

Московский государственный университет
имени М. В. Ломоносова
Механико-математический факультет

на правах рукописи



Козик Игорь Александрович

**Исследование и применение связи дискретного
и непрерывного времени при моделировании
траекторий гауссовских процессов с учетом
высоких выбросов**

1.1.4. Теория вероятностей и математическая статистика

ДИССЕРТАЦИЯ

на соискание ученой степени
кандидата физико-математических наук

Научный руководитель:
доктор физико-математических наук, профессор
Питербарг Владимир Ильич

Москва, 2024.

Оглавление

Введение	3
1 Стационарные процессы	12
2 Нестационарные гауссовские процессы	25
3 Гауссовские однородные поля	39
4 Применение метода дискретизации в задачах, связанных с дробным броуновским движением	57
5 Применение компьютерного моделирования гауссовского шума в дискретном времени для стохастизации модели Ходжкина-Хаксли активности афферентного первичного нейрона в непрерывном времени	66
Заключение	92
Литература	94

ВВЕДЕНИЕ

Математические модели реальных процессов строятся, как правило, в непрерывном времени. Это позволяет применять весь необходимый математический аппарат в полном объеме, например, теорию случайных процессов, а также теорию дифференциальных уравнений и теорию динамических систем. Однако, при использовании таких моделей на практике возникает задача их численной реализации, в связи с чем появляется необходимость перехода к дискретному времени и другим видам аппроксимаций. При этом также возникает вопрос об устойчивости результатов, полученных при переходе от непрерывного времени к дискретному, и о выборе оптимального шага дискретизации.

Кроме того? в настоящее время задача перехода к дискретному времени в математических моделях реальных процессов относится к наиболее актуальным, поскольку для непрерывных процессов не только невозможно численное моделирование, но и измерения различных параметров процессов возможны в определенные моменты времени или в определенных точках пространства. Например, в финансовой математике дискретизация накладывается на временную шкалу.

Начало исследований вероятностей высоких выбросов траектории гауссовского стационарного процесса в непрерывном времени положил Дж. Пикандс в своей работе [3] 1969 года. После этого В.И. Питербарг и В.П. Присяжнюк существенно развили методы, представленные Дж. Пикандсом, исправив определенные недостатки доказательства, но используя основные концепции, после чего расширили результат на случай нестационарных процессов [4].

В свою очередь, для стохастизации при моделировании биомеханических систем используется гауссовский белый шум как процесс с наиболее изученными характеристиками поведения и реалистичными аппроксимациями. Одним из частных случаев такого применения является стохастизация математической модели Ходжкина–Хаксли с модификациями Сото–Александрова [17].

Актуальность темы. В последние десятилетия происходит активное развитие теории гауссовских случайных процессов и полей. Это развитие можно обосновать тем, что случайные гауссовские функции составляют широкий класс случайных процессов и полей. Дополнительным привлекательным фактором является то, что для гауссовских процессов имеется возможность получения общих предельных теорем в терминах естественных характеристик – математического ожидания и ковариационной функции. Также необходимо отметить значительные результаты, полученные при изучении асимптотик вероятностей больших выбросов гауссовских процессов и полей.

Одним из важных путей развития изучения асимптотики вероятностей больших выбросов гауссовских процессов и полей является переход от непрерывного времени к дискретному. Актуальность данной проблемы кроется в необходимости численного моделирования случайных процессов при изучении высоких экстремумов. Такие задачи возникают в тех случаях, когда невозможно непрерывное получение потока данных, то есть для численной реализации необходима модель с дискретным временем. Как показали исследования последних двадцати лет, построение такой модели и ее результативность напрямую зависит от частоты выборки данных по времени, то есть от шага дискретизации. Например, практические вычисления константы Пикандса в теории экстремальных значений встречаются с высокой неустойчивостью при моделировании траекторий стационарного гауссовского процесса или, в частности, дробного броуновского движения. Связанные с этим задачи активно обсуждаются в финансовой литературе, когда наличие данных с высокой временной частотой позволяет исследователю применить математические результаты, полученные ранее для дискретного времени, что невозможно было бы сделать для данных, обновляемых с ежедневной или более редкой частотой.

Вероятности больших выбросов траекторий различных случайных гауссовских функций в дискретном времени, рассматриваемые в данной работе, могут быть использованы в различных моделях реального мира. Одно из приложений результатов для нестационарного процесса описано в четвертой главе данной работы для задачи актуарной математики, а именно для задачи о разорении в случае дробного броуновского движения. В данной задаче дискретизация накладывается на временную шкалу.

Изучение влияния стохастического воздействия на поведение динамической системы является одним из важнейших, поскольку по нему можно сделать выводы о стабильности этой системы. Стохастизация математической модели Ходжкина–Хаксли с модификациями Сото–Александрова помогает решить последовательно две задачи, первая из которых является теоретическим приложением и подводит нас к решению крайне актуальной прикладной задачи:

1. получение математической интерпретации основного закона в нейрофизиологии «Всё или ничего»;
2. исследование влияния гауссовского белого шума на возможность реализации управляемого перехода в математической модели афферентного первичного нейрона (АПН).

Следствием решения второй задачи является возможность оценки целесообразности проведения космического эксперимента по применению гальванической стимуляции вестибулярного аппарата космонавта при выполнении работ по визуальному управлению сближением космического модуля с Российской Орбитальной Служебной Станцией (РОСС).

Цель работы заключается в исследовании вероятностей больших выбросов траекторий различных стационарных и нестационарных случайных гауссовских функций (гауссовские процессы и поля) в дискретном времени в зависимости от поведения корреляционной функции и степени сгущения решетки (шага дискретизации).

Также целью работы является дополнение стохастизацией белым гауссовским шумом модифицированной модели формирования процесса нейронного управления АПН со стимуляцией, разработанной ранее в работе К.В. Тихоновой под руководством В.А. Садовниченко, В.В. Александрова [23].

Научная новизна. Все результаты, представленные в диссертации, являются новыми.

Основные положения, выносимые на защиту.

1. Теорема об асимптотике вероятностей высоких максимумов траекторий стационарных гауссовских процессов в дискретном времени.
2. Теорема об асимптотике вероятностей высоких максимумов траекторий нестационарных гауссовских процессов в дискретном времени.
3. Локальная лемма об асимптотике вероятностей высоких максимумов траекторий однородных двухпараметрических гауссовских полей в дискретном времени.
4. Теорема об асимптотике вероятностей высоких максимумов траекторий однородных двухпараметрических гауссовских полей в дискретном времени.
5. Математическая интерпретация основного закона нейрофизиологии "Все или ничего".
6. Оценка влияния гауссовского белого шума на возможность реализации управляемого перехода в математической модели афферентного первичного нейрона.

Теоретическая и практическая значимость работы. Диссертация носит как теоретический, так и практический характер. Методы и результаты первых трех глав являются теоретическим, но имеют и приложения в актуарной математике, описанные в четвертой главе. Результаты пятой главы имеют практическую ценность для понимания целесообразности проведения космического эксперимента по применению гальванической стимуляции вестибулярного аппарата космонавта при выполнении работ по визуальному управлению.

Методология и методы исследования. Асимптотические методы исследования вероятностей высоких выбросов гауссовских процессов в непрерывном времени достаточно хорошо развиты. Начало этих исследований положил Дж. Пикандс в своей работе [3], введя метод двойных сумм в 1969 году для стационарных процессов. В настоящее время результаты этих исследований обобщены для нестационарных гауссовских процессов В.И. Питербаргом [15, 18].

Методы исследований асимптотики вероятностей высоких выбросов гауссовских полей в целом очень схожи с методами исследований гауссовских про-

цессов. Существенное отличие возникает при наложении условий зависимости функции ковариации от векторного аргумента, поскольку для полей одной размерности эти функции могут отличаться своей структурой, определения структуры даны в [15, 18]. Понятие структуры удобно при исследовании высоких выбросов траекторий гауссовских полей с размерностью аргумента большей двух. В двумерном случае это понятие становится тривиальным: имеются всего две структуры, которые удобно рассматривать в терминах двух ковариационных функций, отличающихся строением.

Что касается соотношений асимптотик вероятностей в дискретном и непрерывном времени, имеются работы, где рассмотрены стационарные гауссовские процессы [9], нестационарные гауссовские процессы [26] и однородные двухпараметрические гауссовские поля [28]. Результаты, опубликованные в статьях [26, 28], также перечислены в этой работе. По методике и методологии рассуждений и доказательств оценки в дискретном времени также немногим отличаются от аналогичных оценок в непрерывном времени, однако для случая дискретного времени характерно существенное возрастание технической сложности за счет разных возможных типов решеток, а также их сочетаний в многомерном случае. Таким образом, для процессов необходимо рассматривать три типа решеток, а для двухпараметрических полей - шесть, что, в свою очередь, влечет рассмотрение соответственно трех и шести разных случаев.

Математическая модель Ходжкина–Хаксли с модификациями Сото–Александрова [14] описывает формирование нейронного управления и является бистабильной динамической системой, обладающей двумя аттракторами: точечным и периодическим. Точечный аттрактор — асимптотически устойчивый фокус. Он расположен близко от предельного цикла, устойчивого по Пуанкаре и являющегося периодическим аттрактором. Область притяжения точечного аттрактора была получена при интегрировании математической модели в обратном времени и нахождении предельного цикла, являющегося в прямом времени границей области притяжения точечного аттрактора. В связи с очень близким расположением этой области притяжения к периодическому аттрактору возникает возможность построения множества достижимости при наличии управляемого перехода (гальванической стимуляции малой амплитуды) из области притяжения точечного аттрактора в область притяжения периодического ат-

трактора.

Стохастизация математической модели происходит за счет добавления гауссовского белого шума. Для численного моделирования траекторий шума в качестве аппроксимации используются ряды Каца-Шинозуки [11]. Для комплексного исследования влияния стохастизации на модель Ходжкина–Хаксли с модификациями Сото–Александрова рассматривались шумы с разной амплитудой.

Апробация работы. Результаты диссертации докладывались на следующих научных конференциях:

1. «Большие выбросы гауссовских нестационарных процессов в дискретном времени и их приложения», Международная научная конференция студентов, аспирантов и молодых ученых «Ломоносов 2018», Москва, Россия, 11 апреля 2018 года.
2. «Большие выбросы двумерных однородных гауссовских полей в дискретном времени», Международная научная конференция студентов, аспирантов и молодых ученых «Ломоносов 2021», Москва, Россия, 14 апреля 2021 года.
3. «Большие выбросы однородных двухпараметрических гауссовских полей в дискретном времени», 7-th St. Petersburg Youth Conference in Probability and Mathematical Physics, Санкт-Петербург, Россия, 7 декабря 2023 года.

А также на аспирантских семинарах:

1. «Большие выбросы двумерных однородных гауссовских полей в дискретном времени», Аспирантский коллоквиум кафедры Теории вероятностей, Москва, Россия, 10 марта 2021.
2. «Исследование и применение связи дискретного и непрерывного времени при моделировании траекторий гауссовских процессов с учетом высоких выбросов», Совместный семинар Кафедры теории вероятностей и Фонда содействия развитию науки «Институт «Вега», Москва, Россия, 27 марта 2024.

Публикации соискателя по теме диссертации. Основные результаты диссертации изложены в 4 публикациях автора. Все 4 публикации [26–29]

опубликованы в рецензируемых научных журналах, входящих в базы SCOPUS, Web of Science, RSCI.

Объем и структура работы. Научно-квалификационная работа состоит из введения, четырех глав, заключения и списка литературы. Полный объем диссертации 97 страниц текста. Список литературы содержит 29 наименований.

Первая глава содержит постановку и все необходимые промежуточные и итоговые результаты для случая стационарных процессов в дискретном времени в зависимости от выбора типа решетки.

В разделе 1.1 приведены определения стационарного процесса и одномерных решеток, на которых будет рассматриваться наша вероятность. Далее следует формулировка и доказательство локальной леммы для асимптотики вероятности достижения высокого максимума траекторией стационарного процесса на трех видах решеток. Также приведены вспомогательные результаты, требующиеся далее для доказательства теоремы.

В разделе 1.2 приведена формулировка теоремы, аналогичной теореме Пикандса, для асимптотики вероятности достижения высокого максимума траекторией стационарного процесса на всех трех типах решеток и полное ее доказательство.

Во **второй главе** содержатся определения нестационарного гауссовского процесса и необходимые ограничения на его дисперсию, функцию корреляции и дисперсию приращений. Далее получен основной результат для асимптотики вероятности достижения высокого максимума траекторией нестационарного процесса на трех решетках в зависимости от отношения параметров степенного поведения дисперсии и функции корреляции.

Третья глава содержит переход от одномерного случая к двумерному: однородному двухпараметрическому гауссовскому полю. По аналогии с первой главой вводится определение поля и ограничения на его ковариационную функцию, а также все результаты, необходимые для доказательства теоремы.

В разделе 3.1 приведены определения однородного двухпараметрического гауссовского поля и условия на его функцию корреляции, также приведены определения шести двумерных решеток, на которых будут рассматриваться наши вероятности. Далее следует формулировка и доказательство локальной лем-

мы для асимптотики вероятности достижения высокого максимума траекторий однородного двухпараметрического гауссовского поля на шести видах решеток для двух типов ковариационной функции. Также приведены вспомогательные результаты, требующиеся далее для доказательства теоремы.

В разделе 3.2 приведена формулировка теоремы, аналогичной теореме Пикандса, для асимптотики вероятности достижения высокого максимума траекторией однородного двухпараметрического гауссовского поля на всех трех типах решеток и полное ее доказательство.

В **четвертой главе** содержится приложение результатов из первой и второй глав для дробного броуновского движения и задачи о разорении для дробного броуновского движения в дискретном времени.

В разделе 4.1 приведено определение дробного броуновского движения, а также находятся необходимые константы для применения теоремы из второй главы. После этого приводятся асимптотики вероятностей достижения высокого максимума траекторией дробного броуновского движения в зависимости от типа решетки и величины параметра Херста.

В разделе 4.2 приведено описание задачи о разорении для дробного броуновского движения и поиск соответствующих констант для применения теоремы из второй главы. После этого приводится асимптотика искомой вероятности в общем виде для всех решеток.

В **пятой главе** содержится приложение аппроксимации гауссовского белого шума для стохастизации математической модели Ходжкина–Хаксли афферентного первичного нейрона с модификацией Сото–Александрова.

В разделе 5.1 представлен вывод математической модели Ходжкина–Хаксли афферентного первичного нейрона с модификацией Сото–Александрова.

В разделе 5.2 приведен результат стохастизации модифицированной модели Ходжкина–Хаксли. Рассмотрен переход из области притяжения точечного аттрактора типа устойчивый фокус в область притяжения периодического аттрактора и обратный переход в область притяжения точечного аттрактора. При этом такие переходы могут неоднократно чередоваться, что является математической интерпретацией основного закона нейрофизиологии ”Всё или ничего”.

В разделе 5.3 продолжено исследование модифицированной модели Ходжкина–Хаксли при наличии случайного шума. Показано, что при добавлении опреде-

ленного тока кратковременной стимуляции (гальванической стимуляции вестибулярного аппарата космонавта на орбите), случайный шум небольшой амплитуды не препятствует переходу системы из режима движения в окрестности малого устойчивого предельного цикла (режим "Ничего" в соответствии с основным законом нейрофизиологии "Всё или ничего") в режим движения вдоль большого устойчивого предельного цикла (режим "Всё"). В то же время, наличие большого по амплитуде случайного шума может приводить к серии переходов системы из одного режима в другой и обратно даже при кратковременной стимуляции. При отсутствии стимуляции и при большой величине шума такие серии переходов наблюдались при моделировании и ранее.

В заключении приведены научные результаты, выносимые на защиту научно-квалификационной работы и выражена благодарность научному руководителю доктору физико-математических наук профессору Питербаргу Владимиру Ильичу.

Глава 1

СТАЦИОНАРНЫЕ ПРОЦЕССЫ

Рассмотрим гауссовский стационарный процесс $X(t)$, $t \in \mathbb{R}$, с нулевым средним и единичной дисперсией, корреляционная функция которого $r(t)$ удовлетворяет условиям

$$r(t) = 1 - |t|^\alpha + o(|t|^\alpha), \quad t \rightarrow 0, \quad \alpha > 0; \quad \text{и} \quad r(t) < 1 \quad \forall t > 0. \quad (1.1)$$

Мы рассмотрим три типа решеток на \mathbb{R} при $\alpha \in (0, 2]$:

1. $\mathcal{R}_d(\gamma) = \{ku^{-2/\gamma}, k \in \mathbb{Z}\}$, $\gamma < \alpha$ – плотная решетка (dense grid);
2. $\mathcal{R}_p(b, \gamma) = \{kbu^{-2/\gamma}, k \in \mathbb{Z}\}$, $b > 0$, $\gamma = \alpha$ – решетка Пикандса (Pickands' grid);
3. $\mathcal{R}_s(\gamma) = \{ku^{-2/\gamma}, k \in \mathbb{Z}\}$, $\gamma > \alpha$ – разреженная решетка (sparse grid).

Замечание 1. Обратим внимание, что в аргументе решетки стоит часть степени u . Значит, аргумент может быть как больше 0 (с ростом u шаг решетки увеличивается), так и меньше 0 (с ростом u шаг решетки уменьшается).

Обозначим $\chi(t) = \sqrt{2}B_{\alpha/2}(t) - |t|^\alpha$, где $B_{\alpha/2}(t)$ – дробное броуновское движение с показателем Херста $\alpha/2$.

1.1 Локальная лемма

Лемма 1.

В вышеприведенных условиях, для любого $T > 0$:

- Для плотной решетки при $u \rightarrow \infty$

$$P \left(\max_{t \in [0, Tu^{-2/\alpha}] \cap \mathcal{R}_d(\gamma)} X(t) > u \right) = H_\alpha(T) \Psi(u) (1 + o(1)),$$

$$\text{где } H_\alpha(T) = E \exp \left(\max_{t \in [0, T]} \chi(t) \right) < \infty.$$

- Для решетки Пикандса при $u \rightarrow \infty$

$$P \left(\max_{t \in [0, Tu^{-2/\alpha}] \cap \mathcal{R}_p(b, \gamma)} X(t) > u \right) = H_\alpha(b, T) \Psi(u) (1 + o(1)),$$

$$\text{где } H_\alpha(b, T) = E \exp \left(\max_{k: kb \in [0, T]} \chi(kb) \right) < \infty.$$

- Для разреженной решетки при $u \rightarrow \infty$

$$P \left(\max_{t \in [0, Tu^{-2/\alpha}] \cap \mathcal{R}_s(\gamma)} X(t) > u \right) = \Psi(u) (1 + o(1)).$$

Замечание 2. В случае решетки Пикандса асимптотическое распределение зависит от константы b .

Доказательство: Проведем доказательство следуя схеме доказательства Леммы 9.2.1 [18]. Для всех трех решеток по формуле полной вероятности получим (\mathcal{R} обозначает для краткости нужную решетку из трех):

$$\begin{aligned} & P \left(\max_{t \in [0, Tu^{-2/\alpha}] \cap \mathcal{R}} X(t) > u \right) \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-v^2/2} P \left(\max_{t \in [0, Tu^{-2/\alpha}] \cap \mathcal{R}} X(t) > u \mid X(0) = v \right) dv \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}u} e^{-u^2/2} \int_{-\infty}^{\infty} e^{w-w^2/2u^2} P \left(\max_{t \in [0, Tu^{-2/\alpha}] \cap \mathcal{R}} X(t) > u \mid X(0) = u - \frac{w}{u} \right) dw \quad (1.2) \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}u} e^{-u^2/2} \int_{-\infty}^{\infty} e^{w-w^2/2u^2} P \left(\max_{t \in [0, T] \cap \mathcal{R}'} \chi_u(t) > w \mid X(0) = u - \frac{w}{u} \right) dw, \end{aligned}$$

где второе равенство получено заменой переменной $v = u - w/u$, а третье заменой процесса $\chi_u(t) = u(X(u^{-2/\alpha}t) - u) + w$, а \mathcal{R}' обозначает решетку \mathcal{R} с шагом умноженным на $u^{2/\alpha}$:

Для плотной и разреженной решетки

$$\begin{aligned} \mathcal{R}' &= u^{2/\alpha} \mathcal{R} = u^{2/\alpha} \{ku^{-2/\alpha}, k \in \mathbb{Z}\} = \{ku^{-2/\alpha} u^{2/\alpha}, k \in \mathbb{Z}\} \\ &= \{ku^{-2(1/\alpha - 1/\gamma)}, k \in \mathbb{Z}\} = \{ku^{-2/\frac{\alpha\gamma}{\alpha-\gamma}}, k \in \mathbb{Z}\} \\ &= \mathcal{R} \left(\frac{\alpha\gamma}{\alpha-\gamma} \right) \text{ вместо } \mathcal{R}(\gamma) \end{aligned}$$

Заметим, что для разреженной решетки после растягивания прямой и решетки в $u^{2/\alpha}$ раз для процесса $\chi_u(t)$ мы получаем, что аргумент решетки $\mathcal{R}(\frac{\alpha\gamma}{\alpha-\gamma})$ меньше 0, а значит, длина шага новой решетки является положительной степенью u и решетка расширяется (с ростом u).

Для решетки Пикандса

$$\mathcal{R}' = u^{2/\alpha}\mathcal{R} = u^{2/\gamma}\{kbu^{-2/\gamma}, k \in \mathbb{Z}\} = \{kb, k \in \mathbb{Z}\} = \mathcal{R}_p(b, 0),$$

где 0 в аргументе решетки обозначает, что шаг решетки не зависит от u .

Получаем (см. Лекцию 1 раздел 1.3 [18]) для условного математического ожидания и дисперсии

$$\begin{aligned} E\left(\chi_u(t) \mid X(0) = u - \frac{w}{u}\right) &= u \left(E\left(X(u^{-2/\alpha}t) \mid X(0) = u - \frac{w}{u}\right) - u \right) + w \\ &= -u^2(1 - r(u^{-2/\alpha}t)) + w(1 - r(u^{-2/\alpha}t)), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{var}\left(\chi_u(t) - \chi_u(s) \mid X(0) = u - \frac{w}{u}\right) \\ = u^2 \left(\text{var}[X(u^{-2/\alpha}t) - X(u^{-2/\alpha}s)] - [r(u^{-2/\alpha}t) - r(u^{-2/\alpha}s)]^2 \right), \end{aligned}$$

а также,

$$E\left(\chi_u(0) \mid X(0) = u - \frac{w}{u}\right) = E\left(\chi_u^2(0) \mid X(0) = u - \frac{w}{u}\right) = 0.$$

Применив соотношение (1.1) для условного математического ожидания и дисперсии приращений получаем, что при $u \rightarrow \infty$ выполнено

$$E\left(\chi_u(t) \mid X(0) = u - \frac{w}{u}\right) = -|t|^\alpha + wo(1)$$

и

$$\text{var}\left(\chi_u(t) - \chi_u(s) \mid X(0) = u - \frac{w}{u}\right) = 2|t - s|^\alpha + o(1).$$

Также для всех положительных u , всех w из некоторого ограниченного множества W и некоторой константы C :

$$E\left((\chi_u(t) - \chi_u(s))^2 \mid X(0) = u - \frac{w}{u}\right) \leq C|t - s|^\alpha$$

и

$$|E \left(\chi_u(t) \mid X(0) = u - \frac{w}{u} \right)| \leq T^\alpha + \frac{1}{2}w.$$

Таким образом, по теоремам Прохорова и Арцела-Асколи имеет место слабая сходимось при $u \rightarrow \infty$ условных распределений процесса $\chi_u(t)$ к (безусловным) распределениям процесса $\chi(t)$.

Для плотной решетки: при $\gamma < \alpha$ шаг решетки \mathcal{R}' стремится к нулю, учитывая непрерывность траекторий, мы имеем для любого w

$$\lim_{u \rightarrow \infty} P \left(\max_{t \in [0, T] \cap \mathcal{R}'} \chi_u(t) > w \mid X(0) = u - \frac{w}{u} \right) = P \left(\max_{t \in [0, T]} \chi(t) > w \right).$$

Для решетки Пикандса: при $\gamma = \alpha$ шаг решетки \mathcal{R}' не меняется и равен b , поэтому

$$\lim_{u \rightarrow \infty} P \left(\max_{t \in [0, T] \cap \mathcal{R}'} \chi_u(t) > w \mid X(0) = u - \frac{w}{u} \right) = P \left(\max_{k: kb \in [0, T]} \chi(kb) > w \right).$$

Для разреженной решетки: при $\gamma > \alpha$ шаг решетки \mathcal{R}' стремится к бесконечности, а количество точек на интервале стремится к одной, $t = 0$. Поскольку при условии $X(0) = u - \frac{w}{u}$ получаем $\chi(0) = 0$, тогда

$$\lim_{u \rightarrow \infty} P \left(\max_{t \in [0, T] \cap \mathcal{R}'} \chi_u(t) > w \mid X(0) = u - \frac{w}{u} \right) = P(\chi(0) > w) = \mathbf{I}_{w < 0},$$

где \mathbf{I} – индикаторная функция.

Далее, для достаточно больших u :

$$\begin{aligned} & P \left(\max_{t \in [0, T] \cap \mathcal{R}'} \chi_u(t) > w \mid X(0) = u - \frac{w}{u} \right) \\ & \leq P \left(\max_{t \in [0, T]} \chi_u(t) > w \mid X(0) = u - \frac{w}{u} \right) \\ & \leq P \left(\max_{t \in [0, T]} (\chi_u(t) - E\chi_u(t)) > w - \frac{1}{2}|w| \mid X(0) = u - \frac{w}{u} \right) \end{aligned} \tag{1.3}$$

Для гауссовского процесса $\chi_u(t) - E\chi_u(t)$, рассматриваемого при условии $X(0) = u - w/u$, выполнены условия Предложения 9.2.2 [18]. Откуда по теореме Лебега о мажорированной сходимости можно перейти к пределу под знаком интеграла в (1.2). И поскольку для неотрицательной случайной величины со свойством

$e^x P(\xi > x) \rightarrow 0$ при $x \rightarrow \infty$ имеет место равенство

$$\begin{aligned} Ee^\xi &= -\int_{-\infty}^{\infty} e^x dP(\xi > x) = -e^x P(\xi > x)|_{-\infty}^{\infty} + \int_{-\infty}^{\infty} e^x P(\xi > x) dx \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} e^x P(\xi > x) dx, \end{aligned}$$

лемма доказана. Для разреженной решетки мы используем очевидное равенство

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^w \mathbf{I}_{w < 0} dw = 1. \quad \blacksquare$$

Получим следствие аналогичное Следствию 9.2.1, [18]:

Следствие 1.

В условиях предыдущей леммы для всех $T, T' > 0$ и $\tau_0 > T$ получим:

Для плотной решетки при $u \rightarrow \infty$

$$\begin{aligned} P\left(\max_{t \in [0, Tu^{-2/\alpha}] \cap \mathcal{R}_d(\gamma)} X(t) > u, \max_{t \in [\tau_0 u^{-2/\alpha}, (\tau_0 + T') u^{-2/\alpha}] \cap \mathcal{R}_d(\gamma)} X(t) > u\right) = \\ = H_\alpha(\tau_0, T, T') \Psi(u) (1 + o(1)), \end{aligned}$$

$$\text{где } H_\alpha(\tau_0, T, T') = \int_{-\infty}^{\infty} e^v P\left(\max_{t \in [0, T]} \chi(t) > v, \max_{t \in [\tau_0, \tau_0 + T']} \chi(t) > v\right) dv < \infty.$$

Для решетки Пикандса при $u \rightarrow \infty$

$$\begin{aligned} P\left(\max_{t \in [0, Tu^{-2/\alpha}] \cap \mathcal{R}_p(b, \gamma)} X(t) > u, \max_{t \in [\tau_0 u^{-2/\alpha}, (\tau_0 + T') u^{-2/\alpha}] \cap \mathcal{R}_p(b, \gamma)} X(t) > u\right) = \\ = H_\alpha(b, \tau_0, T, T') \Psi(u) (1 + o(1)), \end{aligned}$$

$$\text{где } H_\alpha(b, \tau_0, T, T') =$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} e^v P\left(\max_{k: kb \in [0, T]} \chi(kb) > v, \max_{l: lb \in [\tau_0, \tau_0 + T']} \chi(lb) > v\right) dv < \infty, \quad k, l \in \mathbb{N}.$$

Для разреженной решетки при $u \rightarrow \infty$

$$\begin{aligned} P\left(\max_{t \in [0, Tu^{-2/\alpha}] \cap \mathcal{R}_s(\gamma)} X(t) > u, \max_{t \in [\tau_0 u^{-2/\alpha}, (\tau_0 + T') u^{-2/\alpha}] \cap \mathcal{R}_s(\gamma)} X(t) > u\right) = \\ = \Psi(u) (1 + o(1)). \end{aligned}$$

Доказательство: Для всех трех решеток доказательство проводится аналогично доказательству оригинального Следствия 9.2.1, [18]: с помощью разбиения на три вероятности и применения Леммы 1 к каждой. ■

Теперь сформулируем двумерный аналог Леммы 1.

Лемма 2.

Пусть $\varepsilon \in (0, 1/2)$ и

$$1 - \frac{1}{2}|t|^\alpha \geq r(t) \geq 1 - 2|t|^\alpha$$

для всех $t \in [0, \varepsilon]$ (такое ε всегда существует). Тогда для каждой решетки найдутся свои константы $h_d, h_p, h_s > 0$ такие, что для всех $T > 0$, $\tau_0 > T$, $u \geq u_0 := (2(\tau_0 + T)/\varepsilon)^{\alpha/2}$ имеет место

для плотной решетки

$$\begin{aligned} P(\tau_0, T, \mathcal{R}_d(\gamma)) &:= P\left(\max_{t \in [0, u^{-2/\alpha}T] \cap \mathcal{R}_d} X(t) > u, \max_{t \in [u^{-2/\alpha}\tau_0, u^{-2/\alpha}(\tau_0+T)] \cap \mathcal{R}_d} X(t) > u\right) \\ &\leq h_d \Psi(u) \exp\left(-\frac{1}{8}(\tau_0 - T)^\alpha\right). \end{aligned}$$

для решетки Пикандса

$$\begin{aligned} P(\tau_0, T, \mathcal{R}_p(b, \gamma)) &:= \\ P\left(\max_{t \in [0, u^{-2/\alpha}T] \cap \mathcal{R}_p(b, \gamma)} X(t) > u, \max_{t \in [u^{-2/\alpha}\tau_0, u^{-2/\alpha}(\tau_0+T)] \cap \mathcal{R}_p(b, \gamma)} X(t) > u\right) \\ &\leq h_p \Psi(u) \exp\left(-\frac{1}{8}(\tau_0 - T)^\alpha\right). \end{aligned}$$

для разреженной решетки

$$\begin{aligned} P(\tau_0, T, \mathcal{R}_s(\gamma)) &:= \\ P\left(\max_{t \in [0, u^{-2/\alpha}T] \cap \mathcal{R}_s(\gamma)} X(t) > u, \max_{t \in [u^{-2/\alpha}\tau_0, u^{-2/\alpha}(\tau_0+T)] \cap \mathcal{R}_s(\gamma)} X(t) > u\right) \\ &\leq h_s \Psi(u) \exp\left(-\frac{1}{8}(\tau_0 - T)^\alpha\right). \end{aligned}$$

Доказательство: Рассмотрим гауссовское поле $X(s, t) = X(s) + X(t)$. Тогда (\mathcal{R} обозначает для краткости нужную решетку из трех)

$$P(\tau_0, T, \mathcal{R}) \leq P \left(\max_{(s,t) \in ([0, u^{-2/\alpha} T] \cap \mathcal{R}) \times ([u^{-2/\alpha} \tau_0, u^{-2/\alpha}(\tau_0 + T)] \cap \mathcal{R})} X(s, t) > 2u \right).$$

В силу условий леммы для дисперсии $\sigma^2(s, t) = 2(1 + r(t - s))$ поля $X(s, t)$ имеем

$$2 \leq 4 - 4|t - s|^\alpha \leq \sigma^2(s, t) \leq 4 - |t - s|^\alpha \quad (1.4)$$

Следовательно, на рассматриваемом множестве

$$\sigma^2(s, t) \leq 4 - u^{-2}(\tau_0 - T)^\alpha.$$

Рассмотрим нормированное поле $X^*(s, t) = X(s, t)/\sigma(s, t)$. Имеем

$$\begin{aligned} & P \left(\max_{(s,t) \in ([0, u^{-2/\alpha} T] \cap \mathcal{R}) \times ([u^{-2/\alpha} \tau_0, u^{-2/\alpha}(\tau_0 + T)] \cap \mathcal{R})} X(s, t) > 2u \right) \\ & \leq P \left(\max_{(s,t) \in ([0, u^{-2/\alpha} T] \cap \mathcal{R}) \times ([u^{-2/\alpha} \tau_0, u^{-2/\alpha}(\tau_0 + T)] \cap \mathcal{R})} X^*(s, t) > \frac{2u}{\sqrt{4 - u^{-2}(\tau_0 - T)^\alpha}} \right). \end{aligned}$$

Нетрудно оценить, пользуясь (1.4) и неравенством $(a + b)^2 \leq 2(a^2 + b^2)$, естественную метрику, порожденную этим полем,

$$E (X^*(s, t) - X^*(s_1, t_1))^2 \leq 16(|t - s|^\alpha + |t_1 - s_1|^\alpha).$$

Рассмотрим два независимых стационарных гауссовских процесса $\eta_1(t)$ и $\eta_2(t)$ с нулевыми средними и ковариационными функциями $\exp(-16|t|^\alpha)$. Нетрудно посчитать, что ковариационная функция поля $X^*(s, t)$, где

$$(s, t) \in \left([0, u^{-2/\alpha} T] \cap \mathcal{R} \right) \times \left([u^{-2/\alpha} \tau_0, u^{-2/\alpha}(\tau_0 + T)] \cap \mathcal{R} \right),$$

мажорирует для всех $u \geq u_0$ ковариационную функцию

$$\frac{1}{2} (\exp(-16|s|^\alpha) + \exp(-16|t|^\alpha))$$

гауссовского однородного случайного поля $\eta(s, t) := \frac{\eta_1(s) + \eta_2(t)}{\sqrt{2}}$, где $(s, t) \in ([0, u^{-2/\alpha} T] \cap \mathcal{R}) \times ([u^{-2/\alpha} \tau_0, u^{-2/\alpha}(\tau_0 + T)] \cap \mathcal{R})$.

В силу неравенства Слепяна

$$\begin{aligned}
& P \left(\max_{(s,t) \in ([0, u^{-2/\alpha} T] \cap \mathcal{R}) \times ([u^{-2/\alpha} \tau_0, u^{-2/\alpha} (\tau_0 + T)] \cap \mathcal{R})} X^*(s, t) > \frac{2u}{\sqrt{4 - u^{-2}(\tau_0 - T)^\alpha}} \right) \\
& \leq P \left(\max_{(s,t) \in ([0, u^{-2/\alpha} T] \cap \mathcal{R}) \times ([u^{-2/\alpha} \tau_0, u^{-2/\alpha} (\tau_0 + T)] \cap \mathcal{R})} \eta(s, t) > \frac{2u}{\sqrt{4 - u^{-2}(\tau_0 - T)^\alpha}} \right).
\end{aligned}$$

Теперь воспользуемся двумерным аналогом Леммы 1 – Леммой 4 и Леммой 5, чтобы получить, что правая часть не превосходит для всех $u \geq u_0$

$$CT^2 \Psi \left(\frac{2u}{\sqrt{4 - u^{-2}(\tau_0 - T)^\alpha}} \right) \leq C_1 T^2 \Psi(u) \exp \left(-\frac{1}{8}(\tau_0 - T)^\alpha \right),$$

что и требовалось доказать.

(Для каждой решетки получится своя собственная константа со своей зависимостью от T . Однако, оставшийся множитель вероятности будет идентичен.)

■

1.2 Аналог Теоремы Пикандса в дискретном времени

Теорема 1.

Пусть выполнено условие (1.1). Тогда для любого p такого, что $r(t) < 1$, $t \in (0, p]$ имеет место соотношение:

- для плотной решетки при $u \rightarrow \infty$

$$P\left(\max_{t \in [0, p] \cap \mathcal{R}_d(\gamma)} X(t) > u\right) = H_\alpha p u^{2/\alpha} \Psi(u) (1 + o(1)),$$

$$\text{где } H_\alpha = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{H_\alpha(T)}{T} \quad \text{и } 0 < H_\alpha < \infty.$$

- для решетки Пикандса при $u \rightarrow \infty$

$$P\left(\max_{t \in [0, p] \cap \mathcal{R}_p(b, \gamma)} X(t) > u\right) = H_{\alpha, b} p u^{2/\alpha} \Psi(u) (1 + o(1)),$$

$$\text{где } H_{\alpha, b} = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{H_\alpha(b, T)}{T} \quad \text{и } 0 < H_{\alpha, b} < \infty.$$

- для разреженной решетки при $u \rightarrow \infty$

$$P\left(\max_{t \in [0, p] \cap \mathcal{R}_s(\gamma)} X(t) > u\right) = p u^{2/\gamma} \Psi(u) (1 + o(1))$$

(результат заимствован из Леммы 2 [9]).

При этом p может убывать к нулю при $u \rightarrow \infty$ таким образом, чтобы $p u^{2/\alpha} \rightarrow \infty$. Число p также может стремиться к бесконечности, лишь бы правая часть асимптотики стремилась к нулю.

Доказательство: Для краткости обозначим \mathcal{R} нужную решетку из первых двух. Если потребуется дополнительное уточнение для конкретной решетки, то перейдем к параллельному доказательству для каждой решетки. Обозначим

$$\Delta_k = [k u^{-2/\alpha} T, (k+1) u^{-2/\alpha} T] \cap \mathcal{R}, \quad T > 0, \quad N_t = \left[\frac{t}{u^{-2/\alpha} T} \right], \quad (1.5)$$

где $[\cdot]$ - целая часть числа. В силу стационарности

$$P\left(\max_{t \in [0, p] \cap \mathcal{R}} X(t) > u\right) \leq (N_p + 1) P\left(\max_{t \in \Delta_0} X(t) > u\right), \quad (1.6)$$

и в силу Леммы 1:

для плотной решетки

$$\limsup_{u \rightarrow \infty} \frac{P(\max_{t \in [0,p] \cap \mathcal{R}_d(\gamma)} X(t) > u)}{pu^{2/\alpha} \Psi(u)} \leq \frac{H_\alpha(T)}{T}. \quad (1.7)$$

для решетки Пикандса

$$\limsup_{u \rightarrow \infty} \frac{P(\max_{t \in [0,p] \cap \mathcal{R}_p(b,\gamma)} X(t) > u)}{pu^{2/\alpha} \Psi(u)} \leq \frac{H_\alpha(b,T)}{T}. \quad (1.8)$$

Далее, в силу неравенства Бонферрони и стационарности, для обеих решеток имеем

$$\begin{aligned} & P(\max_{t \in [0,p] \cap \mathcal{R}} X(t) > u) \\ & \geq N_p P(\max_{t \in \Delta_0} X(t) > u) - 2 \sum_{k=1}^{N_p} (N_p - k) P(\max_{t \in \Delta_0} X(t) > u, \max_{t \in \Delta_k} X(t) > u). \end{aligned} \quad (1.9)$$

Последнюю сумму назовем двойной суммой и обозначим Σ_2 . Имеем,

$$\begin{aligned} \Sigma_2 & \leq N_p P(\max_{t \in \Delta_0} X(t) > u, \max_{t \in \Delta_1} X(t) > u) \\ & + N_p \sum_{k=2}^{N_{\varepsilon/4}} P(\max_{t \in \Delta_0} X(t) > u, \max_{t \in \Delta_k} X(t) > u) \\ & + N_p \sum_{k=N_{\varepsilon/4}+1}^p P(\max_{t \in \Delta_0} X(t) > u, \max_{t \in \Delta_k} X(t) > u) \\ & =: A_1 + A_2 + A_3, \end{aligned} \quad (1.10)$$

где число ε взято из Леммы 2. Оценим теперь каждое из трех слагаемых в правой части.

Начнем с A_3 . Выберем u столь большим, чтобы выполнялось неравенство $Tu^{-2/\alpha} \leq \varepsilon/16$. Тогда расстояние между Δ_0 и Δ_k в третьей сумме не меньше, чем $\varepsilon/8$, поэтому для членов из A_3 имеем, пользуясь стационарностью,

$$\begin{aligned} P(\max_{t \in \Delta_0} X(t) > u, \max_{t \in \Delta_k} X(t) > u) & \leq P(\max_{(s,t) \in \Delta_0 \times \Delta_k} X(s) + X(t) > 2u) \\ & \leq P(\max_{([0,1] \cap \mathcal{R}) \times ([1+\varepsilon/8, 2] \cap \mathcal{R})} X(s) + X(t) > 2u) \\ & \leq P(\max_{[0,1] \times [1+\varepsilon/8, 2]} X(s) + X(t) > 2u). \end{aligned}$$

К последней вероятности применим Предложение 9.2.2 [18]. Для этого заметим, что

$$\text{var}(X(s) + X(t)) = 2 + 2r(t - s) \leq 4 - 2 \max_{s \geq \varepsilon/8} (1 - r(s)) = 4 - 2\delta, \quad \delta > 0.$$

В силу указанного предложения,

$$\begin{aligned} P\left(\max_{[0,1] \times [1+\varepsilon/8,2]} X(s) + X(t) > 2u\right) &\leq C u^{2/\alpha-1} \exp\left(-\frac{4u^2}{8-4\delta}\right) \\ &= O\left(u^{2/\alpha-1} \exp(-u^2(1+\delta)/2)\right). \end{aligned}$$

Поскольку N_p растет степенным образом,

$$A_3 = O(\exp(-u^2(1+\delta')/2)), \quad (1.11)$$

для любого $\delta' \in (0, \delta/2)$.

Слагаемое A_2 можно оценить с помощью Леммы 2, поскольку нижний и верхний пределы суммирования выбраны соответствующим образом. Имеем (h для удобства обозначает нужную константу из двух: h_d, h_p)

$$\begin{aligned} \limsup_{u \rightarrow \infty} \frac{A_2}{N_p \Psi(u)} &\leq \limsup_{u \rightarrow \infty} \frac{N_{\varepsilon/2} h \Psi(u) \sum_{k=2}^{N_{\varepsilon/2}} \exp(-((k-1)T)^\alpha/8)}{N_p \Psi(u)} \\ &\leq \frac{h\varepsilon}{2p} \sum_{k=1}^{\infty} \exp(-(kT)^\alpha/8) \leq C \exp(-T^\alpha/8), \end{aligned} \quad (1.12)$$

где константа C зависит только от ε, p, α .

Оценим теперь первое слагаемое, A_1 . Имеем, что

$$\begin{aligned} &P(\max_{t \in \Delta_0} X(t) > u, \max_{t \in \Delta_1} X(t) > u) \\ &\leq P(\max_{t \in \Delta_0} X(t) > u, \max_{t \in u^{-2/\alpha}[T+\sqrt{T}, 2T] \cap \mathcal{R}} X(t) > u) + P(\max_{t \in u^{-2/\alpha}[0, \sqrt{T}] \cap \mathcal{R}} X(t) > u) \\ &\leq P(\max_{t \in \Delta_0} X(t) > u, \max_{t \in u^{-2/\alpha}[T+\sqrt{T}, 2T+\sqrt{T}] \cap \mathcal{R}} X(t) > u) + P(\max_{t \in u^{-2/\alpha}[0, \sqrt{T}] \cap \mathcal{R}} X(t) > u). \end{aligned}$$

Второе слагаемое оценим при помощи Леммы 1 и Предложения 9.2.3 [18], первое – при помощи Леммы 2. Получаем, что для плотной решетки

$$\begin{aligned} \limsup_{u \rightarrow \infty} \frac{A_1}{N_p \Psi(u)} &\leq h_d \exp\left(-\left(\sqrt{T}\right)^\alpha/8\right) + H_\alpha(\sqrt{T}) \\ &\leq h_d \exp\left(-T^{\alpha/2}/8\right) + H_\alpha(1)\sqrt{T}. \end{aligned} \quad (1.13)$$

для решетки Пикандса

$$\begin{aligned} \limsup_{u \rightarrow \infty} \frac{A_1}{N_p \Psi(u)} &\leq h_p \exp\left(-\left(\sqrt{T}\right)^\alpha / 8\right) + H_\alpha(b, \sqrt{T}) \\ &\leq h_p \exp\left(-T^{\alpha/2}/8\right) + H_\alpha(b, 1)\sqrt{T}. \end{aligned} \quad (1.14)$$

Сводим теперь все оценки вместе: оценку сверху (1.7) и оценку снизу (1.9) – (1.13). Для любых $T_1, T_2 > 0$,

для плотной решетки

$$\begin{aligned} \frac{H_\alpha(T_1)}{T_1} &\geq \limsup_{u \rightarrow \infty} \frac{P(\max_{t \in [0, p] \cap \mathcal{R}_d(\gamma)} X(t) > u)}{pu^{2/\alpha} \Psi(u)} \\ &\geq \liminf_{u \rightarrow \infty} \frac{P(\max_{t \in [0, p] \cap \mathcal{R}_d(\gamma)} X(t) > u)}{pu^{2/\alpha} \Psi(u)} \\ &\geq \frac{H_\alpha(T_2)}{T_2} - \frac{2Ch_d}{T_2} \exp(-T_2^\alpha/8) - \frac{2h_d}{T_2} \exp(-T_2^{\alpha/2}/8) - \frac{H_\alpha(1)}{\sqrt{T_2}}. \end{aligned} \quad (1.15)$$

для решетки Пикандса

$$\begin{aligned} \frac{H_\alpha(b, T_1)}{T_1} &\geq \limsup_{u \rightarrow \infty} \frac{P(\max_{t \in [0, p] \cap \mathcal{R}_p(b, \gamma)} X(t) > u)}{pu^{2/\alpha} \Psi(u)} \\ &\geq \liminf_{u \rightarrow \infty} \frac{P(\max_{t \in [0, p] \cap \mathcal{R}_p(b, \gamma)} X(t) > u)}{pu^{2/\alpha} \Psi(u)} \\ &\geq \frac{H_\alpha(b, T_2)}{T_2} - \frac{2Ch_p}{T_2} \exp(-T_2^\alpha/8) - \frac{2h_p}{T_2} \exp(-T_2^{\alpha/2}/8) - \frac{H_\alpha(b, 1)}{\sqrt{T_2}}. \end{aligned} \quad (1.16)$$

В силу Теоремы 9.3.1 [18]:

$$\liminf_{T \rightarrow \infty} \frac{H_\alpha(T)}{T} > 0. \quad (1.17)$$

Аналогичное свойство верно и для решетки Пикандса:

$$\liminf_{T \rightarrow \infty} \frac{H_\alpha(b, T)}{T} > 0. \quad (1.18)$$

Устремляя в (1.15) и (1.16) T_2 к бесконечности и пользуясь Предложением 9.2.3 [18], получаем:

для плотной решетки

$$\infty > \liminf_{T_1 \rightarrow \infty} \frac{H_\alpha(T_1)}{T_1} \geq \limsup_{T_2 \rightarrow \infty} \frac{H_\alpha(T_2)}{T_2} > 0,$$

для решетки Пикандса

$$\infty > \liminf_{T_1 \rightarrow \infty} \frac{H_\alpha(b, T_1)}{T_1} \geq \limsup_{T_2 \rightarrow \infty} \frac{H_\alpha(b, T_2)}{T_2} > 0,$$

откуда следует утверждение теоремы для разреженной решетки и решетки Пикандса.

Теперь для решетки Пикандса докажем (1.18), вывод будет аналогичен оригинальной теореме Пикандса (Теореме 9.3.1 [18]). Для этого рассмотрим множество

$$D = \bigcup_j \Delta_{2j} \cap [0, p]$$

и повторим для решетки Пикандса оценки сверху (1.7) и снизу (1.9)-(1.13) для вероятности $P(\max_{t \in D} X(t) > u)$. Получим аналогичное (1.16) неравенство

$$\frac{H_\alpha(b, T_1)}{2T_1} \geq \frac{H_\alpha(b, T_2)}{2T_2} - \frac{2Ch_p}{T_2} \exp(-T_2^\alpha/8). \quad (1.19)$$

Двойка в знаменателях появляется, поскольку множество D содержит асимптотически в два раза меньше интервалов Δ_j . Два члена справа пропадают в силу отсутствия в D соседних интервалов Δ_j . Выберем T_2 столь большим, чтобы выполнялось неравенство

$$\frac{H_\alpha(b, T_2)}{2T_2} - \frac{2Ch_p}{T_2} \exp(-T_2^\alpha/8) > 0.$$

Поскольку $H_\alpha(b, T_2)$ не убывает, правая часть (1.19) также положительна. Переходя к нижнему пределу в левой части, получаем требуемое неравенство (1.18).

Аналогичный ход решения для разреженной решетки не подходит, поскольку не будет выполняться важное условие доказательства, аналогичное (1.17):

$$\lim_{T \rightarrow \infty} \frac{H_\alpha(T)}{T} = H_\alpha, \text{ так как для разреженной решетки } H_\alpha(T) = 1. \quad (1.20)$$

Доказательство результата можно найти в Лемме 2 [9].

■

Аналогичные результаты получены в [9]: для плотной решетки в Леммах 4 и 5 (для этого случая точная асимптотика не указана), решетки Пикандса в Лемме 3 и разреженной решетки в Лемме 2.

Глава 2

НЕСТАЦИОНАРНЫЕ ГАУССОВСКИЕ ПРОЦЕССЫ

Рассмотрим гауссовский нестационарный процесс, дисперсия которого достигает максимума в единственной точке. Итак, пусть теперь $X(t)$, $t \in [0, T]$, с нулевым средним, дисперсией $\sigma^2(t) = EX^2(t)$ и корреляционной функцией $r(s, t) = EX(s)X(t)/\sigma(s)\sigma(t)$. Мы предположим, что дисперсия достигает своего единственного максимума во внутренней точке $t_0 \in (0, T)$. Случай, когда дисперсия достигает своего максимума на краях отрезка $[0, T]$, то есть $t_0 = 0$ или $t_0 = T$, рассматривается так же и в тех же условиях.

Введем следующие условия на процесс $X(t)$:

Е1 Существуют положительные a, β такие, что

$$\sigma(t) = 1 - a|t - t_0|^\beta(1 + o(1)) \text{ при } t \rightarrow t_0.$$

Е2 (Локальная стационарность). Найдется $\alpha \in (0, 2]$, что

$$r(s, t) = 1 - |t - s|^\alpha(1 + o(1)) \text{ при } s \rightarrow t_0, t \rightarrow t_0.$$

Е3 (Регулярность). Существуют положительные g, G такие, что для всех s, t выполнено

$$E(X(t) - X(s))^2 \leq G|t - s|^g.$$

Для разреженной решетки допустим, что вершина решетки попадает в точку максимума дисперсии, остальные варианты не интересны. Разреженная решетка и решетка Пикандса не зависят от расположения точки максимума.

Теорема 2.

Предположим, что дисперсия гауссовского процесса $X(t)$, $t \in [0, T]$, достигает

своего единственного максимального значения в точке t_0 , являющейся внутренней точкой отрезка $[0, T]$. Предположим также, что выполнены условия **E1** – **E3**. Тогда

(i) если $\beta > \alpha$, то

- Для плотной решетки при $u \rightarrow \infty$

$$P \left(\max_{t \in [0, T] \cap \mathcal{R}_d(\gamma)} X(t) > u \right) = \frac{2H_\alpha \Gamma(1/\beta)}{a^{1/\beta} \beta} u^{2/\alpha - 2/\beta} \Psi(u) (1 + o(1)),$$

$$\text{где } 0 < H_\alpha = \lim_{\Lambda \rightarrow \infty} \frac{H_\alpha(\Lambda)}{\Lambda} < \infty;$$

- Для решетки Пикандса при $u \rightarrow \infty$

$$P \left(\max_{t \in [0, T] \cap \mathcal{R}_p(b, \gamma)} X(t) > u \right) = \frac{2H_{\alpha, b} \Gamma(1/\beta)}{a^{1/\beta} \beta} u^{2/\alpha - 2/\beta} \Psi(u) (1 + o(1)),$$

$$\text{где } 0 < H_{\alpha, b} = \lim_{\Lambda \rightarrow \infty} \frac{H_\alpha(b, \Lambda)}{\Lambda} < \infty \text{ и } H_\alpha(b, \Lambda) = E \exp \left(\max_{k: kb \in [0, \Lambda]} \chi(kb) \right);$$

- Для разреженной решетки при $u \rightarrow \infty$

$$P \left(\max_{t \in [0, T] \cap \mathcal{R}_s(\gamma)} X(t) > u \right) = \frac{\Gamma(1/\beta)}{a^{1/\beta} \beta} u^{2/\alpha - 2/\beta} \Psi(u) (1 + o(1)).$$

(ii) если $\beta = \alpha$, то

- Для плотной решетки при $u \rightarrow \infty$

$$P \left(\max_{t \in [0, T] \cap \mathcal{R}_d(\gamma)} X(t) > u \right) = H_\alpha^a \Psi(u) (1 + o(1)),$$

$$\text{где } 0 < H_\alpha^a = \lim_{\Lambda \rightarrow \infty} H_\alpha^a(\Lambda, \Lambda) < \infty$$

$$\text{и } H_\alpha^a(\Lambda, \Lambda) = E \exp \left(\max_{t \in [-\Lambda, \Lambda]} \chi(t) - a|t|^\alpha \right);$$

- Для решетки Пикандса при $u \rightarrow \infty$

$$P \left(\max_{t \in [0, T] \cap \mathcal{R}_p(b, \gamma)} X(t) > u \right) = H_{\alpha, b}^a \Psi(u) (1 + o(1)),$$

$$\text{где } 0 < H_{\alpha, b}^a = \lim_{\Lambda \rightarrow \infty} H_{\alpha, b}^a(\Lambda, \Lambda, b) < \infty$$

$$\text{и } H_{\alpha, b}^a(\Lambda, \Lambda, b) = E \exp \left(\max_{k: kb \in [-\Lambda, \Lambda]} \chi(kb) - a|kb|^\alpha \right);$$

- Для разреженной решетки при $u \rightarrow \infty$

$$P \left(\max_{t \in [0, T] \cap \mathcal{R}_s(\gamma)} X(t) > u \right) = \Psi(u)(1 + o(1)).$$

(iii) если $\beta < \alpha$, то для всех решеток получим при $u \rightarrow \infty$

$$P \left(\max_{t \in [0, T] \cap \mathcal{R}} X(t) > u \right) = \Psi(u)(1 + o(1)),$$

где \mathcal{R} – нужная решетка из трех.

В случае, когда дисперсия достигает своего максимума на краях отрезка $[0, T]$, то есть $t_0 = 0$ или $t_0 = T$, и выполнены все те же условия, тогда

1. асимптотические соотношения из п. (i) имеют место при делении правой части на 2;

2. асимптотические соотношения из п. (ii) имеют место с заменой:

- для плотной решетки $H_\alpha^a(\Lambda, \Lambda)$ на $H_\alpha^a(0, \Lambda)$ и H_α^a на $H_\alpha^{0,a} = \lim_{\Lambda \rightarrow \infty} H_\alpha^a(0, \Lambda)$,

- для решетки Пикандса $H_\alpha^a(\Lambda, \Lambda, b)$ на $H_\alpha^a(0, \Lambda, b)$ и $H_{\alpha,b}^a$ на $H_{\alpha,b}^{0,a} = \lim_{\Lambda \rightarrow \infty} H_\alpha^a(0, \Lambda, b)$;

3. асимптотическое соотношение из п. (iii) не изменяется.

Доказательство: Для краткости обозначим через \mathcal{R} нужную решетку из трех. Замена времени $t \mapsto t - t_0$ позволяет считать, что $t_0 = 0$, при этом $t \in T := [-t_0, T - t_0]$.

Первый шаг: выделение информативного интервала. Обозначим $\delta = u^{-2/\beta} \ln^{2/\beta} u$. Обозначим $A = T \setminus [-\delta, \delta]$. Для всех достаточно больших u имеют место неравенства

$$\begin{aligned} P \left(\max_{t \in [-\delta, \delta] \cap \mathcal{R}} X(t) > u \right) &\leq P \left(\max_{t \in T \cap \mathcal{R}} X(t) > u \right) \\ &\leq P \left(\max_{t \in [-\delta, \delta] \cap \mathcal{R}} X(t) > u \right) + P \left(\max_{t \in A \cap \mathcal{R}} X(t) > u \right). \end{aligned}$$

В случае $t_0 = 0$ вместо $[-\delta, \delta]$ берем $[0, \delta]$. Для достаточно больших u выполнено соотношение

$$\sigma^2(A) := \sup_{t \in A} \sigma^2(t) \leq 1 - \frac{a}{2} \delta^\beta,$$

и поэтому, в силу Предложения 9.2.2 [18], имеет место оценка

$$P\left(\max_{t \in A \cap \mathcal{R}} X(t) > u\right) \leq P\left(\max_{t \in A} X(t) > u\right) \leq CTu^{2/\gamma-1} \exp\left(-\frac{u^2}{2 - au^{-2} \ln^2 u}\right).$$

Легко проверить, что правая часть стремится к нулю быстрее, чем $P(X(0) > u)$, и поскольку $P(\max_{t \in [-\delta, \delta] \cap \mathcal{R}} X(t) > u) \geq P(X(0) > u)$, то

$$P\left(\max_{t \in T \cap \mathcal{R}} X(t) > u\right) = P\left(\max_{t \in [-\delta, \delta] \cap \mathcal{R}} X(t) > u\right) (1 + o(1)) \quad (2.1)$$

при $u \rightarrow \infty$. В случае $t_0 = 0$ вместо $[-\delta, \delta]$ берем $[0, \delta]$.

Второй шаг: анализ стандартного процесса. Рассмотрим гауссовский процесс

$$Y(t) = \frac{\xi(t)}{1 + b|t|^\beta}, \quad t \in [-\varepsilon, \varepsilon], \quad \varepsilon > 0, \quad b > 0,$$

где $\xi(t)$ - гауссовский стационарный процесс с нулевым средним и ковариационной функцией $r(t) = \exp(-d|t|^\alpha)$, $d > 0$. Мы найдем асимптотическое поведение вероятности

$$P\left(\max_{t \in [-\delta, \delta] \cap \mathcal{R}} Y(t) > u\right)$$

и затем, пользуясь неравенством Слепяна и выбирая соответствующим образом параметры b и d , получим асимптотически близкие верхнюю и нижнюю границы для искомой вероятности (2.1), откуда будет следовать утверждение теоремы. Напомним, что в случае граничной точки максимума дисперсии, вместо интервала $[-\delta, \delta]$ берется интервал $[0, \delta]$.

1. Случай $\alpha < \beta$. Выберем $\kappa \in (\alpha, \beta)$ и обозначим $\Delta = u^{-2/\kappa}$, $\Delta_k = [k\Delta, (k+1)\Delta] \cap \mathcal{R}$. Введем события

$$A_k = \{\max_{t \in \Delta_k} \xi(t) \geq u_k\}, \quad A'_k = \{\max_{t \in \Delta_k} \xi(t) \geq u'_k\}, \quad k \in \mathbb{Z},$$

где

$$u_k = \begin{cases} u(1 + b|(k+1)\Delta|^\beta) & \text{при } k < 0, \\ u(1 + b(k\Delta)^\beta) & \text{при } k \geq 0, \end{cases}$$

и

$$u'_k = \begin{cases} u(1 + b((k+1)\Delta)^\beta) & \text{при } k \geq 0, \\ u(1 + b|k\Delta|^\beta) & \text{при } k < 0. \end{cases}$$

Очевидно (неравенство Бонферрони),

$$\begin{aligned} \sum_{-\delta/\Delta-1 \leq k \leq \delta/\Delta} P(A_k) &\geq P\left(\max_{t \in [-\delta, \delta]} Y(t) > u\right) \\ &\geq \sum_{-\delta/\Delta \leq k \leq \delta/\Delta-1} P(A'_k) - \sum_{\substack{-\delta/\Delta-1 \leq k \leq \delta/\Delta \\ -\delta/\Delta \leq l \leq \delta/\Delta-1 \\ l \neq k}} P(A_k A_l). \end{aligned} \quad (2.2)$$

В случае граничной точки максимума суммирование в одинарных суммах слева и справа начинается от нуля. В силу Теоремы 1

$$P(A_k) = \Delta H u_k^{2/\alpha} \Psi(u_k) (1 + \epsilon(u_k)),$$

где

$$H = \begin{cases} \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{H_\alpha(T)}{T}, & 0 < H < \infty & \text{для плотной решетки} \\ \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{H_\alpha(b, T)}{T}, & 0 < H < \infty & \text{для решетки Пикандса} \end{cases}$$

и

$$P(A_k) = \Delta u_k^{2/\gamma} \Psi(u_k) (1 + \epsilon(u_k)) \quad \text{для разреженной решетки}$$

где $\epsilon(x) \rightarrow 0$ при $x \rightarrow \infty$. Аналогичные выражения можно выписать для A'_k . Обозначим $\tilde{\epsilon}(u) = \sup_{x \geq u} |\epsilon(x)|$. Имеем для плотной решетки и решетки Пикандса (где H обозначает константу, соответствующую случаю)

$$(1 - \tilde{\epsilon}(u)) \Delta H \sum_{-\delta/\Delta-1 \leq k \leq \delta/\Delta} u_k^{2/\alpha} \Psi(u_k) \leq \sum_{-\delta/\Delta-1 \leq k \leq \delta/\Delta} P(A_k) \leq (1 + \tilde{\epsilon}(u)) \Delta H \sum_{-\delta/\Delta-1 \leq k \leq \delta/\Delta} u_k^{2/\alpha} \Psi(u_k).$$

А для разреженной решетки получаем

$$(1 - \tilde{\epsilon}(u)) \Delta \sum_{-\delta/\Delta-1 \leq k \leq \delta/\Delta} u_k^{2/\gamma} \Psi(u_k) \leq \sum_{-\delta/\Delta-1 \leq k \leq \delta/\Delta} P(A_k) \leq (1 + \tilde{\epsilon}(u)) \Delta \sum_{-\delta/\Delta-1 \leq k \leq \delta/\Delta} u_k^{2/\gamma} \Psi(u_k).$$

Далее, пользуясь выражениями для Ψ , u_k и Δ и обозначая $\Delta_1 = u^{2/\beta-2/\kappa}$, для плотной решетки и решетки Пикандса

$$\begin{aligned} \Delta \sum_{0 \leq k \leq \delta/\Delta} u_k^{2/\alpha} \Psi(u_k) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi u}} e^{-u^2/2} u^{2/\alpha-2/\beta} \\ &\times \Delta_1 \sum_{0 \leq k \leq \delta/\Delta} (1 + b u^{-2} (k \Delta_1)^\beta)^{2/\alpha-1} \exp\left(-b (k \Delta_1)^\beta - \frac{1}{2} b^2 u^{-2} (k \Delta_1)^{2\beta}\right). \end{aligned}$$

Для разреженной решетки получаем

$$\begin{aligned} \Delta \sum_{0 \leq k \leq \delta/\Delta} u_k^{2/\gamma} \Psi(u_k) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}u} e^{-u^2/2} u^{2/\gamma-2/\beta} \\ &\times \Delta_1 \sum_{0 \leq k \leq \delta/\Delta} (1 + bu^{-2}(k\Delta_1)^\beta)^{2/\gamma-1} \exp\left(-b(k\Delta_1)^\beta - \frac{1}{2}b^2u^{-2}(k\Delta_1)^{2\beta}\right). \end{aligned}$$

Заметим, что $\Delta_1 \rightarrow 0$ при $u \rightarrow \infty$, кроме того, $\delta/\Delta_1 = u^{-2/\beta+2/\kappa} \ln^{2/\beta} u \rightarrow \infty$ при $u \rightarrow \infty$. Поэтому в силу теоремы Лебега о мажорированной сходимости последняя сумма эквивалентна интегральной сумме ($x_k = k\Delta_1$)

$$\sum_{0 \leq k \leq \delta/\Delta} \exp(-b(x_k)^\beta) \Delta_1 \rightarrow \int_0^\infty e^{-bx^\beta} dx = b^{-1/\beta} \int_0^\infty e^{-x^\beta} dx = b^{-1/\beta} \beta^{-1} \Gamma(1/\beta),$$

последнее равенство получается заменой переменных $x^\beta = y$. Повторяя вышеприведенные рассуждения, убеждаемся, что к этому же пределу стремятся остальные три суммы, формирующие одинарные суммы в (2.2). В случае граничной t_0 сумм будет две, а не четыре. Оценим теперь двойную сумму в (2.2). Начнем с несоседних A_k, A_l . Имеем

$$P(A_k A_l) \leq P\left(\max_{s \in \Delta_k} \xi(s) \geq u, \max_{t \in \Delta_l} \xi(t) \geq u\right) \leq P\left(\max_{(s,t) \in \Delta_k \times \Delta_l} \xi(s) + \xi(t) \geq 2u\right).$$

Дисперсия гауссовского поля $\xi(s) + \xi(t)$ равна $2 + 2r(t - s)$,

$$\begin{aligned} \max_{(s,t) \in \Delta_k \times \Delta_l} (2 + 2r(t - s)) &\leq 4 - 2 \max_{(s,t) \in \Delta_k \times \Delta_l} (1 - r(t - s)) \\ &\leq 4 - 2 \max_{(s,t) \in [k\Delta, (k+1)\Delta] \times [l\Delta, (l+1)\Delta]} (1 - r(t - s)) \leq 4 - 4du^{-2\alpha/\kappa}, \end{aligned}$$

где последнее неравенство имеет место для всех достаточно больших u . Дисперсия приращений этого поля не превосходит $4d(|t - t'|^\alpha + |s - s'|^\alpha)$. Применяя Предложение 9.2.2 [18], получаем, что

$$\begin{aligned} P\left(\max_{(s,t) \in \Delta_k \times \Delta_l} \xi(s) + \xi(t) \geq 2u\right) &\leq P\left(\max_{(s,t) \in [k\Delta, (k+1)\Delta] \times [l\Delta, (l+1)\Delta]} \xi(s) + \xi(t) \geq 2u\right) \\ &\leq Cu^{-4/\kappa+4/\alpha-1} \exp\left(-\frac{4u^2}{2(4 - 4du^{-2\alpha/\kappa})}\right) \\ &\leq Cu^{-4/\kappa+4/\alpha-1} \exp\left(-\frac{u^2}{2}\right) \exp\left(-\frac{d}{2}u^{2-2\alpha/\kappa}\right). \end{aligned}$$

Поскольку $\kappa > \alpha$, то $2 - 2\alpha/\kappa > 0$. То есть, порядок каждого слагаемого в двойной сумме есть степень u , умноженная на $\exp(-u^2/2)$ и умноженная на $\exp(-u^{2-2\alpha/\kappa}/2)$. Порядок числа слагаемых в двойной сумме степенной по u , порядок одинарных сумм, как уже показано, есть степень u , умноженная на $\exp(-u^2/2)$. Отсюда заключаем, что часть двойной суммы по несоседним слагаемым, деленная на одинарную сумму экспоненциально убывает к нулю при $u \rightarrow \infty$. Рассмотрим теперь соседние слагаемые. Для этого возьмем $\kappa_1 \in (\alpha, \kappa)$, обозначим $\Delta'_{k+1} = [(k+1)\Delta + u^{-2/\kappa_1}, (k+2)\Delta] \cap \mathcal{R}$, $\Delta''_{k+1} = [(k+1)\Delta, (k+1)\Delta + u^{-2/\kappa_1}] \cap \mathcal{R}$, и запишем

$$P(A_k A_{k+1}) \leq P\left(\max_{s \in \Delta_k} \xi(s) \geq u_k, \max_{t \in \Delta'_{k+1}} \xi(t) \geq u_{k+1}\right) + P\left(\max_{t \in \Delta''_{k+1}} \xi(t) \geq u_{k+1}\right).$$

Сумма по k двойных вероятностей справа, в силу вышеприведенных рассуждений для несоседних слагаемых, экспоненциально меньше одинарных сумм. Сумма одинарных вероятностей справа оценивается как одинарные суммы, но поскольку длины интервалов Δ''_k бесконечно меньше относительно длин интервалов Δ_k , эта сумма относительно мала. Таким образом утверждение Теоремы 1 (i) доказано для процесса $Y(t)$.

Третий шаг: переход к процессу X . Для произвольного $\varepsilon > 0$ и всех достаточно больших u , при $t \in [-\delta, \delta]$, в силу условия **E1**, имеют место неравенства

$$\frac{1}{1 + (a + \varepsilon)|t|^\beta} \leq \sigma(t) \leq \frac{1}{1 + (a - \varepsilon)|t|^\beta}.$$

Отсюда

$$\begin{aligned} P\left(\max_{t \in [-\delta, \delta] \cap \mathcal{R}} \frac{X(t)}{\sigma(t)(1 + (a + \varepsilon)|t|^\beta)} > u\right) &\leq P\left(\max_{t \in [-\delta, \delta] \cap \mathcal{R}} X(t) > u\right) \\ &\leq P\left(\max_{t \in [-\delta, \delta] \cap \mathcal{R}} \frac{X(t)}{\sigma(t)(1 + (a - \varepsilon)|t|^\beta)} > u\right). \end{aligned} \quad (2.3)$$

В силу условия **E2** ковариационная функция процесса $X(t)/\sigma(t)$, то есть, корреляционная функция $r(s, t)$ процесса $X(t)$, при всех достаточно больших u и $s, t \in [-\delta, \delta]$ по аналогии с Теоремой 10.1 [18] удовлетворяет неравенствам

$$\exp(-(1 + \varepsilon)|t - s|^\alpha) \leq r(s, t) \leq \exp(-(1 - \varepsilon)|t - s|^\alpha). \quad (2.4)$$

Отсюда по теореме Слепяна для любого b (нас интересуют $b = a \pm \varepsilon$)

$$P \left(\max_{t \in [-\delta, \delta] \cap \mathcal{R}} \frac{\xi^-(t)}{(1 + b|t|^\beta)} > u \right) \leq P \left(\max_{t \in [-\delta, \delta] \cap \mathcal{R}} \frac{X(t)}{\sigma(t)(1 + b|t|^\beta)} > u \right) \\ \leq P \left(\max_{t \in [-\delta, \delta] \cap \mathcal{R}} \frac{\xi^+(t)}{(1 + b|t|^\beta)} > u \right), \quad (2.5)$$

где ковариационные функции гауссовских стационарных процессов с нулевыми средними $\xi^-(t)$ и $\xi^+(t)$ равны соответственно правой и левой частям неравенств (2.4). Асимптотическое поведение правой и левой частей неравенств (2.5) уже найдено, они отличаются лишь множителями, которые, как нетрудно видеть, произвольно близки при соответствующем выборе достаточно малого ε . Таким образом, утверждение (i) теоремы доказано.

2. Случай $\alpha = \beta$. Нам понадобится еще одно обобщение Леммы 1.

Лемма 3 Пусть для гауссовского процесса $X(t)$ выполнены условия **E1 – E3** с $\alpha = \beta$. Для любых $\Lambda_1, \Lambda_2 \geq 0$ выполнено для плотной решетки при $u \rightarrow \infty$

$$P \left(\max_{t \in [-\Lambda_1 u^{-2/\alpha}, \Lambda_2 u^{-2/\alpha}] \cap \mathcal{R}_d(\gamma)} X(t) > u \right) = H_\alpha^a(\Lambda_1, \Lambda_2) \Psi(u) (1 + o(1)),$$

$$\text{где } H_\alpha^a(\Lambda_1, \Lambda_2) = E \exp \left(\max_{t \in [-\Lambda_1, \Lambda_2]} \chi(t) - a|t|^\alpha \right).$$

для решетки Пикандса при $u \rightarrow \infty$

$$P \left(\max_{t \in [-\Lambda_1 u^{-2/\alpha}, \Lambda_2 u^{-2/\alpha}] \cap \mathcal{R}_p(b, \gamma)} X(t) > u \right) = H_\alpha^a(\Lambda_1, \Lambda_2, b) \Psi(u) (1 + o(1)),$$

$$\text{где } H_\alpha^a(\Lambda_1, \Lambda_2, b) = E \exp \left(\max_{k: kb \in [-\Lambda_1, \Lambda_2]} \chi(kb) - a|kb|^\alpha \right).$$

для разреженной решетки при $u \rightarrow \infty$

$$P \left(\max_{t \in [-\Lambda_1 u^{-2/\alpha}, \Lambda_2 u^{-2/\alpha}] \cap \mathcal{R}_s(\gamma)} X(t) > u \right) = \Psi(u) (1 + o(1)).$$

Доказательство: Для краткости обозначим за \mathcal{R} нужную решетку из трех. Доказательство этой леммы отличается от доказательства Леммы 1 лишь вычислением пределов условных среднего и дисперсии процесса $\chi_u(t)$. Напомним начало этого доказательства. Пусть $u > 0$, воспользуемся формулой полной

вероятности

$$\begin{aligned}
& P\left(\max_{t \in [-\Lambda_1 u^{-2/\alpha}, \Lambda_2 u^{-2/\alpha}] \cap \mathcal{R}} X(t) > u\right) \\
&= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-v^2/2} P\left(\max_{t \in [-\Lambda_1 u^{-2/\alpha}, \Lambda_2 u^{-2/\alpha}] \cap \mathcal{R}} X(t) > u \mid X(0) = v\right) dv \\
&= \frac{1}{\sqrt{2\pi}u} e^{-u^2/2} \int_{-\infty}^{\infty} e^{w-w^2/2} P\left(\max_{t \in [-\Lambda_1 u^{-2/\alpha}, \Lambda_2 u^{-2/\alpha}] \cap \mathcal{R}} X(t) > u \mid X(0) = u - \frac{w}{u}\right) dw \\
&= \frac{1}{\sqrt{2\pi}u} e^{-u^2/2} \int_{-\infty}^{\infty} e^{w-w^2/2} P\left(\max_{t \in [-\Lambda_1, \Lambda_2] \cap \mathcal{R}'} \chi_u(t) > w \mid X(0) = u - \frac{w}{u}\right) dw.
\end{aligned} \tag{2.6}$$

Где второе равенство получено заменой переменной $v = u - w/u$, а третье заменой процесса $\chi_u(t) = u(X(u^{-2/\alpha}t) - u) + w$. За \mathcal{R}' обозначена растянутая в $u^{2/\alpha}$ раз решетка \mathcal{R} (совершенно аналогично с Леммой 1 получается):

Для плотной и разреженной решетки

$$\begin{aligned}
\mathcal{R}' &= u^{2/\alpha} \mathcal{R} = u^{2/\alpha} \{ku^{-2/\alpha}, k \in \mathbb{Z}\} = \{ku^{-2/\alpha} u^{2/\alpha}, k \in \mathbb{Z}\} \\
&= \{ku^{-2(1/\alpha - 1/\alpha)}, k \in \mathbb{Z}\} = \{ku^{-2/\alpha - \gamma}, k \in \mathbb{Z}\} \\
&= \mathcal{R}\left(\frac{\alpha\gamma}{\alpha - \gamma}\right) \text{ вместо } \mathcal{R}(\gamma)
\end{aligned}$$

Заметим, что для разреженной решетки после растягивания прямой и решетки в $u^{2/\alpha}$ раз для процесса $\chi_u(t)$ мы получаем, что аргумент решетки $\mathcal{R}(\frac{\alpha\gamma}{\alpha-\gamma})$ меньше 0, а значит, длина шага новой решетки является положительной степенью u и решетка расширяется (с ростом u).

Для решетки Пикандса

$$\mathcal{R}' = u^{2/\alpha} \mathcal{R} = u^{2/\alpha} \{kb u^{-2/\alpha}, k \in \mathbb{Z}\} = \{kb, k \in \mathbb{Z}\} = \mathcal{R}_p(b, 0). \tag{2.7}$$

где 0 в аргументе решетки обозначает, что шаг решетки не зависит от u .

Теперь рассмотрим семейство гауссовских распределений, появившиеся под интегралом. Исследуем сначала поведение средних и ковариаций, то есть, условных средних и ковариационных функций. Получаем (см. Лекцию 1 раздел

1.3 [18]) для условного математического ожидания и дисперсии,

$$\begin{aligned}
E\left(\chi_u(t)|X(0) = u - \frac{w}{u}\right) &= u\left(E\left(X(u^{-2/\alpha}t)|X(0) = u - \frac{w}{u}\right) - u\right) + w \\
&= u\left(\frac{EX(u^{-2/\alpha}t)X(0)}{EX(0)^2}\left(u - \frac{w}{u}\right) - u\right) + w \\
&= -u^2(1 - \sigma^2(u^{-2/\alpha}t)r(u^{-2/\alpha}t)) + w(1 - \sigma^2(u^{-2/\alpha}t)r(u^{-2/\alpha}t))
\end{aligned} \tag{2.8}$$

и

$$\begin{aligned}
&\text{var}\left(\chi_u(t) - \chi_u(s)|X(0) = u - \frac{w}{u}\right) \\
&= E\left(\chi_u(t) - \chi_u(s) - E\left(\chi_u(t) - \chi_u(s)|X(0) = u - \frac{w}{u}\right)\right)^2 \\
&= u^2\left(E[X(u^{-2/\alpha}t) - X(u^{-2/\alpha}s)]^2\right. \\
&\quad \left.- [\sigma^2(u^{-2/\alpha}t)r(u^{-2/\alpha}t) - \sigma^2(u^{-2/\alpha}s)r(u^{-2/\alpha}s)]^2\right).
\end{aligned} \tag{2.9}$$

Кроме того,

$$E\left(\chi_u(0)|X(0) = u - \frac{w}{u}\right) = E\left(\chi_u^2(0)|X(0) = u - \frac{w}{u}\right) = 0.$$

Теперь воспользуемся условиями **E2**, **E3**. Получаем, что при $u \rightarrow \infty$,

$$E\left(\chi_u(t)|X(0) = u - \frac{w}{u}\right) = -|t|^\alpha - a|t|^\alpha + wo(1),$$

и

$$\text{var}\left(\chi_u(t) - \chi_u(s)|X(0) = u - \frac{w}{u}\right) = -|t - s|^\alpha + o(1).$$

Дальнейшее доказательство буквально повторяет доказательство Леммы 1. ■

Продолжим доказательство теоремы в этом случае. Мы снова будем разбивать интервал $[-\delta, \delta]$ на маленькие интервалы Δ_k . В этой части доказательства теоремы мы вернемся к определению этих интервалов, используемых при доказательстве Теоремы 1 (и соответственно Теоремы 9.3.1 [18]), то есть, теперь $\Delta = \Lambda u^{-2/\alpha}$, $\Delta_k = [k\Delta, (k+1)\Delta] \cap \mathcal{R}$. Для всех достаточно больших u выполнено

$$P\left(\max_{t \in [-\delta, \delta] \cap \mathcal{R}} X(t) > u\right) \geq P\left(\max_{t \in [-\Lambda_1 u^{-2/\alpha}, \Lambda_2 u^{-2/\alpha}] \cap \mathcal{R}} X(t) > u\right).$$

Далее

$$P\left(\max_{t \in [-\delta, \delta] \cap \mathcal{R}} X(t) > u\right) \leq P\left(\max_{t \in [-\Lambda_1 u^{-2/\alpha}, \Lambda_2 u^{-2/\alpha}] \cap \mathcal{R}} X(t) > u\right) + \sum_{k=-[\Delta/\delta]-1, k \neq 0, -1}^{[\Delta/\delta]+1} P(A_k),$$

где $A_k = \{\max_{\Delta_k} X(t) \geq u\}$. В случае внутренней точки t_0 выбираем $\Lambda_1 = \Lambda_2 = \Lambda$, в случае граничной точки берем $\Lambda_1 = 0$, $\Lambda_2 = \Lambda$. Пределы суммирования в последней сумме в случае граничной точки максимума меняются очевидным образом. Оценим слагаемые в этой сумме. В силу неравенств (2.3) – (2.5)

$$P(A_k) \leq P\left(\max_{t \in \Delta_k} \xi(t) > u(1 + |k\Delta|^\alpha)\right) = P\left(\max_{t \in \Delta_k} \xi(t) > u(1 + |\Lambda k|^\alpha u^{-2})\right),$$

что в силу Леммы 1 не превосходит для достаточно больших u и всех k величины $4\Psi(u)H \exp(-|\Lambda k|^\alpha)$, где H свое для каждой из трех решеток. Действительно,

для плотной решетки

$$\begin{aligned} P\left(\max_{t \in \Delta_k} \xi(t) > u(1 + |\Lambda k|^\alpha u^{-2})\right) &\leq P\left(\max_{t \in [k\Delta, (k+1)\Delta]} \xi(t) > u(1 + |\Lambda k|^\alpha u^{-2})\right) \\ &\leq (1 + \tilde{\epsilon}(u))H_\alpha(\Lambda)\Psi(u(1 + |\Lambda k|^\alpha u^{-2})) \\ &\leq \frac{(1 + \tilde{\epsilon}(u))H_\alpha(\Lambda)}{u\sqrt{2\pi}(1 + |\Lambda k|^\alpha u^{-2})} e^{-\frac{1}{2}u^2 - |\Lambda k|^\alpha} \\ &\leq 2H_\alpha(\Lambda)(1 + u^{-2})\Psi(u)e^{-|\Lambda k|^\alpha} \\ &\leq 4H_\alpha(\Lambda)\Psi(u)e^{-|\Lambda k|^\alpha}; \end{aligned}$$

для решетки Пикандса

$$\begin{aligned} P\left(\max_{t \in \Delta_k} \xi(t) > u(1 + |\Lambda k|^\alpha u^{-2})\right) &\leq P\left(\max_{t \in [k\Delta, (k+1)\Delta]} \xi(t) > u(1 + |\Lambda k|^\alpha u^{-2})\right) \\ &\leq (1 + \tilde{\epsilon}(u))H_\alpha(b, \Lambda)\Psi(u(1 + |\Lambda k|^\alpha u^{-2})) \\ &\leq \frac{(1 + \tilde{\epsilon}(u))H_\alpha(b, \Lambda)}{u\sqrt{2\pi}(1 + |\Lambda k|^\alpha u^{-2})} e^{-\frac{1}{2}u^2 - |\Lambda k|^\alpha} \\ &\leq 2H_\alpha(b, \Lambda)(1 + u^{-2})\Psi(u)e^{-|\Lambda k|^\alpha} \\ &\leq 4H_\alpha(b, \Lambda)\Psi(u)e^{-|\Lambda k|^\alpha}; \end{aligned}$$

для разреженной решетки

$$\begin{aligned}
P\left(\max_{t \in \Delta_k} \xi(t) > u(1 + |\Lambda k|^\alpha u^{-2})\right) &\leq P\left(\max_{t \in [k\Delta, (k+1)\Delta]} \xi(t) > u(1 + |\Lambda k|^\alpha u^{-2})\right) \\
&\leq (1 + \tilde{\epsilon}(u))\Psi(u(1 + |\Lambda k|^\alpha u^{-2})) \\
&\leq \frac{(1 + \tilde{\epsilon}(u))}{u\sqrt{2\pi}(1 + |\Lambda k|^\alpha u^{-2})} e^{-\frac{1}{2}u^2 - |\Lambda k|^\alpha} \\
&\leq 2(1 + u^{-2})\Psi(u)e^{-|\Lambda k|^\alpha} \leq 4\Psi(u)e^{-|\Lambda k|^\alpha},
\end{aligned}$$

при всех $u \geq u_0$, где u_0 – решение уравнения $\max(\tilde{\gamma}(u), u^{-2}) = 1$, а для плотной решетки

$$\tilde{\epsilon}(u) = \sup_{v \geq u} \left| \frac{P(\max_{t \in \Delta} \xi(t) > v)}{H_\alpha(\Lambda)\Psi(v)} - 1 \right| \downarrow 0 \quad \text{при } u \uparrow \infty;$$

для решетки Пикандса

$$\tilde{\epsilon}(u) = \sup_{v \geq u} \left| \frac{P(\max_{t \in \Delta} \xi(t) > v)}{H_\alpha(b, \Lambda)\Psi(v)} - 1 \right| \downarrow 0 \quad \text{при } u \uparrow \infty;$$

для разреженной решетки

$$\tilde{\epsilon}(u) = \sup_{v \geq u} \left| \frac{P(\max_{t \in \Delta} \xi(t) > v)}{\Psi(v)} - 1 \right| \downarrow 0 \quad \text{при } u \uparrow \infty.$$

Таким образом получаем:

для плотной решетки

$$\sum_{k=-[\Delta/\delta]-1, k \neq 0, -1}^{[\Delta/\delta]+1} P(A_k) \leq 8H_\alpha(\Lambda)\Psi(u) \sum_{k=1}^{\infty} e^{-|\Lambda k|^\alpha},$$

то есть при $\Lambda \rightarrow \infty$

$$\frac{\sum_{k=-[\Delta/\delta]-1, k \neq 0, -1}^{[\Delta/\delta]+1} P(A_k)}{P(\max_{t \in [-\Lambda u^{-2/\alpha}, \Lambda u^{-2/\alpha}]} X(t) > u)} \leq \frac{8H_\alpha(\Lambda)\Psi(u) \sum_{k=1}^{\infty} e^{-|\Lambda k|^\alpha}}{P(X(0) > u)} \rightarrow 0;$$

для решетки Пикандса

$$\sum_{k=-[\Delta/\delta]-1, k \neq 0, -1}^{[\Delta/\delta]+1} P(A_k) \leq 8H_\alpha(b, \Lambda)\Psi(u) \sum_{k=1}^{\infty} e^{-|\Lambda k|^\alpha},$$

то есть при $\Lambda \rightarrow \infty$

$$\frac{\sum_{k=-[\Delta/\delta]-1, k \neq 0, -1}^{[\Delta/\delta]+1} P(A_k)}{P(\max_{t \in [-\Lambda u^{-2/\alpha}, \Lambda u^{-2/\alpha}]} X(t) > u)} \leq \frac{8H_\alpha(b, \Lambda)\Psi(u) \sum_{k=1}^{\infty} e^{-|\Lambda k|^\alpha}}{P(X(0) > u)} \rightarrow 0;$$

для разреженной решетки

$$\sum_{k=-[\Delta/\delta]-1, k \neq 0, -1}^{[\Delta/\delta]+1} P(A_k) \leq 8\Psi(u) \sum_{k=1}^{\infty} e^{-|\Lambda k|^\alpha},$$

то есть при $\Lambda \rightarrow \infty$

$$\frac{\sum_{k=-[\Delta/\delta]-1, k \neq 0, -1}^{[\Delta/\delta]+1} P(A_k)}{P(\max_{t \in [-\Lambda u^{-2/\alpha}, \Lambda u^{-2/\alpha}]} X(t) > u)} \leq \frac{8\Psi(u) \sum_{k=1}^{\infty} e^{-|\Lambda k|^\alpha}}{P(X(0) > u)} \rightarrow 0.$$

Возьмем произвольно малое $\varepsilon > 0$, и пусть Λ столь большое, что последняя дробь не превосходит ε . Тогда

для плотной решетки

$$\begin{aligned} 1 &= \lim_{u \rightarrow \infty} \frac{P(\max_{t \in [-\Lambda_1 u^{-2/\alpha}, \Lambda_2 u^{-2/\alpha}] \cap \mathcal{R}_d(\gamma)} X(t) > u)}{H_\alpha^a(\Lambda_1, \Lambda_2)\Psi(u)} \\ &\leq \liminf_{u \rightarrow \infty} \frac{P(\max_{t \in [-\delta, \delta] \cap \mathcal{R}_d(\gamma)} X(t) > u)}{H_\alpha^a(\Lambda_1, \Lambda_2)\Psi(u)} \\ &\leq \limsup_{u \rightarrow \infty} \frac{P(\max_{t \in [-\delta, \delta] \cap \mathcal{R}_d(\gamma)} X(t) > u)}{H_\alpha^a(\Lambda_1, \Lambda_2)\Psi(u)} \leq 1 + \varepsilon; \end{aligned}$$

для решетки Пикандса

$$\begin{aligned} 1 &= \lim_{u \rightarrow \infty} \frac{P(\max_{t \in [-\Lambda_1 u^{-2/\alpha}, \Lambda_2 u^{-2/\alpha}] \cap \mathcal{R}_p(b, \gamma)} X(t) > u)}{H_\alpha^a(\Lambda_1, \Lambda_2)\Psi(u)} \\ &\leq \liminf_{u \rightarrow \infty} \frac{P(\max_{t \in [-\delta, \delta] \cap \mathcal{R}_p(b, \gamma)} X(t) > u)}{H_\alpha^a(\Lambda_1, \Lambda_2)\Psi(u)} \\ &\leq \limsup_{u \rightarrow \infty} \frac{P(\max_{t \in [-\delta, \delta] \cap \mathcal{R}_p(b, \gamma)} X(t) > u)}{H_\alpha^a(\Lambda_1, \Lambda_2)\Psi(u)} \leq 1 + \varepsilon; \end{aligned}$$

для разреженной решетки

$$\begin{aligned} 1 &= \lim_{u \rightarrow \infty} \frac{P(\max_{t \in [-\Lambda_1 u^{-2/\alpha}, \Lambda_2 u^{-2/\alpha}] \cap \mathcal{R}_s(\gamma)} X(t) > u)}{\Psi(u)} \\ &\leq \liminf_{u \rightarrow \infty} \frac{P(\max_{t \in [-\delta, \delta] \cap \mathcal{R}_s(\gamma)} X(t) > u)}{\Psi(u)} \\ &\leq \limsup_{u \rightarrow \infty} \frac{P(\max_{t \in [-\delta, \delta] \cap \mathcal{R}_s(\gamma)} X(t) > u)}{\Psi(u)} \leq 1 + \varepsilon; \end{aligned}$$

где $\Lambda_1 = \Lambda_2 = \Lambda$, а в случае граничной точки t_0 , $\Lambda_1 = 0$, $\Lambda_2 = \Lambda$. Отсюда следуют утверждения **(ii)** теоремы.

3. Случай $\alpha > \beta$. Заметим, что в этом случае $\delta = o(u^{-2/\alpha})$ при $u \rightarrow \infty$. Поэтому рассуждая как и в доказательстве **(i)**, получаем, что для произвольного $\varepsilon > 0$ и всех достаточно больших u имеют место неравенства (где \mathcal{R} – нужная решетка из трех)

$$\begin{aligned} 1 &= \lim_{u \rightarrow \infty} \frac{P(X(0) > u)}{\Psi(u)} \leq \liminf_{u \rightarrow \infty} \frac{P(\max_{t \in [-\delta, \delta] \cap \mathcal{R}} X(t) > u)}{\Psi(u)} \\ &\leq \liminf_{u \rightarrow \infty} \frac{P(\max_{t \in [-\delta, \delta]} X(t) > u)}{\Psi(u)} \leq \limsup_{u \rightarrow \infty} \frac{P(\max_{t \in [-\delta, \delta]} X(t) > u)}{\Psi(u)} \\ &\leq \lim_{u \rightarrow \infty} \frac{P(\max_{t \in [-\varepsilon u^{-2/\alpha}, \varepsilon u^{-2/\alpha}]} \xi(t) > u)}{\Psi(u)} = H_\alpha(\varepsilon). \end{aligned}$$

В силу теоремы о монотонной сходимости под знаком интеграла, $H_\alpha(\varepsilon) \rightarrow 1$ при $\varepsilon \rightarrow 0$. Утверждение **(iii)**, и вместе с тем вся теорема доказаны. ■

Глава 3

ГАУССОВСКИЕ ОДНОРОДНЫЕ ПОЛЯ

Пусть $X(s, t)$, $(s, t) \in \mathbb{R}^2$, – гауссовское однородное (стационарное) поле с нулевым средним, $EX(s, t) = 0$ и единичной дисперсией, $EX^2(0, 0) = 1$, обозначим его ковариационную функцию через $r(s, t) = EX(s_1, t_1)X(s_1 + s, t_1 + t)$. Предположим, что для некоторых $\alpha_1, \alpha_2, \alpha \in (0, 2]$ в некоторой системе координат выполнено одно из двух соотношений

$$r_1(s, t) = 1 - |s|^{\alpha_1} - |t|^{\alpha_2} + o(|s|^{\alpha_1} + |t|^{\alpha_2}), \quad s, t \rightarrow 0, \quad (3.1)$$

$$r_2(s, t) = 1 - (s^2 + t^2)^{\alpha/2}(1 + o(1)), \quad s, t \rightarrow 0, \quad (3.2)$$

и для некоторого $T > 0$ выполнены соответственно неравенства $r_1(s, t) < 1$ или $r_2(s, t) < 1$ для всех $(s, t) \in (0, T] \times (0, T]$.

Другими словами, существует такая невырожденная матрица C , что ковариационная функция $r(Ct)$ имеет одно из двух представлений (3.1) или (3.2). Далее, когда ход рассуждений относится к каждой из перечисленных ковариационных функций, будем использовать общее обозначение $r(s, t)$, а в формулировках будем конкретизировать, к какой из двух функций или к обоим относится утверждение.

Обозначим

$$\begin{aligned} \chi_1(s, t) &= \sqrt{2} (B_{\alpha_1/2}(s) + B_{\alpha_2/2}(t)) - |s|^{\alpha_1} - |t|^{\alpha_2}, \\ \chi_2(s, t) &= \sqrt{2} B_{\alpha/2} \left((s^2 + t^2)^{1/2} \right) - (s^2 + t^2)^{\alpha/2}, \end{aligned}$$

где $B_H(s)$ – процесс дробного броуновского движения с показателем Хёрста H .

Предположим, что процессы $B_{\alpha_1/2}(t)$ и $B_{\alpha_2/2}(t)$ независимы.

Для произвольного множества $\mathcal{T} \subset [0, T] \times [0, T]$, являющегося замыканием открытого, любых положительных b, c и целых k, l введем константы Пикандса:

- для первой ковариационной функции:

$$H_{\alpha_1, \alpha_2}^1(\mathcal{T}) = E \exp \left(\max_{(s,t) \in \mathcal{T}} \chi_1(s, t) \right) < \infty;$$

$$H_{\alpha_1, \alpha_2}^1((b, c), \mathcal{T}) = E \exp \left(\max_{k,l:(kb,lc) \in \mathcal{T}} \chi_1(kb, lc) \right) < \infty;$$

$$H_{\alpha_1, \alpha_2}^1((0, c), \mathcal{T}) = E \exp \left(\max_{s,l:(s,lc) \in \mathcal{T}} \chi_1(s, lc) \right) < \infty;$$

- для второй ковариационной функции:

$$H_{\alpha}^2(\mathcal{T}) = E \exp \left(\max_{(s,t) \in \mathcal{T}} \chi_2(s, t) \right) < \infty;$$

$$H_{\alpha}^2((b, c), \mathcal{T}) = E \exp \left(\max_{k,l:(kb,lc) \in \mathcal{T}} \chi_2(kb, lc) \right) < \infty;$$

$$H_{\alpha}^2((0, c), \mathcal{T}) = E \exp \left(\max_{s,l:(s,lc) \in \mathcal{T}} \chi_2(s, lc) \right) < \infty.$$

Как и с ковариационными функциями, для удобства изложения для $\chi_1(s, t)$ и $\chi_2(s, t)$ мы будем использовать одно общее обозначение $\chi(s, t)$, уточняя при необходимости, какое из двух полей имеется в виду. Для первых двух констант будем использовать обозначение $H_{\alpha_1, \alpha_2}(\mathcal{T})$, для третьей и четвертой – $H_{\alpha_1, \alpha_2}((b, c), \mathcal{T})$, для пятой и шестой – $H_{\alpha_1, \alpha_2}((0, c), \mathcal{T})$.

Необходимо отметить, что поскольку при $\alpha = \alpha_1 = \alpha_2$ выполняются следующие неравенства: $r_1(s, t) \neq r_2(s, t)$ и $\chi_1(s, t) \neq \chi_2(s, t)$, то и $H_{\alpha, \alpha}^1(\mathcal{T}) \neq H_{\alpha}^2(\mathcal{T})$, $H_{\alpha, \alpha}^1((b, c), \mathcal{T}) \neq H_{\alpha}^2((b, c), \mathcal{T})$, и также $H_{\alpha, \alpha}^1((0, c), \mathcal{T}) \neq H_{\alpha}^2((0, c), \mathcal{T})$.

Введем в \mathbb{R}^2 преобразование гомотетии $g_{\alpha_1, \alpha_2}: (s, t) \rightarrow (u^{-2/\alpha_1}s, u^{-2/\alpha_2}t)$.

Рассмотрим шесть типов двумерных решеток на \mathbb{R}^2 при $\alpha_i \in (0, 2]$, $i = 1, 2$:

1. $\mathcal{R}_{d,d}(\gamma_1, \gamma_2) = \{(ku^{-2/\gamma_1}, lu^{-2/\gamma_2}), k, l \in \mathbb{Z}\}$, $\gamma_1 < \alpha_1$, $\gamma_2 < \alpha_2$

– плотные решетки по обеим координатам;

2. $\mathcal{R}_{p,p}((b, \gamma_1), (c, \gamma_2)) = \{(kbu^{-2/\gamma_1}, lcu^{-2/\gamma_2}), k, l \in \mathbb{Z}\}$, $b, c > 0$, $\gamma_1 = \alpha_1$, $\gamma_2 = \alpha_2$

– решетки Пикандса по обеим координатам;

3. $\mathcal{R}_{s,s}(\gamma_1, \gamma_2) = \{(ku^{-2/\gamma_1}, lu^{-2/\gamma_2}), k, l \in \mathbb{Z}\}$, $\gamma_1 > \alpha_1$, $\gamma_2 > \alpha_2$

– разреженные решетки по обеим координатам;

4. $\mathcal{R}_{d,p}(\gamma_1, (c, \gamma_2)) = \{(ku^{-2/\gamma_1}, lcu^{-2/\gamma_2}), k, l \in \mathbb{Z}\}$, $\gamma_1 < \alpha_1$, $c > 0$, $\gamma_2 = \alpha_2$

– плотная решетка и решетка Пикандса;

5. $\mathcal{R}_{d,s}(\gamma_1, \gamma_2) = \{(ku^{-2/\gamma_1}, lu^{-2/\gamma_2}), k, l \in \mathbb{Z}\}$, $\gamma_1 < \alpha_1$, $\gamma_2 > \alpha_2$

– плотная решетка и разреженная решетка;

6. $\mathcal{R}_{s,p}(\gamma_1, (c, \gamma_2)) = \{(ku^{-2/\gamma_1}, lu^{-2/\gamma_2}), k, l \in \mathbb{Z}\}$, $\gamma_1 > \alpha_1$, $\gamma_2 > \alpha_2$

– разреженная решетка и решетка Пикандса.

Заметим, что эти двумерные решетки являются естественным обобщением одномерных, рассмотренных в [9] и [26]. Заметим также, что, как нетрудно видеть, возможны и другие комбинации плотной, разреженной решеток и решетки Пикандса. Их рассмотрение ничем не отличается от рассмотрения приведенных здесь.

Обозначим $\Psi(u) = \exp(-u^2/2)/\sqrt{2\pi}u$ – асимптотика хвоста стандартного нормального распределения.

3.1 Локальная лемма

Лемма 4.

В вышеприведенных условиях, для любого замкнутого $\mathcal{T} \subset [0, T] \times [0, T]$, $T > 0$, имеют место следующие соотношения.

- Для плотных решеток по обеим координатам при $u \rightarrow \infty$

$$P \left(\max_{(s,t) \in (g_{\alpha_1, \alpha_2} \mathcal{T}) \cap \mathcal{R}_{d,d}(\gamma_1, \gamma_2)} X(s, t) > u \right) = H_{\alpha_1, \alpha_2}(\mathcal{T}) \Psi(u) (1 + o(1));$$

- Для решеток Пикандса по обеим координатам при $u \rightarrow \infty$

$$P \left(\max_{(s,t) \in (g_{\alpha_1, \alpha_2} \mathcal{T}) \cap \mathcal{R}_{p,p}((b, \gamma_1), (c, \gamma_2))} X(s, t) > u \right) = H_{\alpha_1, \alpha_2}((b, c), \mathcal{T}) \Psi(u) (1 + o(1));$$

- Для разреженных решеток по обеим координатам при $u \rightarrow \infty$

$$P \left(\max_{(s,t) \in (g_{\alpha_1, \alpha_2} \mathcal{T}) \cap \mathcal{R}_{s,s}(\gamma_1, \gamma_2)} X(s, t) > u \right) = \Psi(u) (1 + o(1));$$

- Для плотной решетки по одной координате и решетки Пикандса – по другой при $u \rightarrow \infty$

$$P \left(\max_{(s,t) \in (g_{\alpha_1, \alpha_2} \mathcal{T}) \cap \mathcal{R}_{d,p}(\gamma_1, (c, \gamma_2))} X(s, t) > u \right) = H_{\alpha_1, \alpha_2}((0, c), \mathcal{T}) \Psi(u) (1 + o(1));$$

- Для плотной решетки по одной координате и разреженной – по другой и для $\mathcal{T} = [0, T_1] \times [0, T_2]$, $T_1, T_2 \leq T$ при $u \rightarrow \infty$

$$P \left(\max_{(s,t) \in (g_{\alpha_1, \alpha_2} \mathcal{T}) \cap \mathcal{R}_{d,s}(\gamma_1, \gamma_2)} X(s, t) > u \right) = H_{\alpha_1}([0, T_1]) \Psi(u) (1 + o(1)),$$

- Для разреженной решетки по одной координате и решетки Пикандса – по другой и для $\mathcal{T} = [0, T_1] \times [0, T_2]$, $T_1, T_2 \leq T$ при $u \rightarrow \infty$

$$P \left(\max_{(s,t) \in (g_{\alpha_1, \alpha_2} \mathcal{T}) \cap \mathcal{R}_{s,p}(\gamma_1, (c, \gamma_2))} X(s, t) > u \right) = H_{\alpha_2}(c, [0, T_2]) \Psi(u) (1 + o(1)).$$

Доказательство: Проведем доказательство аналогичное с доказательством Леммы 1. Для всех двумерных решеток по формуле полной вероятности получим (\mathcal{R}_2 – обозначает для краткости нужную двумерную решетку):

$$\begin{aligned} & P \left(\max_{(s,t) \in g_{\alpha_1, \alpha_2} \mathcal{T} \cap \mathcal{R}_2} X(s, t) > u \right) \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-v^2/2} P \left(\max_{(s,t) \in (g_{\alpha_1, \alpha_2} \mathcal{T}) \cap \mathcal{R}_2} X(s, t) > u \mid X(0, 0) = v \right) dv \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}u} e^{-u^2/2} \int_{-\infty}^{\infty} e^{w-w^2/2u^2} P \left(\max_{(s,t) \in (g_{\alpha_1, \alpha_2} \mathcal{T}) \cap \mathcal{R}_2} X(s, t) > u \mid X(0, 0) = u - \frac{w}{u} \right) dw \end{aligned} \quad (3.3)$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}u} e^{-u^2/2} \int_{-\infty}^{\infty} e^{w-w^2/2u^2} P \left(\max_{(s,t) \in T \cap \mathcal{R}'_2} \chi_u(s, t) > w \mid X(0, 0) = u - \frac{w}{u} \right) dw,$$

где второе равенство получено заменой переменной $v = u - w/u$, а третье заменой процесса $\chi_u(s, t) = u(X(u^{-2/\alpha_1}s, u^{-2/\alpha_2}t) - u) + w$. За \mathcal{R}'_2 обозначена растянутая в u^{2/α_1} раз по первой координате и в u^{2/α_2} раз по второй координате решетка \mathcal{R}_2 :

плотная решетка по обеим координатам

$$\begin{aligned} \mathcal{R}'_{d,d}(\gamma_1, \gamma_2) &= u^{2/\alpha_1} \mathcal{R}_d(\gamma_1) \times u^{2/\alpha_2} \mathcal{R}_d(\gamma_2) \\ &= u^{2/\alpha_1} \{ku^{-2/\gamma_1}, k \in \mathbb{Z}\} \times u^{2/\alpha_2} \{lu^{-2/\gamma_2}, l \in \mathbb{Z}\} \\ &= \{ku^{-2/\gamma_1} u^{2/\alpha_1}, k \in \mathbb{Z}\} \times \{lu^{-2/\gamma_2} u^{2/\alpha_2}, l \in \mathbb{Z}\} \\ &= \{ku^{-2(1/\gamma_1 - 1/\alpha_1)}, k \in \mathbb{Z}\} \times \{lu^{-2(1/\gamma_2 - 1/\alpha_2)}, l \in \mathbb{Z}\} \\ &= \{ku^{-2/\frac{\alpha_1 \gamma_1}{\alpha_1 - \gamma_1}}, k \in \mathbb{Z}\} \times \{lu^{-2/\frac{\alpha_2 \gamma_2}{\alpha_2 - \gamma_2}}, l \in \mathbb{Z}\} \\ &= \mathcal{R}_{d,d} \left(\frac{\alpha_1 \gamma_1}{\alpha_1 - \gamma_1}, \frac{\alpha_2 \gamma_2}{\alpha_2 - \gamma_2} \right) \text{ ВМЕСТО } \mathcal{R}_{d,d}(\gamma_1, \gamma_2) \end{aligned}$$

решетка Пикандса по обеим координатам

$$\begin{aligned}
\mathcal{R}'_{p,p}((b, \gamma_1), (c, \gamma_2)) &= u^{2/\alpha_1} \mathcal{R}_p(b, \gamma_1) \times u^{2/\alpha_2} \mathcal{R}_p(c, \gamma_2) \\
&= u^{2/\gamma_1} \mathcal{R}_p(b, \gamma_1) \times u^{2/\gamma_2} \mathcal{R}_p(c, \gamma_2) \\
&= u^{2/\gamma_1} \{kbu^{-2/\gamma_1}, k \in \mathbb{Z}\} \times u^{2/\gamma_2} \{lcu^{-2/\gamma_2}, l \in \mathbb{Z}\} \\
&= \{kbu^{-2/\gamma_1} u^{2/\gamma_1}, k \in \mathbb{Z}\} \times \{lcu^{-2/\gamma_2} u^{2/\gamma_2}, l \in \mathbb{Z}\} \\
&= \{kb, k \in \mathbb{Z}\} \times \{lc, l \in \mathbb{Z}\} \\
&= \mathcal{R}_{p,p}((b, 0), (c, 0)) \quad \text{вместо } \mathcal{R}_{p,p}((b, \gamma_1), (c, \gamma_2))
\end{aligned}$$

разреженная решетка по обеим координатам

$$\begin{aligned}
\mathcal{R}'_{s,s}(\gamma_1, \gamma_2) &= u^{2/\alpha_1} \mathcal{R}_s(\gamma_1) \times u^{2/\alpha_2} \mathcal{R}_s(\gamma_2) \\
&= u^{2/\alpha_1} \{ku^{-2/\gamma_1}, k \in \mathbb{Z}\} \times u^{2/\alpha_2} \{lu^{-2/\gamma_2}, l \in \mathbb{Z}\} \\
&= \{ku^{-2/\gamma_1} u^{2/\alpha_1}, k \in \mathbb{Z}\} \times \{lu^{-2/\gamma_2} u^{2/\alpha_2}, l \in \mathbb{Z}\} \\
&= \{ku^{-2(1/\gamma_1 - 1/\alpha_1)}, k \in \mathbb{Z}\} \times \{lu^{-2(1/\gamma_2 - 1/\alpha_2)}, l \in \mathbb{Z}\} \\
&= \{ku^{-2/\frac{\alpha_1 \gamma_1}{\alpha_1 - \gamma_1}}, k \in \mathbb{Z}\} \times \{lu^{-2/\frac{\alpha_2 \gamma_2}{\alpha_2 - \gamma_2}}, l \in \mathbb{Z}\} \\
&= \mathcal{R}_{s,s} \left(\frac{\alpha_1 \gamma_1}{\alpha_1 - \gamma_1}, \frac{\alpha_2 \gamma_2}{\alpha_2 - \gamma_2} \right) \quad \text{вместо } \mathcal{R}_{s,s}(\gamma_1, \gamma_2)
\end{aligned}$$

плотная решетка по одной координате и решетка Пикандса – по другой

$$\begin{aligned}
\mathcal{R}'_{d,p}(\gamma_1, (c, \gamma_2)) &= u^{2/\alpha_1} \mathcal{R}_d(\gamma_1) \times u^{2/\alpha_2} \mathcal{R}_p(c, \gamma_2) \\
&= u^{2/\alpha_1} \mathcal{R}_d(\gamma_1) \times u^{2/\gamma_2} \mathcal{R}_p(c, \gamma_2) \\
&= u^{2/\alpha_1} \{ku^{-2/\gamma_1}, k \in \mathbb{Z}\} \times u^{2/\gamma_2} \{lcu^{-2/\gamma_2}, l \in \mathbb{Z}\} \\
&= \{ku^{-2/\gamma_1} u^{2/\alpha_1}, k \in \mathbb{Z}\} \times \{lcu^{-2/\gamma_2} u^{2/\gamma_2}, l \in \mathbb{Z}\} \\
&= \{ku^{-2(1/\gamma_1 - 1/\alpha_1)}, k \in \mathbb{Z}\} \times \{lc, l \in \mathbb{Z}\} \\
&= \{ku^{-2/\frac{\alpha_1 \gamma_1}{\alpha_1 - \gamma_1}}, k \in \mathbb{Z}\} \times \{lc, l \in \mathbb{Z}\} \\
&= \mathcal{R}_{d,p} \left(\frac{\alpha_1 \gamma_1}{\alpha_1 - \gamma_1}, (c, 0) \right) \quad \text{вместо } \mathcal{R}_{d,p}(\gamma_1, (c, \gamma_2))
\end{aligned}$$

плотная решетка по одной координате и разреженную решетку – по другой

$$\begin{aligned}
\mathcal{R}'_{d,s}(\gamma_1, \gamma_2) &= u^{2/\alpha_1} \mathcal{R}_d(\gamma_1) \times u^{2/\alpha_2} \mathcal{R}_s(\gamma_2) \\
&= u^{2/\alpha_1} \{ku^{-2/\gamma_1}, k \in \mathbb{Z}\} \times u^{2/\alpha_2} \{lu^{-2/\gamma_2}, l \in \mathbb{Z}\} \\
&= \{ku^{-2/\gamma_1} u^{2/\alpha_1}, k \in \mathbb{Z}\} \times \{lu^{-2/\gamma_2} u^{2/\alpha_2}, l \in \mathbb{Z}\} \\
&= \{ku^{-2(1/\gamma_1 - 1/\alpha_1)}, k \in \mathbb{Z}\} \times \{lu^{-2(1/\gamma_2 - 1/\alpha_2)}, l \in \mathbb{Z}\} \\
&= \{ku^{-2/\frac{\alpha_1 \gamma_1}{\alpha_1 - \gamma_1}}, k \in \mathbb{Z}\} \times \{lu^{-2/\frac{\alpha_2 \gamma_2}{\alpha_2 - \gamma_2}}, l \in \mathbb{Z}\} \\
&= \mathcal{R}_{d,s} \left(\frac{\alpha_1 \gamma_1}{\alpha_1 - \gamma_1}, \frac{\alpha_2 \gamma_2}{\alpha_2 - \gamma_2} \right) \text{ вместо } \mathcal{R}_{d,s}(\gamma_1, \gamma_2)
\end{aligned}$$

разреженная решетка по одной координате и решетка Пикандса – по другой

$$\begin{aligned}
\mathcal{R}'_{s,p}(\gamma_1, (c, \gamma_2)) &= u^{2/\alpha_1} \mathcal{R}_s(\gamma_1) \times u^{2/\alpha_2} \mathcal{R}_p(c, \gamma_2) \\
&= u^{2/\alpha_1} \mathcal{R}_s(\gamma_1) \times u^{2/\gamma_2} \mathcal{R}_p(c, \gamma_2) \\
&= u^{2/\alpha_1} \{ku^{-2/\gamma_1}, k \in \mathbb{Z}\} \times u^{2/\gamma_2} \{lcu^{-2/\gamma_2}, l \in \mathbb{Z}\} \\
&= \{ku^{-2/\gamma_1} u^{2/\alpha_1}, k \in \mathbb{Z}\} \times \{lcu^{-2/\gamma_2} u^{2/\gamma_2}, l \in \mathbb{Z}\} \\
&= \{ku^{-2(1/\gamma_1 - 1/\alpha_1)}, k \in \mathbb{Z}\} \times \{lc, l \in \mathbb{Z}\} \\
&= \{ku^{-2/\frac{\alpha_1 \gamma_1}{\alpha_1 - \gamma_1}}, k \in \mathbb{Z}\} \times \{lc, l \in \mathbb{Z}\} \\
&= \mathcal{R}_{s,p} \left(\frac{\alpha_1 \gamma_1}{\alpha_1 - \gamma_1}, (c, 0) \right) \text{ вместо } \mathcal{R}_{s,p}(\gamma_1, (c, \gamma_2))
\end{aligned}$$

Где 0 в аргументе решетки обозначает, что шаг решетки по этой координате (или обеим координатам) не зависит от u .

Заметим, что если по одной из координат была разреженная решетка, то после растягивания прямой по этой координате в u^{2/α_i} раз, $i \in \{1, 2\}$, для процесса $\chi_u(s, t)$ мы получаем, что аргумент решетки $\frac{\alpha_i \gamma_i}{\alpha_i - \gamma_i}$ меньше 0, а значит, длина шага новой решетки по этой координате является положительной степенью u и решетка расширяется (с ростом u).

Получаем для условного математического ожидания и дисперсии, что

$$\begin{aligned}
E \left(\chi_u(s, t) | X(0, 0) = u - \frac{w}{u} \right) \\
&= u \left(E \left(X(u^{-2/\alpha_1} s, u^{-2/\alpha_2} t) | X(0, 0) = u - \frac{w}{u} \right) - u \right) + w \\
&= -u^2 (1 - r(u^{-2/\alpha_1} s, u^{-2/\alpha_2} t)) + w(1 - r(u^{-2/\alpha_1} s, u^{-2/\alpha_2} t)),
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{var} \left(\chi_u(s_2, t_2) - \chi_u(s_1, t_1) \mid X(0, 0) = u - \frac{w}{u} \right) \\ = u^2 (\text{var}[X(u^{-2/\alpha_1} s_2, u^{-2/\alpha_2} t_2) - X(u^{-2/\alpha_1} s_1, u^{-2/\alpha_2} t_1)] \\ - [r(u^{-2/\alpha_1} s_2, u^{-2/\alpha_2} t_2) - r(u^{-2/\alpha_1} s_1, u^{-2/\alpha_2} t_1)]^2), \end{aligned}$$

кроме того,

$$E \left(\chi_u(0, 0) \mid X(0, 0) = u - \frac{w}{u} \right) = E \left(\chi_u^2(0, 0) \mid X(0, 0) = u - \frac{w}{u} \right) = 0.$$

Теперь, применив соответственно (3.1) или (3.1) для условного математического ожидания и дисперсии приращений получаем, что при $u \rightarrow \infty$ выполнено:

- для первой ковариационной функции:

$$\begin{aligned} E \left(\chi_u(s, t) \mid X(0, 0) = u - \frac{w}{u} \right) &= -|s|^{\alpha_1} - |t|^{\alpha_2} + wo(1) \quad \text{и} \\ \text{var} \left(\chi_u(s_2, t_2) - \chi_u(s_1, t_1) \mid X(0, 0) = u - \frac{w}{u} \right) &= 2|s_2 - s_1|^{\alpha_1} + 2|t_2 - t_1|^{\alpha_2} + o(1); \end{aligned}$$

- для второй ковариационной функции:

$$\begin{aligned} E \left(\chi_u(s, t) \mid X(0, 0) = u - \frac{w}{u} \right) &= -(s^2 + t^2)^{\alpha/2} + wo(1) \quad \text{и} \\ \text{var} \left(\chi_u(s_2, t_2) - \chi_u(s_1, t_1) \mid X(0, 0) = u - \frac{w}{u} \right) &= 2((s_2 - s_1)^2 + (t_2 - t_1)^2)^{\alpha/2} + o(1). \end{aligned}$$

Также для всех положительных u , всех w из некоторого ограниченного множества W и некоторой константы C :

- для первой ковариационной функции:

$$\begin{aligned} \left| E \left(\chi_u(s, t) \mid X(0, 0) = u - \frac{w}{u} \right) \right| &\leq T^{\alpha_1} + T^{\alpha_2} + \frac{1}{2}w \quad \text{и} \\ E \left((\chi_u(s_2, t_2) - \chi_u(s_1, t_1))^2 \mid X(0, 0) = u - \frac{w}{u} \right) &\leq C|s_2 - s_1|^{\alpha_1} + C|t_2 - t_1|^{\alpha_2}; \end{aligned}$$

- для второй ковариационной функции:

$$\begin{aligned} \left| E \left(\chi_u(s, t) \mid X(0, 0) = u - \frac{w}{u} \right) \right| &\leq T^\alpha + \frac{1}{2}w \quad \text{и} \\ E \left((\chi_u(s_2, t_2) - \chi_u(s_1, t_1))^2 \mid X(0, 0) = u - \frac{w}{u} \right) &\leq 2((s_2 - s_1)^2 + (t_2 - t_1)^2)^{\alpha/2}. \end{aligned}$$

Таким образом, как и ранее, по теоремам Прохорова и Арцела-Асколи имеет место слабая сходимость при $u \rightarrow \infty$ условных распределений процесса $\chi_u(s, t)$ к (безусловным) распределениям процесса $\chi(s, t)$.

В силу слабой сходимости и непрерывности траекторий при любом w получаем для двумерных решеток:

плотная решетка по обеим координатам

$$\begin{aligned} \lim_{u \rightarrow \infty} P \left(\max_{(s,t) \in \mathcal{T} \cap \mathcal{R}'_{d,d}(\gamma_1, \gamma_2)} \chi_u(s, t) > w \mid X(0, 0) = u - \frac{w}{u} \right) \\ = P \left(\max_{(s,t) \in \mathcal{T}} \chi(s, t) > w \right); \end{aligned}$$

решетка Пикандса по обеим координатам

$$\begin{aligned} \lim_{u \rightarrow \infty} P \left(\max_{(s,t) \in \mathcal{T} \cap \mathcal{R}'_{p,p}((b, \gamma_1), (c, \gamma_2))} \chi_u(s, t) > w \mid X(0, 0) = u - \frac{w}{u} \right) \\ = P \left(\max_{k,l: (kb, lc) \in \mathcal{T}} \chi(kb, lc) > w \right); \end{aligned}$$

разреженная решетка по обеим координатам

$$\begin{aligned} \lim_{u \rightarrow \infty} P \left(\max_{(s,t) \in \mathcal{T} \cap \mathcal{R}'_{s,s}(\gamma_1, \gamma_2)} \chi_u(s, t) > w \mid X(0, 0) = u - \frac{w}{u} \right) \\ = P(\chi(0, 0) > w) = \mathbf{I}_{w < 0}, \end{aligned}$$

где \mathbf{I} – индикаторная функция, также напомним, что при разреженной решетке шаг стремится к бесконечности, то есть при достаточно больших u в множестве \mathcal{T} будет одна точка решетки: $(s, t) = (0, 0)$, а при условии $X(0, 0) = u - \frac{w}{u}$ получаем $\chi(0, 0) = 0$;

плотная решетка по одной координате и решетка Пикандса – по другой

$$\begin{aligned} \lim_{u \rightarrow \infty} P \left(\max_{(s,t) \in \mathcal{T} \cap \mathcal{R}'_{d,p}(\gamma_1, (c, \gamma_2))} \chi_u(s, t) > w \mid X(0, 0) = u - \frac{w}{u} \right) \\ = P \left(\max_{s,l: (s, lc) \in \mathcal{T}} \chi(s, lc) > w \right); \end{aligned}$$

плотная решетка по одной координате и разреженная решетка – по другой

$$\begin{aligned} \lim_{u \rightarrow \infty} P \left(\max_{(s,t) \in \mathcal{T} \cap \mathcal{R}'_{d,s}(\gamma_1, \gamma_2)} \chi_u(s, t) > w \mid X(0, 0) = u - \frac{w}{u} \right) \\ = P \left(\max_{(s,0) \in \mathcal{T}} \chi(s, 0) > w \right), \end{aligned}$$

также напомним, что при разреженной решетке шаг стремится к бесконечности, то есть при достаточно больших u по этой координате в множестве \mathcal{T} фактически будет одномерная решетка: $(s, t) = (s, 0)$;

разреженная решетка по одной координате и решетка Пикандса – по другой

$$\lim_{u \rightarrow \infty} P \left(\max_{(s,t) \in \mathcal{T} \cap \mathcal{R}'_{s,p}(\gamma_1, (c, \gamma_2))} \chi_u(s, t) > w \mid X(0, 0) = u - \frac{w}{u} \right) = P \left(\max_{l: (0, lc) \in \mathcal{T}} \chi(0, lc) > w \right),$$

также напомним, что при разреженной решетке шаг стремится к бесконечности, то есть при достаточно больших u по этой координате в множестве \mathcal{T} фактически будет одномерная решетка: $(s, t) = (0, t)$.

Далее, для достаточно больших u имеем, что:

$$\begin{aligned} & P \left(\max_{(s,t) \in \mathcal{T} \cap \mathcal{R}'_2} \chi_u(s, t) > w \mid X(0, 0) = u - \frac{w}{u} \right) \\ & \leq P \left(\max_{(s,t) \in \mathcal{T}} \chi_u(s, t) > w \mid X(0, 0) = u - \frac{w}{u} \right) \\ & \leq P \left(\max_{(s,t) \in \mathcal{T}} (\chi_u(s, t) - E\chi_u(s, t)) > w - \frac{1}{2}|w| \mid X(0, 0) = u - \frac{w}{u} \right) \end{aligned}$$

Для гауссовского поля $\chi_u(s, t) - E\chi_u(s, t)$, рассматриваемого при условии $X(0, 0) = u - w/u$, выполнены условия Предложения 9.2.2 [18]. Откуда по теореме Лебега вытекает мажорированная сходимостъ интегралов в (3.3). И поскольку для неотрицательной случайной величины со свойством $e^x P(\xi > x) \rightarrow 0$ при $x \rightarrow \infty$ имеет место равенство $Ee^\xi = \int e^x P(\xi > x) dx$, лемма доказана. Для разреженной решетки мы используем очевидное равенство

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^w \mathbf{I}_{w < 0} dw = 1$$

■

Лемма 5.

Для ковариационных функций $r_1(s, t)$ и $r_2(s, t)$ найдется константа G такая, что для любого компактного множества \mathcal{T} , содержащего единичный квадрат

и для любой двумерной решетки \mathcal{R}_2 , обозначающей для краткости любую двумерную решетку из \mathcal{B} определенных ранее выполняется неравенство

$$H_{\alpha_1, \alpha_2}(\mathcal{T}) \leq G \text{mes}(\mathcal{T}),$$

где $H_{\alpha_1, \alpha_2}(\mathcal{T})$ обозначает константу, соответствующую этой решетке в лемме 1.

Доказательство: Доказательство напрямую следует из леммы 6.2 [15] и определения $H_{\alpha_1, \alpha_2}(\mathcal{T})$ – максимум по замкнутому множеству больше либо равен максимуму по решетке на этом замкнутом множестве:

$$H_{\alpha_1, \alpha_2}(\mathcal{T}) \leq H_{\alpha}(\mathcal{T}) \leq G \text{mes}(\mathcal{T}),$$

где $H_{\alpha}(\mathcal{T})$ обозначает константу из леммы 6.2 [15] для двумерного поля. ■

Обозначим через $B(\varepsilon)$ "шар" $B_1(\varepsilon) = \{\mathbf{t} : |s|^{\alpha_1} + |t|^{\alpha_2} \leq \varepsilon\}$ для первой ковариационной функции и "шар" $B_2(\varepsilon) = \{\mathbf{t} : (s^2 + t^2)^{\alpha/2} \leq \varepsilon\}$ – для второй, а через $\alpha(A, C)$ " α -расстояние" между множествами A и C :

$$\alpha^1(A, C) = \inf_{\mathbf{t}_1 \in A, \mathbf{t}_2 \in C} (|s_1 - s_2|^{\alpha_1} + |t_1 - t_2|^{\alpha_2})$$

для первой ковариационной функции и для второй:

$$\alpha^2(A, C) = \inf_{\mathbf{t}_1 \in A, \mathbf{t}_2 \in C} ((s_1 - s_2)^2 + (t_1 - t_2)^2)^{\alpha/2}.$$

Лемма 6.

Пусть гауссовское поле $X(\mathbf{t})$, $\mathbf{t} = (s, t) \in \mathbb{R}^2$, удовлетворяет всем вышеприведенным условиям. Пусть ε , $1/2 > \varepsilon > 0$, такое, что для всех $\mathbf{t} \in B(\varepsilon)$ выполнены соотношения

$$1 - \frac{1}{2} (|s|^{\alpha_1} + |t|^{\alpha_2}) \geq r_1(s, t) \geq 1 - 2 (|s|^{\alpha_1} + |t|^{\alpha_2})$$

для первой ковариационной функции и для второй:

$$1 - \frac{1}{2} ((s^2 + t^2)^{\alpha/2}) \geq r_2(s, t) \geq 1 - 2 ((s^2 + t^2)^{\alpha/2}).$$

Тогда существует такая константа F , что для двумерной решетки \mathcal{R}_2 , обозначающую для краткости любую двумерную решетку из \mathcal{b} определенных ранее, выполняется неравенство

$$P \left(\max_{g_{\alpha_1, \alpha_2} K(\lambda) \cap \mathcal{R}_2} X(\mathbf{t}) \geq u, \max_{g_{\alpha_1, \alpha_2} (\mathbf{t}_0 + K(\lambda)) \cap \mathcal{R}_2} X(\mathbf{t}) \geq u \right) \leq \lambda_1^2 \lambda_2^2 F \Psi(u) \exp \left(-\frac{1}{2} \alpha(K(\lambda), \mathbf{t}_0 + K(\lambda)) \right)$$

для всех прямоугольников $K(\lambda) = [0, \lambda_1] \times [0, \lambda_2]$, $\lambda_1, \lambda_2 \geq 1$, любого вектора $\mathbf{t}_0 \in \mathbb{R}^2$ такого, что $K(\lambda) \cap \{\mathbf{t}_0 + K(\lambda)\} = \emptyset$ и любого $u > u_0$, где

$$u_0 = \inf \{ u : g_{\alpha_1, \alpha_2} K(\lambda) \subset B(\varepsilon/4), g_{\alpha_1, \alpha_2} (\mathbf{t}_0 + K(\lambda)) \subset B(\varepsilon/4) \}.$$

Доказательство: Доказательство напрямую следует из леммы 6.3 [15] – вероятность достижения максимума на решетке, пересеченной с замкнутым множеством, меньше либо равна вероятности достижения максимума на этом множестве, а для этой вероятности уже есть оценка в указанной выше лемме:

$$P \left(\max_{g_{\alpha_1, \alpha_2} K(\lambda) \cap \mathcal{R}_2} X(\mathbf{t}) \geq u, \max_{g_{\alpha_1, \alpha_2} (\mathbf{t}_0 + K(\lambda)) \cap \mathcal{R}_2} X(\mathbf{t}) \geq u \right) \leq P \left(\max_{g_{\alpha_1, \alpha_2} K(\lambda)} X(\mathbf{t}) \geq u, \max_{g_{\alpha_1, \alpha_2} (\mathbf{t}_0 + K(\lambda))} X(\mathbf{t}) \geq u \right) \leq \lambda_1^2 \lambda_2^2 F \Psi(u) \exp \left(-\frac{1}{2} \alpha(K(\lambda), \mathbf{t}_0 + K(\lambda)) \right).$$

■

Следующие две леммы рассматриваются для случая ковариационной функции $r_1(s, t)$.

Лемма 7. (Лемма о факторизации)

Для любых компактных множеств на прямой K_1 и K_2 и $K = K_1 \times K_2$ верно соотношение

- Для плотных решеток по обеим координатам

$$H_{\alpha_1, \alpha_2}(K) = H_{\alpha_1}(K_1) H_{\alpha_2}(K_2);$$

- Для решеток Пикандса по обеим координатам

$$H_{\alpha_1, \alpha_2}((b, c), K) = H_{\alpha_1}(b, K_1) H_{\alpha_2}(c, K_2);$$

- Для плотной решетки по одной координате и решетки Пикандса – по другой

$$H_{\alpha_1, \alpha_2}((0, c), (K)) = H_{\alpha_1}(K_1)H_{\alpha_2}(c, K_2).$$

Определения констант $H_{\alpha_1}(K_1)$ и $H_{\alpha_2}(c, K_2)$ для одномерной плотной решетки и одномерной решетки Пикандса соответственно даны в формулировке леммы 1.

Доказательство: Имеем, что $\chi_1(s, t)$ раскладывается в сумму независимых дробных броуновских движений $\chi_1^1(s) = \sqrt{2}B_{\alpha_1/2}(s) - |s|^{\alpha_1}$ и $\chi_1^2(t) = \sqrt{2}B_{\alpha_2/2}(t) - |t|^{\alpha_2}$, $t, s \in \mathbb{R}$, для которых математическое ожидание и функция ковариации равны:

$$\begin{aligned} E(\chi_1^1(s)) &= -|s|^{\alpha_1} \quad \text{и} \quad E(\chi_1^2(t)) = -|t|^{\alpha_2}, \\ \text{cov}(\chi_1(s_2, t_2), \chi_1^1(s_1)) &= |s_2|^{\alpha_1} + |s_1|^{\alpha_1} - |s_2 - s_1|^{\alpha_1} \\ \text{cov}(\chi_1(s_2, t_2), \chi_1^2(t_1)) &= |t_2|^{\alpha_2} + |t_1|^{\alpha_2} - |t_2 - t_1|^{\alpha_2} \end{aligned}$$

Таким образом имеем:

плотная решетка по обеим координатам

$$\begin{aligned} H_{\alpha_1, \alpha_2}(K) &= E \exp \left(\max_{(s,t) \in K_1 \times K_2} \chi_1(s, t) \right) \\ &= E \exp \left(\max_{(s,t) \in K_1 \times K_2} (\chi_1^1(s) + \chi_1^2(t)) \right) \\ &= E \exp \left(\max_{s \in K_1} \chi_1^1(s) + \max_{t \in K_2} \chi_1^2(t) \right) \\ &= E \exp \left(\max_{s \in K_1} \chi_1^1(s) \right) E \exp \left(\max_{t \in K_2} \chi_1^2(t) \right) \\ &= H_{\alpha_1}(K_1)H_{\alpha_2}(K_2); \end{aligned}$$

решетка Пикандса по обеим координатам

$$\begin{aligned}
H_{\alpha_1, \alpha_2}((b, c), K) &= E \exp \left(\max_{k, l: (kb, lc) \in K_1 \times K_2} \chi_1(kb, lc) \right) \\
&= E \exp \left(\max_{k, l: (kb, lc) \in K_1 \times K_2} (\chi_1^1(kb) + \chi_1^2(lc)) \right) \\
&= E \exp \left(\max_{k: kb \in K_1} \chi_1^1(kb) + \max_{l: lc \in K_2} \chi_1^2(lc) \right) \\
&= E \exp \left(\max_{k: kb \in K_1} \chi_1^1(kb) \right) E \exp \left(\max_{l: lc \in K_2} \chi_1^2(lc) \right) \\
&= H_{\alpha_1}(b, K_1) H_{\alpha_2}(c, K_2);
\end{aligned}$$

плотная решетка по одной координате и решетка Пикандса – по другой

$$\begin{aligned}
H_{\alpha_1, \alpha_2}((0, c), (K)) &= E \exp \left(\max_{s, l: (s, lc) \in \mathcal{T}} \chi_1(s, lc) \right) \\
&= E \exp \left(\max_{s, l: (s, lc) \in K_1 \times K_2} (\chi_1^1(s) + \chi_1^2(lc)) \right) \\
&= E \exp \left(\max_{s \in K_1} \chi_1^1(s) + \max_{l: lc \in K_2} \chi_1^2(lc) \right) \\
&= E \exp \left(\max_{S \in K_1} \chi_1^1(S) \right) E \exp \left(\max_{l: lc \in K_2} \chi_1^2(lc) \right) \\
&= H_{\alpha_1}(K_1) H_{\alpha_2}(c, K_2).
\end{aligned}$$

■

Лемма 8.

Для любой из определенных выше констант Пикандса, обозначим их для краткости $H_{\alpha_1, \alpha_2}(\mathcal{T})$, имеет место соотношение

$$\liminf_{T \rightarrow \infty} \frac{H_{\alpha_1, \alpha_2}([0, T]^2)}{T^2} > 0.$$

Доказательство: Доказательство этого неравенства для одномерного случая дано на последнем шаге доказательства теоремы 1. Используя этот результат, а также лемму 7 о разложении многомерной константы типа Пикандса в произведение одномерных, мы получаем утверждение леммы.

■

3.2 Аналог Теоремы Пикандса в дискретном времени

Теорема 3.

Пусть для ковариационной функции двумерного однородного гауссовского поля выполняется первое из условий (3.1) и другие вышеприведенные условия на $r_1(s, t)$. Тогда для любого измеримого по Жордану множества $A \subset [0, T]^2$ ненулевой меры, являющегося замыканием открытого, выполняются следующие асимптотические соотношения.

- В случае плотных решеток по обеим координатам при $u \rightarrow \infty$

$$P \left(\max_{(s,t) \in A \cap \mathcal{R}_{d,d}(\gamma_1, \gamma_2)} X(s, t) > u \right) = \text{mes}(A) H_{\alpha_1, \alpha_2} u^{2/\alpha_1 + 2/\alpha_2} \Psi(u) (1 + o(1)),$$

$$H_{\alpha_1, \alpha_2} = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{H_{\alpha_1, \alpha_2}([0, T]^2)}{T^2} \quad u \quad 0 < H_{\alpha_1, \alpha_2} < \infty;$$

- В случае решеток Пикандса по обеим координатам при $u \rightarrow \infty$

$$P \left(\max_{(s,t) \in A \cap \mathcal{R}_{p,p}((b, \gamma_1), (c, \gamma_2))} X(s, t) > u \right)$$

$$= \text{mes}(A) H_{\alpha_1, \alpha_2}(b, c) u^{2/\alpha_1 + 2/\alpha_2} \Psi(u) (1 + o(1)),$$

$$\text{где } H_{\alpha_1, \alpha_2}(b, c) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{H_{\alpha_1, \alpha_2}((b, c), [0, T]^2)}{T^2} \quad u \quad 0 < H_{\alpha_1, \alpha_2}(b, c) < \infty;$$

- В случае плотной решетки по одной координате и решетки Пикандса – по другой при $u \rightarrow \infty$

$$P \left(\max_{(s,t) \in A \cap \mathcal{R}_{d,p}(\gamma_1, (c, \gamma_2))} X(s, t) > u \right)$$

$$= \text{mes}(A) H_{\alpha_1, \alpha_2}(0, c) u^{2/\alpha_1 + 2/\alpha_2} \Psi(u) (1 + o(1)),$$

$$\text{где } H_{\alpha_1, \alpha_2}(0, c) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{H_{\alpha_1, \alpha_2}((0, c), [0, T]^2)}{T^2} \quad u \quad 0 < H_{\alpha_1, \alpha_2}(0, c) < \infty;$$

- В случае плотной решетки по одной координате и разреженной – по другой при $u \rightarrow \infty$

$$P \left(\max_{(s,t) \in A \cap \mathcal{R}_{d,s}(\gamma_1, \gamma_2)} X(s, t) > u \right) = \text{mes}(A) H_{\alpha_1} u^{2/\alpha_1 + 2/\gamma_2} \Psi(u) (1 + o(1)),$$

$$\text{где } H_{\alpha_1} = \lim_{\Lambda \rightarrow \infty} \frac{H_{\alpha_1}([0, T])}{T} \quad u \quad 0 < H_{\alpha_1} < \infty \text{ – константа Пикандса.}$$

В случае выполнения второго условия на ковариационную функцию (3.2), то есть, имеется гауссовское поле с ковариационной функцией $r_2(s, t)$, имеют место эти же утверждения, заменив $\alpha = \alpha_1 = \alpha_2$ и взяв соответствующий набор констант Пикандса из приведенных выше для поля $\chi_2(s, t)$.

Доказательство: Для краткости обозначим \mathcal{R}_2 нужную решетку из трех: $\mathcal{R}_{d,d}(\gamma_1, \gamma_2)$, $\mathcal{R}_{p,p}((b, \gamma_1), (c, \gamma_2))$, $\mathcal{R}_{d,p}(\gamma_1, (c, \gamma_2))$. Если потребуется дополнительное уточнение для конкретной решетки, то перейдем к параллельному доказательству для каждой решетки.

В основном доказательство соответствует доказательствам Леммы 7.1 для однородных гауссовских полей, [15], и Теоремы 1, [26], для гауссовского процесса на решетке.

Пусть $\mathbf{k} = \{k_1, k_2\} \in \mathbb{Z}^2$ – целочисленный вектор. Для $T > 0$ обозначим

$$\Delta_0 = g_{\alpha_1, \alpha_2} [0, T]^2 \quad \text{и} \quad \Delta_{\mathbf{k}} = g_{\alpha_1, \alpha_2} \mathbf{k} + \Delta_0.$$

Также обозначим через N_- количество прямоугольников $\Delta_{\mathbf{k}}$, полностью помещающихся в A , и через N_+ количество прямоугольников $\Delta_{\mathbf{k}}$, покрывающих A . По условию множество A измеримо по Жордану, а значит

$$\lim_{u \rightarrow \infty} N_+ T^2 u^{-2/\alpha_1} u^{-2/\alpha_2} = \lim_{u \rightarrow \infty} N_- T^2 u^{-2/\alpha_1} u^{-2/\alpha_2} = \text{mes}(A). \quad (3.4)$$

Используя свойство однородности поля, имеем, что

$$P \left(\max_{(s,t) \in A \cap \mathcal{R}_2} X(s, t) > u \right) \leq N_+ P \left(\max_{(s,t) \in \Delta_0 \cap \mathcal{R}_2} X(s, t) > u \right),$$

а также по Лемме 6 и (3.4) для плотной решетки по первой координате и решетки Пикандса по второй выполнено соотношение:

$$\limsup_{u \rightarrow \infty} \frac{P \left(\max_{(s,t) \in A \cap \mathcal{R}_2} X(s, t) > u \right)}{u^{2/\alpha_1} u^{2/\alpha_2} \Psi(u)} \leq \text{mes}(A) \frac{H_{\alpha_1, \alpha_2}((0, c), [0, T]^2)}{T^2}. \quad (3.5)$$

Далее, в силу неравенства Бонферрони, имеем, что

$$\begin{aligned} P \left(\max_{(s,t) \in A \cap \mathcal{R}_2} X(s, t) > u \right) &\geq N_- P \left(\max_{(s,t) \in \Delta_0 \cap \mathcal{R}_2} X(s, t) > u \right) \\ &\quad - \sum_{i \neq j} P \left(\max_{(s,t) \in \Delta_i \cap \mathcal{R}_2} X(s, t) > u, \max_{(s,t) \in \Delta_j \cap \mathcal{R}_2} X(s, t) > u \right), \end{aligned}$$

где последняя сумма берется по всем парам неравных прямоугольников, у которых пересечение с A непусто. Как и в монографиях [3] и [15] назовем эту сумму "двойной суммой" и обозначим ее через Σ_2 . Однородность поля влечет следующую цепочку неравенств:

$$\begin{aligned}
\Sigma_2 &\leq N_+ \sum_{k \neq 0} P \left(\max_{(s,t) \in \Delta_0 \cap \mathcal{R}_2} X(s,t) > u, \max_{(s,t) \in \Delta_k \cap \mathcal{R}_2} X(s,t) > u \right) \\
&\leq N_+ \left(\sum_{\Delta_0 \cap \Delta_k \neq \emptyset} P \left(\max_{(s,t) \in \Delta_0 \cap \mathcal{R}_2} X(s,t) > u, \max_{(s,t) \in \Delta_k \cap \mathcal{R}_2} X(s,t) > u \right) \right. \\
&\quad \left. + \sum_{\Delta_0 \cap \Delta_k = \emptyset} P \left(\max_{(s,t) \in \Delta_0 \cap \mathcal{R}_2} X(s,t) > u, \max_{(s,t) \in \Delta_k \cap \mathcal{R}_2} X(s,t) > u \right) \right) \\
&=: N_+ (\Sigma'_2 + \Sigma''_2) \quad (3.6)
\end{aligned}$$

Две суммы справа оцениваются двумя разными способами. Пусть положительное $\delta_0 \leq \varepsilon_r/2$, где ε_r берется из Леммы 6. Тогда вторая сумма, обозначенная Σ''_2 , оценивается при помощи Леммы 6, поскольку для всех достаточно больших u все пары прямоугольников Δ_k удовлетворяют условиям этой леммы. Для всех $T > 1$ имеем:

$$\begin{aligned}
\limsup_{u \rightarrow \infty} \frac{\Sigma''_2}{N_+ \Psi(u)} &< F \sqrt{2\pi} 2^3 2^2 T^4 \sum_{k \in \mathbb{N}^2, k \neq 0} \exp(-|kT|_{(E,\alpha)}/8) \leq CT^4 \exp(-T^{\alpha'}/8) \quad (3.7)
\end{aligned}$$

для некоторой константы C , не зависящей от T . Здесь $\alpha' = \min_i \alpha_i$ и \mathbb{N}^2 – пространство пар натуральных чисел. Строгий знак неравенства в первом неравенстве имеет место, поскольку к сумме соседних прямоугольников добавились также и не соседние прямоугольники.

Теперь рассмотрим первую сумму Σ'_2 из неравенства (3.6). Вероятность для соседних прямоугольников может быть оценена по той же самой схеме. Эта схема является обобщением схемы из доказательства Леммы 7.1, [15], для непрерывного времени и схемы доказательства Теоремы 1, [26], для дискретного времени. Рассмотрим слагаемое

$$P \left(\max_{(s,t) \in \Delta_0 \cap \mathcal{R}_2} X(s,t) > u, \max_{(s,t) \in \Delta_{\mathbf{k}_1} \cap \mathcal{R}_2} X(s,t) > u \right), \quad \text{где } \mathbf{k}_1 = (1, 0).$$

Используя свойство однородности поля и свойство монотонности возрастания вероятности в зависимости от расширяющегося множества, мы получаем следующее:

$$\begin{aligned}
& P \left(\max_{(s,t) \in \Delta_0 \cap \mathcal{R}_2} X(s,t) > u, \max_{(s,t) \in \Delta_{\mathbf{k}_1} \cap \mathcal{R}_2} X(s,t) > u \right) \\
& \leq P \left(\max_{(s,t) \in \Delta_0 \cap \mathcal{R}_2} X(s,t) > u, \max_{(s,t) \in (g_u([T+\sqrt{T}, 2T] \times [0, T])) \cap \mathcal{R}_2} X(s,t) > u \right) \\
& \quad + P \left(\max_{(s,t) \in (g_u([T, T+\sqrt{T}] \times [0, T])) \cap \mathcal{R}_2} X(s,t) > u \right) \\
& \leq P \left(\max_{(s,t) \in \Delta_0 \cap \mathcal{R}_2} X(s,t) > u, \max_{(s,t) \in (g_u(T+\sqrt{T})\mathbf{k}_1 + \Delta_0) \cap \mathcal{R}_2} X(s,t) > u \right) \\
& \quad + P \left(\max_{(s,t) \in (g_u([0, \sqrt{T}] \times [0, T])) \cap \mathcal{R}_2} X(s,t) > u \right).
\end{aligned}$$

Первое слагаемое справа в последнем неравенстве оценивается по Лемме 6, второе – по Лемме 4. В случае любых соседних прямоугольников для всех больших u для всех пар соседних прямоугольников имеем для плотной решетки и решетки Пикандса

$$\begin{aligned}
& P \left(\max_{(s,t) \in \Delta_0 \cap \mathcal{R}_2} X(s,t) > u, \max_{(s,t) \in \Delta_{\mathbf{k}_1} \cap \mathcal{R}_2} X(s,t) > u \right) \\
& \leq P \left(\max_{(s,t) \in \Delta_0} X(s,t) > u, \max_{(s,t) \in \Delta_{\mathbf{k}_1}} X(s,t) > u \right) \\
& \leq 2^{-1} F T^4 u^{-1} \exp \left(-u^2/2 - T^{\alpha'/2}/8 \right) + 2H_{\alpha_1, \alpha_2} \left((0, c), [0, \sqrt{T}] \times [0, T] \right) \Psi(u),
\end{aligned}$$

где $\alpha' = \min_i \alpha_i$. Применяя также Лемму 5, получаем, что

$$\begin{aligned}
& \limsup_{u \rightarrow \infty} \frac{\Sigma'_2}{N_+ \Psi(u)} \\
& \leq F \sqrt{2\pi} 2^3 T^4 \exp \left(- \left(\sqrt{T} \right)^{\alpha'} / 8 \right) + 2H_{\alpha_1, \alpha_2} \left((0, c), [0, \sqrt{T}] \times [0, T] \right) \\
& \leq F \sqrt{2\pi} 2^3 T^4 \exp \left(- \left(\sqrt{T} \right)^{\alpha'} / 8 \right) + 2GT^{3/2}. \quad (3.8)
\end{aligned}$$

Применяя теперь неравенство (3.5) для оценки вероятности сверху и неравенство Бонферрони для оценки снизу, с заменой $T > 0$ на $S > 0$ и оценками сверху

(3.7) и (3.8) двойной суммы, а также применяя (3.4), получаем следующее:

$$\begin{aligned}
\frac{H_{\alpha_1, \alpha_2}((0, c), [0, T]^2)}{T^2} &\geq \limsup_{u \rightarrow \infty} \frac{P(\max_{(s, t) \in A \cap \mathcal{R}_2} X(s, t) > u)}{\text{mes}(A) u^{2/\alpha_1} u^{2/\alpha_2} \Psi(u)} \\
&\geq \liminf_{u \rightarrow \infty} \frac{P(\max_{(s, t) \in A \cap \mathcal{R}_2} X(s, t) > u)}{\text{mes}(A) u^{2/\alpha_1} u^{2/\alpha_2} \Psi(u)} \\
&\geq \frac{H_{\alpha_1, \alpha_2}((0, c), [0, S]^2)}{S^2} \\
&\quad - CS^4 \exp(-S^{\alpha'}/8) - F\sqrt{2\pi}2^3 S^4 \exp\left(-(\sqrt{S})^{\alpha'}/8\right) - 2GS^{3/2}
\end{aligned}$$

Применяя теперь Леммы 5 и 8 и устремляя S и T к бесконечности, мы получаем для плотной решетки по первой координате и решетки Пикандса – по второй, что

$$\infty > \liminf_{T \rightarrow \infty} \frac{H_{\alpha_1, \alpha_2}((0, c), [0, T]^2)}{T^2} \geq \limsup_{S \rightarrow \infty} \frac{H_{\alpha_1, \alpha_2}((0, c), [0, S]^2)}{S^2} > 0,$$

откуда следует утверждение теоремы. ■

Глава 4

ПРИМЕНЕНИЕ МЕТОДА ДИСКРЕТИЗАЦИИ В ЗАДАЧАХ, СВЯЗАННЫХ С ДРОБНЫМ БРОУНОВСКИМ ДВИЖЕНИЕМ

4.1 Дробное броуновское движение в дискретном времени

Дробным броуновским движением $B_H(t)$, $t \geq 0$, $H \in (0, 1]$ называется гауссовский процесс со стационарными приращениями и нулевым средним, начинающийся в нуле ($B_H(0) = 0$), дисперсией приращений

$$\sigma^2(t - s) := E(B_H(t) - B_H(s))^2 = \sigma^2|t - s|^{2H}$$

и ковариационной функцией для $s \leq t$

$$r(s, t) := E(B_H(t)B_H(s)) = \frac{1}{2}(t^{2H} + s^{2H} - (t - s)^{2H}).$$

Если $\sigma^2 = 1$, то этот процесс называется стандартным дробным броуновским движением. Параметр H называется показателем Хёрста. Мы видим, что при $H = 1/2$ процесс является броуновским движением (винеровским процессом). Для упрощения возьмем $\sigma^2 = 1$ и найдем асимптотику вероятности превышения уровня $P(\max_{t \in [0, 1]} B_H(t) > u)$. Тривиальный случай $H = 1$ исключаем для простоты. Подсчитаем для условий Теоремы 10.1 [18], что при $s, t \rightarrow 1$

$$\sigma(t) = 1 - 2H|1 - t|(1 + o(1)) \quad \text{и} \quad r(s, t) = 1 - \frac{1}{2}|t - s|^{2H}(1 + o(1)),$$

т.е. для дробного броуновского движения в терминах условий **E1** и **E2** Теоремы 2 $\alpha = 2H$, $\beta = 1$.

При $H < 1/2$, случай (i) для теоремы 2, следует сделать замену $t' = 2^{-1/2H}t$, и получаем, что $a = 2H2^{-1/2H}$.

Утверждение 1.

При $H < 1/2$ выполнится соотношение

- для плотной решетки при $u \rightarrow \infty$

$$P \left(\max_{t \in [0,1] \cap \mathcal{R}_d(\gamma)} B_H(t) > u \right) = \frac{H_{2H}}{2H} 2^{\frac{1}{2H}} u^{\frac{1}{H}-2} \Psi(u) (1 + o(1));$$

- для решетки Пикандса при $u \rightarrow \infty$

$$P \left(\max_{t \in [0,1] \cap \mathcal{R}_p(b,\gamma)} B_H(t) > u \right) = \frac{H_{2H,b}}{2H} 2^{\frac{1}{2H}} u^{\frac{1}{H}-2} \Psi(u) (1 + o(1));$$

- для разреженной решетки при $u \rightarrow \infty$

$$P \left(\max_{t \in [0,1] \cap \mathcal{R}_s(\gamma)} B_H(t) > u \right) = \frac{2^{\frac{1}{2H}-2}}{H} u^{\frac{1}{\gamma}-2} \Psi(u) (1 + o(1)).$$

При $H = 1/2$ задача нахождения вероятности высоких выбросов на отрезке сводится к решению задачи для броуновского движения (винеровского процесса) $B_{1/2}(t) = W_t$ с единичной дисперсией и $\alpha = \beta = 1$. Также, зная точное выражение для вероятности в непрерывном случае, получаем, что $H_1^{0,1} = 2$. Для этого случая применим часть (ii) Теоремы 2 с заменой $t' = t/2p$, и получаем, что $a = 1$.

Утверждение 2.

При $H = 1/2$ выполнится соотношение

- для плотной решетки при $u \rightarrow \infty$

$$P \left(\max_{t \in [0,p] \cap \mathcal{R}_d(\gamma)} W_t > u \right) = 2\Psi(u/\sqrt{p})(1 + o(1));$$

- для решетки Пикандса при $u \rightarrow \infty$

$$P \left(\max_{t \in [0,p] \cap \mathcal{R}_p(b,\gamma)} W_t > u \right) = H_{1,b}^{0,1} \Psi(u/\sqrt{p})(1 + o(1));$$

- для разреженной решетки при $u \rightarrow \infty$

$$P \left(\max_{t \in [0,p] \cap \mathcal{R}_s(\gamma)} W_t > u \right) = \Psi(u)(1 + o(1)).$$

При $H > 1/2$ действует часть (iii) Теоремы 2 [18], то есть

Утверждение 3.

При $H > 1/2$ выполнится соотношение для всех решеток при $u \rightarrow \infty$

$$P \left(\max_{t \in [0,1] \cap \mathcal{R}} B_H(t) > u \right) = \Psi(u)(1 + o(1)),$$

где \mathcal{R} – нужная решетка из трех.

4.2 Задача о разорении для дробного броуновского движения

В актуарной математике модель изменения по времени совокупного капитала страховой компании часто описывается суммой

$$K(t) = u - S_1(t) + ct,$$

где $u > 0$ – начальный капитал компании, $c > 0$, ct – прирост капитала за счет страховых взносов, $S_1(t) \geq 0$ – расходы на выплаты страховых премий. Поскольку страховые компании, как правило, вкладывают деньги в различные другие финансовые инструменты (довольно часто именно это – основная часть доходов), то модель усложняется,

$$K(t) = u - S_1(t) + S_2(t) + ct,$$

$S_2(t) \geq 0$. Процессы S_1 , S_2 обычно описываются при помощи случайных скачкообразных процессов с положительными скачками. В больших компаниях скачки происходят очень часто, и часто для простоты математических выводов переходят к процессам с непрерывными траекториями, как правило это – броуновское движение. Иногда рассматривают дробное броуновское движение, поскольку скачки, вообще говоря, не независимы, а броуновское движение есть предел процессов с независимыми скачками. Имеются обоснования, что в качестве модели процесса $-S_1(t) + S_2(t)$ можно использовать дробное броуновское движение, однако мы на этих обоснованиях останавливаться не будем, а рассмотрим достаточно популярную в актуарной математике модель

$$K(t) = u + B_H(t) + ct, \quad t \geq 0.$$

Одной из важнейших задач является *задача о разорении*: оценить вероятность разорения $P(\exists t \geq 0 : K(t) < 0)$.

Мы же рассмотрим эту вероятность в дискретном времени – на трех решетках (учтя, что в случае дробного броуновского движения $\alpha = 2H$) при условии, что решетка проходит через единственную точку максима дисперсии t_0 :

1. $\mathcal{R}_d(\gamma) = \{t_0 + ku^{-2/\gamma}, k \in \mathbb{Z}\}$, $\gamma < 2H$ – плотная решетка (dense grid);

2. $\mathcal{R}_p(b, \gamma) = \{t_0 + kbu^{-2/\gamma}, k \in \mathbb{Z}\}$, $b > 0$, $\gamma = 2H$ – решетка Пикандса (Pickands' grid);
3. $\mathcal{R}_s(\gamma) = \{t_0 + ku^{-2/\gamma}, k \in \mathbb{Z}\}$, $\gamma > 2H$ – разреженная решетка (sparse grid).

Для краткости обозначим нужную решетку за \mathcal{R} и приступим к задаче о разорении игрока в дискретном времени:

$$\begin{aligned}
P(\exists t \in \mathcal{R} : K(t) < 0) &= P\left(\sup_{t \in \mathcal{R}} -B_H(t) - ct > u\right) \\
&= P\left(\sup_{t \in \mathcal{R}} B_H(t) - ct > u\right), \quad (4.1)
\end{aligned}$$

где последнее равенство имеет место в силу симметрии гауссовских распределений с нулевым средним. Мы рассмотрим эту вероятность для больших значений начального капитала, $u \gg 1$, попросту говоря, найдем асимптотику этой вероятности при $u \rightarrow \infty$.

Установим сначала *свойство автомодельности* дробного броуновского движения.

Утверждение 4.

Для любого положительного a процессы $\{B_H(t), t \geq 0\}$ и $\{a^{-H}B_H(at), t \geq 0\}$ распределены одинаково.

Для этого, в силу гауссовости, достаточно показать совпадение средних (они оба равны нулю) и ковариационных функций. Последнее делается очень простым вычислением.

Продолжим цепочку (4.1), считая для простоты $\sigma^2 = 1$:

$$\begin{aligned}
P\left(\sup_{t \in \mathcal{R}} B_H(t) - ct > u\right) &= P\left(\sup_{t \in \mathcal{R}} \frac{B_H(t)}{t^H} > \frac{u + ct}{t^H}\right) \\
&= P\left(\sup_{s \in \mathcal{R}} \frac{B_H(us)}{u^H s^H} > \frac{u + cus}{u^H s^H}\right) \\
&= P\left(\sup_{s \in u^{-1}\mathcal{R}} \frac{u^{-H} B_H(us) s^H}{s^H(1 + cs)} > u^{1-H}\right) \\
&= P\left(\sup_{t \in u^{-1}\mathcal{R}} \frac{B_H(t)}{1 + ct} > u^{1-H}\right).
\end{aligned}$$

Во втором равенстве была сделана замена времени $t = us$, в четвертом использована автомодельность $B_H(t)$. После второго равенства процесс рассматривается на решетке $u^{-1}\mathcal{R}$. Рассмотрим теперь получившийся гауссовский случайный процесс под вероятностью, обозначим его $Y(t)$. Среднее этого процесса равно нулю, дисперсия равна

$$EY^2(t) := \sigma^2(t) = \frac{t^{2H}}{(1+ct)^2}.$$

Далее будет рассматриваться непрерывная функция $\sigma(t)$, но в точках решетки $u^{-1}\mathcal{R}$. Найдем максимум функции $\sigma(t)$ и точку, где он достигается. Имеем, что

$$\sigma'(t) = \frac{Ht^{H-1}}{1+ct} - \frac{ct^H}{(1+ct)^2} = 0,$$

точка $t = 0$ не является точкой максимума, считаем $t > 0$ и решим это уравнение

$$H - \frac{ct}{1+ct} = 0,$$

получаем, что

$$t_0 = \frac{H}{c(1-H)},$$

и это - единственная точка максимума. Вычислим вторую производную в точке t_0 . Для удобства перепишем первую производную в виде

$$\begin{aligned} \sigma'(t) &= \frac{Ht^{H-1}}{1+ct} - \frac{ct^H}{(1+ct)^2} = \frac{t^{2H}}{(1+ct)^2} (H(1+ct)t^{-H-1} - ct^{-H}) \\ &= \frac{t^{2H}}{(1+ct)^2} (Ht^{-H-1} - ct^{-H}(1-H)). \end{aligned}$$

Производная первого сомножителя в точке t_0 равна нулю, производная второго сомножителя равна

$$-H(H+1)t^{-H-2} + cH(1-H)t^{-H-1} = Ht^{-H-2}(-H-1+c(1-H)t),$$

в точке t_0 это равно $Ht_0^{-H-2}(-H-1+H) = -Ht_0^{-H-2}$. Таким образом, вторая производная в этой точке равна

$$\sigma''(t_0) = -\frac{Ht_0^{-H-2}}{(1+ct_0)^2} = -Ht_0^{-H-2}(1-H)^2.$$

Итак,

$$\frac{\sigma(t)}{\sigma(t_0)} = 1 - \frac{1}{2}c^2 H^{-1}(1-H)^3(t-t_0)^2 + O((t-t_0)^3). \quad (4.2)$$

Рассмотрим теперь поведение корреляционной функции $r(s, t)$ процесса $B_H(t)/(1+ct)$ в окрестности точки t_0 . Обозначим $d(t) = (\sigma(t)(1+ct))^{-1}$, и воспользуемся представлением

$$r(s, t) = 1 - \frac{1}{2}E(d(t)B_H(t) - d(s)B_H(s))^2,$$

имеем:

$$\begin{aligned} d(t)B_H(t) - d(s)B_H(s) &= d(t_0)(B_H(t) - B_H(s)) \\ &\quad + (d(t) - d(t_0))(B_H(t) - B_H(s)) \\ &\quad + (d(t) - d(s))B_H(s), \end{aligned}$$

$$Ed^2(t_0)(B_H(t) - B_H(s))^2 = d(t_0)|t - s|^{2H},$$

$$E(d(t) - d(t_0))^2(B_H(t) - B_H(s))^2 = |t - s|^{2H}O((t - t_0)^2) \quad \text{при } t \rightarrow t_0,$$

$$E(d(t) - d(s))^2B_H^2(s) = O((t - s)^2) \quad \text{при } s, t \rightarrow t_0.$$

Таким образом,

$$r(s, t) = 1 - \frac{1}{2}d^2(t_0)|t - s|^{2H}(1 + o(1)) \quad \text{при } s, t \rightarrow t_0.$$

Имея в виду, что $d(t_0) = t_0^{-H}$, перепишем это соотношение в виде

$$r(s', t') = 1 - |t' - s'|^{2H}(1 + o(1)) \quad \text{при } s', t' \rightarrow 2^{-1/2H},$$

где, чтобы подогнать все к условиям Теоремы 2, полагаем $s' = 2^{-1/2H}t_0^{-1}s$, $t' = 2^{-1/2H}t_0^{-1}t$.

Далее для любого $T > t'_0$, в силу теоремы 2, (i) получаем, что при $u \rightarrow \infty$

$$\begin{aligned} P \left(\max_{t \in [0, T] \cap \mathcal{R}} \frac{B_H(t)}{1+ct} > u^{1-H} \right) \\ \sim \frac{\sqrt{\pi}H_2Hc^{1/2}(1-H)^{1/2}A^{(2-H)/2H}}{H^{1/2}B^{1/2}2^{-1/4H}} u^{(1-H)^2/H} \Psi(Au^{1-H}), \quad (4.3) \end{aligned}$$

где

$$A := \sigma(t_0) = \left(\frac{H}{c(1-H)} \right)^{-H} \frac{1}{1-H}$$

и

$$B := -\sigma''(t_0) = \left(\frac{H}{c(1-H)} \right)^{-H-2} H.$$

Теперь надо перейти от решетки на конечном отрезке $[0, T] \cap \mathcal{R}$ к бесконечному $[0, +\infty) \cap \mathcal{R} = \mathcal{R}$. С этой целью оценим вероятность

$$P \left(\sup_{t \in [T, +\infty) \cap \mathcal{R}} \frac{B_H(t)}{1+ct} > u^{1-H} \right).$$

число T можно выбрать достаточно большим и целым, имеем, пользуясь стандартной оценкой,

$$\begin{aligned} P \left(\sup_{t \in [T, +\infty) \cap \mathcal{R}} \frac{B_H(t)}{1+ct} > u^{1-H} \right) &\leq P \left(\sup_{t \geq T} \frac{B_H(t)}{1+ct} > u^{1-H} \right) \\ &\leq \sum_{k=T}^{\infty} P \left(\sup_{s \in [k, (k+1)]} \frac{B_H(t)}{1+ct} > u^{1-H} \right) \\ &\leq C u^d \sum_{k=T}^{\infty} \exp \left(-\frac{1}{2} u^{2-2H} \frac{(1+ck)^2}{k^{2H}} \right) \end{aligned}$$

для некоторых C и d . Поскольку $\frac{(1+ck)^2}{k^{2H}} \sim c^2 k^{2-2H}$ при $k \rightarrow \infty$, то, например, заменяя сумму интегралом, получаем, что сумма стремится к нулю быстрее экспоненты $\exp(-Cx^{2-2H})$ для сколь угодно большого C , при достаточно большом выбранном T , что всегда возможно. Таким образом, асимптотика (4.3) имеет место и для бесконечного отрезка.

То есть доказано следующее утверждение:

Утверждение 5.

В вышеприведенных условиях, для задачи о разорении для дробного броуновского имеем

- для плотной решетки при $u \rightarrow \infty$

$$P \left(\max_{t \in \mathcal{R}_d(\gamma)} B_H(t) - ct > u \right) = H_{2H} \frac{\sqrt{\pi}}{2^{\frac{1-3H}{2H}} H^{\frac{1}{2}} (1-H)^{\frac{1}{2}}} \hat{u}^{\frac{1-H}{H}} \Psi(\hat{u}) (1 + o(1)),$$

$$\text{где } \hat{u} = \frac{u^{1-H}}{\sigma(t_0)} \quad \text{и} \quad \sigma(t_0) = \frac{H^H}{c^H (1-H)^{H-1}};$$

- для решетки Пикандса при $u \rightarrow \infty$

$$P \left(\max_{t \in \mathcal{R}_p(b, \gamma)} B_H(t) - ct > u \right) = H_{2H, b} \frac{\sqrt{\pi}}{2^{\frac{1-3H}{2H}} H^{\frac{1}{2}} (1-H)^{\frac{1}{2}}} \hat{u}^{\frac{1-H}{H}} \Psi(\hat{u}) (1 + o(1))$$

где \hat{u} и $\sigma(t_0)$ определены выше;

- для разреженной решетки при $u \rightarrow \infty$

$$P \left(\max_{t \in \mathcal{R}_s(\gamma)} B_H(t) - ct > u \right) = \frac{\sqrt{\pi}}{2^{\frac{1-3H}{2H}} H^{\frac{1}{2}} (1-H)^{\frac{1}{2}}} \hat{u}^{\frac{1-\gamma}{\gamma}} \Psi(\hat{u}) (1 + o(1))$$

где \hat{u} и $\sigma(t_0)$ определены выше.

Глава 5

ПРИМЕНЕНИЕ КОМПЬЮТЕРНОГО МОДЕЛИРОВАНИЯ ГАУССОВСКОГО ШУМА В ДИСКРЕТНОМ ВРЕМЕНИ ДЛЯ СТОХАСТИЗАЦИИ МОДЕЛИ ХОДЖКИНА-ХАКСЛИ АКТИВНОСТИ АФФЕРЕНТНОГО ПЕРВИЧНОГО НЕЙРОНА В НЕПРЕРЫВНОМ ВРЕМЕНИ

В настоящей главе рассматривается стохастизация с помощью гауссовского белого шума математической модели формирования процесса нейронного управления в афферентном первичном нейроне (АПН). Модель была разработана в 1949-1954 г.г. физиологом А.Ходжкиным и биофизиком Э.Хаксли и в 1963 году была удостоена Нобелевской Премии. В дальнейшем физиологами, математиками и биофизиками было получено упрощение этой модели в виде нелинейной динамической системы второго порядка. В 2001 – 2010 годах мексиканским нейрофизиологом Э.Сото и профессором МГУ В.Александровым по результатам экспериментов над млекопитающими (крысы) была получена модифицированная модель АПН, опубликованная в Докладах РАН РФ [14].

Структура вестибулярных механорецепторов в простейшем варианте (на микроуровне) состоит из двух клеток – волосковой клетки полукружного канала и афферентного первичного нейрона (АПН) в качестве выходного блока вестибулярного аппарата (рис. 5.1). Задача, которую должен выполнить вестибулярный механорецептор – инерциальный биосенсор – это преобразование относительного движения чувствительных масс (в полукружном канале или отолитовом органе вестибулярного аппарата) в выходной сигнал АПН и его пе-

редача в центральную нервную систему (ЦНС) и на глазодвигательную систему. Вестибулярный аппарат (ВА) содержит два вида чувствительных масс: масса отолитов, состоящая из кристаллов кальция и расположенная в четырех отолитовых органах ВА; масса специальной жидкости, называемой эндолимфой, в шести полукружных каналах ВА [7]. Смещения чувствительных масс в отолитовых органах и полукружных каналах приводят к деформации волосковых пучков – их наклону. Волосковый пучок состоит из опорного волоска – киноцилии и 60-100 волосков, называемых стереоцилиями, связанных между собой на молекулярном уровне. Внутри каждого стереоцилия имеется канал проводимости катионов калия, находящиеся в эндолимфе. При наклоне пучка стереоцилий происходит открытие этих каналов и поступление катионов в клетку, что приводит к нарушению баланса катионов натрия и катионов калия внутри клетки. Это, в свою очередь, приводит к изменению мембранного потенциала этой рецепторной клетки АПН. В результате функционирования механизма синаптической передачи [7] в синаптической щели между волосковой клеткой и афферентным первичным нейроном – биполярной нервной клеткой, возникает синаптический ток, передающий информацию о механическом воздействии (относительном движении чувствительных масс). Наличие входного синаптического тока активизирует внутри нейронов динамику ионных токов калия и натрия (катионов), что приводит к формированию импульсов мембранного потенциала в принимающем аксоне этой биполярной нервной клетки. Амплитуда этих сигналов почти постоянна и равна 20 mV . Изменение расстояния между импульсами является выходной информацией, которая в дальнейшем должны передаваться в ЦНС и окулярную систему. Для постановки задачи перехода в бистабильной системе афферентного первичного нейрона (АПН) ограничимся математической моделью Ходжкина-Хаксли активности нейрона [7] с учетом модификаций, произведенных по результатам экспериментов на млекопитающих [17].

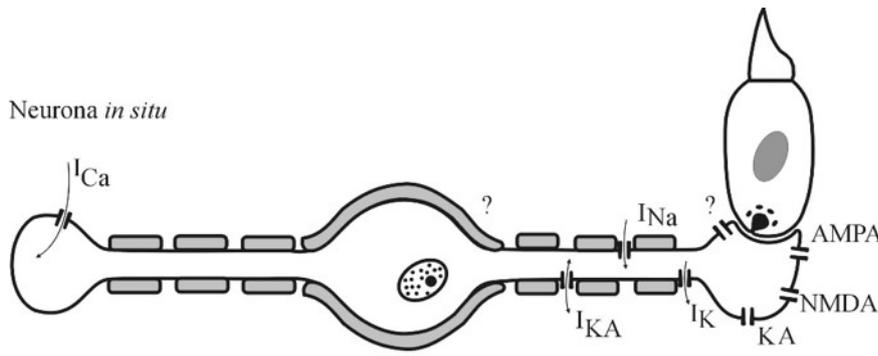


Рис. 5.1: Первичный афферентный нейрон и волосковая клетка

5.1 Упрощенная модель Ходжкина-Хаксли с модификацией Сото-Александрова

Рассмотрим упрощенную математическую модель активности АПН, полученную Ходжкином и Хаксли в 1949-54 гг. с модификациями по результатам экспериментов [17].

В соответствии с первым правилом Кирхгофа синаптический ток равен сумме трансмембранных токов нервной клетки АПН [7]. Общий трансмембранный ток равен сумме емкостного тока, ионных токов (потоков катионов K^+ и Na^+) и тока фоновой утечки I_L :

$$I_{syn} = C_m \frac{dV}{dt} + I_K + I_{Na} + I_L,$$

I_K – ток калия, I_{Na} – ток натрия, I_L – фоновый ток утечки, $C_m \frac{dV}{dt}$ – конденсаторный ток, V – потенциал действия АПН (мВ), C_m – мембранная емкость. В соответствии с законом Ома $I_i = g_i(V - V_i)$, где g_i – проводимость мембраны для данного вида ионов.

Будем считать, что каждый канал проводимости может находиться только в двух состояниях: открыт или закрыт. Предположим, что ансамбль (множество) каналов тока калия, находящихся в открытом состоянии, соответствует испытаниям Бернулли, и тогда среднее число открытых каналов равно $(S_0 p)$, где S_0 – число каналов K^+ в ансамбле и p – вероятность нахождения одного канала в открытом состоянии. Будем считать, что $p(t)$ – марковский процесс с двумя состояниями – "открыто" $p_1(t)$ и "закрыто" $p_0(t)$ – при наличии пуассоновского потока перехода из одного состояния в другое с интенсивностями λ_{01} и λ_{10} (рис. 5.2) в соответствии с гипотезами:

а) для любого промежутка времени $(t, t + \Delta t)$ вероятность наступления хотя бы одного события пропорциональна Δt и задается выражением

$$p\{t < \tau < t + \Delta t\} = p\{0 < \tau < \Delta t\} = 1 - e^{-\lambda \Delta t} = \lambda(t)\Delta t + o(\Delta t)$$

вне зависимости от характера протекания потока до момента t (другими словами, поток является марковским процессом и λ называется интенсивностью в общем случае нестационарного потока);

б) вероятность наступления более чем одного события потока в промежутке времени $(t, t + \Delta t)$ равна $o(\Delta t)$.

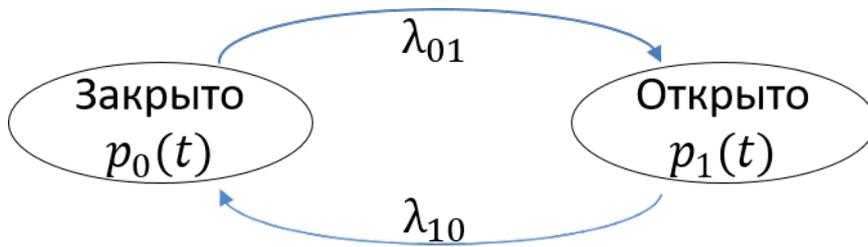


Рис. 5.2: Система с двумя состояниями

Рассмотрим систему в момент времени t и, задав малый промежуток Δt , найдем вероятность $p_1(t + \Delta t)$ того, что система, состоящая из потока в канале, в момент $t + \Delta t$ будет находиться в состоянии "открыто". Данную вероятность можно получить разложением события в сумму трех несовместных событий [1]:

1. Канал был открыт в момент времени t и не изменил свое состояние за время Δt . Вероятность события будет равна $p_1(t)(1 - \lambda_{10}\Delta t) + o(\Delta t)$.
2. Канал был закрыт в момент времени t и за время Δt произошло его открытие. Вероятность события будет равна $p_0(t)\lambda_{01}\Delta t + o(\Delta t)$.
3. Канал был открыт или закрыт в момент времени t , но за время Δt произошло более одного изменения состояния канала (четное количество, если канал был открыт, и нечетное, если канал был закрыт) таким образом, что в момент времени $t + \Delta t$ канал находится в открытом состоянии. Вероятность события в соответствии со второй гипотезой равна $o(\Delta t)$.

Применяя теорему сложения вероятностей, получим

$$p_1(t + \Delta t) = p_1(t)(1 - \lambda_{10}\Delta t) + p_0(t)\lambda_{01}\Delta t + o(\Delta t),$$

откуда

$$\frac{p_1(t + \Delta t) - p_1(t)}{\Delta t} = -p_1(t)\lambda_{10} + p_0(t)\lambda_{01} + \frac{o(\Delta t)}{\Delta t}.$$

Аналогично получим

$$p_0(t + \Delta t) = p_0(t)(1 - \lambda_{01}\Delta t) + p_1(t)\lambda_{10}\Delta t + o(\Delta t),$$

$$\frac{p_0(t + \Delta t) - p_0(t)}{\Delta t} = -p_0(t)\lambda_{01} + p_1(t)\lambda_{10} + \frac{o(\Delta t)}{\Delta t}.$$

Также добавим, что $p_0(t) + p_1(t) = 1$.

Переходя к пределу при $\Delta t \rightarrow 0$, получим систему дифференциальных уравнений

$$\begin{cases} \frac{dp_1}{dt} = -\lambda_{10}p_1 + \lambda_{01}p_0, \\ \frac{dp_0}{dt} = -\lambda_{01}p_0 + \lambda_{10}p_1, \\ p_0(t) + p_1(t) = 1 \end{cases}$$

Введя параметры $\tau = \frac{1}{\lambda_{01} + \lambda_{10}}$, $p_{1\infty} = \frac{\lambda_{01}}{\lambda_{01} + \lambda_{10}}$, получим уравнения для $p_1(t)$:

$$\tau \frac{dp_1}{dt} + p_1 = p_{1\infty}. \quad (5.1)$$

А.Ходжкин и А.Хаксли предложили две гипотезы для токов калия и натрия [7]:

- 1) вероятность открытия канала калия определяется присутствием 4-х частиц активации

$$p_K = n^4,$$

где n – вероятность присутствия одной частицы активации, определяемая уравнением (5.1) с потенциалзависимыми интенсивностями $\lambda(V)$, $\mu(V)$

$$\tau_n(V) \frac{dn}{dt} + n = n_\infty(V); \quad (5.2)$$

- 2) вероятность открытия канала натрия определяется присутствием 3-х частиц активации и отсутствием 1-й частицы инактивации

$$p_{Na} = m^3(V)h_{Na}(V).$$

Здесь m – вероятность присутствия частицы активации; h_{Na} – вероятность отсутствия частицы инактивации. Уравнения для $m(t)$ и $h_{Na}(t)$ аналогичны уравнению (5.2).

В дальнейшем существование такого рода частиц было подтверждено экспериментально [7]. Таким образом, классическая модель Ходжкина-Хаксли описывается дифференциальными нелинейными уравнениями относительно четырех переменных $V(t)$, $n(t)$, $m(t)$, $h(t)$. С течением времени физиологи стали добавлять еще один постоянный параметр – фактор температуры Q , возникающий при проведении экспериментов с теплокровными животными (млекопитающими). Далее, в соответствии с экспериментальными результатами были сделаны два упрощения [7]:

- а) наличие малого параметра $\tau_m(V) \ll 1 \rightarrow \tau_m(V) \equiv 0$;
- б) наличие интеграла $n(t) + h_{Na}(t) \approx 0,85$.

В 1999-2006 годах в лаборатории нейрофизиологии Автономного университета штата Пуэбла (Мексика) были проведены эксперименты на первичном нейроне млекопитающих (крыса) и получены модификации упрощенной модели Ходжкина-Хаксли [14]. Функциональные параметры были получены по экспериментальным данным. При обработке результатов экспериментов также был введен параметр инактивации h_K и первый интеграл представлен в форме $n(V) + h_{Na}(V) = C(V)$ [23].

Таким образом, упрощенная модель Ходжкина-Хаксли при модификациях [17] имеет следующий вид

$$\begin{cases} C_m \cdot \frac{dV}{dt} = I_{syn} - I_{Na} - I_K - I_L, \\ \tau_n(V) \cdot \frac{dn}{dt} = (n_\infty(V) - n)Q, \end{cases} \quad (5.3)$$

где $I_{Na} = g_{Na}m_\infty^3(V)(C(V)-n)(V-V_{Na})$, $I_K = g_Kn^4h_K(V-V_K)$, $I_L = g_L(V-V_L)$,

$$\begin{aligned} C(V) &= n_\infty(V) + h_{Na\infty}(V), \\ m_\infty(V) &= \frac{1}{1 + \exp\left(\frac{-(v+33,8)}{5,2}\right)}, \quad h_{Na\infty}(V) = \frac{1}{1 + \exp\left(\frac{v+60,5}{9,9}\right)}, \\ n_\infty(V) &= \frac{1}{1 + \exp\left(\frac{-(v+35)}{5}\right)}, \quad \tau_n(V) = \frac{1}{\exp\left(\frac{-(v+25)}{15}\right) + \exp\left(\frac{v+30}{20}\right)}. \end{aligned}$$

Здесь I_{syn} – синаптический ток; I_L – ток утечки; V – мембранный потенциал афферентного первичного нейрона; C_m – емкость мембраны нервной клетки; n – вероятность присутствия частицы активации калиевого тока; h_K – параметр, описывающий процесс инактивации калиевого тока, являющийся вероятностью отсутствия частиц инактивации калиевого тока, здесь $h_K = h_{K\infty}$; h_{Na} – параметр, описывающий процесс инактивации натриевого тока, являющийся вероятностью отсутствия частиц инактивации натриевого тока; τ_n – постоянная времени процесса активации калиевого тока; n_∞ , m_∞ – стационарные значения процессов активации калиевого и натриевого тока соответственно; $h_{Na\infty}$, $h_{K\infty}$ – стационарные значения процессов инактивации натриевого и калиевого тока соответственно; Q – “температурный фактор” – коэффициент температурной зависимости, необходимость его введения связана с разностью физиологической температуры и комнатной ($20 - 25^\circ\text{C}$), при которой проводились эксперименты по определению параметров модели.

Параметры модели приведены в Таблице 5.1

Параметр	Значение	Единица измерения
C_m	1	$\mu F/cm^2$
V_{Na}	52	mV
V_K	-84	mV
V_L	-63	mV
g_{Na}	2,3	mS/cm^2
g_K	2,4	mS/cm^2
g_L	0,03	mS/cm^2
Q	8,4	–
h_K	0,7329	–

Таблица 5.1: Параметры модели.

Единицей измерения всех входящих в систему (5.3) токов I выбирается $\mu\text{A}/\text{cm}^2$ [7].

В результате численного анализа модели (5.3) при постоянном синаптическом токе (I_{syn} принимает значения из интервала бифуркации) получены сле-

дующие результаты (рис. 5.3):

- а) найдена точка бифуркации Андронова-Хопфа $I_{syn}^* = 1,147$ мкА/см², в правой окрестности которой существует орбитально асимптотически устойчивый предельный цикл – периодический аттрактор;
- б) в левой окрестности $(0,7; 1,147)$ точки бифуркации существует точечный аттрактор – асимптотически устойчивый фокус;
- с) часть левой окрестности $(0,99; 1,147)$ является интервалом бифуркации, где существуют оба аттрактора с соответствующими областями притяжения.

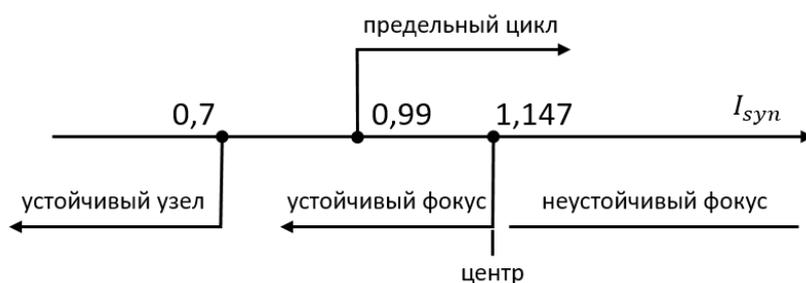


Рис. 5.3: Интервал бифуркации

Таким образом, в интервале бифуркации, когда существуют два аттрактора с соответствующими областями притяжения (рис. 5.4), система (5.3) при постоянном входном синаптическом токе, принадлежащем этому интервалу, является бистабильной грубой динамической системой (по классификации Понтрягина – Андронова).

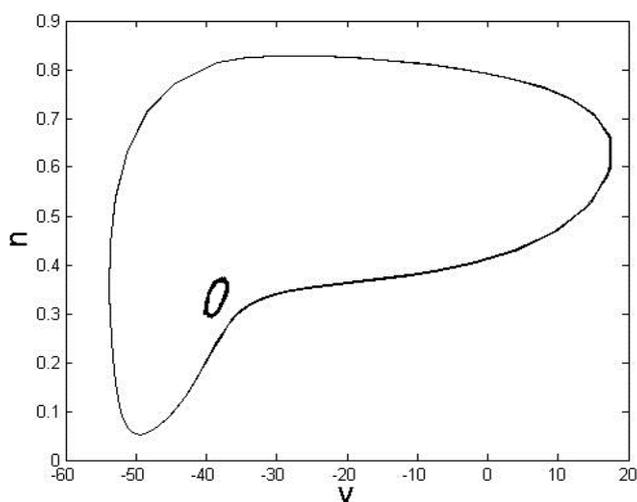


Рис. 5.4: Области притяжения двух аттракторов

5.2 Стохастизация модифицированной модели Ходжкина-Хаксли с помощью гауссовского шума и математическая интерпретация основного закона нейрофизиологии ”Все или ничего”

Начиная с 2000 г. в течение девяти лет в лаборатории клеточной нейрофизиологии Автономного университета Пуэбла (Мексика) велись эксперименты на волосковых клетках и на афферентных первичных нейронах вестибулярного аппарата млекопитающих (крысы). В результате руководителем экспериментов — доктором медицинских наук Энрике Сото — был введен новый постоянный параметр h_K . В дальнейшем был сделан математический анализ полученной модели Ходжкина-Хаксли и проведено ее упрощение до второго порядка [23], что соответствует рассмотрению модели на центральном многообразии $h_K = \text{const}$ в трехмерном пространстве $\{(V, n, h_K)\}$ [13], где V — мембранный потенциал афферентного нейрона, n — вероятность присутствия частицы активации калиевого тока.

Таким образом, мы рассматриваем упрощенную и модифицированную модель Ходжкина-Хаксли, описываемую системой двух дифференциальных уравнений

$$\begin{cases} C_m \cdot \frac{dV}{dt} = I_{syn} + I_{noise} - I_{Na} - I_K - I_L, \\ \tau_n(V) \cdot \frac{dn}{dt} = (n_\infty(V) - n)Q, \end{cases} \quad (5.4)$$

Где I_{noise} — величина шумового тока, а остальные значения для констант и переменных можно найти в описании системы (5.3).

Отметим, что параметры h_{Na} и h_K являются вероятностями отсутствия частиц инактивации натриевого и калиевого тока, $h_{Na\infty}$ и $h_{K\infty}$ — это их стационарные значения (считаем, что значение h_K постоянно, $h_K = h_{K\infty}$). Эти параметры служат для описания процесса инактивации соответствующего тока [7].

Предполагалось, что добавление гауссовского шума в систему (5.3) мо-

жет приводить к следующим эффектам. Фазовая траектория на рис. 5.5, выходящая в начальный момент из точки внутри неустойчивого цикла, может не стремиться к стационарной точке (под воздействием гауссовского шума), и при прохождении близких участков внутреннего и внешнего циклов за счет случайной шумовой добавки может выйти за пределы внутреннего цикла (выделен жирным на рис. 5.5) и начать приближаться к внешнему (эффект выхода на внешний цикл), попав в его область притяжения. Далее, проходя уже в окрестности внешнего цикла близко к внутреннему циклу опять-таки за счет гауссовского шума фазовая траектория может вернуться внутрь области притяжения точечного аттрактора (эффект возвращения внутрь области притяжения устойчивого фокуса). Предполагалось также, что эти выходы и возвращения, чередуясь, могут произойти несколько раз на протяжении относительно длительного времени (под воздействием гауссовского шума).

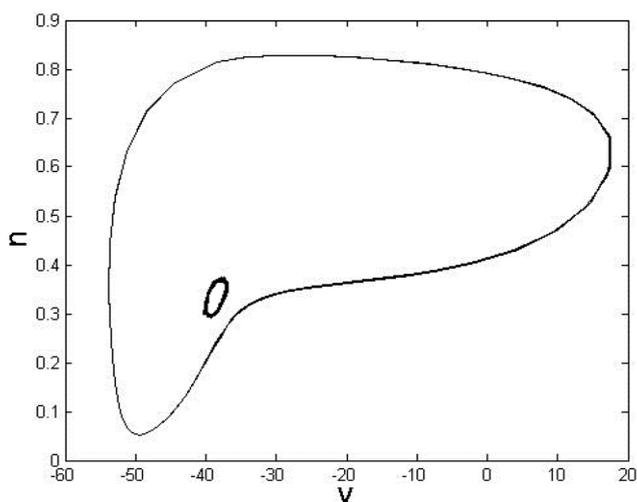


Рис. 5.5: Расположение внутреннего и внешнего циклов

Как показало численное моделирование, такой эффект чередования выходов и возвращений на внешний предельный цикл в самом деле может наблюдаться. В этом и состоит математическая (вероятностная) интерпретация основного закона нейрофизиологии "Всё или ничего". Отметим, что этот эффект носит явно стохастический характер. А биофизическая интерпретация состоит в том, что сила воздействия на нейроны отражается не в амплитуде колебаний, а в частоте колебаний, то есть в расстоянии между спайками.

Другими словами, при наличии гауссовского шума постсинаптический ток может попасть в часть множества достижимости, которая не принадлежит области притяжения точечного аттрактора. Следовательно, система находится в

области притяжения периодического аттрактора, и тогда формируется пачка (на рис. 5.6 пачкам соответствуют участки колебаний с большей амплитудой — участки спайков) и информация может быть передана по трехнейронной цепи в виде автоволны. Формирование информационного процесса закончено и начинается процесс передачи этой информации. Все вышеописанное происходит в начале миализированной оболочки выходного аксона АПН. Наличие гауссовского шума может прервать эту серию спайков, если точка, изображающая систему (5.3) и находящаяся в множестве достижимости периодического аттрактора, попадает в область притяжения точечного аттрактора в силу малости расстояния между ними. Процесс передачи информации прерывается до появления следующей пачки спайков.

Таким образом, в зависимости от интенсивности шума, сопровождающего постсинаптический ток, информация, поступающая от волосковой клетки в АПН (биполярную нервную клетку), в основном формируется в виде серии пачек (релаксационных автоколебаний) и готова для передачи в виде автоволны по нейронной цепочке. При увеличении интенсивности гауссовского шума в постсинаптическом сигнале могут происходить сбои в передаче информации.

При численном моделировании в пакете Wolfram Mathematica 12.1.1 были использованы значения параметров из Таблицы 5.1.

На рис. 5.6 представлена одна из фазовых траекторий при наличии шумового тока. Хорошо просматриваются контуры внешнего устойчивого предельного цикла — “утинового носа”, дающего основную информацию управления глазными яблоками, а также внутреннего неустойчивого (в прямом времени) предельного цикла, охватывающего точечный аттрактор — стационарную точку типа устойчивый фокус с координатами $V = -39.253$, $n = 0.299$.

Соответствующий этой фазовой траектории график зависимости потенциала V от времени t представлен на рис. 5.7. Как уже пояснялось выше, на нем можно наблюдать две полные пачки (разной протяженности во времени) и начало третьей пачки (или же это может отвечать однократному выходу на внешний контур, как и перед началом второй пачки).

В настоящей работе зависящая от времени величина шумового тока I_{noise} была смоделирована по следующему закону, соответствующему аппроксимации-

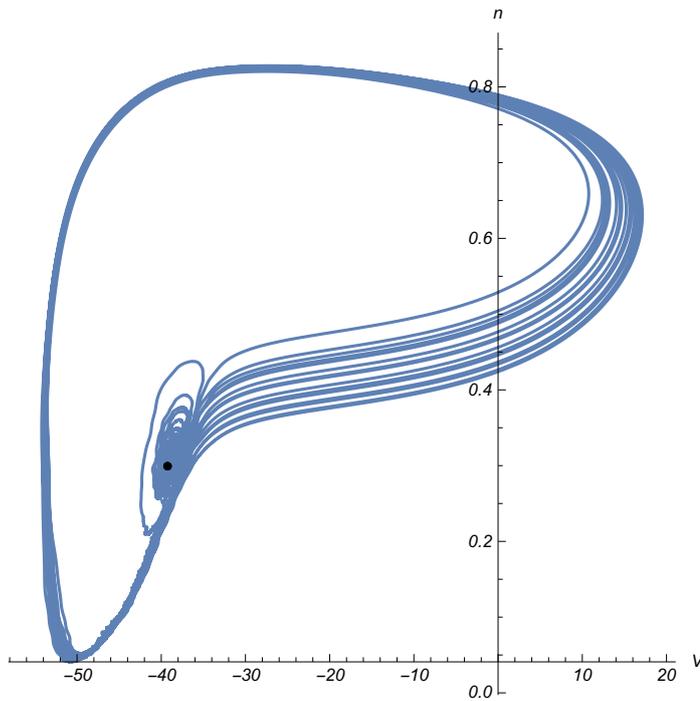


Рис. 5.6:
Смоделированная
случайная фазовая
траектория

онному ряду Каца–Шинозуки [11]:

$$I_{noise} = Amp \cdot \sqrt{\frac{2}{N}} \sum_{k=1}^N \cos(\omega_k t + \varphi_k) \quad (5.5)$$

при достаточно больших N (было взято значение $N = 100$), Amp — амплитуда (было взято значение $Amp = 0.3$), ω_k , φ_k — независимые случайные величины. При моделировании величины φ_k рассматривались как равномерно распределенные на промежутке $[0; 2\pi)$, ω_k — как равномерно распределенные на промежутке $(0; 10]$. Пример такого гауссовского случайного шумового тока представлен на рис. 5.8.

Подводя итоги приведенного выше описания информационного процесса в афферентном первичном нейроне вестибулярного аппарата, мы можем утверждать, что формат этого процесса в виде релаксационных автоколебаний (импульсов, или спайков) почти одной и той же амплитуды, следующих пачками (группами, или берстами), имеет место благодаря трем свойствам:

- а) наличие точки бифуркации Андронова–Хопфа;
- б) существование в левой окрестности этой точки интервала бифуркации, в каждой точке которого система (5.3) является бистабильной динамической системой;

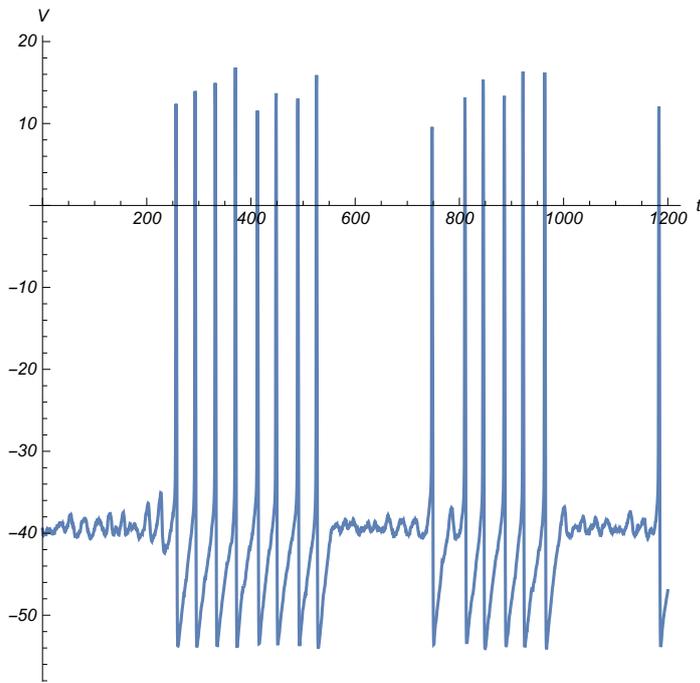


Рис. 5.7: График зависимости потенциала V от t

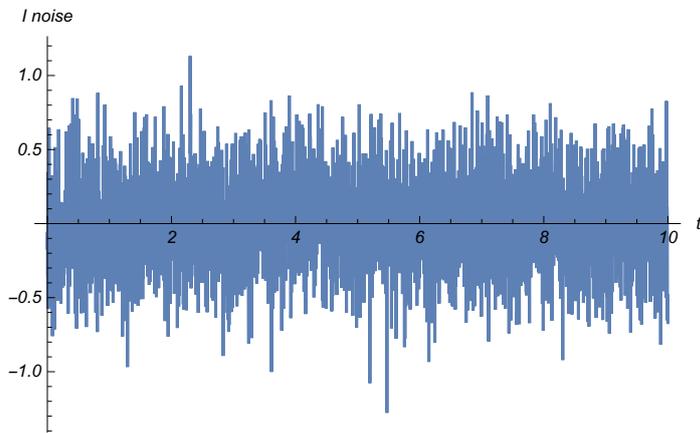


Рис. 5.8: Пример гауссовского случайного шумового тока

с) область притяжения точечного аттрактора расположена очень близко к основному предельному циклу, генерирующему спайки, что приводит к стохастизации информационного процесса.

Описанная выше математическая интерпретация нейробиологического закона “Всё или ничего” позволяет более детально объяснить функционирование афферентных первичных нейронов в режиме ожидания механического воздействия на вестибулярные механорецепторы.

5.3 Модифицированная модель Ходжкина-Хаксли со стимуляцией и случайным гауссовским шумом

В предыдущем параграфе была рассмотрена упрощенная модифицированная модель Ходжкина-Хаксли с гауссовским случайным шумовым током. Гауссовский случайный шум, который вносит не контролируемый нами момент, может, как выяснилось, оказывать сильное влияние на поведение системы. С другой стороны, мы можем ввести контролируемый добавочный ток – ток стимуляции. Этот ток играет роль управления в динамической системе и влияет на ее поведение. Кроме того, мы будем исследовать возможные поведения системы при наличии контролируемого фактора – стимуляции и неконтролируемого – гауссовского случайного шума.

Стимуляция (управление) в случае линейных систем

Предварительно рассмотрим довольно хорошо изученный случай математического маятника с трением (см., например, [5]). Рассмотрим частный случай: в координатах (x_1, x_2) маятник описывается системой

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 \\ \dot{x}_2 = -x_1 - 2\mu x_2, \end{cases}$$

где μ , $0 < \mu < 1$, – параметр, зависящий от трения.

Известно, что начало координат является стационарной точкой системы – устойчивым фокусом (точечный аттрактор). На рис. 5.9 изображено типичное поведение фазовой кривой в этом случае – случае отсутствия стимуляции (управления). Значение параметра $\mu = 9/41$, начальные условия $x_1(0) = 0.2$, $x_2(0) = 0$.

На рис. 5.10 приведен график зависимости $x_1 = x_1(t)$. Амплитуда колебаний экспоненциально стремится к нулю.

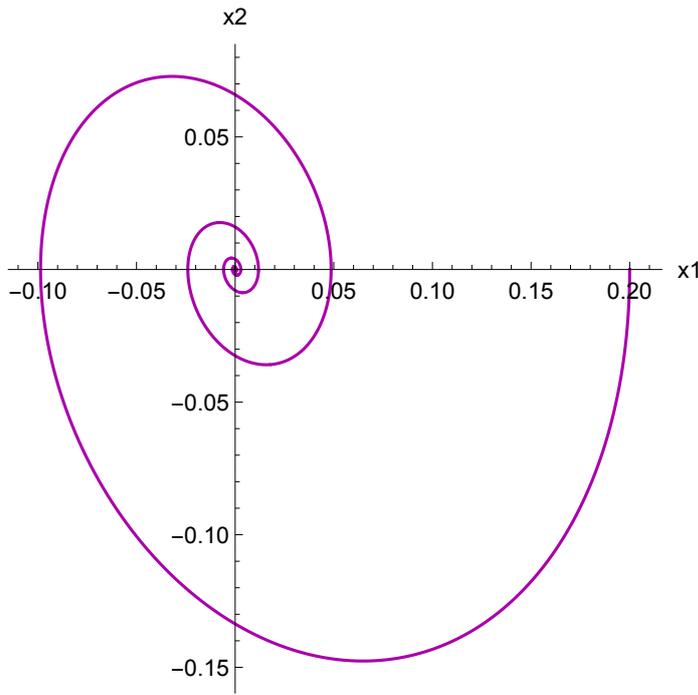


Рис. 5.9: Фазовая кривая для устойчивого фокуса

Теперь рассмотрим систему

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 \\ \dot{x}_2 = -x_1 - 2\mu x_2 + v_1(t), \end{cases} \quad (5.6)$$

где $v_1 = v_1(t)$ – кусочно-непрерывная функция (функция класса $КС$) такая, что $|v_1(t)| \leq \delta_1$ для всех t и некоторого параметра $\delta_1 > 0$. Слагаемое $v_1(t)$ можно интерпретировать как ускорение, придаваемое маятнику некоторой стимулирующей силой. Целью стимулирования является изменение фазового портрета исходной системы.

Конкретный вид стимулирующей добавки $v_1(t)$ может быть разным. Если, например, функцию $v_1(t)$ взять в соответствии с решением обобщенной задачи Булгакова о максимальном отклонении [5], а именно,

$$v_1(t) = \delta_1 \text{sign} \sin(-t\sqrt{1 - \mu^2}) \quad (5.7)$$

(по-прежнему $\mu = 9/41$, начальные условия $x_1(0) = 0, 2$, $x_2(0) = 0$, а $\delta_1 = 0, 3$), то фазовая кривая получится такой:

График $x_1 = x_1(t)$ приведен на рис. 5.12.

С точки зрения динамики результаты могут быть проинтерпретированы следующим образом: наличие стимулирующей силы позволяет преодолеть трение и вывести движение маятника на предельный цикл (его можно увидеть

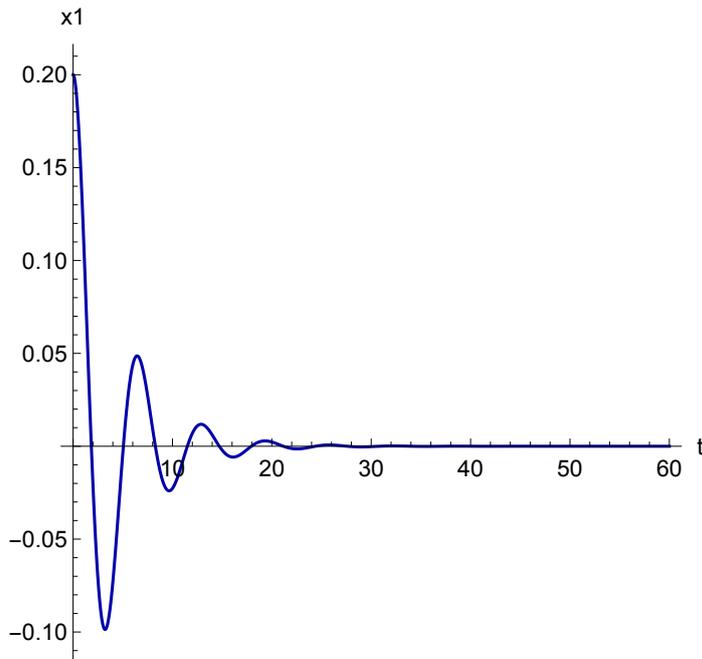


Рис. 5.10: Поведение $x_1(t)$

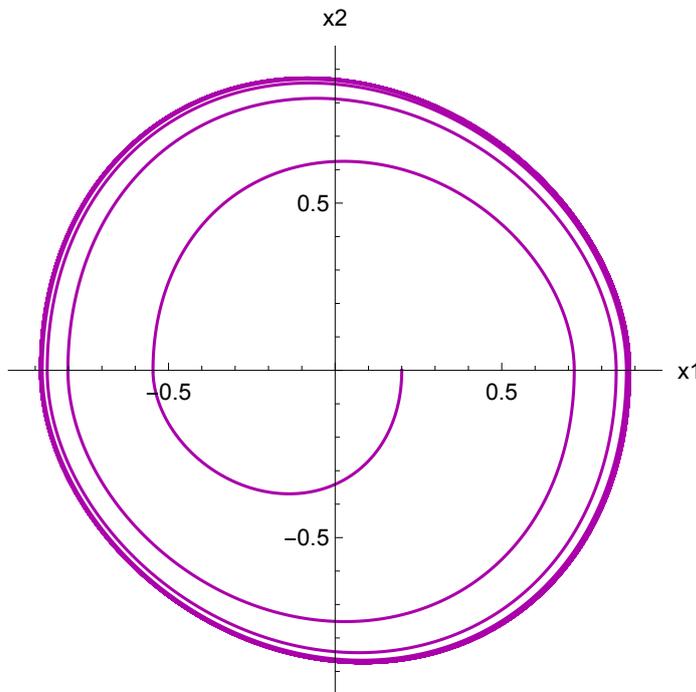


Рис. 5.11: Фазовая кривая при $v(t)$ из (5.7)

на рис. 5.11). Предельный цикл и его внутренняя область составляют область достижимости.

Для математической модели Ходжкина–Хаксли с модификацией Сото–Александрова для ее линеаризации в окрестности точечного аттрактора — устойчивого фокуса, в [21] приведен алгоритм построения множества достижимости D_∞ . Покажем, не вдаваясь в подробности, как это можно сделать.

Рассмотрим систему уравнений в вариациях для отклонений ΔV , Δn значений V и n от V_0 и n_0 , где V_0 и n_0 — координаты точечного аттрактора на

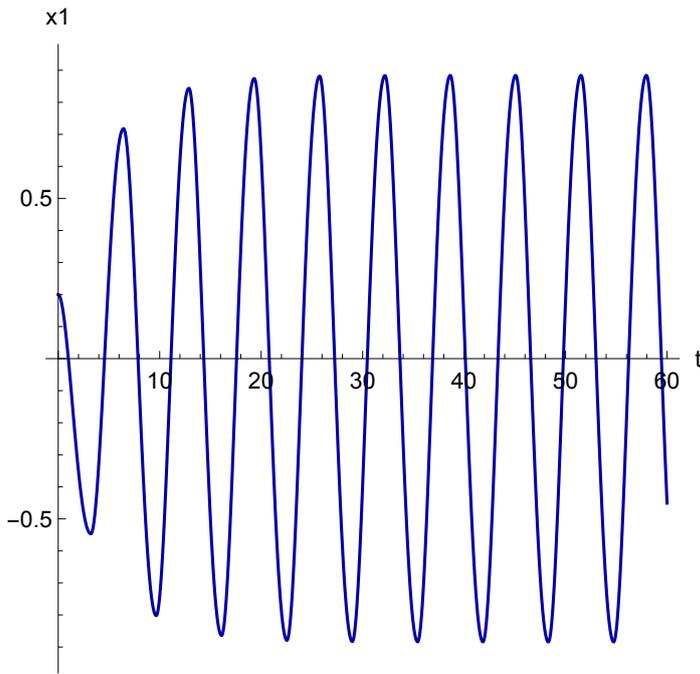


Рис. 5.12: Поведение $x_1(t)$

фазовой плоскости. При определённых значениях параметров (здесь мы не будем уточнять значения параметров, см. ниже систему 5.9, в которой шумовой ток $I_{noise} = 0$, т.е. в отсутствие шума) получается следующая линеаризованная система с добавленной стимуляцией:

$$\begin{cases} \frac{d\Delta V}{dt} = 0,249\Delta V - 12,86\Delta n + \gamma_1 P(t), \\ \frac{d\Delta n}{dt} = 0,0129\Delta V - 0,3\Delta n, \end{cases} \quad (5.8)$$

где $\gamma_1 P(t)$ — стимулирующий добавочный ток ($P(t)$ — кусочно-постоянная функция, $|P(t)| \leq const$, γ_1 — его интенсивность, скажем, константа порядка 0,2).

Решая известную задачу Булгакова о максимальном отклонении [21], получаем множество достижимости D_∞ . Граница этого множества (предельный цикл) изображена пунктиром на рис. 5.13 и, более детально, на рис. 5.14. Вид добавочного тока определяется при этом по формуле

$$P(t) = \frac{1}{2} I_{syn} \text{sign} \sin \omega t,$$

где I_{syn} — величина синаптического тока, примерно равная 1, ω — частота колебаний для системы (5.8) без стимулирующей добавки.

Таким образом, на рис. 5.13 представлен окончательный вид на фазовой плоскости динамической модели АПН с тремя предельными циклами:

1. периодический аттрактор C (источник выходных спайков);

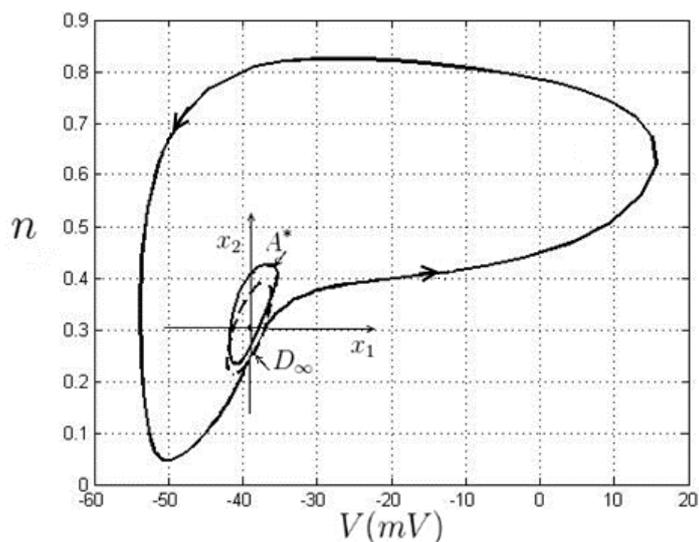


Рис. 5.13: Три предельных цикла

2. периодический цикл A , устойчивый по Пуанкаре в обратном времени, и является границей области притяжения точечного аттрактора (асимптотически устойчивый фокус);
3. предельный цикл D_∞ – область достижимости системы (5.6) при наличии гальванического стимула (управления) (рис. 5.14)

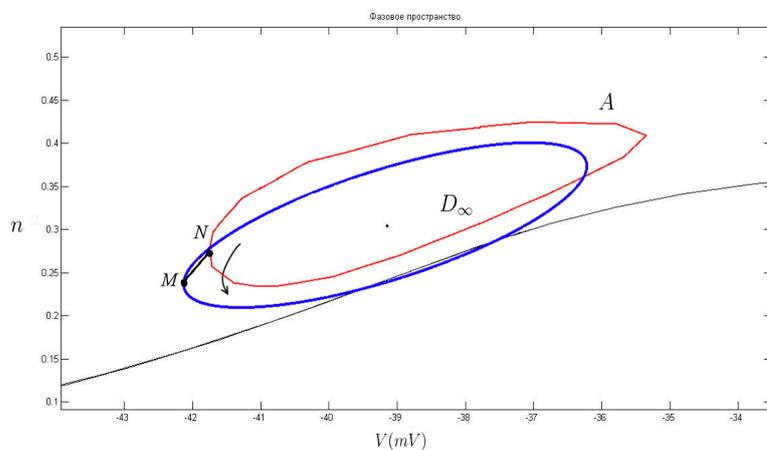


Рис. 5.14: Область достижимости при наличии стимула

Стимуляция в модифицированной модели Ходжкина–Хаксли при отсутствии и наличии гауссовского случайного шума

Постановка задачи стохастизации математической модели Ходжкина–Хаксли с модификациями Сото–Александрова на временном интервале гальванической стимуляции, представленной на фазовой плоскости $\{V, n\}$. В идеальном случае при отсутствии гауссовского шума, сопровождающего гальваниче-

ское управление, переход из области притяжения устойчивого фокуса в область притяжения периодического аттрактора представлен К.В. Тихоновой [23].

Для решения задачи влияния гауссовских шумов разной интенсивности рассмотрим систему дифференциальных уравнений

$$\begin{cases} C_m \cdot \frac{dV}{dt} = I_{syn} + \gamma_1 P(t) + I_{noise} - I_{Na} - I_K - I_L, \\ \tau_n(V) \cdot \frac{dn}{dt} = (n_\infty(V) - n)Q, \end{cases} \quad (5.9)$$

где

$$\begin{aligned} I_{Na} &= g_{Na} m_\infty^3(V) (C(V) - n) (V - V_{Na}), \\ I_K &= g_K n^4 h_K (V - V_K), \quad I_L = g_L (V - V_L) \end{aligned}$$

– токи натрия и калия соответственно, I_L – ток утечки, g_{Na} , g_K и g_L – проводимости для этих токов, I_{noise} – случайный ток, играющий роль "шума" (все токи относятся к единице площади, единица измерения – мкА/см²).

Слагаемое $\gamma_1 P(t)$, где $\gamma_1 > 0$, а $P(t)$ – кусочно-непрерывная функция с условием $|P(t)| \leq 1$, играет роль стимулирующего тока.

Кроме того,

$$C(V) = n_\infty(V) + h_{Na\infty}(V), \quad (5.10)$$

$$m_\infty(V) = \frac{1}{1 + \exp\left(\frac{-(v+33,8)}{5,2}\right)}, \quad h_{Na\infty}(V) = \frac{1}{1 + \exp\left(\frac{v+60,5}{9,9}\right)}, \quad (5.11)$$

$$n_\infty(V) = \frac{1}{1 + \exp\left(\frac{-(v+35)}{5}\right)}, \quad \tau_n(V) = \frac{1}{\exp\left(\frac{-(v+25)}{15}\right) + \exp\left(\frac{v+30}{20}\right)}. \quad (5.12)$$

Здесь V – мембранный потенциал афферентного нейрона, C_m – ёмкость мембраны нейрона, n – вероятность присутствия частицы активации калиевого тока, h_{Na} и h_K – параметры, которые являются вероятностями отсутствия частиц инактивации натриевого и калиевого тока, $h_{Na\infty}$ и $h_{K\infty}$ – их стационарные значения (считаем, что значение h_K постоянно, $h_K = h_{K\infty}$). Они служат для описания процесса инактивации соответствующего тока.

К.В. Тихонова [23] показала, что в ситуации, когда расстояние Хаусдорфа $d(D_\infty, A) = \max_{x \in D_\infty} \min_{y \in A} \rho(x, y) > 0$ положительно (во множестве достижимости имеются точки, принадлежащие области притяжения периодического

аттрактора) возможен переход от движения системы (5.12) в области притяжения точечного аттрактора в область притяжения периодического аттрактора, реализующего спайки нейронного управления (рис. 5.14). Можно сказать, что (утв.1 стр. 82 [23]) остаётся верным при малой амплитуде гауссовского шума.

Параметр τ_n – постоянная времени процесса активации калиевого тока, n_∞ , m_∞ – стационарные значения, Q – определённый температурный безразмерный фактор.

При численном моделировании в пакете Wolfram Mathematica 12.1.1 были использованы следующие значения параметров:

$$\begin{aligned} C_m &= 1 \text{ мкФ/см}^2; & V_{\text{Na}} &= 52 \text{ мВ}; & V_{\text{K}} &= -84 \text{ мВ}; & V_L &= -63 \text{ мВ}; \\ I_{\text{syn}} &= 1,05 \text{ мВ}; & g_{\text{Na}} &= 2,3 \text{ мСм/см}^2; & g_{\text{K}} &= 2,4 \text{ мСм/см}^2; \\ g_L &= 0,03 \text{ мСм/см}^2; & Q &= 8,4; & h_{\text{K}} &= 0,7329. \end{aligned}$$

В качестве стимулирующего тока рассматривалась кусочно-постоянная функция (единица измерения – мкА/см²)

$$P(t) = \begin{cases} 0, & 0 \leq t < 30, \\ 1, & 30 \leq t \leq 39, \\ 0, & t > 39, \end{cases}$$

параметр $\gamma_1 = 0,27$.

При отсутствии стимуляции и гауссовского шума имеется точечный аттрактор – стационарная точка типа устойчивый фокус с координатами $V = -39,253$, $n = 0,299$.

Зависящая от времени величина шумового тока I_{noise} моделировалась по следующему закону, соответствующему аппроксимационному ряду Каца–Шинозуки из [11]:

$$I_{\text{noise}} = \text{Amp} \cdot \sqrt{\frac{2}{N}} \sum_{k=1}^N \cos(\omega_k t + \varphi_k) \quad (5.13)$$

при достаточно больших N (было взято значение $N = 100$), Amp – параметр, соответствующий амплитуде. Были взяты значения $\text{Amp} = 0$ (отсутствие шума), $\text{Amp} = 0,1$ и $\text{Amp} = 0,15$ (относительно малый шум по сравнению с максимумом стимулирующего тока), а также $\text{Amp} = 0,2$ (шум уровня, соизмеримого по

принимаемым значениям со значениями стимулирующего тока). Большие значения амплитуды не рассматриваются в рамках этой работы, поскольку шум такой силы не может быть создан биофизической системой.

Кроме того, ω_k , φ_k – независимые в совокупности случайные величины. При моделировании величины φ_k рассматривались как равномерно распределенные на промежутке $[0; 2\pi)$, ω_k – как равномерно распределенные на промежутке $(0; 10]$.

Результаты моделирования. Во всех случаях бралась начальная точка траектории, близкая к точечному аттрактору с координатами $V = -39, 253$, $n = 0, 299$.

Случай 1. Отсутствие шума: $Amp = 0$.

Фазовая кривая изображена на рис. 5.15.

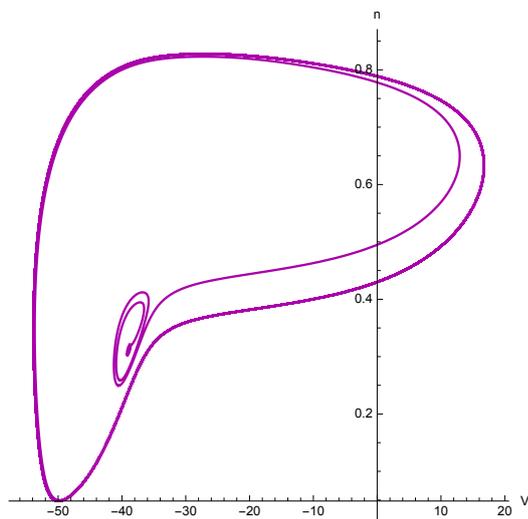


Рис. 5.15: Фазовая кривая

На рис. 5.16 изображен график зависимости потенциала от времени $V = V(t)$.

Наличие стимулирующего импульса приводит к тому, что система из режима "ничего" (колебания около точечного аттрактора, нейроинформация не передается) переходит в режим "всё" (движение вдоль предельного цикла "утиный нос", нейроинформация передается).

Случай 2. Малый шум: $Amp = 0, 1$.

График одной из реализаций гауссовского шума изображен на рис. 5.17.

Фазовая кривая, отвечающая этой реализации гауссовского шума, изображена на рис. 5.18.

На рис. 5.19 изображен график зависимости потенциала от времени $V =$

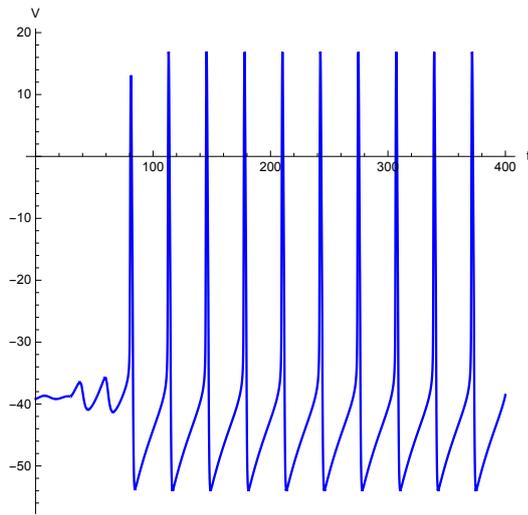


Рис. 5.16: Поведение $V = V(t)$

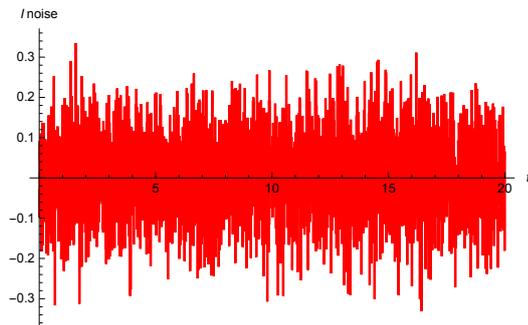


Рис. 5.17: Гауссовский шум

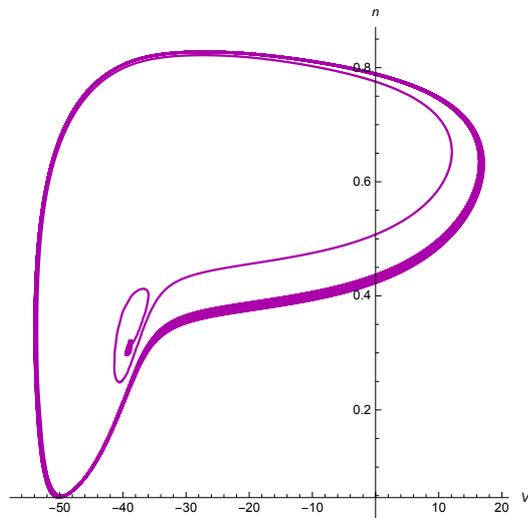


Рис. 5.18: Фазовая кривая

$V(t)$.

При сравнении случаев 1 и 2 с рис. 5.15 и рис. 5.18 мы можем сделать вывод, что наличие небольшого шума, как правило, не приводит к существенным изменениям поведения системы по сравнению со случаем отсутствия шума.

Случай 3. Малый шум: $Amp = 0,15$.

График реализации гауссовского шума отличается от случая 1 на рис. 5.17 только амплитудой.

Фазовая кривая, отвечающая этой реализации гауссовского шума, изобра-

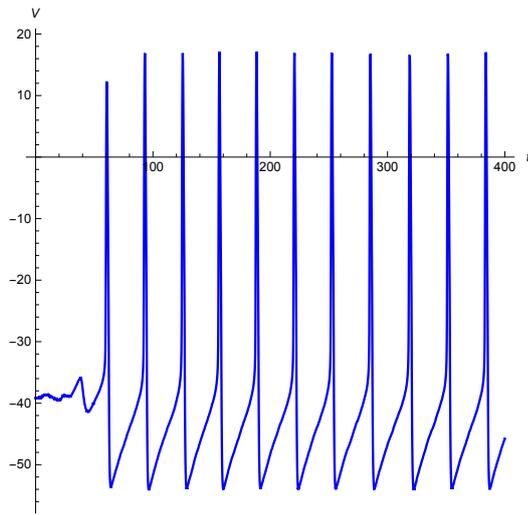


Рис. 5.19: Поведение $V = V(t)$

жена на рис. 5.20.

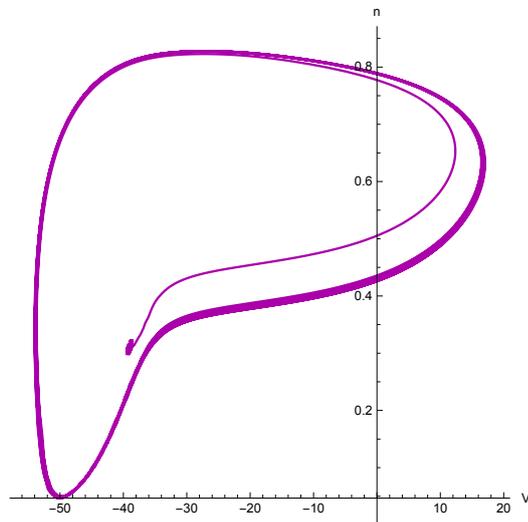


Рис. 5.20: Фазовая кривая

На рис. 5.21 изображен график зависимости потенциала от времени $V = V(t)$.

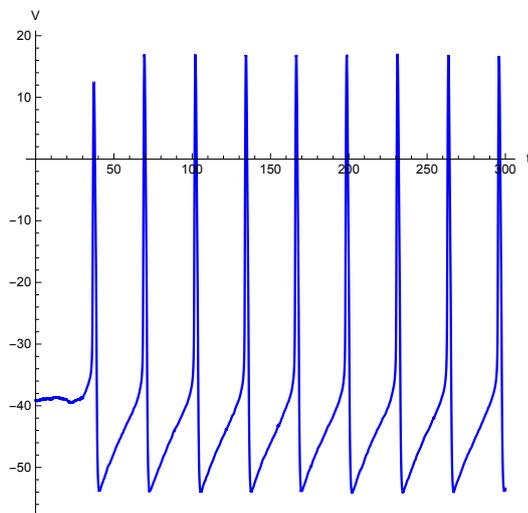


Рис. 5.21: Поведение $V = V(t)$

Сравнивая случаи 2 и 3 с рис. 5.18 и рис. 5.21, можно сделать вывод,

что наличие любого небольшого шума, как правило, не оказывает влияния на поведение системы.

Случай 4. Соизмеримый по силе со стимулирующим током шум: $Amp = 0,2$. Для данного случая характерны разные паттерны поведения системы, поскольку шум начинает конкурировать со стимуляцией: шум может как и не произвести никакого эффекта на стимуляцию, так и погасить ее или сыграть самостоятельно роль стимуляции, переводя поведение системы на периодический аттрактор.

График реализации гауссовского шума также отличается от случая 1 на рис. 5.17 только амплитудой, поэтому здесь его не приводим.

Случай 4.1. При $Amp = 0,2$ шум не оказывает влияния на поведение системы.

Фазовая кривая, отвечающая этой реализации гауссовского шума, изображена на рис. 5.22.

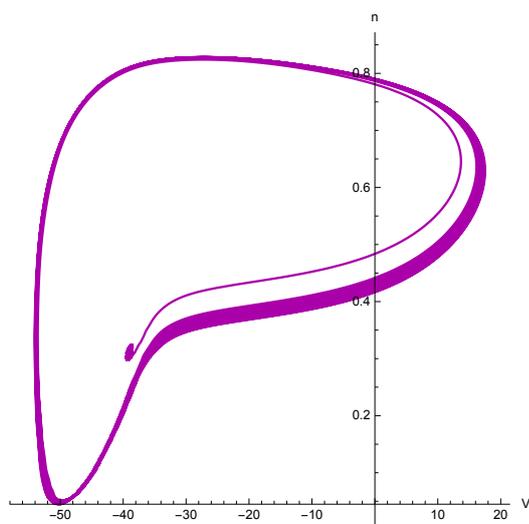


Рис. 5.22: Фазовая кривая

На рис. 5.23 изображен график зависимости потенциала от времени $V = V(t)$ (расширен диапазон построения по оси абсцисс).

Сравнивая фазовую кривую случая 4.1 рис. 5.22 с фазовыми кривыми случаев 1, 2 и 3 (рис. 5.15, 5.18 и 5.20), можно сделать вывод, что шум при $Amp = 0,2$ может не оказывать влияния на поведение системы.

Случай 4.2. При $Amp = 0,2$ шум гасит стимуляцию, а потом сам играет ее роль.

Фазовая кривая, отвечающая этой реализации гауссовского шума, изображена на рис. 5.24.

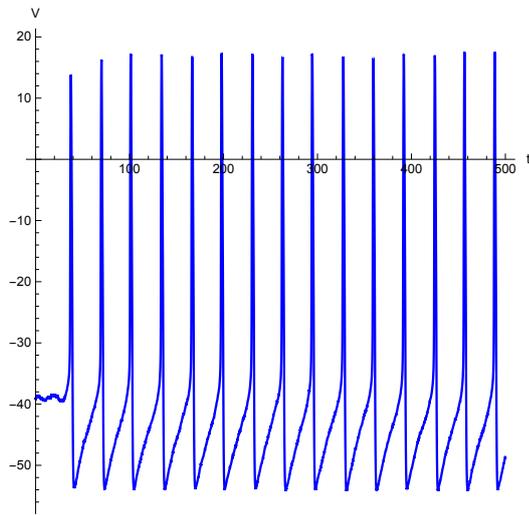


Рис. 5.23: Поведение $V = V(t)$

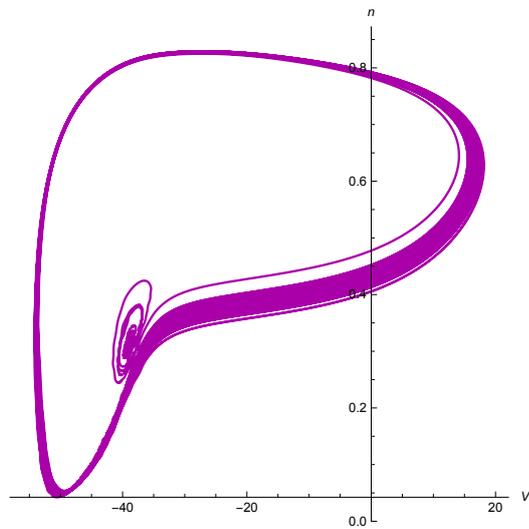


Рис. 5.24: Фазовая кривая

На рис. 5.25 изображен график зависимости потенциала от времени $V = V(t)$ (расширен диапазон построения по оси абсцисс).

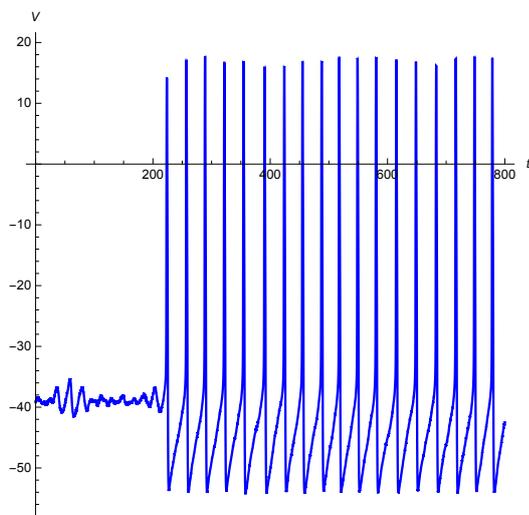


Рис. 5.25: Поведение $V = V(t)$

Поведение фазовой кривой случая 4.2 рис. 5.24 радикально отличается от поведения фазовых кривых случаев 1, 2 и 3 (рис. 5.15, 5.18 и 5.20), а именно:

- 1) на отрезке времени $t \in [0, 39]$ гауссовский шум гасит стимуляцию, не давая системе выйти из области притяжения точечного аттрактора в область притяжения периодического аттрактора;
- 2) вблизи точки $t = 200$ гауссовский шум сам выполняет роль стимуляции и выводит систему в область притяжения периодического аттрактора;
- 3) начиная с момента времени вблизи $t = 260$ система ведет себя стабильно на периодическом аттракторе и более в область притяжения точечного аттрактора не переходит.

Отсюда можно сделать вывод, что наличие небольшого шума, как правило (здесь мы основываемся на статистике результатов моделирования), не приводит к существенным изменениям поведения системы по сравнению со случаем отсутствия шума. Шум средней величины конкурирует со стимуляцией.

В то же время при достаточно большой амплитуде шума стимуляция, как правило, в итоге подавляется – система ведёт себя так же, как и при наличии большого по амплитуде случайного шума без стимуляции, появляются и исчезают пачки спайков. Графики, соответствующие системе с шумом и без стимуляции, приведены в параграфе 5.2 работы, и можно сравнить, например, фазовые кривые на рис. 5.6 и рис. 5.24, а также графики изменения потенциала $V(t)$ на рис. 5.7 и рис. 5.25.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Обзор проведенного исследования. Тематика диссертации относится к области теории вероятностей и ее применения. В работе рассмотрены задачи поиска асимптотики вероятностей больших выбросов гауссовских процессов и полей, а также их приложения. В дополнение приведены приложения гауссовских процессов (белый шум) в стохастизации математических моделей биофизических систем. Основные результаты диссертации состоят в следующем.

1. Сформулирована и доказана теорема об асимптотике вероятностей высоких максимумов траекторий стационарных гауссовских процессов в дискретном времени.
2. Сформулирована и доказана теорема об асимптотике вероятностей высоких максимумов траекторий нестационарных гауссовских процессов в дискретном времени.
3. Сформулирована и доказана локальная лемма об асимптотике вероятностей высоких максимумов траекторий однородных двухпараметрических гауссовских полей в дискретном времени.
4. Сформулирована и доказана теорема об асимптотике вероятностей высоких максимумов траекторий однородных двухпараметрических гауссовских полей в дискретном времени.
5. Сформулирована и решена задача об асимптотике вероятностей высоких максимумов траекторий дробного броуновского движения в дискретном времени.
6. Сформулирована и решена задача о разорении для дробного броуновского движения в дискретном времени.
7. Дана математическая интерпретация основного закона нейрофизиологии "Всё или ничего".

8. Дана оценка влияния гауссовского белого шума на возможность реализации управляемого перехода в математической модели афферентного первичного нейрона.

Личный вклад

Теоретические и практические результаты, изложенные в пунктах 1, 2, 5 и 6 раздела "Обзор проведенного исследования", получены соискателем совместно с научным руководителем доктором физико-математических наук профессором Питербаргом Владимиром Ильичем.

Теоретические результаты, изложенные в пунктах 3 и 4 раздела "Обзор проведенного исследования", получены соискателем самостоятельно.

В теоретических и практических результатах, изложенных в пунктах 7 и 8 раздела "Обзор проведенного исследования", постановка задачи и интерпретация результатов была проведена В.В. Александровым и Ю.С. Семеновым, а подбор стохастизации и аппроксимации гауссовского белого шума рядами Каца–Шинозуки были произведены соискателем.

Рекомендации и перспективы по дальнейшей разработке темы.

- Исследовать асимптотику поведения совместной вероятности высокого выброса в дискретном времени и в непрерывном времени для однородного двухпараметрического гауссовского поля, удовлетворяющего условиям из главы 3.
- Обобщить результаты, полученные для однородных двухпараметрических гауссовских полей в дискретном времени, на однородные n -параметрические поля в дискретном времени.
- Получить вероятностные характеристики (математическое ожидание, дисперсия и т.д.) для реализаций модифицированной модели Ходжкина–Хаксли со стохастизацией и управлением при разных значениях амплитуды гауссовского белого шума.

Соискатель выражает особую признательность и огромную благодарность научному руководителю доктору физико-математических наук профессору Питербаргу Владимиру Ильичу.

Литература

- [1] Феллер В. Введение в теорию вероятностей и ее приложения. – Москва: Издательство иностранной литературы, 1964. – 427 с.
- [2] Александров В. В. К задаче Булгакова о накоплении возмущений // Доклады Академии Наук СССР. Серия: Кибернетика. – 1969. – Т. 186, №3. – С. 70–73.
- [3] Pickands J., III Upcrossing probabilities for stationary Gaussian processes // Trans. Amer. Math. Soc. – 1969. – 145. – P. 51–73.
- [4] Питербарг В. И., Присяжнюк В. П. Асимптотика вероятности большого выброса для гауссовского нестационарного процесса // Теория вероятностей и математическая статистика. – 1978. – Т. 18. – С. 121–133.
- [5] Жермоленко В. Н. Предельные циклы на фазовой плоскости. – Сборник "Задача Булгакова о максимальном отклонении и ее применение" под ред. В.В. Александрова. Издательство МГУ. – 1993.
- [6] Hüsler J., Piterbarg V. I. Extremes of a certain class of Gaussian processes // Stochastic Processes and their Applications. – 1999. – Vol. 83. – P. 257–271.
- [7] Рубин А. Б. Биофизика. Том 2. – Издательство Институт Компьютерных Исследований, 2000. – 381 с,
- [8] Эльсгольц Л. Э. Дифференциальные уравнения и вариационное исчисление. – Москва: УРСС, 2000. – 424 с.
- [9] Piterbarg V. I. Discrete and continuous time extremes of Gaussian processes // Extremes. – 2004. – № 2. – P. 161–177.
- [10] Highstein S. M., Fay R. R., Popper A. N. The Vestibular System. – Springer. New York, 2004. – 561 с.

- [11] Симиу Э. Хаотические переходы в детерминированных и стохастических системах. Применение метода Мельникова в технике, физике и нейрофизиологии. – Физматлит, 2007. – 208 с.
- [12] Ширяев А. Н. Вероятность. – МЦНМО, 2007. – 967 с.
- [13] Шильников Л. П., Шильников А. Л., Тураев Д. В., Чуа Л. Методы качественной теории в нелинейной динамике. Часть 2. – Ижевский институт компьютерных исследований, 2009. – 442 с.
- [14] Садовничий В. А., Александров В. В., Александрова Т. Б., Вега Р., Сото Э. Информационный процесс в латеральных полукружных каналах // Доклады Академии наук. Биологические науки. – 2011. – Т. 436. № 1. – С. 129–132.
- [15] Piterbarg V. I. Asymptotic Methods in the Theory of Gaussian Random Processes and Fields. – Providence. Amer. Math. Soc. Ser. Translations of Mathematical Monographies, 2012. – Vol. 148. – 206 с.
- [16] Садовничий В. А., Александров В. В., Тихонова К. В. и др. Патент РФ №2500375 Устройство автоматической коррекции установки зрения человека при визуальном управлении движением в условиях микрогравитации. – Москва, 2013. – 13 с.
- [17] Александров В. В., Александрова О. В., Тихонова К. В. и др. Алгоритм коррекции выходного сигнала вестибулярного механорецептора для имитации пассивных поворотов // Вестник Московского университета. Серия 1: Математика. Механика. – 2015. – № 5. – С. 130–134.
- [18] Питербарг В. И. Двадцать лекций по гауссовским процессам. – МЦНМО, 2015. – 188 с.
- [19] Makogin V. Simulation paradoxes related to a fractional Brownian motion with small Hurst index // Modern Stochastics: Theory and applications. – 2016. – Vol. 3. – P. 181–190.
- [20] Ширяев А. Н. Основы стохастической финансовой математики. – МЦНМО, 2016. – 900 с.

- [21] Александров В.В., Бугров Д.И., Тихонова К.В. Задачи о детерминированном и хаотическом переходах в бистабильных системах на плоскости. – М.: Издательство Московского университета, 2017. – 44 с.
- [22] Borovkov K., Mishura Y., Novikov A., Zhitlukhin M. Bounds for expected maxima of Gaussian processes and their discrete approximations // Stoch. Int. J. Probab. Stoch. Process. – 2017. – Vol. 89, № 1. – P. 21–37.
- [23] Тихонова К. В. Математические задачи коррекции активности вестибулярных механорецепторов. – Кандидатская диссертация. – Москва, 2019. – 134 с.
- [24] Jasnovidov G. Simultaneous ruin probability for two-dimensional Fractional Brownian Motion risk process over discrete grid // Lithuanian Mathematical Journal. – 2021. – Vol. 61. – P. 246–260
- [25] Bisewski K, Jasnovidov G. On the speed of convergence of discrete Pickands constants to continuous ones // arxiv.org

Работы автора по теме диссертации

Статьи в рецензируемых научных изданиях, рекомендованных для защиты в диссертационном совете МГУ.011.3 по специальности 1.1.4 – "теория вероятностей и математическая статистика" и входящих в базы цитирования Scopus, Web of Science и RSCI

- [26] Козик И. А., Питербарг В. И. Большие выбросы гауссовских нестационарных процессов в дискретном времени // Фундаментальная и прикладная математика. Москва: Интуит. – 2018. – Т. 22, № 2. – С. 159–169.
- [27] Александров В. В., Александрова О. В., Козик И. А., Семенов Ю. С. Модификация модели Ходжкина–Хаксли и математическая интерпретация основного закона нейрофизиологии «Всё или ничего» // Вестник Московского университета. Серия 1: Математика. Механика. – 2021. – №3. – С. 66–69.

- [28] Козик И. А. Экстремумы однородных двухпараметрических гауссовских полей при дискретизации параметров // Вестник Московского университета. Серия 1: Математика. Механика. – 2022. – № 5. – С. 9–17.
- [29] Александров В. В., Козик И. А., Семенов Ю. С. Исследование модифицированной модели Ходжкина-Хаксли при наличии стимуляции и случайного шума // Вестник Московского университета. Серия 1: Математика. Механика. – 2024. – №2. – С. 44–47.