ОТЗЫВ научного руководителя
о диссертации на соискание ученой степени
кандидата физико-математических наук
Икэда Ясуси
на тему: «Квантовый метод сдвига аргумента и квантовые алгебры Мищенко–Фоменко в $U\mathrm{gl}(n, \mathbb{C})$»
по специальности 1.1.3. Геометрия и топология

Напомним, что пуассоновой структурой на многообразии M называют операцию скобки Пуассона $\{,\}$ на пространстве гладких функций на M. В частности, такая операция существует на любом симплектическом многообразии. Важным примером пуассоновых структур является пространство, двойственное к алгебре Ли g с канонической линейной скобкой Пуассона (скобкой Кириллова-Костанта-Сурио) на нём.

С каждой гладкой функцией f на M связывают векторное поле Гамильтона X_f такое, что для любой функции g на M

$$X_f(g)=\{f,g\}.$$

Гамильтоновой системой на пуассоновом многообразии M называют уравнение вида

$$\dot{x} = X_f\ , \tag{1}$$

где x - точка на многообразии. Многие важные для приложений классические дифференциальные уравнения имеют такой вид, что объясняет активный интерес к теории гамильтоновых систем.

Согласно теореме Лиувилля, наличие на симплектическом многообразии M размерности $2n$ системы из n первых интегралов $f_1 = f, \dots, f_n$ уравнения (1) таких, что

$$\{f_i, f_j\} = 0,$$

гарантирует существование решения в квадратурах уравнения (1). Такие системы называют системами *интегралов в инволюции*. Аналоги этого утверждения имеются и для пуассоновых структур общего вида.

В силу сказанного, одним из важных направлений теории гамильтоновых систем является построение систем первых интегралов в инволюции относительно данной пуассоновой структуры. В частности, этот вопрос применим к пространстам коприсоединённых представлений алгебр Ли g: в этом случае мы получаем большие коммутативные (относительно пуассоновой структуры) подалгебры в алгебре Sg. Метод сдвига аргумента (или "сдвига инвариантов") является одним из важных методов, построения коммутативных подалгебр, прежде всего в алгебрах Sg. Грубо говоря, метод состоит в том, что каждый центральный элемент f в Sg заменяют на набор частных производных f в направлении некоторого вектора. Получающиеся при этом подалгебры называются *алгебрами сдвига аргумента* или *алгебрами Мищенко-Фоменко* (так как этот метод в указанном нами виде впервые был представлен в работе этих авторов).

В квантовой теории, как известно, алгебры наблюдаемых функций со скобкой Пуассона заменяют на ассоциативные алгебры с коммутатором (квантование алгебры наблюдаемых). При этом коммутативные пуассоновы подалгебры заменяют на коммутативные подалгебры в алгебрах операторов. В случае алгебры полиномиальных функций на пространстве g^* с линейной пуассоновой структурой, квантование естественным образом можно отождествить с универсальной обертывающей алгеброй Ug. Таким образом мы получаем вопрос о построении коммутативных подалгебр в универсальной обертывающей алгебре Ug.

Из ранее имевшихся работ таких авторов, как Винберг, Ольшанский, Тарасов, Рыбников, Талалаев, Молев и др. известно, что у алгебр Мищенко-Фоменко имеются "квантовые" версии, то есть коммутативные подалгебры в Ug, переходящие в алгебры сдвига аргумента в "квазиклассическом пределе". Более того, было известно, что такие алгебры единственны. Однако, в работах всех перечисленных выше авторов построение квантовых алгебр сдвига аргумента основано на описании наборов их образующих, в то время как существование процедуры сдвига, - оператора на универсальной обёртывающей алгебре Ug, чей квазиклассический предел был бы равен оператору частной производной по направлению, такого, что образы центра Ug относительно итераций этого оператора порождают квантовую алгебру сдвига аргумента, - насколько мне известно, оставалось полностью вне сферы внимания исследователей.

В представленной работе соискателя предложен метод, позволяющий сопоставить оператору частной производной по направлению на Sgl_n оператор на универсальной обертывающей алгебре Ugl_n, его накрывающий. При этом удаётся доказать, что образы центральных элементов универсальной обёртывающей алгебры относительно этих "квантованных производных по направлению", образуют коммутативную подалгебру. Кроме того, в работе подробно исследуются свойства этого оператора и представлены некоторые элементы в его образе. Эти результаты, да и сам подход, насколько мне известно, ранее не встречались в доступной литературе, что позволяет высоко оценить оригинальность исследования. С другой стороны, лучшее понимание метода сдвига аргумента потенциально позволит перенести на квантовый случай другие известные методы построения коммутативных семейств, что делает выбранную тему актуальной и важной для теории квантовых интегрируемых систем.

Основная часть диссертации состоит из трех частей: в первой описывается конструкция "квазипроизводных по направлению" (впервые эти операторы появились в явной форме в работах Гуревича, Пятова и Сапонова) на универсальной обёртывающей алгебре Ugl_n и доказывается формула, позволяющая вычислить значение этих операторов на центральных элементах универсальной обёртывающей алгебры. При помощи этой формулы затем удаётся доказать коммутирование первых производных по направлению от этих элементов. Во второй части диссертации доказано основное утверждение работы:

Теорема: *Итерированные частные квазипроизводные любых степеней по некоторому (фиксированному) направлению от любых двух центральных элементов универсальной обёртывающей алгебре* Ugl_n *коммутируют между собой.*

Наконец, в третьей основной части работы полученные ранее результаты используются, чтобы получить явные формулы для вторых частных квазипроизводных по направлению от некоторых центральных элементов. Это позволяет получить интересный (и, видимо, ранее неизвестный) набор коммутирующих элементов в Ugl_n (в ранее вышедших работах, посвящённых квантовым алгебрам сдвига аргумента, описывались элементы, "накрывающие" сдвиги коэффициентов характеристического многочлена, в то время, как в представленной диссертации описываются сдвиги следов степеней матрицы образующих).

Таким образом с уверенностью можно сказать, что все результаты представленной работы оригинальны, ранее в доступной литературе не встречались. Результаты получены диссертантом самостоятельно, опубликованы в реферируемых журналах. Сформулированные диссертантом утверждения полностью обоснованы и достоверны. Единственная претензия, которую можно предъявить, на мой взгляд, представленной работе --- излишняя краткость, можно даже сказать лапидарность изложения, не сильно влияющая, впрочем, на понимание результатов и связанная, по-видимому, с тем, что автор работы чувствует себя несколько скованно при написании работы на языке, не являющемся для него родным.

Считаю, что диссертационная работа ФИО удовлетворяет всем требованиям «Положения о присуждении ученых степеней в МГУ имени

М.В.Ломоносова» и рекомендую ее к защите в диссертационном совете МГУ.011.4 на соискание ученой степени кандидата физико-математических наук по специальности 1.1.3. Геометрия и топология.

Научный руководитель:

кандидат физ.-мат. наук,
доцент кафедры дифференциальной геометрии
и приложений механико-математического факультета
ФГБОУ ВО «МГУ имени М. В. Ломоносова»

ШАРЫГИН Георгий Игорьевич 20.09.2024

подпись, дата подписания

Контактные данные:
тел.: +7-495-9393940, e-mail: sharygin@itep.ru
Специальность, по которой научным руководителем
защищена диссертация:
01.01.04 - геометрия и топология

Адрес места работы:
119234, г. Москва, Ленинские горы, д. 1, к. 16-19
МГУ имени М.В.Ломоносова,
механико-математический факультет

Подпись доцента механико-математического факультета
МГУ имени М.В.Ломоносова Г.И. Шарыгина удостоверяю:

Декан механико-математического
факультета МГУ, член-корреспондент РАН
профессор А.И. Шафаревич ____________ / ____________

Дата: 20.09.24