и турбулентность.

2. Исследован вклад потоков спиральности в эволюцию магнитных полей. Построена система уравнений, которая в рамках планарного приближения учитывает влияние потоков спиральности на космическую турбулентность, а также дает возможность учесть такие процессы как, например звездообразование в галактиках. Также они могут быть полезны при исследовании конвекции.

3. Изучены различные приложения планарного приближения. Оно было применено для моделирования магнитных полей в дисковых галактиках, их внешних кольцах и аккреционных дисках. Показана ключевая роль влияния внутреннего граничного условия на магнитное поле в аккреционном диске. Немаловажно отметить, что особую роль могут играть нелинейные волны, описывающие распространение структур магнитного поля. Исследовано влияние звездообразования, с целью чего в уравнения вносились поправки, связанные с флуктуациями управляющих параметров динамо. Было показано, что планарное приближение оказывается достаточно эффективным при изучении магнитных полей в дисковых структурах, однако для внешних колец галактик его применимость оказывается под вопросом и требует использования более аккуратных моделей.

4. Построена модель динамо в торе, которая учитывает вертикальную структуру магнитного поля. Она исходит из несколько

других предпосылок, нежели планарное приближение, и дает возможность получать решения как дипольной, так и квадрупольной симметрии. Тем не менее, нужно отметить, что рост дипольного магнитного поля оказывается подавленным, и ожидать его роста достаточно сложно. Также важно сказать, что результаты, даваемые моделью динамо в торе, позволяют более точно описывать магнитные поля во внешних галактических кольцах.

5. Построены модели для электровихревых течений жидких металлов. Рассмотрена модель электровихревого течения в полусфере и течения между двух плоскостей. Отметим, что ранее для этих течений были получены только численные результаты, а в данной работе были построены математические методы, связанные с получением решений в виде рядов. В одном случае речь идет о разложении решения по собственным функциям, в другом – о разложении нелинейного слагаемого в уравнении Навье – Стокса.

6. Исследовано влияние на магнитное поле течений специфической структуры. Построена картина магнитного поля на больших красных смещениях, индуцированного батарейными механизмами. Также изучено влияние на магнитное поле конвекции. Имеющиеся результаты могут быть с успехом применены также при изучении магнитных полей при наличии различных турбулентных течений, что представляет не меньший интерес с точки зрения различных приложений.

Результаты представленных исследований позволят в дальнейшем проводить исследования магнитных полей в различных объектах, имеющих дисковую структуру. Так, особенно перспективным выглядит изучение аккреционных дисков в двойных системах, для которых можно было бы исследовать возможность возникновения инверсий, влияние стохастических эффектов на процесс генерации.

Модель динамо в торе может быть использована не только для внешних колец галактик. Она также допускает обобщение на диск в целом, что позволяет изучить генерацию поля в «толстых» дисках. С одной стороны, это позволяет расширить класс объектов, для которых можно построить модели магнитных полей, с другой – ставит новые задачи об исследовании спектров и численном решении возникающих уравнений.

Автомодельные постановки в задачах об электровихревых течениях могут быть интересны и для другой геометрии. Так, представляет интерес исследование поведения проводящей среды под действием магнитного поля в цилиндрическом сосуде, что может иметь широкие технические приложения.

Генерация магнитного поля за счет потоков плазмы может быть интересна не только для дисковых галактик, но и для других объектов, например при изучении вопроса о возникновении начальных магнитных полей в аккреционных дисках. Результаты, полученные для коллапса в магнитной гидродинамике, представляют интерес и для других классических полей, замороженных в среду.

Список литературы

- [1] Моффат Г. Возбуждение магнитного поля в проводящей среде. М.: Мир, 1980. 342 с..
- [2] Молчанов С.А., Рузмайкин А.А., Соколов Д.Д. Кинематическое динамо в случайном потоке. // С.А.Молчанов, А.А.Рузмайкин, Д.Д.Соколов / Успехи физических наук. – 1985. – Т. 145 – С.593.
- [3] Beck R., Brandenburg A., Moss, D., Shukurov, A., Sokoloff, D. Galactic Magnetism: Recent Developments and Perspectives // R.Beck, A.Brandenburg, D.Moss, A.Shukurov, D.Sokoloff / Annual Review of Astronomy and Astrophysics. – 1996. – 34. – P. 155.
- [4] Arshakian, T. G., Beck, R., Krause, M., Sokoloff, D. Evolution of magnetic fields in galaxies and future observational tests with the Square Kilometre Array // T.G.Arshakian, R.Beck, M.Krause, D.Sokoloff. Astronomy and Astrophysics. – 2009. – 494. – P.21.
- [5] Moss, D., Sokoloff, D., Suleimanov, V. Dynamo generated magnetic configurations in accretion discs and the nature of quasi-periodic oscillations in accreting binary systems // D.Moss, D.Sokoloff, V.Suleimanov. Astronomy&Astrophysics. – 2016. – 588. – A18.
- [6] Parker E.N. Hydromagnetic Dynamo Models // E.N.Parker. Astrophysical Journal. – 1955. – 122. – 293.
- [7] Obridko, V.N., Livshits, I.M., Sokoloff, D.D. Two populations of the solar magnetic field // V.N.Obridko, I.M.Livshits, D.D.Sokoloff / MNRAS. – 2017. – 417. – P.2575.
- [8] Kitchatinov, L. L., Olemskoy, S. V. Differential rotation of main-sequence dwarfs and its dynamo efficiency // L.L.Kitchatinov, S.V.Olemskoy. MNRAS. – 2011. – 411. – P.1059.
- [9] Chris A.J. Planetary Magnetic Fields and Fluid Dynamos // A.J.Chris / Annual Review of Fluid Mechanics. – 2011. — 43. — P. 583.
- [10] Краузе Ф., Рэдлер К.-Х. Магнитная гидродинамика средних полей и теория динамо // Ф.Краузе, К.-Х.Рэдлер / М.: Мир, 1984. – 320 с..
- [11] Соколов Д.Д., Степанов Р.А., Фрик П.Г. Динамо: на пути от

- астрофизических моделей к лабораторному эксперименту // Д.Д.Соколов, Р.А.Степанов, П.Г.Фрик / Успехи физических наук. – 2014. – 184. – С. 313.
- [12] Соколов Д.Д. Проблемы магнитного динамо // Д.Д.Соколов / Успехи физических наук. – 2015. – 185. – С.643.
- [13] Khoperskov, S.A., Khrapov, S.S. Global enhancement and structure formation of the magnetic field in spiral galaxies // S.A.Khoperskov, S.S.Khrapov / Astronomy&Astrophysics. – 2018. – 609. – A104.
- [14] Moss, D. On the generation of bisymmetric magnetic field structures in spiral galaxies by tidal interactions / D.Moss. – Monthly Notices of Royal Astronomical Society. – 1995. – 275. – P.191..
- [15] Deinzer, W., Grosser, H., Schmitt, D. Torus dynamos for galaxies and accretion disks. I. The axisymmetric alpha omega-dynamo embedded into vacuum // W.Deinzer, H.Grosser, D.Schmitt / Astronomy&Astrophysics. – 1993. – 273. – P.405.
- [16] Bojarevich V., Frejbergs Ja., Shilova E.I., Shcherbinin E.V. Electrically induced vortical flows // V.Bojarevich, Ja.Frejbergs, E.I.Shilova, E.V.Shcherbinin / Dordrecht: Kluwer Acad. Publ., 1989.
- [17] Жилин В.Г., Ивочкин Ю.П., Тепляков И.О. К вопросу о закрутке осесимметричных электровихревых течений // В.Г.Жилин, Ю.П.Ивочкин, И.О.Тепляков / Теплофизика высоких температур. – 2011. – 47. – №6. – С.957.
- [18] Хрипченко С.Ю. Электровихревые течения в каналах МГД-устройств // С.Ю.Хрипченко / Екатеринбург: УрО РАН, 2009.
- [19] Ячиков И.М., Портнова И.В., Ларина Т.П. Исследование на физической модели поведения токнесущей жидкости в ванне ДППТ под действием внешнего вертикального магнитного поля//И.М.Ячиков, И.В.Портнова, Т.Ларина/Известия ВУЗов.Черная металлургия.-2018- 1.-С.28.
- [20] Shatrov V., Gerbeth G. Stability of the electrically induced flow between two hemispherical electrodes // G.Gerbeth, V.Shatrov / Magnetohydrodynamics. – 2012. – 48. – P.469.
- [21] Kharicha A., Karimi-Sibaki E., Wu M., Ludwig A. Bohacek Review on Modeling and Simulation of Electroslag Remelting // A.Kharicha, E.Karimi-Sibaki, M.Wu, A.Ludwig / J.: Steel Res. Int. – 2018. – 89. –

1700100..

- [22] Sozou C., Pickering W.M. Magnetohydrodynamic flow due to the discharge of an electric current in a hemispherical container //C.Sozou, W.M.Pickering / J. Fluid. Mech. – 1976. – 73. – P. 641.
- [23] Sozou C., Pickering W.M. Magnetohydrodynamic flow in a container due to the discharge of an electric current from a finite size electrode // C.Sozou, W.M.Pickering / Proc. R. Soc. Lond. A – 1978. – 362. – P.509.
- [24] Казанцев А.П. Об усилении магнитного поля проводящей жидкостью//А.П.Казанцев /Журнал экспериментальной и теоретической физики. – 1967. – 53. – №5. – С.1806..
- [25] Ахметьев П.М., Кунаковская О.В., Кутвицкий В.А. Замечание о диссипации интеграла магнитной спиральности // П.М.Ахметьев, О.В.Кунаковская, В.А.Кутвицкий / ТМФ. – 2009. – 158. – С.150..
- [26] Михайлов, Е.А. Магнитная гидродинамика и теория динамо / Е.А.Михайлов. – М., Физический факультет МГУ, 2018. – 122 с..
- [27] Sur, S., Shukurov, A., Subramanian, K. Galactic dynamos supported by magnetic helicity fluxes // S.Sur, A.Shukurov, K.Subramanian / MNRAS. – 2007. – 377. – P.874..
- [28] Михайлов Е. А. Галактическое динамо с учетом потоков спиральности /Е.А.Михайлов // Письма в Астрономический журнал: Астрономия и космическая астрофизика. — 2013. — Т. 39, № 7. — С. 474–480..
- [29] Михайлов Е. А. Звездообразование и модель галактического динамо с потоками спиральности / Е.А.Михайлов // Письма в Астрономический журнал: Астрономия и космическая астрофизика. — 2014. — Т. 40, № 7. — С. 445–453..
- [30] Subramanian K., Mestel L. Galactic dynamos and density wave theory – II. an alternative treatment for strong non-axisymmetry // K.Subramanian, L.Mestel / MNRAS. – 1993. – 265. – P.649.
- [31] Михайлов, Е.А. Спектральное разложение решения задачи о генерации магнитных полей галактик в планарном приближении / Е.А.Михайлов // Вестник Московского университета. Серия 3: Физика, астрономия. — 2020. — № 5. — С. 40–45..
- [32] Михайлов, Е.А. Задачи с малым параметром и распространение

- фронтов теории галактического динамо / Е.А.Михайлов // Вестник Моск.ун-та. Сер.3. Физ.Астрон. – 2015. – №2. – С.27 – 31..
- [33] Mikhailov E., Boneva D., Pashentseva M. No-z model for magnetic fields of different astrophysical objects and stability of the solutions / E.Mikhailov, D.Boneva, M.Pashentseva // Data. — 2021. — Vol. 6, no. 1. — P. 4.
- [34] Mikhailov E. A. Symmetry of the magnetic fields in galactic dynamo and the material arms / Е.А.Михайлов // Magnetohydrodynamics. — 2020. — Vol. 56, no. 4. — P. 303–315.
- [35] Mikhailov E., Khasaeva T. Evolution of the magnetic field reversals in galaxies / E.Mikhailov, T.Khasaeva // Bulgarian Astronomical Journal. — 2019. — Vol. 31. — P. 39–50.
- [36] Андреасян Р. Р., Михайлов Е. А., Андреасян А. Р. Структура и особенности формирования инверсий галактического магнитного поля / Р.Р.Андреасян, Е.А.Михайлов, А.Р.Андреасян // Астрономический журнал. — 2020. — Т. 97, № 3. — С. 179–189..
- [37] Van Eck C. L., Brown J. C., Stil J. M., Rae K. et al. Modeling the Magnetic Field in the Galactic Disk Using New Rotation Measure Observations from the Very Large Array // C.L.Van Eck, J.C.Brown, J.M.Stil, K.Rae et al. / Astrophysical Journal-2011.-728-97.
- [38] Божевольнов Ю. В., Нефедов Н. Н. Движение фронта в параболической задаче реакция — диффузия / Ю.В.Божевольнов, Н.Н.Нефедов // Журнал вычислительной математики и математической физики. — 2010. — Т. 50, № 2. — С. 276–285.
- [39] Mikhailov E.A. Wavefronts of the magnetic field in galaxies: asymptotic and numerical approaches // Magnetohydrodynamics. — 2016. — V.52, No.1. — P. 117 – 124.
- [40] Mikhailov E.A. Galactic magnetic field reversals and vorticity of transition layers // Magnetohydrodynamics. — 2017. — V. 53, No.2. — P. 357-363.
- [41] Mikhailov, E., Kasparova, A., Moss, D. et al. Magnetic fields near the peripheries of galactic discs / E.Mikhailov et al.// Astronomy & Astrophysics. — 2014. — V.568. — A66..
- [42] Колмогоров А. Н., Петровский И. Г., Пискунов Н. С.

- Исследование уравнения диффузии, соединенной с возрастанием вещества, и его применение к одной биологической проблеме /А.Н.Колмогоров и др. // Бюллетень МГУ. Сер. А. Математика и Механика.- 1937.-Т.1.-С.6.
- [43] Moss, D., Mikhailov, E., Silchenko, O. et al. Magnetic fields in ring galaxies / D. Moss, E. Mikhailov, O. Silchenko et al. // *Astronomy and Astrophysics*. — 2016. — Vol. 592. — A44..
- [44] Mikhailov E.A., Pushkarev V.V. Fluctuating governing parameters in galaxy dynamo // *Astronomical and Astrophysical Transactions*. — 2018. — V.30, No.3. — P.343 – 350.
- [45] Михайлов Е.А., Пушкарев В.В. Влияние звездообразования на крупномасштабные структуры галактического магнитного поля // *Астрофизический бюллетень*. — 2018. — Т.73, №4. — С. 451 – 456.
- [46] Грачев Д.А., Елистратов С.А., Михайлов Е.А. Статистические моменты и многоточечные корреляторы магнитного поля в модели галактического динамо со случайной турбулентной диффузией // *Вычислительные методы и программирование*.— 2019. Т.20, №2. — С. 88..
- [47] Mikhailov E., Pushkarev V. Influence of star formation on galactic magnetic fields in a model with vertical structure // *Magnetohydrodynamics*. — 2020. — V.56, No.2-3. — P.81 – 87.
- [48] Mikhailov E. A., Elistratov S. A., Grachev D. A. The magnetic correlation tensor in the dynamo theory // *Computational Mathematics and Modeling*. — 2021. — Vol. 32, no. 1. — P. 45–51..
- [49] D.V.Boneva, E.A.Mikhailov, M.V.Pashentseva, D.D.Sokoloff. Magnetic fields in the accretion discs for various inner boundary conditions. *Astronomy and Astrophysics*. (2021).
- [50] Shakura N.I., Sunyaev R.A. Black holes in binary systems. Observational appearance // N.I.Shakura, R.A.Sunyaev / *Astronomy&Astrophysics*. — 1973. — 24. — P.337.
- [51] Михайлов Е.А. Динамо в торе для описания магнитных полей во внешних кольцах галактик // *Астрономический журнал*. — 2017. — Т.94, №9. — С.741 – 748..
- [52] Mikhailov E.A. Torus dynamo model for study of magnetic fields in the outer rings of galaxies // *Astrophysics*. — 2018. — V. 61, No. 2. — P.

147 – 159..

- [53] Mikhailov E.A., Khokhryakova A.D. Torus dynamo in the outer rings of galaxies // Geophysical and Astrophysical Fluid Dynamics. – 2019. – V.113, No.1-2. – P. 199 – 207..
- [54] Михайлов Е.А., Сибгатуллин И.Н. Исследование влияния регулярных магнитных полей на течения во внешних кольцах галактик // Труды Института системного программирования РАН. – 2019. – Т.31, №6. – С. 215 – 224..
- [55] Mikhailov E.A., Sibgatullin I.N. Magnetic fields in the outer rings of galaxies and turbulent motions // Magnetohydrodynamics. – 2019. – V.55, No.1-2. – P. 133 – 140.
- [56] Мандрыкин, С.Д., Колесниченко, И.В., Лосев, Г.Л., Фрик, П.Г. Электровихревое течение жидкого металла в цилиндрическом канале / С.Д.Мандрыкин, И.В.Колесниченко, Г.Л.Лосев, П.Г.Фрик // Вестник Пермского университета. Физика. – 2018. – №2. – С.20 – 27..
- [57] Mikhailov E.A., Teplyakov I.O. Construction asymptotic solution while studying electrovortex flow in hemispherical container using Stokes approximation // Journal of Physics: Conference Series. – 2017. – V.891. – 012060.
- [58] Михайлов Е.А., Тепляков И.О. Аналитическое решение задачи об электровихревом течении в полусфере с электродами конечного размера в стоковом приближении // Вестник Московского университета. Серия 3: Физика. Астрономия. – 2018. – №2. – С.39 – 44..
- [59] Mikhailov E. A., Teplyakov I. O., Fedotov I. A. Research of the electro-vortex flows in the liquid metals at different currents // Journal of Physics: Conference Series. — 2020. — Vol. 1565. — 012076.
- [60] Georgievskaya E.P., Mikhailov E.A., Teplyakov I.O. Simulation of the electrovortex flow in a linear approximation under the action of the external magnetic field // Journal of Physics: Conference Series. – 2020. – V.1683. – 022039.
- [61] Weinan E., Liu J.G. Vorticity boundary condition and related issues for finite difference schemes // E.Weinan, J.G.Liu / Journal of Computational Physics. – 1996. – 124. – P.368.

- [62] Калиткин Н.Н. Численные методы // Н.Н.Калиткин / М.: Наука, 1978. – 512 с.
- [63] Kaudze, M., Chudnovsky, A. Axisymmetric electrovortex flow between two planes induced by AC / M.Kaudze, A.Chudnovsky // Magnetohydrodynamics. – 1989. – V.25. – P.187 – 194.
- [64] Михайлов Е. А., Чудновский А. Ю. Асимптотическое разложение решения уравнения для медленного осесимметричного электровихревого течения между двумя плоскостями /Е.А.Михайлов,А.Ю.Чудновский// Сиб. ж. инд. математики. — 2020. — Т. 23, № 4. — С. 88–100.
- [65] Parker, E.N. Kinematical Hydromagnetic Theory and its Application to the Low Solar Photosphere / E.N.Parker // Astrophysical Journal. – 1963. – V.138. – P.552.
- [66] Galloway, D.J., Weiss, N.O. Convection and magnetic fields in stars / D.J.Galloway, N.O.Weiss // Astrophysical Journal. – 1981. – V.243. – P. 945 – 953..
- [67] Stix, M. The Sun: an Introduction / M.Stix // Berlin, Springer, 2002.
- [68] Biermann, L. Über den Ursprung der Magnetfelder auf Sternen und im interstellaren Raum (miteinem Anhang von A. Schlüter) / L.Biermann // Zeitschrift Naturforschung Teil A. – 1950. – V.5. – P. 65.
- [69] Михайлов, Е.А., Андреасян, Р.Р. Батарейный механизм Бирмана и структура начального магнитного поля в галактиках /Е.А.Михайлов, Р.Р.Андреасян // Астрономический журнал. – 2021. – Т.98. – №10. – С.795-803..
- [70] Кузнецов, Е.А., Михайлов, Е.А. Заметки о коллапсе в магнитной гидродинамике / Е.А.Михайлов, Е.А.Кузнецов // Журнал теоретической и экспериментальной физики. – 2020. – Т.158. – С.561 – 572.