МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
имени М. В. ЛОМОНОСОВА

На правах рукописи

Березнюк Вадим Юрьевич

Коммутаторная длина степеней и асферичность групп, заданных графами

Специальность 1.1.5 —
«Математическая логика, алгебра, теория чисел и дискретная математика»

Автореферат
диссертации на соискание учёной степени
кандидата физико-математических наук

Москва — 2023

Диссертация подготовлена на кафедре высшей алгебры механико-математического факультета МГУ имени М. В. Ломоносова.

Научный руководитель: **Клячко Антон Александрович,**
доктор физико-математических наук

Официальные оппоненты: **Губа Виктор Сергеевич,**
доктор физико-математических наук, профессор, ФГБОУ ВО «Вологодский государственный университет», кафедра прикладной математики, профессор

Дудкин Федор Анатольевич,
доктор физико-математических наук, ФГБУН Институт математики им. С.Л. Соболева Сибирского отделения РАН, лаборатория алгебры, старший научный сотрудник

Таламбуца Алексей Леонидович,
кандидат физико-математических наук, ФГБУН Математический институт им. В.А. Стеклова РАН, отдел математической логики, научный сотрудник

Защита диссертации состоится 10 ноября 2023 года в 16 часов 45 минут на заседании диссертационного совета МГУ.011.4 Московского государственного университета имени М. В. Ломоносова по адресу: 119234, Москва, ГСП-1, Ленинские горы, д. 1, МГУ имени М. В. Ломоносова, Механико-математический факультет, аудитория 14-08.

E-mail: vladimir.manuilov@gmail.com

С диссертацией можно ознакомиться в отделе диссертаций научной библиотеки МГУ имени М. В. Ломоносова (Ломоносовский просп., д. 27) и на портале: `https://dissovet.msu.ru/dissertation/011.4/2674`

Автореферат разослан 10 октября 2023 года.

Ученый секретарь
диссертационного совета,
доктор физико-математических наук — В. М. Мануйлов

Общая характеристика работы

Актуальность темы и степень её разработанности

Диссертация посвящена изучению двух независимых тем, связанных с теорией групп. Первым исследуемым вопросом является задача о вычислении минимальной возможной коммутаторной длины n-й степени элемента в свободных произведениях произвольных групп.

Хорошо известно, что истинная степень неединичного элемента не может быть коммутатором в свободной группе, это было замечено Шюценберже ещё в 1959 году[1]. Ясно, что квадрат неединичного элемента может быть произведением двух коммутаторов, и куб неединичного элемента может быть произведением трёх коммутаторов. В 1981 году Каллером[2] было обнаружено, что в свободной группе $F(a, b)$ куб может быть произведением двух коммутаторов:

$$[a,b]^3 = [a^{-1}ba, a^{-2}bab^{-1}][bab^{-1}, b^2],$$

где $[a, b] := a^{-1}b^{-1}ab$. Более того, Каллер показал, что элемент $[a, b]^n$ всегда может быть разложен в произведение $\lfloor n / 2 \rfloor + 1$ коммутаторов (где $\lfloor x \rfloor$ — это целая часть x). Наименьшее число k, такое что элемент g группы G может быть разложен в произведение k коммутаторов, называется *коммутаторной длиной* элемента g и обозначается $\mathrm{cl}(g)$. Значит, оценку Каллера можно записать следующим образом:

$$\mathrm{cl}([a, b]^n) \leq \lfloor n / 2 \rfloor + 1.$$

В 1991 году Комерфорд, Комерфорд и Эдмундс[3] доказали, что в свободной группе произведение двух коммутаторов может быть не более, чем кубом неединичного элемента, и выдвинули гипотезу, что для свободных групп оценка Каллера является точной: для любого неединичного элемента g свободной группы $\mathrm{cl}(g^n) \geq \lfloor n / 2 \rfloor + 1$. Эта гипотеза оказалась действительно верной и была доказана Данканом и Хауи[4] в том же 1991 году. Более того, они доказали аналогичное утверждение для свободных произведений *локально индикабельных* групп (то есть групп, в которых каждая нетривиальная конечно порождённая подгруппа допускает эпиморфизм на $\mathbb{Z}$): если g — это элемент свободного произведения локально индикабельных групп, такой что g не сопряжён элементам свободных сомножителей,

[1] *Schützenberger M. P.* Sur l'equation $a^{2+n} = b^{2+m}c^{2+p}$ dansun groupe libre // C. R. Acad. Sci. Paris Sér. I Math. 1959. Vol. 248. P. 2435—2436.

[2] *Culler M.* Using surfaces to solve equations in free groups // Topology. 1981. Vol. 20, no. 2. P. 133—145.

[3] *Comerford J. A.*, *Comerford Jr. L. P.*, *Edmunds C. C.* Powers as products of commutators // Comm. Algebra. 1991. Vol. 19, no. 2. P. 675—684.

[4] *Duncan A. J.*, *Howie J.* The genus problem for one-relator products of locally indicable groups // Math. Z. 1991. Vol. 208, no. 1. P. 225—237.

то $\mathrm{cl}(g^n) \geq \lfloor n \,/\, 2 \rfloor + 1$. Это утверждение оказалось верным и для свободных произведений произвольных групп без кручения, что было доказано в 2018 году Ивановым и Клячко[5] и независимо от них Ченом[6].

Для свободного произведения $G = *_{j \in J} A_j$, имеющего фиксированное разложение на свободные сомножители, обозначим через $\hat{G}$ множество всех элементов, не сопряжённых элементам свободных сомножителей, и определим

$$k(G, n) := \min \left\{ \mathrm{cl}(g^n) \,\middle|\, g \in \hat{G} \right\}.$$

Из оценки Каллера в совокупности с оценкой Иванова, Клячко и Чена следует, что

$$k(G, n) = \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor + 1$$

для свободных произведений групп без кручения.

Для свободных произведений произвольных групп оценка Каллера перестает быть точной. Например, в свободном произведении $\langle a \rangle_3 * \langle b \rangle$ истинный куб может быть коммутатором:

$$[a, b]^3 = [b^{-1}aba, ab^{-1}ab].$$

В 1994 году Комерфорд, Эдмундс и Розенбергер[7] показали, в каких случаях коммутатор может быть истинной степенью в свободных произведениях групп с кручением.

В работах Иванова, Клячко и Чена были даны оценки снизу на число $k(G, n)$ и для случая наличия кручения. Однако рассуждения в этих работах разные: рассуждение Чена основано на подходе Калегари[8], а рассуждение Иванова и Клячко основано на лемме о столкновениях[9]. Поэтому результаты для групп с кручением получились разные. Более того, они оказались несравнимыми — ни про один из них нельзя сказать, что он сильнее другого.

Обозначим минимальный порядок неединичного элемента группы G через $N(G)$. Ивановым и Клячко было доказано, что та же самая оценка, что и для свободных произведений групп без кручения, остаётся верной и для свободного произведения произвольных групп, но только если степень

[5] *Ivanov S. V.*, *Klyachko A. A.* Quasiperiodic and mixed commutator factorizations in free products of groups // Bull. London Math. Soc. 2018. Vol. 50, no. 5. P. 832—844.

[6] *Chen L.* Spectral gap of scl in free products // Proc. Amer. Math. Soc. 2018. Vol. 146, no. 7. P. 3143—3151.

[7] *Comerford Jr. L. P.*, *Edmunds C. C.*, *Rosenberger G.* Commutators as powers in free products of groups // Proc. Amer. Math. Soc. 1994. Vol. 122, no. 1. P. 47—52.

[8] *Calegari D.* scl. MSJ Memoirs, 20, Mathematical Society of Japan, 2009.

[9] *Klyachko A. A.* A funny property of sphere and equations over groups // Comm. Algebra. 1993. Vol. 21, no. 7. P. 2555—2575.

относительно мала:

$$k(G,n) = \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor + 1, \quad \text{если } n < N(G).$$

В то же время Ченом было доказано, что

$$k(G,n) \geq \left\lfloor \frac{n - \left\lfloor \frac{2n}{N(G)} \right\rfloor}{2} \right\rfloor + 1.$$

В диссертации доказывается новая оценка, которая усиливает оба этих результата. Более того, доказывается, что эта оценка является неулучшаемой. Другими словами, в диссертации явно вычисляется значение $k(G,n)$ для свободных произведений произвольных групп.

Также представляет интерес изучение уравнений более общего вида. Пусть в свободном произведении групп $G = *_{j \in J} A_j$ имеет место равенство

$$c_1 \dots c_k d_1 \dots d_l = u_1^{n_1} \dots u_m^{n_m},$$

где c_i — коммутаторы, d_i сопряжены элементам из $\bigcup_{j\in J} A_j$, элементы u_i сопряжены между собой и не сопряжены элементам из $\bigcup_{j\in J} A_j$, и n_i — натуральные числа. Ивановым и Клячко было доказано, что тогда

$$2k + l \geq \sum_{i=1}^{m} (n_i - 1) + 2, \quad \text{если } N(G) > \sum_{i=1}^{m} n_i,$$

а Ченом было доказано, что тогда

$$2k + l \geq \sum_{i=1}^{m} (n_i - 1) - \left\lfloor \frac{2}{N(G)} \sum_{i=1}^{m} n_i \right\rfloor + 2, \quad \text{если } l = 0.$$

В диссертации доказывается новая оценка, которая усиливает оба этих результата.

Вторым исследуемым вопросом является нахождение новых условий, влекущих асферичность групп, заданных графами.

Грубо говоря, копредставление называется асферическим, если между его соотношениями нет нетривиальных зависимостей. Это может быть формализовано по-разному, поэтому существует много различных определений асферичности[10]. В частности, рядом авторов исследовалась

[10] *Chiswell I. M.*, *Collins D. J.*, *Huebschmann J.* Aspherical group presentations // Math. Z. 1981. Vol. 178. P. 1—36.

асферичность относительных копредставлений[11,12,13,14,15]. Асферическим копредставлением (в каком-то из смыслов) обладают достаточно широкие классы групп: группы с одним соотношением; группы, удовлетворяющие условию малых сокращений, и, в частности, почти все фуксовы группы; группы узлов[10]. Про асферические копредставления известно достаточно много[16,17,18,19,20], поэтому представляет интерес нахождение условий, которые влекут асферичность тех или иных копредставлений.

В диссертации асферичность копредставления $\langle S \mid R\rangle$ понимается как асферичность его стандартного двумерного клеточного комплекса $K(S;R)$[10]. Такая асферичность следует из диаграммной приводимости, введенной Герстеном[21], а диаграммная приводимость может быть получена при помощи теста раскраской[22], весового теста[21] или метода движений[23]. Если среди соотношений копредставления нет истинных степеней, то диаграммная приводимость (а значит и асферичность) следует из классических условий малых сокращений[21]. Напомним, что условия малых сокращений в сущности требуют, чтобы соотношения копредставления имели достаточно короткие общие части. Более точные определения могут быть найдены, например, в пятой главе книги Линдона и Шуппа[24].

---

[11] *Bogley W. A.*, *Pride S. J.* Aspherical relative presentations // Proc. Edinburgh Math. Soc. 1992. Vol. 35, no. 1. P. 1—39.

[12] *Edjvet M.* On the asphericity of one-relator relative presentations // Proc. Royal Soc. Edinburgh. 1994. Vol. A124, no. 4. P. 713—728.

[13] *Baik Y. G.*, *Bogley W. A.*, *Pride S. J.* On the asphericity of length four relative group presentations // Internat. J. Algebra Comp. 1997. Vol. 07, no. 03. P. 277—312.

[14] *Howie J.*, *Metaftsis V.* On the asphericity of length five relative group presentations // Proc. London Math. Soc. 2001. Vol. 82, no. 1. P. 173—194.

[15] *Metaftsis V.* On the asphericity of relative group presentations of arbitrary length // Internat. J. Algebra Comp. 2003. Vol. 13, no. 03. P. 323—339.

[16] *Huebschmann J.* Cohomology theory of aspherical groups and of small cancellation groups // Journal of Pure and Applied Algebra. 1979. Vol. 14, no. 2. P. 137—143.

[17] *Huebschmann J.* The homotopy type of a combinatorially aspherical presentation // Math. Z. 1980. Vol. 173. P. 163—169.

[18] *Ашманов И. С.*, *Ольшанский А. Ю.* Об абелевых и центральных расширениях асферических групп // Изв. вузов. Матем. 1985. Т. 11. С. 48—60.

[19] *Ольшанский А. Ю.* Геометрия определяющих соотношений в группах. М.: Наука, 1989.

[20] *Brown K. S.* Cohomology of Groups. Springer New York, 1982.

[21] *Gersten S. M.* Reducible Diagrams and Equations Over Groups // Essays in Group Theory. New York, NY : Springer, 1987. P. 15—73.

[22] *Sieradski A. J.* A coloring test for asphericity // The Quarterly Journal of Mathematics. 1983. Vol. 34, no. 1. P. 97—106.

[23] *Klyachko A. A.* Asphericity tests // Internat. J. Algebra Comp. 1997. Vol. 7, no. 4. P. 415—431.

[24] *Линдон Р.*, *Шупп П.* Комбинаторная теория групп. М.: Мир, 1980.

В 2003 году Громов изложил графический аналог теории малых сокращений[25]. В графической теории группа задается при помощи ориентированного графа, рёбра которого помечены элементами некоторого множества S. В качестве порождающих выступают элементы множества S, а в качестве соотношений берутся приведённые метки путей, образующих базис фундаментальной группы графа. В отличии от классического случая, в графической теории малых сокращений соотношениям разрешается иметь длинные общие части, но только если эти общие части соотношений являются и общими частями путей в графе, соответствующих этим соотношениям. Таким образом, графическая теория позволяет изучать некоторые копредставления, которые не удовлетворяют классическим условиям малых сокращений. В 2006 году Оливье доказал асферичность групп, заданных $C'(1/6)$-графами[26], а в 2015 году Грубер доказал асферичность групп, заданных $C(6)$-графами[27].

В диссертации вводится понятие асферического графа, которое до некоторой степени можно считать обобщением на графический случай понятия диаграммной приводимости, и вводится графический аналог условия $T(k)$. Доказывается, что асферические графы задают асферические группы, и при помощи этого доказывается, что асферичность группы, заданной графом, следует не только из графического условия малых сокращений $C(6)$, но также и из графических аналогов условий малых сокращений $C(4)\&T(4)$ и $C(3)\&T(6)$. Более того, показывается, как можно использовать метод движений[23] для доказательства асферичности групп, заданных графами.

Цели и задачи работы

1. Вычислить минимальную возможную коммутаторную длину n-й степени элемента, не сопряжённого элементам свободных сомножителей, в свободных произведениях произвольных групп.
2. Получить новые достаточные условия асферичности групп, заданных графами.

Научная новизна

Результаты диссертации являются новыми и состоят в следующем:

1. Была получена новая оценка снизу для минимальной возможной коммутаторной длины элементов вида $u_1^{n_1} \dots u_m^{n_m} d_1 \dots d_l$ в свободных произведениях произвольных групп, где u_i сопряжены между

[25] *Gromov M.* Random Walk in Random Groups // GAFA, Geom. Funct. Anal. 2003. Vol. 13. P. 73—146.

[26] *Ollivier Y.* On a small cancellation theorem of Gromov // Bull. Belg. Math. Soc. Simon Stevin. 2006. Vol. 13, no. 1. P. 75—89.

[27] *Gruber D.* Groups with graphical C(6) and C(7) small cancellation presentations // Trans. Amer. Math. Soc. 2015. Vol. 367, no. 3. P. 2051—2078.

собой и не сопряжены элементам свободных сомножителей, d_i сопряжены свободным сомножителям, и n_i — это натуральные числа.
2. Была вычислена минимальная возможная коммутаторная длина n-й степени элемента, не сопряжённого элементам свободных сомножителей, в свободных произведениях произвольных групп.
3. Было доказано, что минимальная коммутаторная длина достигается на степенях коммутаторов элементов, лежащих в разных свободных сомножителях.
4. Было введено понятие асферического графа и было доказано, что такие графы задают асферические группы.
5. Были введены графические аналоги классических условий малых сокращений $C(4)\&T(4)$ и $C(3)\&T(6)$, и было доказано, что эти условия влекут асферичность группы, заданной соответствующим графом.
6. Было показано, как применить метод движений Клячко для доказательства асферичности групп, заданных графами.

Объект и предмет исследования

В диссертации изучаются группы, представленные в виде свободного произведения или заданные некоторым копредставлением.

Теоретическая и практическая значимость

Диссертация имеет теоретический характер. Полученные результаты могут быть полезны специалистам в комбинаторной теории групп, а также могут представлять интерес для специалистов в абстрактной алгебре.

Методы исследования

В диссертации применяются методы комбинаторной теории групп. Активно используются различные виды диаграмм над копредставлениями и над свободными произведениями групп, а также метод движений Клячко.

Положения, выносимые на защиту

На защиту выносятся следующие результаты, полученные в диссертации:
1. Явное значение минимальной возможной коммутаторной длины n-й степени элемента, не сопряжённого элементам свободных сомножителей, в свободных произведениях произвольных групп.
2. Новые достаточные условия асферичности групп, заданных графами.

Степень достоверности

Достоверность результатов диссертации подтверждена строгими математическими доказательствами. Результаты главы 1 были получены автором в неразделимом соавторстве с Антоном Александровичем Клячко в [2]. Результаты глав 2 и 3 были получены автором самостоятельно в [1] и [3]. Результаты других авторов, используемые в диссертации, отмечены соответствующими ссылками.

Апробация результатов

Основные результаты диссертации докладывались на следующих всероссийских и международных конференциях, а также научных семинарах:

- семинар «Теория групп» под руководством профессора А. Ю. Ольшанского, доцента А. А. Клячко и доцента О. В. Куликовой (Москва, механико-математический факультет МГУ имени М. В. Ломоносова, 2016–2022, неоднократно);
- вторая конференция Математических центров России (Москва, МГУ имени М. В. Ломоносова, МИАН, 7–11 ноября 2022);
- конференция “Uncertainty and Random Structures: Signal Analysis, Representation Theory and Applications” (Санкт-Петербург, СПбГУ, 12–16 декабря 2022);
- международная научная конференция студентов, аспирантов и молодых ученых «Ломоносов» (Москва, МГУ имени М. В. Ломоносова, 10–21 апреля 2023).

Публикации

Основные результаты по теме диссертации изложены в 3 статьях [1—3], все из которых опубликованы в научных журналах, входящих в базы данных Scopus, Web of Science и RSCI.

Работа [2] написана в неразделимом соавторстве с Антоном Александровичем Клячко, работы [1] и [3] написаны автором самостоятельно.

Объём и структура работы

Диссертация состоит из введения, 3 глав, заключения и списка литературы. Полный объём диссертации составляет 85 страниц, включая 24 рисунка. Список литературы содержит 48 наименований.

Содержание работы

Во **введении** обосновывается актуальность изучаемых вопросов, формулируются цели, излагается научная новизна и перечисляются основные результаты диссертации.

Глава 1 посвящена оценке снизу для минимальной возможной коммутаторной длины элементов вида $u_1^{n_1} \dots u_m^{n_m} d_1 \dots d_l$ в свободных произведениях произвольных групп, где u_i сопряжены между собой и не сопряжены элементам свободных сомножителей, d_i сопряжены свободным сомножителям, и n_i — это натуральные числа.

В разделе 1.1 формулируется изучаемая задача и даются основные определения.

Пусть $G = *_{j \in J} A_j$ — это группа с фиксированным разложением на свободные сомножители. Обозначим через $\hat{G}$ множество всех элементов группы G, не сопряжённых элементам свободных сомножителей, и определим $k(G, n)$ как наименьшее число k, такое что элемент $g^n \in \hat{G}$ может быть разложен в произведение k коммутаторов. Обозначим минимальный порядок неединичного элемента группы G через $N(G)$.

Основным результатом главы является следующая теорема.

Теорема 2 (упрощенная форма). *Пусть в свободном произведении групп $G = *_{j \in J} A_j$ имеет место равенство*

$$c_1 \dots c_k d_1 \dots d_l = u_1^{n_1} \dots u_m^{n_m},$$

где c_i — коммутаторы, d_i сопряжены элементам из $\bigcup_{j \in J} A_j$, элементы u_i сопряжены между собой и не сопряжены элементам из $\bigcup_{j \in J} A_j$, и n_i — натуральные числа. Тогда

$$2k + l \geq \sum_{i=1}^{m} (n_i - 1) - 2 \left\lfloor \frac{1}{N(G)} \sum_{i=1}^{m} n_i \right\rfloor + 2.$$

Из теоремы 2 немедленно вытекает оценка для минимальной возможной коммутаторной длины n-й степени элемента.

Следствие 1. *Пусть в свободном произведении групп $G = *_{j \in J} A_j$ имеет место равенство $c_1 \dots c_k = u^n$, где c_i — коммутаторы, и не сопряжён элементам свободных сомножителей, и n — натуральное число. Тогда*

$$2k \geq n - 2 \left\lfloor \frac{n}{N(G)} \right\rfloor + 1$$

или, что то же самое,

$$k \geq \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor - \left\lfloor \frac{n}{N(G)} \right\rfloor + 1.$$

Другими словами, если $G = *_{j \in J} A_j$ — это свободное произведение произвольных групп, то

$$k(G, n) \geq \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor - \left\lfloor \frac{n}{N(G)} \right\rfloor + 1.$$

В разделе 1.2 доказывается почти точность этой оценки.

Теорема 1. *Пусть $G = *_{j\in J} A_j$ — это свободное произведение нетривиальных групп и n — это натуральное число. Тогда*

$$k(G,n) = \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor - \left\lfloor \frac{n}{N(G)} \right\rfloor + 1 \quad \textit{или} \quad k(G,n) = \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor - \left\lfloor \frac{n}{N(G)} \right\rfloor + 2.$$

При этом $k(G,n) = \lfloor n \,/\, 2 \rfloor - \lfloor n \,/\, N(G) \rfloor + 1$, если выполнено хотя бы одно из следующих условий:

1. *n чётно, а $\lfloor n \,/\, N(G) \rfloor$ нечётно.*
2. *n делится на $N(G)$.*
3. *$n \le N(G)$.*
4. *$N(G) = 2$.*

В разделе 1.3 даётся определение диаграмм над свободными произведениями групп, которые позволяют переформулировать изучаемый вопрос на геометрический язык, в разделе 1.4 формулируется лемма о столкновениях для кратных движений[28] и в разделе 1.5 доказывается новый вариант этой леммы, который используются для доказательства теоремы 2.

В разделе 1.6 формулируется и доказывается основная теорема, полная формулировка которой выглядит следующим образом.

Теорема 2. *Пусть в свободном произведении групп $G = *_{j\in J} A_j$ имеет место равенство*

$$c_1 \dots c_k d_1 \dots d_l = u_1^{n_1} \dots u_m^{n_m},$$

где c_i — коммутаторы, d_i сопряжены элементам из $\bigcup\limits_{j\in J} A_j$, элементы u_i сопряжены между собой и не сопряжены элементам из $\bigcup\limits_{j\in J} A_j$, и n_i — натуральные числа. Тогда выполнено неравенство

$$2 - 2k - l + \sum_{i=1}^{m}(n_i - 1) \le$$

$$\le \begin{cases} 2\left\lfloor \frac{1}{N}\left(\sum\limits_{i=1}^{m} n_i - \left\lfloor \frac{l+1}{2} \right\rfloor\right)\right\rfloor, & \textit{если } \sum\limits_{i=1}^{m}(n_i - 1) - l \textit{ чётно;} \\ 2\left\lfloor \frac{1}{N}\left(\sum\limits_{i=1}^{m} n_i - \left\lfloor \frac{l+1-N}{2} \right\rfloor_+\right)\right\rfloor - 1, & \textit{если } \sum\limits_{i=1}^{m}(n_i - 1) - l \textit{ нечётно,} \end{cases}$$

где $\lfloor x \rfloor_+ \coloneqq \max(\lfloor x \rfloor, 0)$, а N — минимальный порядок элемента из $\bigcup\limits_{j\in J} A_j$, входящего в циклически несократимую запись элемента u, сопряжённого всем u_i (в частности, при $N = \infty$ правая часть есть 0 или -1).

[28] *Клячко А. А.* Гипотеза Кервера–Лауденбаха и копредставления простых групп // Алгебра и логика. 2005. Т. 44, № 4. С. 399—437.

В **<u>главе 2</u>** доказывается неулучшаемость оценки

$$k(G,n) \geq \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor - \left\lfloor \frac{n}{N(G)} \right\rfloor + 1$$

для свободных произведений произвольных групп.

В <u>разделе 2.1</u> формулируются основные результаты.

Теорема 3. *Пусть $G = *_{j \in J} A_j$ — это свободное произведение нетривиальных групп и n — это натуральное число. Тогда*

$$k(G,n) = \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor - \left\lfloor \frac{n}{N(G)} \right\rfloor + 1.$$

В действительности, доказывается более сильный результат.

Пусть $G = *_{j \in J} A_j$ — это группа с фиксированным разложением на свободные сомножители. Для элемента $g \in \hat{G}$, имеющего циклически приведённую форму $a_{j_1,1} \dots a_{j_m,m}$ (где $a_{j_i,i} \in A_{j_i}$), мы обозначаем через $N(g)$ минимальный порядок его букв $a_{j_1,1}$, ..., $a_{j_m,m}$. Для $N \in \{N(g) \mid g \in \hat{G}\}$ мы определяем $k(G,n,N)$ как минимальное число k, такое что элемент $g^n \in \hat{G}$ с $N(g) = N$ может быть разложен в произведение k коммутаторов.

Теорема 4. *Пусть $G = *_{j \in J} A_j$ — это свободное произведение нетривиальных групп и n — это натуральное число. Если $N \in \{N(g) \mid g \in \hat{G}\}$, то*

$$k(G,n,N) = \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor - \left\lfloor \frac{n}{N} \right\rfloor + 1.$$

Вычисляется коммутаторная длина степеней коммутаторов элементов, лежащих в разных свободных сомножителях.

Теорема 5. *Пусть $G = *_{j \in J} A_j$ — это свободное произведение нетривиальных групп и n — это натуральное число. Если $a \in A_{j_1}$ и $t \in A_{j_2}$ — это два неединичных элемента, лежащие в различных свободных сомножителях, такие что $\operatorname{ord}(a) \leq \operatorname{ord}(t)$, то*

$$\operatorname{cl}([a,t]^n) = \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor - \left\lfloor \frac{n}{\operatorname{ord}(a)} \right\rfloor + 1.$$

В <u>разделе 2.2</u> формулируется и доказывается лемма о связи диаграмм Хауи и коммутаторных разложений, которая позволяет дать оценку сверху на коммутаторную длину элемента, при условии существования диаграмм Хауи специального вида. В <u>разделе 2.3</u> явно строятся необходимые диаграммы для элементов вида $[a,t]^n$. Результаты этих разделов используются в <u>разделе 2.4</u> для доказательства теорем 3, 4 и 5.

В разделе 2.5 на конкретном примере показывается, как можно получать коммутаторные разложения минимальной длины в явной алгебраической форме, используя диаграммы, построенные в разделе 2.3. Таким образом выводится равенство

$$[a,t]^5 = [a^{-1}t^{-1}a^{-1}tat^{-1}a^{-1}ta, a^{-1}t^{-1}atat^{-1}a^{-1}ta^{-1}][a^{-1}ta^{-1},a],$$

которое верно для любых двух элементов произвольной группы, коль скоро $a^3 = 1$.

Глава 3 посвящена нахождению новых условий, влекущих асферичность групп, заданных графами.

В разделе 3.1 формулируются изучаемая задача и кратко излагается суть полученных результатов, а в разделе 3.2 даются основные определения теории групп, заданных графами.

Пусть Γ — это ориентированный граф, каждое ребро которого помечено элементом конечного множества S. Тогда каждому пути p в этом графе может быть сопоставлено слово $\ell(p)$ в алфавите $S \sqcup S^{-1}$, называемое меткой пути p. Это слово равняется произведению (без сокращений) меток рёбер этого пути, при этом если ориентация ребра в пути не совпадает с ориентацией ребра в графе, то метка входит в произведение в степени -1.

Пусть R_s — это множество меток всех простых замкнутых путей в графе Γ, и R_f — это множество циклически приведённых меток путей, образующих базис фундаментальной группы каждой связной компоненты графа Γ. Если Γ — это помеченный множеством S граф, то зададим группу $G(\Gamma)$ копредставлением $\langle S \mid R_f \rangle$.

Поднятием слова w в помеченный граф Γ называется такой путь $\bar{p}$ в этом графе, что $\ell(\bar{p}) \equiv w$ (то есть метка пути $\bar{p}$ посимвольно совпадает со словом w). Слово w называется *куском* (по отношению к графу Γ), если оно имеет хотя бы два различных поднятия в граф Γ. Пусть p — это путь в некотором помеченном графе. *Поднятием пути* p в помеченный граф Γ называется такой путь $\bar{p}$ в графе Γ, что $\ell(\bar{p}) \equiv \ell(p)$ (то есть метка пути p посимвольно совпадает с меткой пути $\bar{p}$). Путь p называется *куском* (по отношению к помеченному графу Γ), если он имеет хотя бы два различных поднятия в граф Γ.

Будем говорить, что граф Γ помечен правильно, если в нём любые два различных ребра, входящие в одну вершину, и любые два различных ребра, выходящие из одной вершины, имеют разные метки.

Графическое условие $C(k)$[27]. *Пусть Γ — это помеченный множеством S граф и $k \in \mathbb{N}$. Мы говорим, что Γ удовлетворяет графическому условию $C(k)$ (или является $C(k)$-графом), если*

– *Γ помечен правильно и*
– *метка никакого простого замкнутого пути не является конкатенацией строго меньше, чем k кусков.*

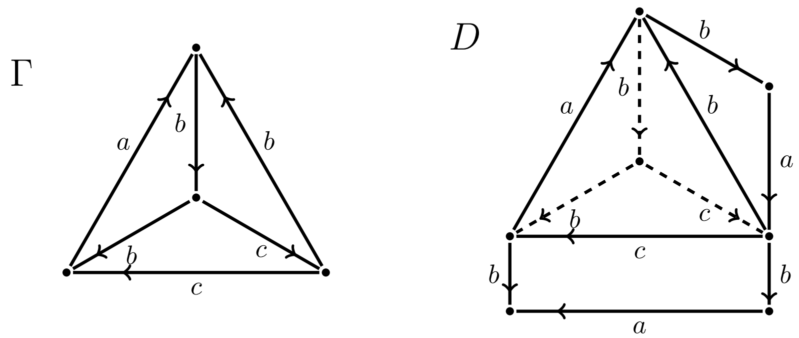

Рисунок 1 — Граф Γ и диаграмма D над $\langle a, b, c \mid R_s \rangle$. Пунктиром отмечены происходящие из графа рёбра диаграммы.

Для множества слов R через R_{sym} обозначим множество, которое состоит из всех циклических сдвигов элементов множеств R и R^{-1}.

Простая сферическая (дисковая) диаграмма над копредставлением $\langle S \mid R \rangle$ — это конечный клеточный 2-комплекс, гомеоморфный сфере (диску) и вложенный в $\mathbb{R}^3$ ($\mathbb{R}^2$), такой что его 1-остов является помеченным множеством S графом и метка каждой его двумерной клетки лежит в R_{sym}, где *меткой клетки* называется определенное с точностью до циклического сдвига слово, равное метке её некоторого положительно ориентированного граничного пути (как пути в помеченном множеством S графе).

Пусть граф Γ удовлетворяет графическому условию $C(2)$ и пусть D — это диаграмма над копредставлением $\langle S \mid R_s \rangle$. Пусть p — это путь, лежащий в пересечении некоторого положительно ориентированного граничного пути клетки Π_1 и некоторого отрицательно ориентированного граничного пути клетки Π_2. Будем говорить, что путь p *происходит* из графа, если его поднятие в граф Γ как подпути границы клетки Π_1 совпадает с его поднятием в граф как подпути границы клетки Π_2. Грубо говоря, путь p происходит из графа Γ, если клетки Π_1 и Π_2 пересекаются по этому пути не только в диаграмме D, но и в самом графе Γ.

Для примера посмотрим на помеченный множеством $\{a, b, c\}$ граф Γ и простую дисковую диаграмму D над $\langle a, b, c \mid R_s \rangle$, изображённые на рисунке 1. Этот граф определяет группу $G(\Gamma) \cong \langle a, b, c \mid bbc, c^{-1}bc^{-1}, b^{-1}a^{-1}b^{-1} \rangle$. Среди слов длины 1 кусками будут слова b, b^{-1}, c и c^{-1}. Слова a и a^{-1} кусками не являются. Среди несократимых слов длины 2 будет только два куска — слова bb и $(bb)^{-1}$. Граф Γ удовлетворяет графическому условию $C(2)$, но не удовлетворяет графическому условию $C(3)$, так как простой замкнутый путь с меткой bbc распадается на куски bb и c. В диаграмме D часть рёбер происходят из графа Γ. Такие рёбра обозначены пунктиром.

В разделе 3.3 формулируется основная теорема и приводится план её доказательства.

Напомним, что *стандартный двумерный клеточный комплекс* $K(S;R)$ копредставления $\langle S \mid R\rangle$ — это двумерный клеточный комплекс, имеющий единственную вершину, чьи рёбра находятся во взаимно однозначном соответствии с элементами множества S и чьи двумерные грани находятся во взаимно однозначном соответствии с элементами множества R, при этом каждая грань вклеена по своей границе согласно соответствующему этой грани элементу R. Копредставление $\langle S \mid R\rangle$ называется *асферическим*, если его стандартный двумерный клеточный комплекс $K(S;R)$ асферичен, то есть $\pi_q(K(S;R)) = 0$ для всех $q \geqslant 2$ (где π_q — это гомотопические группы).

Пусть Γ — это помеченный множеством S граф. Будем говорить, что диаграмма D над копредставлением $\langle S \mid R_s\rangle$ *графически приведена*, если в ней нет происходящих из графа Γ рёбер. Будем говорить, что граф Γ *асферичен*, если он удовлетворяет графическому условию $C(2)$ и над копредставлением $\langle S \mid R_s\rangle$ нет графически приведённых простых сферических диаграмм.

Основным результатом главы является следующая теорема.

Теорема 6. *Если помеченный множеством S граф Γ асферичен, то копредставление $\langle S \mid R_f\rangle$ асферично.*

В разделе 3.4 основная теорема используется, чтобы получить новые условия, влекущие асферичность групп, заданных графами. Также в этом разделе показывается, в каком смысле асферичность графа можно считать обобщением диаграммной приводимости.

В подразделе 3.4 формулируются графические аналоги классических условий малых сокращений $C(4)\&T(4)$ и $C(3)\&T(6)$, и доказывается, что эти условия влекут асферичность группы.

Пусть Γ — это помеченный множеством S граф, удовлетворяющий графическому условию $C(2)$. Пусть r_1 и r_2 — это два элемента из множества R_s. Будем говорить, что r_1 и r_2 *взаимно происходят* из графа, если $r_1 = r_1'c$, $r_2 = c^{-1}r_2'$ и поднятие c в граф Γ через r_1 и через r_2 совпадают.

Графическое условие $\boldsymbol{T(p)}$. *Пусть Γ — это помеченный множеством S граф, удовлетворяющий графическому условию $C(2)$, и $p \in \mathbb{N}$. Мы говорим, что Γ удовлетворяет* графическому условию $T(p)$ *(или является* $T(p)$-графом*), если для каждого $h \in \mathbb{N}$, такого что $3 \leq h < p$, и для каждых $r_1, \ldots, r_h \in R_s$, таких что последовательные элементы r_i и r_{i+1} не являются взаимно происходящими из графа для всех $i = 1, \ldots, h$ (где индексы берутся по модулю h), верно, что по крайней мере одно из произведений $r_1r_2, \ldots, r_{h-1}r_h, r_hr_1$ приведено.*

Это определение сохраняет геометрическую сущность условия $T(p)$ и означает, что в любой графически приведённой диаграмме степень любой внутренней вершины либо не менее чем p, либо равна 2.

Теорема 7. *Если помеченный множеством S граф Γ удовлетворяет любому из графических условий $C(6)$, $C(4)\&T(4)$ или $C(3)\&T(6)$, то копредставление $\langle S \mid R_f \rangle$ асферично.*

В подразделе 3.4 показывается, как можно использовать метод движений Клячко для доказательства асферичности групп, заданных графами.

Пусть D — это простая дисковая или простая сферическая диаграмма. Пусть на границе некоторой его клетки есть движущаяся точка, называемая автомобилем. Говорят, что автомобиль движется правильно, если он объезжает границу в положительном направлении, непрерывно, без остановок, без разворотов, и если он посещает каждую точку границы бесконечное число раз. Будем называть кратностью точки 1-остова диаграммы D число равное степени соответствующей вершины, если эта точка лежит в 0-остове, и равное 2 в противном случае.

Теорема 8. *Пусть помеченный множеством S граф Γ удовлетворяет графическому условию $C(2)$ и пусть для каждого (с точностью до сопряжённости) элемента r из R_s задано правильное движение автомобиля по границе клетки с меткой r так, что полные столкновения в диаграммах над $\langle S \mid R_s \rangle$ происходят только на рёбрах, происходящих из графа, и в вершинах инцидентных происходящим рёбрам. Тогда копредставление $\langle S \mid R_f \rangle$ асферично.*

Раздел 3.5 посвящен связи сферических диаграмм и зависимостей между соотношениями копредставления. В разделе 3.6 доказывается теорема 6.

Заключение

Основные результаты диссертации заключаются в следующем:

1. Был дан полный ответ на вопрос, чему может равняться минимальная возможная коммутаторная длина n-й степени элемента, не сопряжённого элементам свободных сомножителей, в свободных произведениях произвольных групп.
2. Были получены новые достаточные условия асферичности для групп, заданных графами. В частности, были введены графические аналоги классических условий малых сокращений $C(4)\&T(4)$ и $C(3)\&T(6)$ и было доказано, что эти условия влекут асферичность группы, заданной соответствующим графом.

Результаты диссертации могут быть интересны специалистам в комбинаторной теории групп.

Благодарности

Автор выражает искреннюю благодарность своему научному руководителю доктору физико-математических наук, доценту Антону Александровичу Клячко за постановку задач, плодотворные обсуждения и постоянное внимание к работе.

Автор признателен коллективу кафедры высшей алгебры механико-математического факультета МГУ и участникам семинара «Теория групп» МГУ за доброжелательную и творческую атмосферу.

Публикации автора по теме диссертации

Статьи в рецензируемых научных изданиях, рекомендованных для защиты в диссертационном совете МГУ и входящих в базы цитирования Scopus, Web of Science и RSCI

1. *Bereznyuk V.* Powers with minimal commutator length in free products of groups // Journal of Algebra. — 2023. — Vol. 629. — P. 247—264.

   Журнал индексируется в WoS, Scopus. IF 2022: WoS 0.900, SJR 1.016.

2. *Bereznyuk V. Yu.*, *Klyachko A. A.* Commutator length of powers in free products of groups // Proc. Edinburgh Math. Soc. — 2022. — Vol. 65, no. 1. — P. 102—119.

   Вклад всех авторов равноценен и неразделим.

   Журнал индексируется в WoS, Scopus. IF 2022: WoS 0.700, SJR 0.697.

3. *Березнюк В. Ю.* Асферичность групп, заданных графами // Мат. заметки. — 2019. — Т. 105, № 3. — С. 332—348.

   Журнал индексируется в RSCI. IF 2021: двухлетний ИФ РИНЦ 0.475.

   English transl.: *Bereznyuk V. Yu.* Asphericity of Groups Defined by Graphs // Math. Notes. — 2019. — Vol. 105, no. 3. — P. 316—328.

   Журнал индексируется в WoS, Scopus. IF 2022: WoS 0.600, SJR 0.493.