О Т З Ы В

официального оппонента на диссертацию Грозновой Анастасии Юрьевны на тему «Свойства типа несвязности и однородность топологических пространств», представленной на соискание ученой степени кандидата физико-математических наук по специальности 1.1.3 (01.01.04) – геометрия и топология.

В общей топологии важную роль играют экстремально несвязные пространства. Это те пространства, в которых замыкание любого открытого множества является открытым множеством. На первый взгляд эти пространства не очень интересны и их не так много. Например, если метрическое пространство экстремально несвязно, то оно дискретно. Все регулярные экстремально несвязные пространства нульмерны. Экстремально несвязный однородный компакт конечен.

Следует заметить, что задача существования однородных недискретных экстремально несвязных пространств не простая. Существование таких пространств было доказано Б.А. Ефимовым в 1968г., а С. Сирота построил пример недискретной экстремально несвязной топологической группы (при континуум-гипотезе), тем самым решив проблему А.В. Архангельского с дополнительным предположением. Задача существования недискретной экстремально несвязной топологической группы без дополнительных теоретико-множественных предположений до сих пор не решена.

Несмотря на все это, экстремально несвязные пространства играют важную роль и достаточно широко применяются в общей топологии. Так, абсолют любого компакта экстремально несвязен и каждый экстремально несвязный компакт является своим собственным абсолютом. Иначе говоря, абсолюты компактов — это в точности экстремально несвязные компакты. То же самое верно для тихоновских пространств, так как произвольное тихоновское пространство можно представить как образ при совершенном неприводимом отображении некоторого экстремально несвязного тихоновского пространства.

Так как класс экстремально несвязных пространств довольно узок, то естественно возникает важная задача нахождения более широких классов, сохраняющих некоторые основные свойства экстремально несвязных пространств, а также обладающих новыми интересными свойствами.

Диссертационная работа А.Ю. Грозновой посвящена этой важной задаче. Диссертация состоит из введения, четырех глав и заключения.

Во введении приводится краткая история вопроса, формулируются основные задачи и результаты диссертации.

В первой главе рассматриваются специальные ультрафильтры на множестве неотрицательных целых чисел ω. Ультрафильтры имеют широкое применение в математике. В общей топологии понятие ультрафильтра появилось для обобщения понятия сходимости на пространства с несчётной базой. Для решения поставленных перед собой задач автор проделала большую работу по изучению сходимости последовательностей по ультрафильтрам в исследуемых пространствах с применением различных порядков на ультрафильтрах. Следуя Баумгартнеру, автор вводит понятие X-дискретного ультрафильтра на ω, где X — топологическое пространство, и изучает связь этих ультрафильтров с другими типами ультрафильтров. В частности, доказано, что любой дискретный ультрафильтр является X-дискретным для любого тихоновского пространства X. Исследование первой главы, помимо его важности для дальнейшего изложения диссертации, представляет также самостоятельный интерес.

Глава 2 посвящена естественным обобщениям класса экстремально несвязных пространств. Как известно, экстремальная несвязность не наследуется произвольными подпространствами. Однако, любое счетное подпространство экстремально несвязного пространства является экстремально несвязным. Принимая за основу это свойство автор определила понятие $\mathscr{R}_1$-пространства, которое оказалось весьма интересным и плодотворным. Доказывается, что F-пространства, т.е. пространства, в которых любые непересекающиеся функционально открытые подмножества функционально отделимы, являются $\mathscr{R}_1$-пространствами. Рассматривая различные счетные отделенные подмножества пространства X, автор вводит также классы $\mathscr{R}_2$- и $\mathscr{R}_3$-пространств. В отличие от классов экстремально несвязных пространств и F-пространств, классы $\mathscr{R}_i$-пространств, $i = 1, 2, 3$, обладают свойством наследственности. Эти классы не сохраняются стоун-чеховскими компактификациями.

Доказано, что классы $\mathscr{R}_i$-пространств, $i = 1, 2, 3$, находятся строго между классом F-пространств и введенным ван Дауэном классом $\beta\omega$-пространств. Построены примеры, которые показывают, что, в действительности, справедливы строгие включения: класс F-пространств $\subset$ класс $\mathscr{R}_1$-пространств $\subset$ класс $\mathscr{R}_2$-пространств $\subset$ класс $\mathscr{R}_3$-пространств $\subset$ класс $\beta\omega$-пространств. Однако, в случае компактных пространств классы $\mathscr{R}_3$- и $\beta\omega$-пространств совпадают.

В последнем параграфе главы 2 определения $\mathscr{R}_i$-пространств, $i = 1, 2, 3$, и некоторые их свойства обобщаются на произвольные бесконечные кардиналы.

В главе 3 рассматривается задача продолжения непрерывных ограниченных функций со счетных подмножеств $\mathscr{R}_1$- и $\mathscr{R}_3$-пространств. Получены характеризации $\mathscr{R}_1$- и $\mathscr{R}_3$-пространств с помощью продолжения таких функций. В частности, доказано, что пространство X является $\mathscr{R}_1$-пространством тогда и только тогда, когда любое счетное подпространство $Y \subset X$ C^*-вложено в $\overline{Y}$, т.е. любая непрерывная ограниченная функция $f : Y \to \mathbb{R}$ имеет непрерывное продолжение $f : \overline{Y} \to \mathbb{R}$. Похожая характеризация получена также для $\mathscr{R}_3$-пространств. Из этих теорем получаются интересные следствия характеризующие $\mathscr{R}_1$- и $\mathscr{R}_3$-пространства.

Эти результаты позволили автору получить интересные алгебраические характеризации $\mathscr{R}_1$- и $\mathscr{R}_3$-пространств используя свойства колец и полуколец непрерывных функций на этих пространствах. Доказаны важные результаты, описывающие $\mathscr{R}_1$- и $\mathscr{R}_3$-пространства с помощью идеалов этих алгебраических структур.

Многие теоремы главы 3 являются аналогами или естественными обобщениями соответствующих теорем для F-пространств. Например, известно, что тихоновское пространство X является F-пространством тогда и только тогда, когда каждый конечно порожденный идеал в $C(X)$ является главным. Диссертантом доказано утверждение: тихоновское пространство X является $\mathscr{R}_1$-пространством тогда и только тогда, когда для любого счетного множества $A \subset X$ каждый конечно порожденный идеал в $C(A)$ является главным. Получены также интересные характеризации с помощью решеток всех идеалов полукольца непрерывных функций $\mathscr{R}_1$- и $\mathscr{R}_3$-пространств.

Результаты главы 3 показывают важность рассматриваемых пространств в теории колец и полуколец непрерывных функций.

Глава 4 диссертации посвящена однородности произведений топологических пространств и метризуемости однородных подпространств произведений. Обобщая и усиливая некоторые известные результаты Кунена, автору удалось доказать важную теорему о неоднородности произведения $\mathscr{R}_2$-пространств, удовлетворяющих определенным условиям. Из этой теоремы, в частности, следует, что произведение бесконечных компактных $\mathscr{R}_2$-пространств неоднородно.

Получены также некоторые обобщения и аналоги результатов Е.А. Резниченко о конечности компактов в однородных произведениях F-пространств и о метризуемости однородных подпространств произведений. Доказано, что если Y — $\mathscr{R}_2$-пространство, а $X \subset Y^3$ однородное подпространство, то любое компактное подмножество пространства X конечно. Если же Y — $\beta\omega$-пространство, а $X \subset Y^\omega$ однородное подпространство, то любое компактное подпространство пространства X метризуемо. Последнее утверждение верно при некотором теоретико-множественном предположении.

В заключении дается краткое описание полученных в диссертации результатов.

Резюмируя впечатления от диссертации, отметим, что автор проделала большую работу и подготовила законченное научное исследование. Полученные результаты посвящены актуальным задачам общей топологии. Они являются новыми и интересными. Результаты диссертации носят теоретический характер и могут найти применения в общей топологии. Автореферат верно и полно отражает основные результаты диссертации.

Диссертация оформлена достаточно хорошо и аккуратно. В ней нет существенных погрешностей, кроме обычных при компьютерном наборе опечаток и мелких ошибок. Отметим только, что есть неточность в определении 3.2.2 (стр. 53), а на стр. 78 (2 строка снизу) слово «пространство» следует заменить словом «неоднородно».

Считаю, что диссертационная работа А. Ю. Грозновой «Свойства типа несвязности и однородность топологических пространств» соответствует критериям, определенным пп. 2.1–2.5 «Положения о присуждении ученых степеней в Московском государственном университете имени М. В. Ломоносова» и оформлена согласно приложениям № 5, 6 «Положения о диссертационном совете Московского государственного университета имени М. В. Ломоносова». По моему мнению, автор диссертации заслуживает присуждения ей ученой степени кандидата физико-математических наук по специальности 1.1.3 «Геометрия и топология».

Доктор физико-математических наук, профессор,
Заведующий кафедрой математического анализа,
ФГБОУ ВО "Московский педагогический государственный университет" П.С. Геворкян

УДОСТОВЕРЯЮ
...правления развития
кадрового потенциала
Н.А. Кузнецова