

МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
имени М.В.ЛОМОНОСОВА
ФИЗИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТЕТ

На правах рукописи

Авдеев Никита Алексеевич

Инфляция в теориях модифицированной гравитации

Специальность 1.3.1. Физика космоса, астрономия

ДИССЕРТАЦИЯ

на соискание ученой степени

кандидата физико-математических наук

Научный руководитель:
доктор физико-математических наук,
профессор РАН
Сергей Борисович Попов

Москва — 2024

Оглавление

	Стр.
Введение	4
Глава 1. Теория Хорндески ¹	16
Глава 2. Спектр первичных возмущений теории для случая $\kappa > 0$ ²	20
2.0.1 Приближение медленного скатывания	20
2.0.2 Рассмотрение первичных скалярных и тензорных возмущений	22
2.0.3 Обсуждение результатов главы	31
Глава 3. Инфляция в случае с $\kappa < 0$ ³	33
3.0.1 Случай без потенциала	33
3.0.2 Обсуждение результатов главы	40
Глава 4. Изменение орбитального периода в теории Хорндески и гибридной $f(R)$ - гравитации ⁴	41
4.0.1 Материальное действие	42
4.0.2 Постньютоновское решение	46
4.0.3 Метод Эйнштейна - Инфельда - Хофмана. Уравнения движения	48
4.0.4 Эффективный псевдотензор энергии-импульса	51
4.0.5 Тензорные и скалярные потоки	53
4.0.6 Поток скалярной энергии	57
4.0.7 Ограничения из наблюдательных данных двойных систем с пульсарами	65
4.0.8 Изменение орбитального периода \dot{P}_b в случае орбит с ненулевым эксцентриситетом в гибридной $f(R)$ - гравитации	72
4.0.9 Обсуждение результатов главы	74
Глава 5. ППК тест гибридной $f(R)$ - гравитации ⁵	75

	Стр.
5.0.1 ППК формализм	75
5.0.2 Изменение долготы периастра $\dot{\omega}$	76
5.0.3 ППК параметры s и r	82
5.0.4 Обсуждение результатов главы	86
Заключение	89
Благодарности	91
Список литературы	92

Введение

Актуальность темы исследования и степень ее разработанности.

На данный момент в физике существует ряд проблем, которые возможно решить в рамках общей теории относительности (ОТО), только введя новую материю обладающую достаточно специфическими свойствами [1; 2]. Одной из этих проблем является эффект тёмной материи, проявляющийся на галактических масштабах в кривых вращения галактики [3; 4], отличающихся от предсказанных, гравитационном линзировании на галактиках [5], столкновении двух меньших скоплений галактик в скоплении Пули [6]. Другим важным нерешённым вопросом является ускоренное расширение Вселенной (эффект тёмной энергии), наблюдаемое с помощью сверхновых типа Ia [7; 8]. Ещё одной важной открытой проблемой является наличие экспоненциально быстрого расширения Вселенной в первые мгновения своей жизни, которое также называется космологической инфляцией [9—18]. Одним из направлений исследований, решающих эти проблемы, является поиск модификаций ОТО, согласующихся со всеми имеющимися наблюдательными данными.

На сегодняшний день в мире существует множество различных теорий гравитации: это и векторно-тензорные [19], и биметрические [20], и $f(R)$ -теории [21], и скалярно-тензорные [22] и многие другие. Особенно интересными для рассмотрения являются последние. Скалярно-тензорные теории представляют из себя теории, где к тензорному, добавляется дополнительное скалярное поле. Подобные теории относительно просты в изучении их проявлений. Огромным преимуществом данных теорий является тот факт, что многие не скалярно-тензорные модели, например $f(R)$ -гравитация, могут быть переписаны в скалярно-тензорном виде [21]. Поэтому изучение скалярно-тензорных моделей позволяет также изучать и другие теории.

Довольно широким классом скалярно-тензорных теорий является теория Хорндески [23]. Это теория с уравнениями поля второго порядка, в которой отсутствуют неустойчивости Остроградского. Изучение этой теории и её частных случаев бурно происходит в последнее десятилетие как в качестве инфляционных моделей [24—29], так и в качестве моделей модифицированной гравитации, объясняющих эффекты тёмной материи [30; 31] и тёмной энергии [24; 32—34].

Проведение всевозможных тестов (например тесты в Солнечной системе[35], двойных пульсарах[24; 32], гравитационно-волновой тест[34] и другие) теории Хорндески с использованием наблюдательных данных является важнейшей задачей поиска жизнеспособной модели. На данный момент уже было проведено множество проверок теории Хорндески и её частных случаев, как кандидата на роль модели, объясняющей явления темной материи и тёмной энергии, в том числе и автором данной работы [24]. Помимо этого, подобный класс теорий широко исследовался с точки зрения кандидата на роль инфляционной теории[26—28; 36—40], в том числе были проведены тесты с использованием данных WMAP/PLANCK/BICEP[26; 41; 42].

Инфляция является одним из самых успешных сценариев, объясняющих физику ранней Вселенной[9—18]. В рамках данной теории предполагается, что в первые мгновения существования Вселенной она экспоненциально быстро расширилась в e^N раз (параметр N также называется числом е-фолдов). Популярность инфляции связана в основном с тем, что с её помощью становится возможно объяснить ряд наблюдательных феноменов, таких как, однородность, изотропность и пространственная плоскостность[27; 43]. Также она позволяет объяснить образование галактик из начальных квантовых возмущений, которые впоследствии были усилены за счет гравитационной неустойчивости.

И хотя успешность данной идеи в целом стала понятна достаточно давно, поиск конкретной теории, описывающей инфляцию, всё ещё остаётся очень важной актуальной проблемой. Самые простые модели такие как скалярно-тензорная теория с минимально связанным массивным скалярным полем уже исключены результатами экспериментов WMAP/PLANCK, BICEP1,2 и Keck Array[44].

Миссия WMAP (Wilkinson Microwave Anisotropy Probe) - космическая миссия, стартовавшая 30 июня 2001 года[45]. В рамках данной миссии был запущен прибор, состоящий из набора микроволновых радиометров размером в 1,4 x 1,6 метров, работающий на 5 частотных диапазонах от 22 до 90 ГГц. Целью данного эксперимента являлось составление карты звёздного неба на нескольких длинах волн в диапазоне от 3,2 мм до 13мм. Одним из результатов данного эксперимента стало построение карты анизотропии температуры реликтового излучения.

14 мая 2009 года была запущена космическая миссия PLANCK[46]. На космическом корабле установлены два прибора: низкочастотный прибор (LFI) и высокочастотный прибор (HFI). Оба прибора могут определять как общую

интенсивность, так и поляризацию фотонов и вместе покрывают частотный диапазон почти 830 ГГц (от 30 до 857 ГГц). Данная миссия позволила улучшить данные анизотропии температуры реликтового излучения полученные миссией WMAP, а также дополнить их измерениями поляризации реликтового излучения, гравитационного линзирования реликтового излучения, а также эффекта Сакса-Вольфа. Миссия завершила свою работу 23 октября 2013 года.

ВISER[47] - это серия наземных экспериментов (ВISER1, ВISER2, Keck Array и будущий ВISER3), целью которой является измерение поляризации реликтового излучения, в частности В - моды. Поляризацию реликтового излучения традиционно разделяют на две компоненты: Е - и В - моды. Е - мода отвечает за градиентную часть тензора поляризации, В - мода - за вихревую, по аналогии с электромагнитным полем. Особенно интересной представляется именно В - мода, поскольку в её генерации участвуют тензорные и не участвуют скалярные возмущения, а именно поиск первичных тензорных возмущений представляет особый интерес[43]. ВISER 1 проводил наблюдения поляризации на частотах 100 и 150 ГГц в период с 2006 по 2008, ВISER 2 проводил наблюдения поляризации на частоте 150 ГГц в период с 2010 по 2012. Keck Array - проводил наблюдения на 5 поляриметрах в 2011 и 2012 годах на частоте 150 ГГц и в 2013-2018 на частотах 150 ГГц и 95 ГГц. ВISER3 - грядущий эксперимент. В рамках данных экспериментов удалось оценить важнейшие характеристики спектра первичных возмущений, такие как: амплитуду мощности скалярных возмущений, отношение амплитуд тензорных и скалярных возмущений, спектральный индекс скалярных возмущений[47; 48].

Текущие наблюдения этих характеристик показывают, что в случае минимальной связи только асимптотически плоский потенциал скалярного поля удовлетворяет всем наблюдениям. Добавив неминимальную связь возможно создать жизнеспособную модель с более крутым потенциалом, например, модель Хиггса[49]. Платой за это является большое значение безразмерной константы неминимальной связи.

Ещё одной жизнеспособной моделью является модель Старобинского[9; 50], использующая квадратичные поправки к эйнштейновской гравитации. Данную модель можно переписать в скалярно-тензорном виде, в таком виде также требуется, чтобы константа неминимальной связи была велика[51].

Всё это мотивирует искать другие возможности для описания инфляции. Одной из таких возможностей является добавление к минимально связанному

скалярному полю неминимальной кинетической связи ($\frac{1}{2}[g^{\mu\nu} - \kappa G^{\mu\nu}]\varphi_{,\mu}\varphi_{,\nu}$, при $\kappa = 0$ - минимальная связь). Такая модификация по-прежнему даёт уравнения поля второго порядка и не приводит к неустойчивостям. Космологическая динамика в такой теории оказывается богаче и интереснее, чем в случае просто минимально связанного скалярного поля, в частности в рамках такой теории возможна инфляция даже без потенциала[27; 28]. Подобная теория входит в подкласс теорий Хорндески[27; 28; 36—40].

Однако помимо проверки в условиях ранней Вселенной было бы полезно исследовать класс теорий Хорндески на масштабах современной Вселенной. Подобные тесты помогут лучше понять возможности теорий и их пределы в объяснении современных явлений, что может способствовать построению единой теории гравитации, объединяющей раннюю и современную Вселенную. Также изучение свойств моделей в условиях современной Вселенной может помочь в изучении поведения теории во время инфляционной стадии.

Так класс теорий Хорндески также исследуют на предмет возможности описания физики современной Вселенной, то есть изучается возможность объяснения явлений тёмной материи (изменение физики на масштабах галактики) и тёмной энергии (изменение физики на масштабах скоплений галактик). Но помимо успешного описания указанных явлений теория также должна корректно работать и на остальных масштабах гравитационного поля.

Исторически одной из первых проверок теорий гравитации были различные проверки на масштабах Солнечной системы - в режиме слабого гравитационного поля. Для работы на этом масштабе гравитации К. Уиллом и К. Нордтведтом был разработан параметризованный постньютоновский (ППН) формализм [52—54]. При данном подходе метрика теории гравитации представляется в виде обобщенной ППН метрики, включающей ППН параметры и потенциалы [55]. Различие модифицированной гравитации от ОТО заключаются в 10 ППН параметрах ($\gamma, \beta, \xi, \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \zeta_1, \zeta_2, \zeta_3, \zeta_4$). ППН формализм позволяет проводить тесты различных теорий гравитации в Солнечной системе, сравнивая предсказания теории гравитации относительно ППН параметров с их экспериментально измеренными значениями. Так очень распространенным тестом является сравнение предсказаний теорий гравитации для значений параметров γ и β с их экспериментальными ограничениями [32; 56; 57].

Другим тестом теорий гравитации является проверка с помощью наблюдательных данных, полученных от двойных систем с радиопульсаром. Первая

такая система PSR B1913 + 16 была открыта Р. Халсом и Дж. Тейлором[58]. В подобных системах гравитационное поле сильнее, чем в Солнечной системе. Поэтому ряд тонких гравитационных эффектов проявляется сильнее, что как раз и позволяет провести тест теории, сравнивая её предсказаний с реальными наблюдательными данными[59]. Другим существенным аспектом, показывающим значимость подобного теста, является важность проверки теории гравитации в разных гравитационно-полевых условиях, например: в слабом поле - в Солнечной системе, более сильном - в двойных системах с радиопульсаром, ещё более сильном - при слиянии чёрных дыр.

Радиопульсар (в дальнейшем будем называть данный объект просто “пульсар”) - это быстровращающаяся нейтронная звезда, обладающая сильным магнитным полем. Такая звезда периодически излучает электромагнитные волны в радиоволновом диапазоне. Высокая стабильность прихода этих импульсов позволяет с высокой точностью определять параметры, описывающие орбитальную динамику, благодаря чему и становятся заметны тонкие гравитационные эффекты. Для работы с теориями гравитации в таких системах Дамуром и Дюриэль был разработан параметризованный посткеплеровский (ППК) формализм[60; 61] (подробнее о его структуре будет сказано в Главе III). Изначальной целью его создания было получение полной информации об орбитальной динамике из пульсарного тайминга теоретически независимым способом. С каждым годом наблюдательных данных, полученных от двойных систем с пульсаром, становится всё больше, поэтому растёт точность определения параметров орбиты и, как следствие, увеличивается точность тестов теорий гравитации.

В данной диссертации проводится проверка гибридной $f(R)$ гравитации, являющихся частным случаем теории Хорндески с использованием наблюдательных данных двойных систем с пульсаром. Тут стоит напомнить, что важной особенностью теории Хорндески является тот факт, что $f(R)$ -модели могут быть сведены к её частным случаям.

Сами по себе $f(R)$ -модели представляют собой один из самых простых с идеологической точки зрения способов модификации гравитации. В этом классе моделей гравитации действие Эйнштейна-Гильберта обобщается заменой скалярной кривизны R на функцию от скалярной кривизны $f(R)$. Множество $f(R)$ -моделей разбивается на два больших подкласса: метрические и Палатини. Отличие между ними заключается в получении уравнений поля: в первых предполагается связь метрики и аффинной связности, во вторых - метри-

ческий тензор и аффинная связность считаются независимыми. Серьезным недостатком метрического подхода является невозможность одновременно описывать ускоренное расширение Вселенной и проходить тесты в Солнечной системе без подключения дополнительных экранирующих механизмов[62–64]. В случае Палатини моделей серьезной проблемой являются трудности с описанием эволюции Вселенной и возникновением крупномасштабной структуры[65]. Гибридная метрическая-Палатини $f(R)$ -гравитация является моделью, полученной путём объединения этих двух подходов. Как результат эта модель лишена недостатков обоих подходов и сочетает их преимущества. Данная модель прошла тесты в солнечной системе[55], в двойных пульсарах[24; 32], в ней получены решения типа чёрная дыра и кротовая нора[66; 67], были получены уравнения состояния нейтронных звёзд[68], было описано современное ускоренное расширение Вселенной[69; 70]. Она также является частным случаем теории Хорндески[24].

Целью данной работы является исследование теорий модифицированной гравитации в качестве кандидатов на объяснение космологической инфляции. В частности проводится исследование теорий в рамках гравитации, работающей в условиях ранней, а также современной Вселенной.

В процессе достижения данной цели в рамках данной работы были решены следующие **задачи**:

- проведен анализ инфляционных режимов частного случая теории Хорндески с неминимальным кинетическим членом: были установлены области начальных данных для скалярного поля и его первой производной, приводящие к конечной инфляции с числом e -фолдов $N > 50 - 70$ в случае $V = V_0\phi^{1.5}$ и $\kappa < 0$. Также впервые были получены аналитические выражения для числа e -фолдов для случая без потенциала. Полученные результаты были опубликованы в [27].
- был рассмотрен спектр начальных возмущений в рамках данной модели с $V = V_0\phi^\alpha$ с $\kappa > 0$ и проведено сравнение предсказаний теории с последними результатами экспериментов WMAP/PLANCK/BICEP и др. Полученные результаты были опубликованы в [26].
- были получены аналитические выражения для посткеплеровских параметров $\dot{\omega}$, \dot{P}_b , r , s в рамках маломассивного случая гибридной $f(R)$ -гравитации для случая орбит с ненулевым эксцентриситетом. Также были ограничены свободные параметры теории.

- было показано, что в сравнении с квазикруговым случаем, ограничение на фоновое значение скалярного поля из данных двойных систем с пульсаром получается точнее в случае орбит с ненулевым эксцентриситетом

Научная новизна:

- впервые было показано, что теория с неминимальной кинетической связью с $\kappa > 0$ и степенным потенциалом $V = V_0\varphi^\alpha$ не удовлетворяет современным наблюдательным ограничениям
- впервые были получены аналитические выражения для начальных значений H и $\dot{\varphi}$, приводящие к инфляции более чем в N e-фолдов в случае $\kappa < 0$ и $V = 0$. Также были численно получены аналогичные области начальных значений $\varphi, \dot{\varphi}$ в случае $V = V_0|\varphi|^{1.5}$.
- впервые были получены аналитические выражения для посткеплеровских параметров $\dot{\omega}, \dot{P}_b, r, s$ для орбит с ненулевым эксцентриситетом в гибридной $f(R)$ -гравитации в приближении лёгкого скалярного поля.
- впервые проведён полный тест гибридной $f(R)$ -гравитации на двойных системах с пульсаром и показано, что точность ограничений на фоновое значение скалярного поля в случае орбит с ненулевым эксцентриситетом выше, чем в квазикруговом.

Теоретическая и практическая значимость. В данной работе был рассмотрен класс теорий Хорндески, который активно исследуется сейчас в контексте теорий гравитации, описывающих физику как современной вселенной, так и ранней. Любая теория должна согласовываться с наблюдениями. В данной диссертации было показано, что теория с неминимальной положительной кинетической связью и степенным потенциалом не может удовлетворять современным наблюдательным данным в объяснении инфляции. Подобные результаты очень важны, поскольку на разработку таких теорий тратится время научного сообщества, поэтому очень важно своевременно отсеивать подобные модели. Ещё одним результатом данной работы является исследование случая теории с отрицательной неминимальной кинетической связью на предмет получения сценариев адекватной конечной инфляции. Также важным результатом работы является тот факт, что некоторые частные случаи теории Хорндески, такие как гибридная $f(R)$ - гравитация, которая является кандидатом на роль теории, объясняющей современное ускоренное расширение Вселенной или же космологическую инфляцию, успешно проходят проверку на двойных системах

с пульсаром. Подобное тестирование дополняет и расширяет, уже имеющийся спектр проверок подобных теорий гравитации.

Объект и предмет исследования. В диссертации рассматриваются частные случаи теории Хорндески на роль модели описывающей инфляцию, в частности изучаются их наблюдаемые астрофизические проявления: предсказания относительно неоднородности спектра первичных возмущений, орбитальной динамики в двойных системах с пульсаром.

Методология и методы исследования. Основой методологической базой диссертации являются работы российских и зарубежных авторов, посвященные проверке теорий гравитации на различных астрофизических наблюдательных данных. В рамках данной работы поставленные задачи были решены с использованием как общенаучных методов (дедукция, индукция, формализация, идеализация, анализ и др.), так и с помощью специальных, таких как: программирование на Python, численное решение систем дифференциальных уравнений, тензорный анализ, методы математического анализа, методы математической физики.

Основные положения, выносимые на защиту:

1. Скалярно-тензорная теория с положительной неминимальной кинетической связью и произвольным степенным потенциалом не удовлетворяет современным наблюдательным данным WMAP/PLANCK/BICEP.
2. Скалярно-тензорная теория с отрицательной неминимальной кинетической связью может порождать конечную инфляцию, за время которой Вселенная расширилась более чем в e^{60} раз, как в случае с нулевым потенциалом, так и в случае с потенциалом $V = V_0|\varphi|^{3/2}$. Причём в первом случае к подобной инфляции приводит очень узкий диапазон начальных данных, тогда как во втором случае к подобной инфляции может приводить довольно большой диапазон начальных данных.
3. Максимально возможное значение фонового скалярного поля φ_0 в гибридной $f(R)$ - гравитации из данных двойных систем с пульсаром получается порядка 10^{-3} .
4. Ограничения на фоновое значение скалярного поля получаются лучше при проведении теста на двойных системах с пульсаром с ненулевым эксцентриситетом ($\varphi_0 < 10^{-3}$), чем на квазикруговых системах ($\varphi_0 < 1.3 \times 10^{-2}$).

5. Гибридная $f(R)$ - гравитация успешно объясняет наблюдательные данные, полученные от двойных систем с пульсаром для 4 ППК параметров $\dot{P}_b, \dot{\omega}, r, s$, в приближении маломассивного скалярного поля.

Достоверность работы обеспечивается использованием современных методов проверки теорий гравитации на реальных астрофизических данных. Полученные результаты отвечают современным представлениям об ограничениях, полученных для данных теорий гравитации.

Апробация работы. Результаты данной диссертации были апробированы на международных конференциях:

1. Avdeev N.A., Dyadina P.I. "Testing of hybrid metric-Palatini $f(R)$ -gravity in eccentric binary pulsars". 4-я Международная зимняя школа-семинар по гравитации и космологии "Петровские чтения-2018 Казань, Россия, 26 ноября - 1 декабря 2018.
2. Avdeev N.A. "Testing of the scalar-tensor theory with a nonlinear kinetic term on the new results of WMAP/PLANCK ". Международная научная конференция студентов, аспирантов и молодых ученых "Ломоносов-2022 секция "Физика" 11-22 апреля 2022 (Москва, Россия), Москва, МГУ имени М.В. Ломоносова, Россия, 11 апреля - 22 мая 2022.
3. Avdeev N.A., Toporensky A.V. "Inflation in the scalar tensor theory of gravity with a non-minimal kinetic coupling". International Conference on Quantum Field Theory, High- Energy Physics, and Cosmology, Дубна, Россия, 18-21 июля 2022.
4. Avdeev N.A., Toporensky A.V. "Inflation in the scalar-tensor theory of gravity with a non-minimal kinetic coupling ". An Inaugural Conference on Current Status of Cosmology, Delhi, Индия, 17-19 октября 2022.

Публикации по теме диссертации. Основные результаты по теме диссертации изложены в 4 печатных изданиях, 4 из которых опубликованы в рецензируемых научных изданиях, индексируемых в базе данных Web of Science, рекомендованных для защиты в диссертационном совете МГУ по специальности:

1. *Авдеев Н., Дядина П., Лабазова С.* Проверка гибридной метрической-Палатини $f(R)$ -гравитации в двойных системах с пульсаром // Журнал Экспериментальной и Теоретической Физики. — 2020. — Т. 131, № 6. — 537—547/ Переводная версия: Avdeev, N.A. and Dyadina, P.I. and Labazova,

- S.P. Test of Hybrid Metric-Palatini $f(R)$ —Gravity in Binary Pulsars // J. Exp. Theor. Phys. 131, 537–547 (2020). — J. Exp. Theor. Phys. Web of Science JIF2022=1,100, личный вклад - не менее 85%, 0,8125 печатных листа.
2. *Avdeev N., Toporensky A.* On Viability of Inflation in Nonminimal Kinetic Coupling Theory. // Gravitation and Cosmology. — 2021. — Т. 27, № 5. — С. 269–274. — Gravit. Cosmol. Web of Science JIF2022=0,900, личный вклад - не менее 90%, 0,375 печатных листа.
 3. *Avdeev N., Toporensky A.* Ruling Out Inflation Driven by a Power Law Potential: Kinetic Coupling Does Not Help. // Gravitation and Cosmology. — 2022. — Т. 28, № 5. — С. 416–419. — Gravit. Cosmol. Web of Science JIF2022=0,900, личный вклад - не менее 90%, 0,25 печатных листа.
 4. *Avdeev N., Toporensky A.* Inflation in Scalar-Tensor Theory with Nonminimal Kinetic Coupling // Письма в ЭЧАЯ / PEPAN Letters. — 2023. — Т. 20. — С. 486–489. — Phys. Part. Nuclei Lett. Web of Science JIF2022=0,500, личный вклад - не менее 90%, 0,25 печатных листа.

Личный вклад. Автор принимал активное участие в постановке задачи диссертации. Большая часть математических расчетов была проделана автором самостоятельно. В работе 1 автором были получены аналитические выражения для 4 ППК параметров $\dot{\omega}$, \dot{P}_b , r , s в гибридной $f(R)$ - гравитации для случая орбит с ненулевым эксцентриситетом. Были получены ограничения на фоновое значение скалярного поля φ_0 с использованием данных двойных систем с пульсаром PSR J0737-3039 и PSR J1903+0327. В работе 2 автором были получены аналитические выражения для начальных значений параметра Хаббла H и производной скалярного поля $\dot{\varphi}$, приводящие к инфляции более чем в N ефолдов, в скалярно-тензорной теории с неминимальной кинетической связью с $\kappa < 0$ и нулевым потенциалом $V = 0$. Также были оценены численные значения для этих параметров, приводящие к инфляции более чем в 60 ефолдов. Помимо этого в данной работе автором численно были получены области начальных данных, приводящие к разным типам инфляции в случае с $V = V_0|\varphi|^{3/2}$. В работе 3 автором было исследовано асимптотическое поведение тензорно-скалярного отношения и спектрального индекса для подкласса теории Хорндески с неминимальной кинетической связью с $\kappa > 0$ и произвольным степенным потенциалом $V = V_0\varphi^\alpha$. Также было проведено сравнение с последними на данный момент наблюдательными ограничениями на

данные параметры, полученными из экспериментов WMAP/PLANK и ВІСЕР. В работе 4 автором были просуммированы результаты работ 2 и 3, показаны результирующие ограничения накладываемые на скалярно-тензорную теорию с неминимальным кинетическим членом и степенным потенциалом.

Объем и структура работы. Работа состоит из введения, пяти глав и заключения. Полный объём работы составляет 101 страницу, включая 9 рисунков и 4 таблицы. Список литературы содержит 105 наименований.

Во **Введении** обсуждается актуальность работы и личный вклад автора, описывается достоверность результатов, их апробация, практическая значимость и методы, использованные для их достижения, сделан обзор литературы по теме диссертации, публикаций автора, а также выписаны решаемые задачи и выносимые на защиту положения.

В **Главе 1** обсуждается теория Хорндески, а также разбираются её частные случаи, рассматриваемые далее в работе. В данной главе также приводятся уравнения поля для данных моделей, которые далее будут использованы. Также разобран переход гибридной $f(R)$ - гравитации к скалярно-тензорной форме.

В **Главе 2** приводится описание скалярно-тензорной теории с неминимальной положительной кинетической связью и степенным потенциалом. Вводятся основные понятия используемые для описания инфляции. Приводится подробный вывод аналитических выражений для параметров спектра первичных возмущений для данной теории. Также проводится анализ асимптотического поведения данных выражений и сравнение предсказаний теории с результатами экспериментов WMAP/PLANK & ВІСЕР.

В **Главе 3** проводится анализ существования адекватных сценариев в случае теории с отрицательной неминимальной кинетической связью. Причем для нулевого потенциала подобный анализ был проведён аналитически: были получены начальные значения для параметра Хаббла и производной скалярного поля по времени, приводящие к инфляции более чем в N ефолдов. А для случая с потенциалом $V = V_0\phi^{1.5}$ подобный анализ был проведён численно, с помощью метода Рунге-Кутты 4 порядка, реализованный на языке программирования Python. Описано получение областей начальных данных, приводящих к адекватной конечной инфляции.

В **Главе 4** было показано получение производной орбитального периода для частного случая теории Хорндески без механизмов экранирования и гибридной $f(R)$ - гравитации на данных двойных систем с пульсаром в случае

квазикруговых орбит. Также в конце данной главы была получена производная орбитального периода в случае орбит с ненулевым эксцентриситетом в приближении маломассивного скалярного поля.

В **Главе 5** проводится проверка гибридной $f(R)$ - гравитации на данных двойных систем с пульсаром в случае орбит с ненулевым эксцентриситетом, получено ограничение на фоновое значение скалярного поля в приближении малой массы скалярного поля. Проведено сравнение результатов для орбит с ненулевым эксцентриситетом и квазикруговых орбит.

В **Заключении** излагаются итоги выполненного исследования, выводы, рекомендации, перспективы дальнейшей разработки темы, а также приводятся **Благодарности**.

Принятые обозначения и единицы. В работе греческие индексы (μ, ν, \dots) принимают значения 0, 1, 2, 3, а также используется сигнатура $(-, +, +, +)$. Все вычисления выполнены в системе СГС, если не оговорено другое.

Глава 1. Теория Хорндески¹

Прежде чем переходить к частным случаям теории Хорндески, кратко рассмотрим теорию в целом. Действие теории Хорндески можно представить следующим образом[71]:

$$S = \frac{c^4}{16\pi} \sum_{i=2}^5 \int d^4x \sqrt{-g} L_i + S_m, \quad (1.1)$$

здесь c - это скорость света, g - определитель метрики, S_m - стандартное действие материи, а L_i - плотность гравитационного лагранжиана:

$$\begin{aligned} L_2 &= G_2(\varphi, X), L_3 = -G_3(\varphi, X)\square\varphi, \\ L_4 &= G_4(\varphi, X)R + G_{4X}((\square\varphi)^2 - (\nabla_\mu\nabla_\nu\varphi)^2), \\ L_5 &= G_5(\varphi, X)G_{\mu\nu}\nabla^\mu\nabla^\nu\varphi \\ &\quad - \frac{G_{5X}}{6}((\square\varphi)^3 + 2(\nabla_\mu\nabla_\nu\varphi)^3 - 3(\nabla_\mu\nabla_\nu\varphi)^2\square\varphi), \end{aligned} \quad (1.2)$$

где $G_{\mu\nu}$ - тензор Эйнштейна, R - скаляр Риччи, φ - скалярное поле, $X = -\frac{1}{2}\nabla_\mu\varphi\nabla^\mu\varphi$, $\square\varphi = g^{\mu\nu}\nabla_\mu\nabla_\nu\varphi$, $G_i(\varphi, X)$ -свободные функции скалярного поля φ и кинетического члена X , и $G_{iX} = \frac{\partial G_i}{\partial X}$. Именно выбор этих произвольных функций и будет приводить к тому или иному частному случаю теории гравитации. Уравнения поля для данной теории в общем случае были получены в работе[71], в данной диссертации мы будем записывать уравнения поля сразу применительно к рассматриваемому частному случаю.

В первой части будет рассмотрена скалярно-тензорная теория с неминимальным кинетическим членом. Эта модель была предложена в [36] и позже была изучена в ряде работ (например, в [27; 36–40]). Действие этой теории можно записать в следующем виде:

$$S = \int d^4x \sqrt{-g} \left(\frac{R}{16\pi} - \frac{1}{2}[g^{\mu\nu} - \kappa G^{\mu\nu}]\varphi_{,\mu}\varphi_{,\nu} - V(\varphi) \right). \quad (1.3)$$

Подобная теория обладает более богатой динамикой по сравнению с теорией с неминимальным кинетическим членом $\kappa = 0$ [25; 72]. При $\varphi \rightarrow 0$ и $V = 0$

¹Данная глава является вводной для последующих глав, основанных на статьях 1,2,3,4 из списка публикаций.

теория переходит в ОТО. Данная модель является частным случаем теории Fab Four, которая в свою очередь является частным случаем теории Хорндески[73]. Теперь запишем уравнения поля для этой теории:

$$\begin{aligned}
G_{\mu\nu} = 8\pi & \left[T_{\mu\nu} + \varepsilon [\nabla_\mu \varphi \nabla_\nu \varphi - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} (\nabla \varphi)^2] - g_{\mu\nu} V(\varphi) + \kappa \left(-\frac{1}{2} \nabla_\mu \varphi \nabla_\nu \varphi R + \right. \right. \\
& + 2 \nabla_\alpha \varphi \nabla_{(\mu} \varphi R_{\nu)}^\alpha + \nabla^\alpha \varphi \nabla_\beta \varphi R_{\mu\alpha\nu\beta} + \nabla_\mu \nabla^\alpha \varphi \nabla_\nu \nabla_\alpha \varphi - \nabla_\mu \nabla_\nu \varphi \square \varphi - \\
& \left. \left. - \frac{1}{2} (\nabla \varphi)^2 G_{\mu\nu} + g_{\mu\nu} \left[-\frac{1}{2} \nabla^\alpha \nabla^\beta \varphi \nabla_\alpha \nabla_\beta \varphi + \frac{1}{2} (\square \varphi)^2 - \nabla_\alpha \varphi \nabla_\beta \varphi R^{\alpha\beta} \right] \right) \right], \\
[g^{\mu\nu} + \kappa G^{\mu\nu}] \nabla_\mu \nabla_\nu \varphi & = -V_\varphi,
\end{aligned} \tag{1.4}$$

где $V_\varphi = dV(\varphi)/d\varphi$, а $T_{\mu\nu}$ - это тензор энергии-импульса материи.

Во второй части работы рассмотрен другой важный частный случай теории Хорндески - гибридная метрическая-Паллатини $f(R)$ - гравитация. Запишем для начала действие гибридной $f(R)$ - гравитации:

$$S = \frac{1}{2k^2} \int d^4x \sqrt{-g} [R + f(\mathfrak{R})] + S_m, \tag{1.5}$$

где $k^2 = \frac{8\pi G}{c^4}$, G - гравитационная постоянная, c - скорость света, $g = \det\{g_{\mu\nu}\}$ - определитель метрики, R и \mathfrak{R} - метрическая и Паллатини кривизна соответственно и S_m - материальная часть действия. Паллатини кривизна - это величина зависящая от метрического тензора $g_{\mu\nu}$ и специальных символов аффинной связности, независящих от метрики $\hat{\Gamma}_{\mu\nu}^\alpha$.

$$\mathfrak{R} = g^{\mu\nu} \mathfrak{R}_{\mu\nu} \equiv g^{\mu\nu} \left(\hat{\Gamma}_{\mu\nu,\alpha}^\alpha - \hat{\Gamma}_{\mu\alpha,\nu}^\alpha + \hat{\Gamma}_{\alpha\lambda}^\alpha \hat{\Gamma}_{\mu\nu}^\lambda - \hat{\Gamma}_{\mu\lambda}^\alpha \hat{\Gamma}_{\alpha\nu}^\lambda \right). \tag{1.6}$$

Для дальнейшей работы с гибридной $f(R)$ -гравитацией, а также для того, чтобы показать почему данная модель является частным случаем теории Хорндески, перейдём к скалярно-тензорному виду данной теории[69]. Запишем действие гибридной $f(R)$ -гравитации с вспомогательным полем, при $A = \mathfrak{R}$ действие переходит в исходное действие гибридной $f(R)$ -гравитации [32]:

$$S = \frac{1}{2k^2} \int d^4x \sqrt{-g} [R + f(A) + f_A(\mathfrak{R} - A)] + S_m, \tag{1.7}$$

где $f_A = df/dA$. Обозначим $\varphi = f_A$, $V(\varphi) = Af_A - f(A)$ с учётом этих обозначений действие (1.7) перепишется в виде:

$$S = \frac{1}{2\kappa^2} \int d^4x \sqrt{-g} [R + \varphi \mathfrak{R} - V(\varphi)] + S_m. \quad (1.8)$$

Варьируя действие (1.8) по метрике, специальным символам аффинной связности и скалярному полю, получим уравнения поля:

$$R_{\mu\nu} + \varphi \mathfrak{R}_{\mu\nu} - \frac{1}{2}(R + \varphi \mathfrak{R} - V)g_{\mu\nu} = \kappa^2 T_{\mu\nu} \quad (1.9)$$

$$\mathfrak{R} - V_\varphi = 0 \quad (1.10)$$

$$\hat{\nabla}_\alpha(\sqrt{-g}\varphi g^{\mu\nu}) = 0 \quad (1.11)$$

Из уравнения (1.11) следует тот факт, что независимая аффинная связность связанная с частью Паллатини будет являться связностью Леви-Чевитты для метрики $h_{\mu\nu} = \varphi g_{\mu\nu}$. Этот факт позволяет установить связь между тензорами $\mathfrak{R}_{\mu\nu}$ и $R_{\mu\nu}$:

$$\mathfrak{R}_{\mu\nu} = R_{\mu\nu} + \frac{3}{2\varphi^2} \partial_\mu \varphi \partial_\nu \varphi - \frac{1}{\varphi} \left(\nabla_\mu \nabla_\nu \varphi + \frac{1}{2} g_{\mu\nu} \nabla_\alpha \nabla^\alpha \varphi \right), \quad (1.12)$$

используя эту связь, возможно переписать действие теории в скалярно-тензорном виде:

$$S = \frac{1}{2\kappa^2} \int d^4x \sqrt{-g} \left[(1 + \varphi)R + \frac{3}{2\varphi} \partial_\mu \partial^\mu \varphi - V(\varphi) \right] + S_m. \quad (1.13)$$

Покажем теперь явно, что гибридная $f(R)$ -гравитация - это частный случай теории Хорндески (1.1). Для перехода к гибридной гравитации необходимо выбрать произвольные функции в теории Хорндески следующим образом: $G_2 = -\frac{3X}{G\varphi} - V(\varphi)$, $G_3 = 0$, $G_4 = \frac{1+\varphi}{G}$, $G_5 = 0$ [24; 74].

Запишем теперь уравнения поля в скалярно-тензорном виде полученные для метрического тензора и скалярного поля [69]:

$$(1 + \varphi)R_{\mu\nu} = \frac{\kappa^2}{c^4} \left(T_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} T \right) - \frac{3}{2\varphi} \partial_\mu \varphi \partial_\nu \varphi + \frac{1}{2} g_{\mu\nu} \left[V(\varphi) + \partial_\alpha \partial^\alpha \varphi \right] + \partial_\mu \partial_\nu \varphi, \quad (1.14)$$

$$\partial_\mu \partial_\nu \varphi - \frac{1}{2\varphi} \partial_\alpha \partial^\alpha \varphi - \frac{\varphi [2V(\varphi) - (1 + \varphi)V_\varphi]}{3} = -\frac{\kappa^2}{3c^4} \varphi T, \quad (1.15)$$

где $T_{\mu\nu}$ и T - тензор энергии импульса и его след.

Также стоит отметить очень важную работу [34], в которой были получены очень серьёзные современные ограничения на теорию Хорндески: $G_{4X} =$

$0, G_5 = const.$ В этой статье использовались оценки на скорость гравитационной волны, полученные из анализа события слияния двух нейтронных звезд GW170817 и гамма-всплеска GRB170817A. В данной диссертации исследуются частные случаи согласующиеся с этими ограничениями.

Глава 2. Спектр первичных возмущений теории для случая $\kappa > 0$ ²

Начнём вывод аналитических выражений для параметров спектра первичных возмущений для скалярно-тензорной теории с неминимальным кинетическим членом с того, что напишем уравнения поля (1.4) с учетом метрики Фридмана-Робертсона-Уокера, описывающие эволюцию фонового значения скалярного поля φ и H :

$$3H^2 = 4\pi\dot{\varphi}^2(1 + 9\kappa H^2) + 8\pi V_0 \varphi^\alpha \quad (2.1)$$

$$2\dot{H} + 3H^2 = -4\pi\dot{\varphi}^2(1 - \kappa(2\dot{H} + 3H^2 + 4H\ddot{\varphi}\dot{\varphi}^{-1})) + 8\pi V_0 \varphi^\alpha \quad (2.2)$$

$$(\ddot{\varphi} + 3H\dot{\varphi}) + 3\kappa(H^2\ddot{\varphi} + 2H\dot{H}\dot{\varphi} + 3H^3\dot{\varphi}) = -V_0\alpha\varphi^{\alpha-1} \quad (2.3)$$

Далее покажем, как эти уравнения возможно упростить для дальнейшего аналитического рассмотрения с помощью приближения медленного скатывания.

2.0.1 Приближение медленного скатывания

Во время инфляции скалярное поле находится в так называемом режиме "медленного скатывания"[12; 14]. В таком режиме скалярное поле медленно скатывается к минимальному значению, обеспечивая малое изменение параметра Хаббла H и, как следствие, экспоненциальный рост масштабного фактора $a(t)$. Подобная динамика приводит к тому, что становится возможно сделать следующие приближения: $\frac{\ddot{\varphi}}{3H\dot{\varphi}} \ll 1$, а также удобно ввести ряд параметров, которые характеризуют приближение медленного скатывания и которые оказываются много меньше 1 в течение инфляции. Теперь укажем набор этих параметров, которые мы в дальнейшем будем называть параметрами медленного

²Данная глава основана на работе 3,4 из списка публикаций по теме диссертации, а также воспроизводит ряд выводов из работ [41; 75], некоторые общие сведения были описаны с опорой на [43].

скатывания[41; 75]:

$$\begin{aligned}
\varepsilon_0 &= -\frac{\dot{H}}{H^2} \\
\varepsilon_1 &= \frac{\dot{\varepsilon}_0}{H\varepsilon_0} \\
k_0 &= 12\pi\kappa\dot{\phi}^2 \\
k_1 &= \frac{\dot{k}_0}{Hk_0}
\end{aligned} \tag{2.4}$$

Теперь с учетом сказанных выше приближений можно упростить систему уравнений поля (2.1), и они примут следующий вид:

$$\begin{aligned}
\frac{3H^2}{8\pi} &= V_0\varphi^\alpha, \\
\dot{H} &= -4\pi\dot{\phi}^2 - 12\pi\kappa H^2\dot{\phi}^2, \\
3H\dot{\phi} + \alpha V_0\varphi^{\alpha-1} + 9H^3\kappa\dot{\phi} &= 0,
\end{aligned} \tag{2.5}$$

или, выражая $\dot{\phi}$ и \dot{H} в явном виде, получим:

$$\begin{aligned}
\dot{\phi} &= -\frac{\alpha V_0\varphi^{\alpha-1}}{2\sqrt{6\pi V_0}\varphi^{\alpha/2}(1 + 8\pi\kappa V_0\varphi^\alpha)}, \\
\dot{H} &= -\frac{\alpha^2 V_0\varphi^{\alpha-2}}{6(8\pi\kappa V_0\varphi^\alpha + 1)}, \\
\frac{3H^2}{8\pi} &= V_0\varphi^\alpha.
\end{aligned} \tag{2.6}$$

Выразим параметры медленного скатывания $\varepsilon_0, \varepsilon_1$ через скалярное поле φ :

$$\begin{aligned}
\varepsilon_0 &= \frac{\alpha^2}{16\pi\varphi^2(1 + 8\pi\kappa V_0\varphi^\alpha)}, \\
\varepsilon_1 &= \frac{\alpha(1 + 8\pi\kappa V_0\varphi^\alpha + 4\pi\alpha\kappa V_0\varphi^\alpha)}{4\pi\varphi^2(1 + 8\pi\kappa V_0\varphi^\alpha)^2}.
\end{aligned} \tag{2.7}$$

В конце инфляции приближение медленного скатывания перестает работать и параметры медленного скатывания становятся близки к 1. Будем считать, что инфляция заканчивается, когда параметр ε_0 становится равен 1, фактически это означает, что изменение параметра Хаббла H начинает достаточно заметно меняться и экспоненциальный рост заканчивается. Таким образом запишем уравнение для конечного значения скалярного поля:

$$\varepsilon_0(\varphi_E) = \frac{\alpha^2}{16\pi\varphi_E^2(1 + 8\pi\kappa V_0\varphi_E^\alpha)} = 1. \tag{2.8}$$

Из этого уравнения получим значение скалярного поля в конце инфляции.

Для дальнейшего рассмотрения необходимо определить важный параметр, описывающим инфляцию, называемый числом е-фолдов N (за время инфляции Вселенная расширяется в e^N раз):

$$\begin{aligned} N &= \ln \frac{a(t_{end})}{a(t_{initial})} = \int_{t_I}^{t_E} H dt = - \int_{\varphi_E}^{\varphi_I} \frac{H}{\dot{\varphi}} d\varphi = \\ &= -\frac{4\pi}{\alpha}(\varphi_E^2 - \varphi_I^2) - \frac{64\pi^2 \kappa V_0}{\alpha(\alpha + 2)}(\varphi_E^{\alpha+2} - \varphi_I^{\alpha+2}). \end{aligned} \quad (2.9)$$

Как видно из формулы (2.9), N показывает, что в промежутке времени от $t_{initial}$ до t_{end} вселенная расширится в e^N раз. Традиционно считается, что за время инфляции должно набраться минимум 50-60 е-фолдов]]. Из уравнения (2.9) мы можем найти начальное значение скалярного поля φ_I , которое нам потребуется в дальнейшем для оценки наблюдаемых параметров r, n_s и P_ξ (подробнее об этих параметрах будет сказано далее).

2.0.2 Рассмотрение первичных скалярных и тензорных возмущений

Как уже упоминалось ранее, одно из достоинств инфляции - объяснение первичных неоднородностей плотности во Вселенной. Согласно инфляционному механизму первичные скалярные возмущения возникли в результате усиления вакуумных квантовых флуктуаций инфлатона, которое происходит в конечном итоге за счет ускоренного расширения Вселенной. В результате такого же механизма происходит генерация первичных тензорных возмущений, только в этом случае усиливаются вакуумные флуктуации гравитационного поля[43].

На сегодняшний день известно, что первичные скалярные возмущения носили характер возмущений гауссовой случайной величины, их спектр близок к плоскому, хотя и отличен от него, а также адиабатическая мода является преобладающей[43].

В линейном режиме эволюция космологических возмущений происходит независимо для каждого значения конформного импульса k . Он постоянен во времени, а физический импульс убывает со временем $q = k/a(\eta)$ (где η - это

конформное время). Решения уравнений ведут себя различным образом, в зависимости от связи между q и $H = \dot{a}/a$. В связи с этим выделяют два режима[43]:

- Режим "за горизонтом". Этот режим имеет место при $q(\eta) \ll H(\eta)$, что означает, что физическая длина волны превышает текущий хаббловский размер H^{-1} . Название режима получается из того, что хаббловский размер по порядку совпадает с космологическим горизонтом, а на вакуумноподобной стадии с размером горизонта де Ситтера.

- Режим "под горизонтом". Этот режим имеет место при $q(\eta) \gg H(\eta)$, т.е. когда физическая длина волны мала по сравнению с хаббловским горизонтом.

Физическое различие между этими двумя режимами заключается в том, что в случае режима за горизонтом Вселенная оказывается разбита на причинно несвязные области (размер каждой области равен размеру космологического горизонта), правда стоит отметить, что некоторая связь у этих областей всё же есть, поскольку они имеют общее прошлое, до инфляционного расширения. В каждой такой области метрика, плотность энергии и давление практически постоянны в пространстве, эти области эволюционировали как независимые однородные Вселенные. При этом нет никаких гравитационных волн и волн плотности. В случае режима под горизонтом работают обычные представления о гравитационной неустойчивости.

Интересующие нас моды имеют длину волны, сопоставимую с современным размером космологического горизонта. На этапе инфляции эти моды вышли за горизонт как раз примерно за 50-60 е-фолдов до конца инфляции и только сейчас входят под горизонт[76].

Перейдём непосредственно к рассмотрению спектра космологических возмущений, вышедших за горизонт за 50-60 е-фолдов до конца инфляции. Напомним, что спектр представляет собой близкий к плоскому гауссов спектр.

Для такого спектра вводят следующую параметризацию: $P_\xi(k) = A_\xi \left(\frac{k}{k_*}\right)^{n_s-1}$ и $P_T(k) = A_T \left(\frac{k}{k_*}\right)^{n_T}$, где $P_\xi(k)$ - амплитуда мощности скалярных возмущений, а $P_T(k)$ - амплитуда мощности тензорных возмущений, A_ξ - значение амплитуды при k_* , A_T - значение амплитуды при k_* , k_* - некоторое фиксированное значение импульса, которое выбирают из соображений удобства. Далее для описания спектра первичных возмущений найдём $P_\xi(k)$, n_s и $r = \frac{P_T}{P_\xi}$ [43].

В начале запишем действие рассматриваемой скалярно-тензорной теории с неминимальной кинетической связью, разложенное до второго порядка малости в данной возмущенной метрике (АДМ (Арновитт — Дезер — Мизнер) метрике, которая позволит нам разделить скалярную, векторную и тензорную компоненты возмущений). Выпишем явно эту метрику[41; 77]:

$$ds^2 = -N^2 dt^2 + \gamma_{ij}(dx^i + N^i dt)(dx^j + N^j dt) \quad (2.10)$$

где $N = 1 + A$, $N^i = \partial^i B$ и $\gamma_{ij} = a^2(t)e^{2\xi}(\delta_{ij} + h_{ij} + \frac{1}{2}h_{ik}h_{kj})$, где A , B и ξ это скалярные возмущения, а h_{ij} - тензорные возмущения метрики (h_{ij} - симметричный тензор $h_{ij} = h_{ji}$), удовлетворяющие бесследовой поперечной калибровке: $\partial^i h_{ij} = 0$, $h_{ii} = 0$.

Теперь выпишем само действие во втором порядке малости [41]:

$$\delta S^{(2)} = \delta S_s^{(2)} + \delta S_T^{(2)} \quad (2.11)$$

где $\delta S_s^{(2)}$ - скалярная часть, $\delta S_T^{(2)}$ - тензорная часть.

Скалярные возмущения

Далее покажем вывод аналитических выражений для r , n_s и P_ξ , который во многом опирается на аналогичные выкладки, полученные в работе [41]. Раскладывая действие до второго порядка малости по метрике, получаем для скалярной части:

$$\delta S_s^{(2)} = \int dt d^3x a^3 \left[-3G_T \dot{\xi}^2 + \frac{F_T}{a^2} \partial_i \xi \partial_j \xi + \Xi A^2 - 2\Theta A \frac{\partial_i \partial_j B}{a^2} + 2G_T \dot{\xi} \frac{\partial_i \partial^i B}{a^2} + 6\Theta A \dot{\xi} - 2G_T A \frac{\partial_i \partial^i \xi}{a^2} \right], \quad (2.12)$$

где

$$\begin{aligned} G_T &= \frac{1}{8} - \frac{\kappa}{2} \dot{\phi}^2, \\ F_T &= \frac{1}{8} + \frac{\kappa}{2} \dot{\phi}^2, \\ \Xi &= -\frac{3}{8} H^2 + \frac{1}{2} \dot{\phi}^2 + 9\kappa H^2 \dot{\phi}^2, \\ \Theta &= \frac{H}{8} - \frac{3\kappa}{2} H \dot{\phi}^2. \end{aligned} \quad (2.13)$$

Теперь выпишем уравнения движения для A и B для этого действия (2.12):

$$\begin{aligned} \Xi A + 3\Theta\dot{\xi} - \Theta\frac{\partial_i\partial^i B}{a^2} - G_T\frac{\partial_i\partial^i\xi}{a^2} &= 0, \\ A &= \frac{G_T}{\Theta}\dot{\xi}. \end{aligned} \quad (2.14)$$

Выразим $\partial_i\partial^i B$ из уравнений (2.14):

$$\frac{\partial_i\partial^i B}{a^2} = \frac{\Xi}{\Theta^2}G_T\dot{\xi} + 3\dot{\xi} - \frac{G_T}{\Theta}\frac{\partial_i\partial^i\xi}{a^2}. \quad (2.15)$$

Подставляя выражения для $\partial_i\partial^i B$ и A в действие(2.12), получим:

$$\begin{aligned} \delta S_s^{(2)} = \int dt d^3x a^3 \left[\left(3G_T + \Xi \left(\frac{G_T}{\Theta} \right)^2 \right) \dot{\xi}^2 + \frac{F_T}{a^2} \partial_i \xi \partial^i \xi - \right. \\ \left. - 2 \frac{G_T^2}{\Theta} \dot{\xi} \frac{\partial_i \partial^i \xi}{a^2} \right]. \end{aligned} \quad (2.16)$$

Проводя интегрирование по частям и опуская полные пространственные производные, получим:

$$\delta S_s^{(2)} = \int dt d^3x a^3 \left[\left(3G_T + \Xi \left(\frac{G_T}{\Theta} \right)^2 \right) \dot{\xi}^2 + \frac{F_T}{a^2} \partial_i \xi \partial^i \xi + 2 \frac{G_T^2}{\Theta} \frac{\partial_i \dot{\xi} \partial^i \xi}{a^2} \right]. \quad (2.17)$$

Используя соотношение

$$\frac{d}{dt} \left[a \frac{G_T^2}{\Theta} \partial_i \xi \partial^i \xi \right] = \frac{d}{dt} \left[a \frac{G_T^2}{\Theta} \right] \partial_i \xi \partial^i \xi + 2a \frac{G_T^2}{\Theta} \partial_i \dot{\xi} \partial^i \xi, \quad (2.18)$$

перепишем последнее слагаемое в действии (2.17). Учитывая также, что полная производная по времени может быть опущена, получим следующее выражение

$$\delta S_s^{(2)} = \int dt d^3x \left[a^3 \left(\left(3G_T + \Xi \left(\frac{G_T}{\Theta} \right)^2 \right) \dot{\xi}^2 + \frac{F_T}{a^2} \partial_i \xi \partial^i \xi \right) - \frac{d}{dt} \left[a \frac{G_T^2}{\Theta} \right] \partial_i \xi \partial^i \xi \right]. \quad (2.19)$$

Перепишем полученное выражение (2.19) в следующем виде:

$$\delta S_s^{(2)} = \int dt d^3x a^3 \left[\left(3G_T + \Xi \left(\frac{G_T}{\Theta} \right)^2 \right) \dot{\xi}^2 - \frac{1}{a^2} \left(\frac{1}{a} \frac{d}{dt} \left[a \frac{G_T^2}{\Theta} \right] - F_T \right) \partial_i \xi \partial^i \xi \right]. \quad (2.20)$$

Введем следующие замены:

$$\begin{aligned} F_s &= \frac{1}{a} \frac{d}{dt} \left[a \frac{G_T^2}{\Theta} \right] - F_T, \\ G_s &= 3G_T + \Xi \left(\frac{G_T}{\Theta} \right)^2. \end{aligned} \quad (2.21)$$

Теперь с учетом новых замен перепишем действие(2.21):

$$\delta S_s^{(2)} = \int dt d^3x a^3 \left(G_s \dot{\xi}^2 - \frac{F_s}{a^2} \partial_i \xi \partial^i \xi \right) = \int dt d^3x a^3 G_s \left[\dot{\xi}^2 - \frac{c_s^2}{a^2} \partial_t \xi \partial_i \xi \right], \quad (2.22)$$

где

$$c_s^2 = \frac{F_s}{G_s}. \quad (2.23)$$

Также выразим G_s и c_s через параметры медленного скатывания:

$$G_s = \frac{\left[\left(\frac{\dot{\phi}^2}{2H^2} + \frac{k_0}{8\pi} \right) \left(1 - \frac{1}{3}k_0 \right)^2 + \frac{1}{6\pi} k_0^2 \left(1 - \frac{1}{3}k_0 \right) \right]}{(1 - k_0)^2}, \quad (2.24)$$

$$c_s = 1 + \frac{\frac{16k_0^2}{9} - \frac{8k_0^2(2-k_1)}{9} - \frac{4k_0\varepsilon_0(1-\frac{1}{3}k_0)}{3}}{\frac{8}{3}k_0^2 + \left(1 - \frac{1}{3}k_0 \right) \left(2k_0 + \frac{8\pi\dot{\phi}^2}{H^2} \right)}. \quad (2.25)$$

Запишем теперь уравнение поля для скалярного возмущения метрики:

$$\frac{d}{dt} (a^3 G_s) \dot{\xi} + a^3 G_s \ddot{\xi} - a c_s^2 G_s \nabla^2 \xi = 0, \quad (2.26)$$

которое можно переписать в следующем виде:

$$\ddot{\xi} + \frac{1}{a^3 G_s} \frac{d}{dt} (a^3 G_s) \dot{\xi} - \frac{c_s^2}{a^2} \nabla^2 \xi = 0. \quad (2.27)$$

Перейдём к новым переменным:

$$d\tau_s = \frac{c_s}{a} dt, \quad \tilde{z} = \sqrt{2a} (G_s c_s)^{1/2}, \quad \tilde{U} = \xi \tilde{z}. \quad (2.28)$$

Теперь действие можно переписать в новых переменных:

$$\delta S_s^{(2)} = \frac{1}{2} \int d\tau_s d^3x \left[\frac{1}{2} (\tilde{U}')^2 - D_i \tilde{U} D^i \tilde{U} + \frac{\tilde{z}''}{\tilde{z}} \tilde{U}^2 \right]. \quad (2.29)$$

Сделаем Фурье преобразование $\tilde{U}(\vec{x}, \tau_s) = \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \tilde{U}_{\vec{k}}(\tau_s) e^{i\vec{k}\vec{x}}$ и перепишем уравнение (2.27) с помощью этого преобразования в новых переменных:

$$\tilde{U}_{\vec{k}}'' + \left(k^2 - \frac{\tilde{z}''}{\tilde{z}} \right) \tilde{U}_{\vec{k}} = 0. \quad (2.30)$$

Раскладывая в первом порядке малости по параметрам медленного скатывания выражения (2.24) и (2.25), из (2.28), получим

$$\frac{\tilde{z}''}{\tilde{z}} = \frac{a^2 H^2}{c_s^2} \left[2 - \varepsilon_0 + \frac{3}{2} \varepsilon_1 \right]. \quad (2.31)$$

С учетом параметров медленного скатывания и выражения (2.28) уравнение (2.30) можно переписать в следующем виде:

$$\tilde{U}_{\vec{k}}'' + k^2 \tilde{U}_{\vec{k}} + \frac{1}{\tau_s^2} \left(\mu_s^2 - \frac{1}{4} \right) \tilde{U}_{\vec{k}} = 0, \quad (2.32)$$

где

$$\mu_s^2 = \frac{9}{4} \left[1 + \frac{4}{3} \varepsilon_0 + \frac{2}{3} \varepsilon_1 \right]. \quad (2.33)$$

Решая уравнение (2.32) для приближения для возмущений за горизонтом ($c_s k \ll aH$), получим асимптотическое решение:

$$\tilde{U}_k = \frac{1}{\sqrt{2}} e^{i\frac{\pi}{2}(\mu_s - \frac{1}{2})} 2^{\mu_s - \frac{3}{2}} \frac{\Gamma(\mu_s)}{\Gamma(3/2)} \sqrt{-\tau_s} (-k\tau_s)^{-\mu_s}. \quad (2.34)$$

С другой стороны, решая уравнение в приближении медленного скатывания

$$\frac{\tilde{z}''}{\tilde{z}} = -\frac{1}{(1 - \varepsilon_0)\tau_s} \left[1 + \frac{1}{2} \varepsilon_1 \right] = -\frac{1}{\tau_s} \left(\mu_s - \frac{1}{2} \right), \quad (2.35)$$

получим

$$\tilde{z} \sim \tau_s^{\frac{1}{2} - \mu_s}. \quad (2.36)$$

В итоге выражения (2.34) и (2.36) позволяют получить выражение для ξ_k

$$\xi_k = \frac{\tilde{U}_k}{\tilde{z}} \sim k^{-\mu_s}. \quad (2.37)$$

Далее нам потребуется вычислить амплитуду мощности скалярных возмущений, которая зависит от ξ_k , следующим образом:

$$P_\xi = \frac{k^3}{2\pi^2} |\xi_k|^2. \quad (2.38)$$

Теперь найдём выражение для спектрального индекса n_s через параметры медленного скатывания:

$$n_s - 1 = \frac{d \ln(P_\xi)}{d \ln k} = 3 - 2\mu_s = -2\varepsilon_0 - \varepsilon_1. \quad (2.39)$$

Для момента выхода возмущений из под горизонта $aH = c_s k$ ($k\tau_s = -1$) запишем выражение для амплитуды мощности скалярных возмущений:

$$P_\xi = A_s \frac{H^2}{(2\pi)^2} \frac{1}{c_s^3 G_s}, \quad (2.40)$$

где

$$A_s = \frac{1}{2} 2^{2\mu_s - 3} \left| \frac{\Gamma(\mu_s)}{\Gamma(3/2)} \right|^2. \quad (2.41)$$

Перепишем выражение для амплитуды скалярных возмущений с точностью до первого порядка малости по параметрам медленного скатывания:

$$P_\xi \sim \frac{H^2}{8\pi^2} \frac{1}{\epsilon_0}. \quad (2.42)$$

Тензорные возмущения

Теперь перейдём к рассмотрению тензорных возмущений. Запишем тензорную часть действия с точностью до второго порядка малости, аналогично тому, как это было сделано для скалярной части:

$$\delta S_T^{(2)} = \int dt d^3x \left[\frac{a^3 \dot{h}_{ij} \dot{h}_{ij}}{64} - \frac{a^3 \dot{h}_{ij} \dot{h}_{ij} \kappa \dot{\phi}^2}{16} - \frac{a \partial_k h_{ij} \partial_k h_{ij}}{64} - \frac{a \partial_k h_{ij} \partial_k h_{ij} \kappa \dot{\phi}^2}{16} \right] \quad (2.43)$$

Данное действие можно переписать в следующем виде:

$$\begin{aligned} \delta S_T^{(2)} &= \frac{1}{8} \int dt d^3x a^3 \left[G_T \dot{h}_{ij} \dot{h}_{ij} - \frac{F_T}{a^2} \partial_k h_{ij} \partial_k h_{ij} \right] = \\ &= \frac{1}{8} \int d^3x dt G_T a^2 \left[(\dot{h}_{ij})^2 - \frac{c_T^2}{a^2} (\nabla h_{ij})^2 \right], \end{aligned} \quad (2.44)$$

где

$$c_T^2 = \frac{F_T}{G_T}, \quad (2.45)$$

и выражая G_T и c_T через параметры медленного скатывания, получим

$$G_T = \frac{1}{8\pi} \left(1 - \frac{1}{3} k_0 \right), \quad (2.46)$$

$$c_T = \frac{3 + k_0}{3 - k_0}. \quad (2.47)$$

Перейдём к новым переменным аналогично тому, как мы сделали это в случае скалярных возмущений:

$$d\tau_T = \frac{c_T}{a} dt, \quad z_T = \frac{a}{2}(c_T G_T)^{1/2}, \quad v_{ij} = z_T h_{ij}. \quad (2.48)$$

В новых переменных уравнения поля можно записать в следующем виде:

$$v''_{(k)ij} + \left(k^2 - \frac{z_T''}{z_T} \right) v_{(k)ij} = 0. \quad (2.49)$$

Поскольку уравнение для тензорных возмущений получилось аналогичное тому, что было выше записано для скалярных возмущений, то и решение данного уравнения будет аналогично решению (2.34). В приближении возмущения за горизонтом $c_T k \ll aH$ асимптотическое решение для тензорных мод получается также аналогичным решению скалярных мод, поэтому сразу выпишем выражение для амплитуды мощности тензорных возмущений:

$$P_T = \frac{k^3}{2\pi^2} |h_{ij}^{(k)}|^2. \quad (2.50)$$

В первом порядке параметров медленного скатывания можем записать выражение для спектрального индекса тензорных возмущений:

$$n_T = 3 - 2\mu_T = -2\varepsilon_0, \quad (2.51)$$

$$\mu_T = \frac{3}{2} + \varepsilon_0. \quad (2.52)$$

Выпишем амплитуду мощности тензорных возмущений для момента выхода возмущения из-под горизонта аналогично тому, как это было сделано для амплитуды мощности скалярных возмущений:

$$P_T = 16A_T \frac{H^2}{(2\pi)^2} \frac{1}{c_T^3 G_T}, \quad (2.53)$$

где

$$A_T = \frac{1}{2} 2^{2\mu_T - 3} \left| \frac{\Gamma(\mu_T)}{\Gamma(3/2)} \right|^2. \quad (2.54)$$

Теперь получим очень важную величину для оценки спектра первичных возмущений - тензорно-скалярное отношение в момент выхода моды из под горизонта:

$$r = \frac{P_T}{P_\xi} = 16 \frac{c_s^3 G_s}{c_T^3 G_T}. \quad (2.55)$$

Здесь был использован тот факт, что $\frac{A_T}{A_s} \approx 1$ в приближении малости параметров медленного скатывания. Оставляя только слагаемые в первом порядке малости параметров медленного скатывания

$$r \approx \frac{16\varepsilon_0}{1 - \frac{1}{3}k_0} \approx 16\varepsilon_0. \quad (2.56)$$

Параметры r, n_s и P_ξ уже были определены теоретически независимым способом коллаборациями WMAP/PLANCK, BICEP[44]. Заметим, что полученные нами выражения для этих параметров не зависят от параметров медленного скатывания k_0, k_1 . Однако, это не означает, что неминимальная кинетическая связь не оказывает влияния на приближение медленного скатывания, поскольку она модифицирует уравнения (2.3), которые используются для определения начального значения скалярного поля. Теперь перепишем выражения (2.39, 2.42, 2.57) для сравнения предсказаний теории с оценками реальных значений этих параметров, выразим данные параметры через значение скалярного поля в момент начала инфляции:

$$\begin{aligned} r &= \frac{\alpha^2}{\pi\varphi_I^2(1 + 8\pi\kappa V_0\varphi_I^\alpha)}, \\ n_s &= 1 - \frac{\alpha^2}{8\pi\varphi_I^2(1 + 8\pi\kappa V_0\varphi_I^\alpha)} - \frac{\alpha(1 + 8\pi\kappa V_0\varphi_I^\alpha + 4\pi\alpha\kappa V_0\varphi_I^\alpha)}{4\pi\varphi_I^2(1 + 8\pi\kappa V_0\varphi_I^\alpha)^2}, \\ P_\xi &= \frac{16V_0\varphi_I^{\alpha+2}(1 + 8\pi\kappa V_0\varphi_I^\alpha)}{3\alpha^2}. \end{aligned} \quad (2.57)$$

Поскольку выражения для r, n_s зависят только от комбинации κ и V_0 , изменяя значение κV_0 возможно построить кривые для каждого значения степени α в потенциале $V(\varphi)$ в координатах (n_s, r) , как показано на рис.2.1. Также на рис.2.1 отмечена область значений параметров, полученная из наблюдательных данных. Тот факт, что ни одна из кривых не пересекает эти области, говорит о том, что данная теория в рассматриваемом случае ($\kappa > 0$ и $V(\varphi) = V_0\varphi^\alpha$) не может удовлетворить современным наблюдательным данным.

Данные кривые не пересекут области доверительных интервалов, даже если построить их для больших значений κV_0 , покажем это, вычислив пределы для выражений для r и n_s :

$$\begin{aligned} \lim_{\kappa V_0 \rightarrow \infty} r &= \frac{16\alpha}{2N(\alpha + 2) + \alpha}, \\ \lim_{\kappa V_0 \rightarrow \infty} n_s &= 1 - \frac{4(\alpha + 1)}{2N(\alpha + 2) + \alpha}. \end{aligned} \quad (2.58)$$

Выразим $n_s - 1$ через r :

$$n_s - 1 = -\frac{(2N - 1)r + 16}{16N}. \quad (2.59)$$

Для скалярно-тензорной теории с минимальным кинетическим членом запишем выражения для r и n_s :

$$\begin{aligned} r &= \frac{4\alpha}{\frac{\alpha}{4} + N}, \\ n_s &= 1 - \frac{\alpha + 2}{2N + \frac{\alpha}{2}}. \end{aligned} \quad (2.60)$$

Также выразим $n_s - 1$ через r :

$$n_s - 1 = -\frac{(2N - 1)r + 16}{16N}. \quad (2.61)$$

Как мы видим (2.60) полностью совпадает с (3.1), что говорит нам о том при любых положительных κV_0 кривые не пересекут области доверительных интервалов. Также отметим, что добавление неминимальной кинетической связи немного улучшает ситуацию по сравнению с минимальной кинетической связью, хотя и не в достаточной степени.

2.0.3 Обсуждение результатов главы

В первой главе было показано, что данная теория с нелинейным кинетическим членом в случае $\kappa > 0$ не удовлетворяет современным наблюдательным ограничениям при любых значениях $\kappa V_0 > 0$ в случае степенного потенциала $V = V_0 \varphi^\alpha$ и любой степени α . В частности для доказательства этого утверждения были построены путём изменения κV_0 кривые в плоскости (n_s, r) , где каждая кривая соответствует разной степени потенциала $V = V_0 \varphi^\alpha$. Также получены асимптотики для n_s и r при $\kappa V_0 \rightarrow \infty$. В частности эти асимптотики показали, что кривые начинаются $\kappa V_0 = 0$ и заканчиваются $\kappa V_0 \rightarrow \infty$ на одной и той же прямой соответствующей предсказаниям минимально связанного скалярного поля, построенной путем изменения степени потенциала скалярного поля.

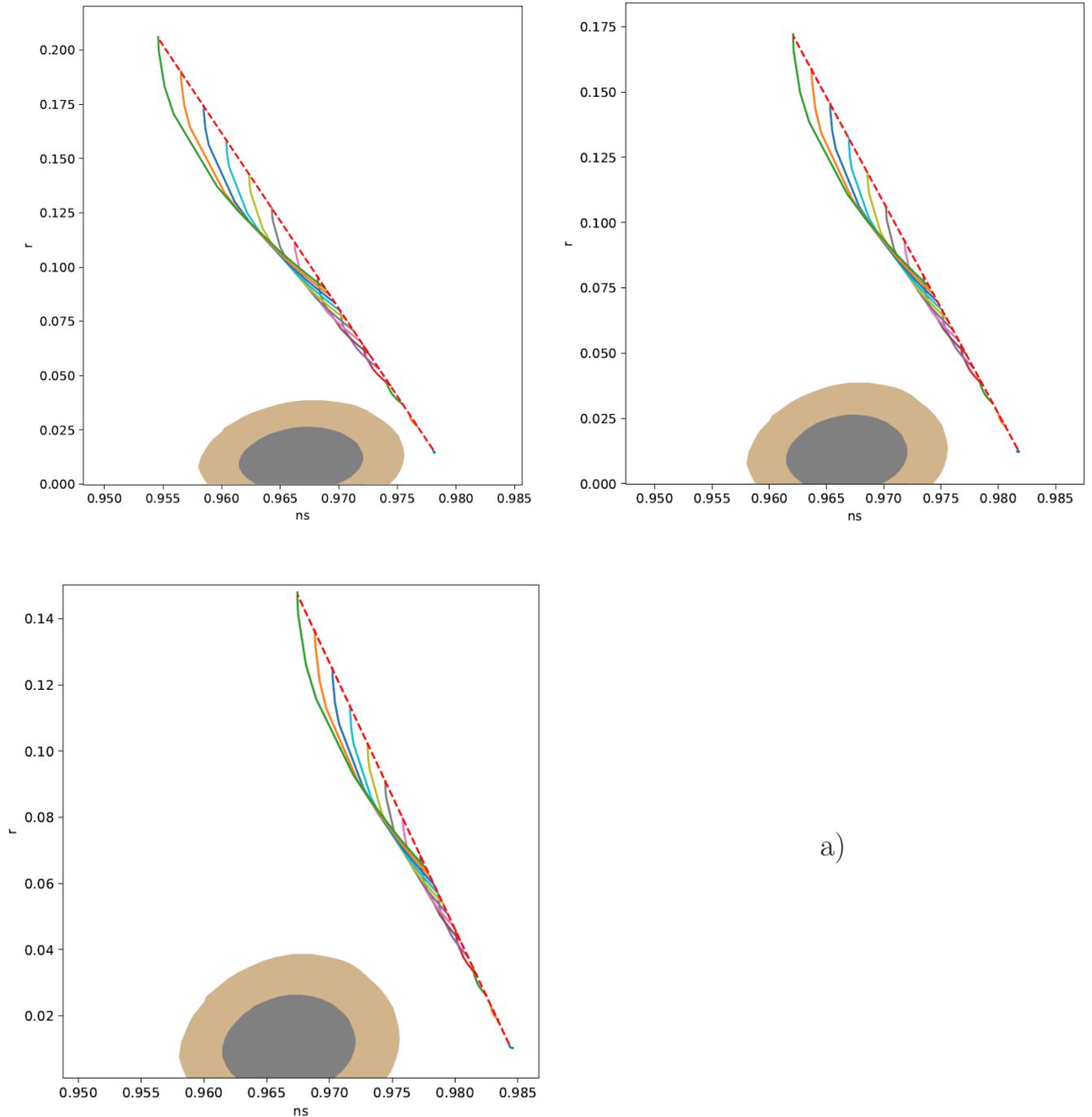


Рисунок 2.1 — На данных графиках кривые построены для разных значений $\alpha = 0.01..2.4$, for a) $N=50$, b) $N = 60$, c) $N = 70$, каждая кривая построена путем варьирования значений $\kappa V_0 = -0.001..1000$, охровая и серая области описывают 68% и 95% доверительные интервалы значений, полученные из наблюдательных данных, пунктирная красная линия описывает результаты для теории с минимальным кинетическим членом

Глава 3. Инфляция в случае с $\kappa < 0^3$

В данной главе будет рассмотрен случай $\kappa < 0$ и найдены области начальных значений φ , $\dot{\varphi}$ и H , приводящие к конечной инфляции, набирающей не менее 50-60 e-фолдов[76]. Далее обсудим возможность использования приближения медленного скатывания в данном случае.

Как видно из уравнения (2.6), $\dot{\varphi}$ при отрицательных κ может быть довольно большим, вследствие чего параметры медленного скатывания k_0, k_1 могут быть больше 1, поэтому приближение медленного скатывания в течение инфляции может не выполняться. Единственным условием, выполняющимся во время инфляции, будем считать $\varepsilon_0 < 1$, поскольку этот параметр напрямую связан с экспоненциальным ростом масштабного фактора во время инфляции.

3.0.1 Случай без потенциала

Начнем наше рассмотрение с простейшего случая $V(\varphi) = 0$. Запишем уравнения поля (2.1) для этого случая:

$$3H^2 = 4\pi\dot{\varphi}^2(1 + 9\kappa H^2), \quad (3.1)$$

$$2\dot{H} + 3H^2 = -4\pi\dot{\varphi}^2(1 - \kappa(2\dot{H} + 3H^2 + 4H\ddot{\varphi}\dot{\varphi}^{-1})), \quad (3.2)$$

$$(\ddot{\varphi} + 3H\dot{\varphi}) + 3\kappa(H^2\ddot{\varphi} + 2H\dot{H}\dot{\varphi} + 3H^3\dot{\varphi}) = 0. \quad (3.3)$$

Выразим \dot{H} , $\ddot{\varphi}$:

$$\dot{H} = \frac{-3H^2 - 4\pi\dot{\varphi}^2(1 + 9\kappa H^2)}{2(1 - \frac{4\pi\dot{\varphi}^2\kappa(1 - 9\kappa H^2)}{1 + 3\kappa H^2})}, \quad (3.4)$$

$$\ddot{\varphi} = -3H\dot{\varphi} - \frac{3H\dot{\varphi}\kappa(-3H^2 - 4\pi\dot{\varphi}^2(1 + 9\kappa H^2))}{1 + 3\kappa H^2 - 4\pi\dot{\varphi}^2\kappa(1 - 9\kappa H^2)}. \quad (3.5)$$

³Данная глава основана на результатах работы 2,4 из списка публикаций по теме диссертации.

Таким образом уравнения (3.5,3.6) позволяют нам получить уравнения только для H и её первой производной по времени:

$$\dot{H} = \frac{-3H^2(1 + 9\kappa H^2)(1 + 3\kappa H^2)}{1 + 9\kappa H^2 - 54\kappa^2 H^4}. \quad (3.6)$$

Решение этого уравнения получается в следующем виде:

$$\sqrt{-\kappa} \ln \left(\left(\frac{1 + \sqrt{-3\kappa H}}{1 - \sqrt{-3\kappa H}} \right)^{\frac{1}{\sqrt{3}}} \left(\frac{1 - 3\sqrt{-\kappa H}}{1 + 3\sqrt{-\kappa H}} \right)^{\frac{1}{2}} \right) + \frac{1}{3H} = t + const. \quad (3.7)$$

Далее получим выражение для числа е-фолдов, которое, как было сказано в предыдущей главе, должно быть больше 60 к концу инфляции. Для начала перепишем (3.7) в следующем виде:

$$dH \frac{1 + 9\kappa H^2 - 54\kappa^2 H^4}{-3H(1 + 9\kappa H^2)(1 + 3\kappa H^2)} = H dt. \quad (3.8)$$

После чего, используя (2.9), получим:

$$\begin{aligned} N &= \int_{t_i}^{t_e} \frac{1 + 9\kappa H^2 - 54\kappa^2 H^4}{-3H(1 + 9\kappa H^2)(1 + 3\kappa H^2)} dH = \\ &= \ln(H(t_e)^{-\frac{1}{3}}(1 + 9\kappa H(t_e)^2)^{\frac{1}{6}}(1 + 3\kappa H(t_e)^2)^{-\frac{1}{3}}) - \\ &= \ln(H(t_i)^{-\frac{1}{3}}(1 + 9\kappa H(t_i)^2)^{\frac{1}{6}}(1 + 3\kappa H(t_i)^2)^{-\frac{1}{3}}). \end{aligned} \quad (3.9)$$

Моментом окончания инфляции, также как и в предыдущей главе будем считать тот момент, когда $\varepsilon_0 = 1$. Используя уравнение (2.4) и (3.7), получим выражение, при помощи которого определим значение $H(t_e)$ в конце инфляции:

$$\frac{3(1 + 9\kappa H(t_e)^2)(1 + 3\kappa H(t_e)^2)}{1 + 9\kappa H(t_e)^2 - 54\kappa^2 H(t_e)^4} = 1. \quad (3.10)$$

Решением получившегося уравнения будет являться выражение:

$$\kappa H(t_e)^2 = -\frac{27 - \sqrt{513}}{54} \approx -0.081. \quad (3.11)$$

Теперь всё готово для того, чтобы определить начальные значения $\dot{\phi}$, H , приводящие к конечной инфляции, за время которой набирается минимум 50-60 е-фолдов. Для этого, используя (3.10), запишем получившееся неравенство:

$$\ln(H(t_i)^{-\frac{1}{3}}(1 + 9\kappa H(t_i)^2)^{\frac{1}{6}}(1 + 3\kappa H(t_i)^2)^{-\frac{1}{3}}) < q - N, \quad (3.12)$$

где

$$q = \ln(H(t_e)^{-\frac{1}{3}}(1 + 9\kappa H(t_e)^2)^{\frac{1}{6}}(1 + 3\kappa H(t_e)^2)^{-\frac{1}{3}}). \quad (3.13)$$

Далее проиллюстрируем на примере некоторых количественных оценок зависимость q , $H(t_e)$ от κ :

$$\begin{aligned} \kappa = -1 \quad q &\approx 0.297 \quad H(t_e) \approx 0.284, \\ \kappa = -10 \quad q &\approx 0.681 \quad H(t_e) \approx 0.09, \\ \kappa = -10^6 \quad q &\approx 2.599 \quad H(t_e) \approx 0.00028, \\ \kappa = -10^{12} \quad q &\approx 4.9 \quad H(t_e) \approx 2.84 \cdot 10^{-7}. \end{aligned} \quad (3.14)$$

Теперь перепишем неравенство (3.13) в более удобном виде:

$$\begin{aligned} H(t_i)^{\frac{1}{3}}((1 - 9\kappa H(t_i)^2)^{\frac{1}{6}} - \exp^{q-N}(1 - 3\kappa H(t_i)^2)^{\frac{1}{3}}H(t_i)^{\frac{1}{3}}) \times \\ \times (1 - 3\kappa H(t_i)^2)^{\frac{1}{3}} < 0. \end{aligned} \quad (3.15)$$

Для нахождения решения этого неравенства, т.е. допустимого интервала для $H(t_i)$, решим следующее уравнение:

$$AH(t_i)^6 - BH(t_i)^4 + CH(t_i)^2 - 1 = 0, \quad (3.16)$$

где

$$A = 9\kappa^2 e^{6q-6N}; \quad B = 6\kappa e^{6q-6N}; \quad C = 9\kappa + e^{6q-6N}. \quad (3.17)$$

Перепишем уравнение (3.16) в следующих обозначениях: $x = H^2$, $a_1 = A$, $b_1 = -B/3$, $c_1 = C/3$ and $d_1 = -1$:

$$a_1 x^3 + 3b_1 x^2 + 3c_1 x + d_1 = 0. \quad (3.18)$$

Это уравнение имеет три решения и может быть решено аналитически. Используя следующие замены: $y = x + \frac{b_1}{a_1}$, $p_1 = \frac{c_1 a_1 - b_1^2}{a_1^2}$ and $2q_1 = \frac{2b_1^3 - 3a_1 b_1 c_1 + d_1 a_1^2}{a_1^3}$ можно переписать уравнение(3.18) в следующей форме:

$$y^3 + 3p_1 y + 2q_1 = 0. \quad (3.19)$$

Теперь используя формулу Кардано, получим решение уравнения (3.19)

$$x = \left(-q_1 \pm \sqrt{q_1^2 + p_1^3} \right)^{1/3} - \frac{p_1}{\left(-q_1 \pm \sqrt{q_1^2 + p_1^3} \right)^{1/3}} - \frac{b_1}{a_1}. \quad (3.20)$$

В данном случае два решения будут комплексными и одно действительным. Выпишем действительное решение, которое даёт выражение для параметра Хаббла H в зависимости от констант теории и числа ефолдов N , а также перепишем его оставляя только ведущие порядки малости:

$$\begin{aligned}
H_{sol}^2 = & \left[\left(\left(36 \sqrt{\frac{972k^2 - 27e^{6(q-N)}\kappa + 8e^{12(q-N)}}{e^{6(q-N)}\kappa}} \kappa - 324\kappa - \right. \right. \right. \\
& \left. \left. \left. - 8e^{6(q-N)} \right) e^{12(q-N)} \right)^{2/3} - 4e^{6(q-N)}(27\kappa - e^{6(q-N)}) \right] / \left[18e^{6(q-N)}\kappa \times \right. \\
& \left. \times \left(\left(36 \sqrt{\frac{972\kappa^2 - 27e^{6(q-N)}\kappa + 8e^{12(q-N)}}{e^{6(q-N)}\kappa}} \kappa - -324\kappa - 8e^{6(q-N)} \right) e^{12(q-N)} \right)^{1/3} \right] + \\
& + \frac{2}{9\kappa} \approx \frac{1}{9\kappa} \left(1 - \frac{13e^{6(q-N)}}{324\kappa} \right) \tag{3.21}
\end{aligned}$$

Выражение для $\dot{\phi}_{sol}$ принимает следующую форму

$$\dot{\phi}_{sol} = \sqrt{\frac{3H_{sol}^2}{4\pi(1 - 9\kappa H_{sol}^2)}} \sim \frac{3\sqrt{3}}{\sqrt{13\pi}} \cdot e^{3(N-q)} \tag{3.22}$$

Таким образом, используя полученные решения (3.21, 3.22), получим решение неравенства (3.13). Оно представляет из себя интервал значений для $H(t_i)$ и $\dot{\phi}(t_i)$, которые приводят к инфляции не менее чем в N е-фолдов: $H \in (H_{sol}; \frac{1}{3\sqrt{\kappa}})$ и $\dot{\phi} \in (\dot{\phi}_{sol}, \infty)$, отметим, что $H = \frac{1}{3\sqrt{\kappa}}$ - наибольшее значение H , что можно заметить из уравнения (3.2).

Как видно, $\dot{\phi}$ должно быть экспоненциально большим ($\dot{\phi} \sim 4.97 \cdot 10^{77}$ для $\kappa = 1$ и $N = 60$; $\dot{\phi} \sim 4.97 \cdot 10^{71}$ для $\kappa = 10^{12}$ и $N = 60$) и H должно быть очень близко к $\frac{1}{3\sqrt{\kappa}}$ (для $N = 60$ и $\kappa = 1$, H отличается от $\frac{1}{3\sqrt{\kappa}}$ на величину $1.1 \cdot 10^{-79}$ и для $\kappa = 10^{12}$ это отличие составляет $1.1 \cdot 10^{-91}$). Таким образом для получения адекватной инфляции необходимо выбирать очень конкретные начальные условия.

Ситуация меняется, когда мы вводим потенциал скалярного поля. Теперь, как и в случае минимальной связи, сам потенциал может вызвать инфляцию. Таким образом, в исследуемой модели мы можем иметь две независимые инфляционные стадии: одну, индуцированную кинетическим взаимодействием, и вторую, индуцированную потенциалом. Это облегчает получение не менее

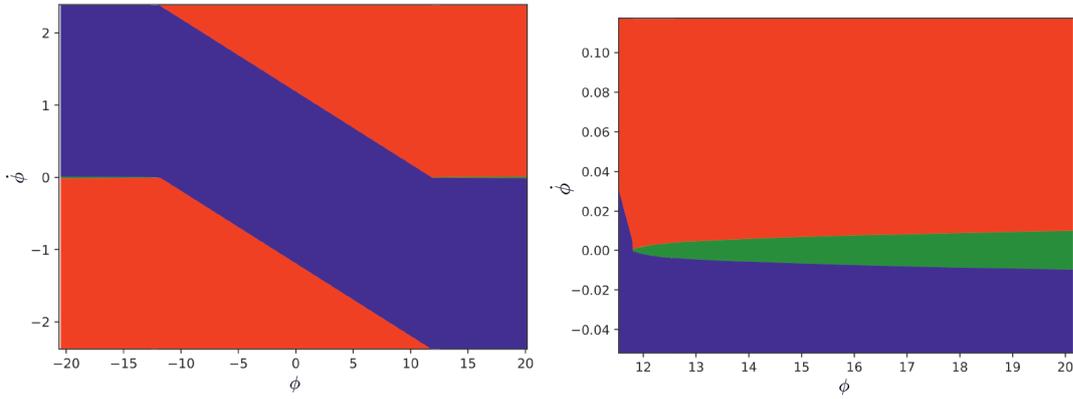


Рисунок 3.1 — Данные графики построены в координатах ϕ и $\dot{\phi}$. Красные и зелёные области показывают начальные значения, приводящие к режимам вечной инфляции, синяя область показывает начальные данные, приводящие к конечной инфляции. Здесь $\kappa = 100$, $V_0 = 10^{-5}$. Нижняя картинка показывает границу зелёной области в увеличенном масштабе по сравнению с левой картинкой

50-60 е-фолдов за время инфляции. Однако в данном случае мы сталкиваемся с другой проблемой. А именно, известно, что помимо инфляции с естественным выходом в системе существуют и другие режимы, не подходящие для описания нашей Вселенной. Далее рассматривается конкретный пример потенциала $V(\phi) = V_0\phi^{1.5}$, описывается получение конкретных начальных данных, приводящих к разным режимам инфляции, обсуждаются сами режимы.

Поскольку систему уравнений (3.2 - 3.4) нельзя решить аналитически, в данной работе было выполнено численное решение данной системы уравнений и были найдены области начальных данных, приводящих к адекватной инфляции. Для численных расчетов были выбраны следующие значения констант теории $V_0 = 10^{-5}$, $\kappa = 100$.

Пространство начальных условий исследуемой модели разделено на три зоны в зависимости от реализуемого сценария эволюции Вселенной. В первой зоне реализуется режим двойной инфляции с последующим выходом из второй инфляции [27]. На рис. 3.1 эту зону описывает синяя область. (Стоит пояснить, что под режимом двойной инфляции подразумевается следующее: сначала Вселенная испытывает первое экспоненциальное расширение, которое было названо "первой инфляцией". Потом экспоненциальное расширение прекращается на некоторый промежуток времени, после которого начинается вновь, т.е. начинается "вторая инфляция"). Эта зона разделена на две подзоны, показанные на рис. 3.2. Первая подзона (оранжевая зона) описывает начальные

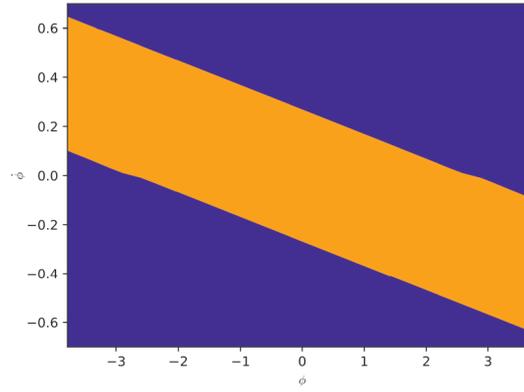


Рисунок 3.2 — Синяя зона представляет собой область начальных значений, приводящая к конечной инфляции обеспечивающей более чем 60 е-фолдов, а оранжевая - не обеспечивающей.

условия, приводящие к инфляции, набирающей менее чем 60 е-фолдов. А во второй подзоне (синяя зона) количество е-фолдов больше или равно 60, поэтому эти начальные условия приводят к адекватной инфляции. Здесь мы для определенности провели разделение между достаточной и недостаточной инфляцией на уровне 60 е-фолдов, хотя по большому счёту её также можно провести и на 50, поскольку точное значение е-фолдов до конца инфляции в момент выхода интересующей нас моды возмущений не очень чётко определено[76].

Во второй и третьей зоне на рис.3.1 реализуется ускоренное расширение Вселенной, которое никогда не прекращается. Эти две зоны соответствуют двум разным асимптотикам. Во второй зоне (на рисунке отмеченной зеленым цветом) скалярное поле φ и параметр Хаббла H стремятся к [25; 72]:

$$\varphi(t)_{t \rightarrow \infty} \approx \left[\frac{\sqrt{V_0}}{4} t + const \right]^4; \quad H_{t \rightarrow \infty} \approx \frac{1}{\sqrt{3\kappa}}. \quad (3.23)$$

Начальные данные из зоны 3 (красная область на рис. 3.1) приводят к следующим асимптотикам для φ и H [25; 72]:

$$\varphi(t)_{t \rightarrow \infty} \approx \left[\frac{33}{64\pi\kappa} \sqrt{\frac{1}{24\pi V_0}} t + const \right]^{4/11}; \quad H_{t \rightarrow \infty} \approx \sqrt{\frac{8\pi V_0}{3}} \varphi^{3/4} \sim t^{3/11}. \quad (3.24)$$

Конфигурация оранжевой зоны на рис.3.2 (области начальных данных, приводящих к недостаточной инфляции) качественно такая же, как и для массивного минимально связанного скалярного поля (см. [78]), представляя собой узкую полоску внутри области достаточной инфляции. Однако, как видно из рис.3.1, при достаточно больших значениях начального скалярного поля

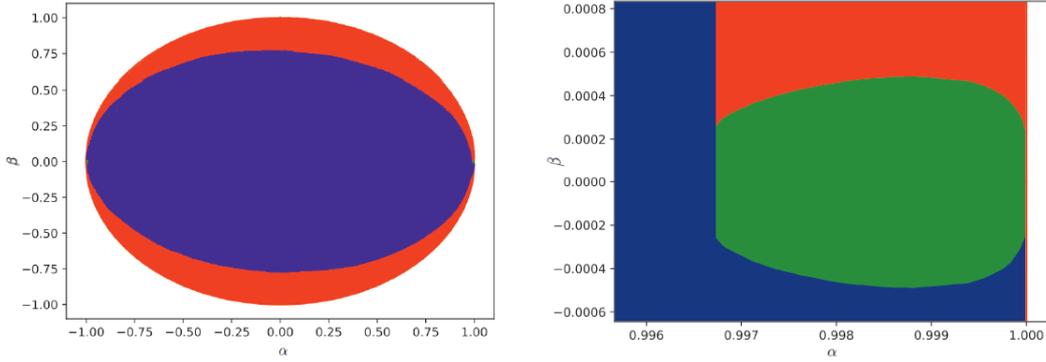


Рисунок 3.3 — Графики построены в координатах $\alpha = \frac{\varphi}{\sqrt{1+\varphi^2+\dot{\varphi}^2}}$ and $\beta = \frac{\dot{\varphi}}{\sqrt{1+\varphi^2+\dot{\varphi}^2}}$. Красные и зелёные области отражают начальные значения для режимов вечной инфляции, синяя область отражает начальные значения, приводящие к конечной инфляции. Здесь были приняты значения констант равными $\kappa = 100$, $V_0 = 10^{-5}$. Нижний график является увеличенной частью верхнего графика в месте раздела зеленой и красной областей

появляются две новые зоны с вечным ускоренным расширением. Эти зоны соответствуют режимам, не приводящим к адекватной инфляции. Поскольку в настоящей работе мы рассматриваем начальные условия произвольной начальной энергии, фазовое пространство не является компактным, и мы не можем приписать ему разумную меру. Однако, сделав преобразование

$$\alpha = \frac{\varphi}{\sqrt{1 + \varphi^2 + \dot{\varphi}^2}},$$

и

$$\beta = \frac{\dot{\varphi}}{\sqrt{1 + \varphi^2 + \dot{\varphi}^2}},$$

получаем компактное фазовое пространство (α, β) , а рис. 3.3 показывает, что большая часть начальных условий для физически допустимой части $|\alpha|^2 + |\beta|^2 \leq 1$ плоскости (α, β) не приводит к вечной инфляции. Что касается вечной инфляции, то режим (3.18) доминирует над режимом (3.24) с точки зрения начальных условий, поскольку зеленая зона на рис.3.1 очень мала.

Полученные результаты можно резюмировать следующим образом. Хотя в принципе инфляция в исследуемой модели может быть обусловлена только нелинейным кинетическим членом, адекватная инфляция (не менее 50-60 e-фолдов) требует либо экспоненциально больших начальных значений $\dot{\varphi}$, либо экспоненциально больших значений константы связи κ . С физической точки

зрения обе данные возможности приводят к некоторым физическим проблемам. В частности, если рассматриваемая теория является низкоэнергетическим приближением какой-либо более общей теории, требуемые начальные условия могут располагаться далеко за пределами зоны, где эту теорию можно считать надежным приближением.

В противоположность случаю без потенциала, случай с потенциалом позволяет получить адекватную инфляцию набирающую не менее чем 60 е-фолдов без тонкой настройки начальных параметров. Хотя в этом случае необходимое количество е-фолдов набирается в основном за счет второй инфляции обусловленной потенциалом скалярного поля (как и в стандартном инфляционном сценарии), новизной, специфической для данной теории с нелинейной кинетической связью, является то, что некоторая часть е-фолдов может быть набрана на этапе первой инфляции, обусловленной нелинейной кинетической связью. В интервале времени между этими двумя типами инфляции инфляционные параметры могут быстро изменяться, оказывая существенное влияние на распространение космологических возмущений. Этот эффект требует специального исследования, которое будет проведено в будущих работах [27].

3.0.2 Обсуждение результатов главы

Во второй главе был рассмотрен случай $\kappa < 0$. В случае без потенциала аналитически было показано, что для получения инфляции, за время которой набирается более 60 е-фолдов необходимы экспоненциально большие начальные значения $\dot{\varphi}$ и начальное значение H , лежащее в узком интервале значений $(H_{sol}, \frac{1}{3\sqrt{\kappa}})$. В случае с потенциалом $V = V_0\varphi^{1.5}$ реализуются три различные режима инфляции. Первый режим - конечная инфляция, состоящая из двух последовательных экспоненциальных расширений. В этом режиме может набираться как больше 60 е-фолдов, так и меньше. Второй и третий представляют собой два режима бесконечных инфляций. С помощью численных методов были получены области начальных значений $(\varphi, \dot{\varphi})$, приводящие к каждому из этих режимов. Как было показано область адекватной инфляции является достаточно большой и для этого случая тонкой настройки начальных параметров не требуется.

Глава 4. Изменение орбитального периода в теории Хорндески и гибридной $f(R)$ - гравитации⁴

В данной главе изучается гравитационное излучение от квазикруговых двойных систем с пульсаром (пульсар - это очень компактный объект - нейтронная звезда ($R_{NS} \sim 10 - 20 km$ - радиус нейтронной звезды)) в теории Хорндески и гибридной $f(R)$ -гравитации, в частности будет получено выражение для первой производной орбитального периода системы по времени [32]. При написании некоторых выкладок также были использованы данные работы [24; 55; 74; 79]. Поверхностный гравитационный потенциал такого тела оказывается очень большим $\Phi_{NS} = \frac{G_N M_{NS}}{c^2 R_{NS}} = 0.2$ (где G_N - гравитационная постоянная, M_{NS} - это масса нейтронной звезды) [80]. Поэтому можно с уверенностью сказать, что гравитация вблизи данного объекта весьма сильная. Однако для решения целей данной главы, нам необходимо рассмотреть поток гравитационной энергии от двойной системы вдали от источника излучения. На такой большой дистанции большой поверхностный потенциал не будет оказывать влияния на метрику пространства-времени $g_{\mu\nu}$ и скалярное поле φ , поэтому в дальнейшем будем использовать разложение метрики на плоскую фоновую метрику и небольшое возмущение [74; 81; 82]. Похожее предположение используем и для скалярного поля. Наконец, воспользовавшись также приближением малых скоростей ($v/c \ll 1$), запишем:

$$\begin{aligned}\varphi &= \varphi_0 + \varphi, \\ g_{\mu\nu} &= \eta_{\mu\nu} + h_{\mu\nu},\end{aligned}\tag{4.1}$$

где φ_0 - это асимптотическое значение скалярного поля вдали от системы источника (определяется космологическим фоновым решением), $\eta_{\mu\nu}$ - тензор Минковского, $h_{\mu\nu}$ и φ малые возмущения тензорного и скалярных полей порядка $O(v^2/c^2)$, соответственно. Здесь используется квазиминковская система координат.

В данной главе будет рассмотрен следующий частный случай теории Хорндески:

⁴Данная глава основана на результатах работы 1 из списка публикаций по теме диссертации, а также повторяет ряд выкладок из работы [24; 74].

$$\begin{aligned}
L_2 &= G_2(\varphi, X), L_3 = -G_3(\varphi)\square\varphi, \\
L_4 &= G_4(\varphi)R, \\
L_5 &= 0.
\end{aligned}
\tag{4.2}$$

Подобный выбор частного случая обусловлен лёгкостью его рассмотрения, а именно, отсутствием экранирующих механизмов и, как следствие, возможностью линеаризации уравнений поля[83—88]. Дело в том, что в теории Хорндески работает механизм экранирования Вайнштейна, который позволяет подавлять кинетический член скалярного поля внутри области, ограниченной радиусом Вайнштейна, с помощью нелинейных членов скалярного поля[87; 88]. Таким образом, внутри радиуса Вайнштейна отклонение от ОТО становится минимальным, тогда как вне радиуса Вайнштейна, где уже возможна линеаризация, на больших масштабах расстояний теория будет описывать ускоренное расширение Вселенной и будет сильно отличаться от ОТО. Стоит также отметить, что помимо механизма Вайнштейна в данном частном случае теории Хорндески также отсутствуют хамелеонные[83; 84], симметронные[85] и дилатонные[89] механизмы экранирования.

4.0.1 Материальное действие

Сильный и слабый принцип эквивалентности - два основополагающих принципа ОТО. Сильный принцип эквивалентности: "На все законы физики наличие гравитационного поля локально не влияет". Слабый принцип эквивалентности гласит (СПЭ): "в каждой точке пространства-времени в произвольном гравитационном поле можно выбрать локально инерциальную систему координат такую, что в достаточно малой окрестности точки законы движения свободно падающих частиц будут иметь ту же форму, что и в неускоренных декартовых системах координат специальной теории относительности"[90]. Важной особенностью модифицированных теорий гравитации является то, что эти два постулата могут в них нарушаться. В данной работе рассматриваются скалярно-тензорные модели, эти теории предполагают, что локальное значение скалярного поля связано с инертной массой тела и его внутренней структурой.

Первым это показал Эрдли в работе [80]. Автором было рассмотрено взаимодействие тел с точечными массами в скалярно-тензорных теориях и показано, что масса может быть представлена в виде произвольной функции скалярного поля, если учитывать влияние скалярного поля на внутреннюю структуру тела. С учётом всего вышесказанного, запишем материальное действие для точечных масс:

$$S_m = -c^2 \sum_a \int m_a(\varphi) d\tau_a, \quad (4.3)$$

здесь $m_a(\varphi)$ – инертная масса частицы, a , и τ_a – собственное время той же частицы, измеряемое вдоль мировой линии x_a^μ . Как видно из действия для материи 4.3 масса $m_a(\varphi)$ зависит от скалярного поля φ , которое в свою очередь зависит от координаты, что приводит к тому, что масса также зависит от положения в пространстве, однако подобный факт противоречит слабому принципу эквивалентности[90]. Запишем теперь выражение для тензора энергии-импульса и его следа для подобного действия (4.3):

$$T^{\mu\nu} = \frac{c}{\sqrt{-g}} \sum_a m_a(\varphi) \frac{u^\mu u^\nu}{u^0} \delta^3(\mathbf{r} - \mathbf{r}_a(t)), \quad (4.4)$$

$$T \equiv g_{\mu\nu} T^{\mu\nu} = -\frac{c^3}{\sqrt{-g}} \sum_a \frac{m_a(\varphi)}{u^0} \delta^3(\mathbf{r} - \mathbf{r}_a(t)),$$

где $u^\mu = dx_a^\mu/d\tau_a$ – четырехскорость частицы с индексом a , где $d\tau = \sqrt{-ds^2}/c$, $ds^2 = g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu$ – интервал, $u_\mu u^\mu = -c^2$, $\delta^3(\mathbf{r} - \mathbf{r}_a(t))$ – это трехмерная дельта-функция Дирака.

Уравнения поля в слабом пределе

Как было сказано выше, в данной главе мы будем использовать приближение слабого поля, где используется разложение метрики на плоскую фоновую и малое возмущение. Предел слабого поля и малых скоростей ($v/c \ll 1$) описывается постньютоновским формализмом (ППН)[74; 81; 82]. Первоначально ППН был создан для сравнения различных метрических теорий друг с другом и ОТО

[82] в условиях слабого поля. Поэтому в данный формализм построен на приближении асимптотически плоского пространства-времени и малых скоростей. Движение материи в рамках ППН подчиняется уравнениям гидродинамики для идеальной жидкости. Поскольку вдали от объектов в двойной системе с пульсаром поле, как было отмечено, достаточно слабо, возможно использовать ППН формализм для описания такой системы [55; 74; 81; 82].

Принимая во внимание (4.1), разложим в ряд Тейлора четыре произвольные функции $G_2(\varphi, X)$, $G_3(\varphi, X)$, $G_4(\varphi, X)$, $G_5(\varphi, X)$ около фонового значения скалярного поля [74]:

$$G(\varphi, X) = \sum_{m,n=0}^{\infty} G_{(m,n)} \varphi^m X^n, \quad (4.5)$$

$$G_{(m,n)} = \frac{1}{m!n!} \frac{\partial^{m+n}}{\partial^m \varphi \partial^n X} G(\varphi, X) \Big|_{\varphi=\varphi_0, X=0},$$

здесь $G_{(m,n)}$ – константы с размерностью ньютоновской гравитационной постоянной G_N .

Также разложим в ряд Тейлора инертную массу около φ_0 , которая также является произвольной функцией скалярного поля (4.3):

$$m_a(\varphi) = m_a(\varphi_0) \left[1 + s_a \frac{\varphi}{\varphi_0} - \frac{1}{2} \left(\frac{\varphi}{\varphi_0} \right)^2 (s'_a - s_a^2 + s_a) + O(\varphi^3) \right]. \quad (4.6)$$

В дальнейшем будем обозначать $m_a(\varphi_0)$ как m_a . Величины s_a и s'_a являются чувствительностями первого и второго порядка. Эти величины были впервые введены Эрдли [80]:

$$s_a \equiv \frac{\partial(\ln m_a)}{\partial(\ln \varphi)} \Big|_{\varphi_0}, \quad s'_a \equiv \frac{\partial^2(\ln m_a)}{\partial(\ln \varphi)^2} \Big|_{\varphi_0}. \quad (4.7)$$

Теперь перейдем непосредственно к вычислению уравнений в пределе слабого поля (в общем виде они были получены в [71; 91]).

Для φ [24; 74]:

$$\begin{aligned}
& - G_{2(0,1)}\square\varphi + G_{2(0,1)}h_{\mu\nu}\partial^\mu\partial^\nu\varphi + G_{2(0,1)}(\partial_\rho h^{\tau\rho} - \frac{1}{2}\eta^{\tau\alpha}\partial_\alpha h)\partial_\tau\varphi - G_{2(1,1)}\varphi\square\varphi - \\
& G_{2(1,1)}\partial_\rho\varphi\partial^\rho\varphi + 2G_{3(1,0)}\square\varphi - 2G_{3(1,0)}h_{\mu\nu}\partial^\mu\partial^\nu\varphi - 2G_{3(1,0)}(\partial_\rho h^{\tau\rho} - \frac{1}{2}\eta^{\tau\alpha}\partial_\alpha h)\partial_\tau\varphi + \\
& 4G_{3(2,0)}\varphi\square\varphi + 4G_{3(2,0)}\partial_\rho\varphi\partial^\rho\varphi + G_{3(0,1)}[(\square\varphi)^2 - (\partial_\rho\partial_\sigma\varphi)^2] + 2G_{4(0,1)}\partial^\mu\partial^\nu\varphi \times \\
& \left(\partial_\alpha\partial_\nu h^\alpha_\mu - \frac{1}{2}\square h_{\mu\nu} - \frac{1}{2}\partial_\mu\partial_\nu h - \frac{1}{2}\eta_{\mu\nu}\partial_\alpha\partial_\beta h^{\alpha\beta} + \frac{1}{2}\eta_{\mu\nu}\square h \right) - 2G_{4(1,1)}[(\square\varphi)^2 - \\
& (\partial_\rho\partial_\sigma\varphi)^2] - 2G_{5(1,0)}\partial^\mu\partial^\nu\varphi \left(\partial_\alpha\partial_\nu h^\alpha_\mu - \frac{1}{2}\square h_{\mu\nu} - \frac{1}{2}\partial_\mu\partial_\nu h - \frac{1}{2}\eta_{\mu\nu}\partial_\alpha\partial_\beta h^{\alpha\beta} + \frac{1}{2}\eta_{\mu\nu}\square h \right) = \\
& \frac{16\pi\partial T}{c^4\partial\varphi} + G_{2(1,0)} + 2G_{2(2,0)}\varphi + 3G_{2(3,0)}\varphi^2 - \left(\frac{1}{2}G_{2(1,1)} - 2G_{3(2,0)} \right) \partial_\rho\varphi\partial^\rho\varphi + \\
& G_{4(1,1)}[(\square\varphi)^2 - (\partial_\rho\partial_\sigma\varphi)^2] + (G_{4(1,0)} + 2G_{4(2,0)}\varphi)(\partial_\mu\partial_\nu h^{\mu\nu} - \square h) + G_{4(1,0)}R[h^2].
\end{aligned} \tag{4.8}$$

И для метрики $g_{\mu\nu}$ [24; 74]:

$$\begin{aligned}
& - \frac{1}{2}G_{2(0,0)}\eta_{\mu\nu} - \frac{1}{2}G_{2(0,0)}h_{\mu\nu} - \frac{1}{2}G_{2(1,0)}\eta_{\mu\nu}\varphi - \frac{1}{2}G_{2(1,0)}h_{\mu\nu}\varphi - \frac{1}{2}G_{2(2,0)}\eta_{\mu\nu}\varphi^2 + \\
& \frac{1}{4}G_{2(0,1)}\eta_{\mu\nu}\partial_\rho\varphi\partial^\rho\varphi - \frac{1}{2}G_{2(0,1)}\partial_\mu\varphi\partial_\nu\varphi + G_{3(1,0)}\partial_\mu\varphi\partial_\nu\varphi - \frac{1}{2}G_{3(1,0)}\eta_{\mu\nu}\partial_\rho\varphi\partial^\rho\varphi + \\
& G_{4(0,0)}\left(\partial_\alpha\partial_\nu h^\alpha_\mu - \frac{1}{2}\square h_{\mu\nu} - \frac{1}{2}\partial_\mu\partial_\nu h - \frac{1}{2}\eta_{\mu\nu}\partial_\alpha\partial_\beta h^{\alpha\beta} + \frac{1}{2}\eta_{\mu\nu}\square h \right) + \\
& G_{4(1,0)}\eta_{\mu\nu}\square\varphi - G_{4(1,0)}\partial_\mu\partial_\nu\varphi + G_{4(1,0)}\varphi \left(\partial_\alpha\partial_\nu h^\alpha_\mu - \frac{1}{2}\square h_{\mu\nu} - \frac{1}{2}\partial_\mu\partial_\nu h - \right. \\
& \left. \frac{1}{2}\eta_{\mu\nu}\partial_\alpha\partial_\beta h^{\alpha\beta} + \frac{1}{2}\eta_{\mu\nu}\square h \right) + G_{4(0,0)}G_{\mu\nu}[h^2] + 2G_{4(2,0)}\eta_{\mu\nu}\varphi\square\varphi + G_{4(1,0)}h_{\mu\nu}\square\varphi + \\
& \frac{1}{2}G_{4(1,0)}\partial_\rho\varphi(\partial_\nu h^\rho_\mu + \partial_\mu h^\rho_\nu - \eta^{\rho\alpha}\partial_\alpha h_{\mu\nu}) - G_{4(1,0)}\eta_{\mu\nu}(\partial_\rho h^{\tau\rho} - \frac{1}{2}\eta^{\tau\alpha}\partial_\alpha h)\partial_\tau\varphi - \\
& 2G_{4(2,0)}\varphi\partial_\mu\partial_\nu\varphi - G_{4(1,0)}\eta_{\mu\nu}h_{\rho\sigma}\partial^\rho\partial^\sigma\varphi - G_{4(0,1)}\square\varphi\partial_\mu\partial_\nu\varphi + G_{4(0,1)}\partial_\rho\partial_\mu\varphi\partial^\rho\partial_\nu\varphi + \\
& 2G_{4(2,0)}\eta_{\mu\nu}\partial_\rho\varphi\partial^\rho\varphi - 2G_{4(2,0)}\partial_\mu\varphi\partial_\nu\varphi + \frac{1}{2}G_{4(0,1)}\eta_{\mu\nu}[(\square\varphi)^2 - (\partial_\rho\partial_\sigma\varphi)^2] + \\
& G_{5(1,0)}\square\varphi\partial_\mu\partial_\nu\varphi - G_{5(1,0)}\partial_\rho\partial_\mu\varphi\partial^\rho\partial_\nu\varphi - \frac{1}{2}G_{5(1,0)}\eta_{\mu\nu}[(\square\varphi)^2 - (\partial_\rho\partial_\sigma\varphi)^2] = \frac{8\pi}{c^4}T_{\mu\nu},
\end{aligned}$$

где $G_{\mu\nu}[h^2]$ - это часть тензора Эйнштейна второго порядка $h_{\mu\nu}h^{\mu\nu}$.

Учитывая (4.1) получим выражения для тензора энергии-импульса (4.4),

его следа и $\frac{\partial T}{\partial \varphi}$ в ближней зоне:

$$\begin{aligned}
T^{\mu\nu} &= \sum_a m_a(\varphi) u^\mu u^\nu \left(1 - \frac{h_k^k}{2} - \frac{v_a^2}{2c^2} + s_a \frac{\varphi}{\varphi_0} \right) \delta^3(\mathbf{r} - \mathbf{r}_a(t)), \\
T &= -c^2 \sum_a m_a(\varphi) \left(1 - \frac{h_k^k}{2} - \frac{v_a^2}{2c^2} + s_a \frac{\varphi}{\varphi_0} \right) \delta^3(\mathbf{r} - \mathbf{r}_a(t)), \\
\frac{\partial T}{\partial \varphi} &= -c^2 \sum_a \frac{m_a(\varphi)}{\varphi_0} \left(s_a \left[1 - \frac{h_k^k}{2} - \frac{v_a^2}{2c^2} \right] - (s'_a - s_a^2 + s_a) \frac{\varphi}{\varphi_0} \right) \delta^3(\mathbf{r} - \mathbf{r}_a(t)),
\end{aligned} \tag{4.9}$$

где v_a - это скорость объекта с индексом a .

Отметим, что с помощью членов $G_{2(0,0)}$ и $G_{2(1,0)}$ как раз таки удаётся описать эффект тёмной энергии. В дальнейшем мы пренебрежем этими слагаемыми, поскольку в работе Аштекара и соавторов [92] было показано, что эффекты тёмной энергии значительно не сказываются на гравитационных волнах от изолированных двойных систем.

4.0.2 Постньютоновское решение

Перед тем как перейти к рассмотрению гравитационного излучения в теории Хорндески в дальней зоне, то есть в точке, где находится детектор, необходимо решить уравнения поля в ближней зоне, где генерируется гравитационное излучение. Запишем уравнения поля в постньютоновском (ПН) приближении (4.8) и (4.0.1) в первом порядке (1 ПН) $O(v/c)^2$ [24; 74]:

$$\begin{aligned}
& -G_{2(0,1)}\square\varphi + 2G_{3(1,0)}\square\varphi - G_{2(2,0)}\varphi - G_{4(1,0)}(\partial_\mu\partial_\nu h^{\mu\nu} - \square h) = \frac{16\pi\partial T}{c^4\partial\varphi}, \\
& G_{4(0,0)}\left(\partial_\alpha\partial_\nu h_\mu^\alpha - \frac{1}{2}\square h_{\mu\nu} - \frac{1}{2}\partial_\mu\partial_\nu h - \frac{1}{2}\eta_{\mu\nu}\partial_\alpha\partial_\beta h^{\alpha\beta} + \frac{1}{2}\eta_{\mu\nu}\square h\right) + \\
& G_{4(1,0)}\eta_{\mu\nu}\square\varphi - G_{4(1,0)}\partial_\mu\partial_\nu\varphi = \frac{8\pi}{c^4}T_{\mu\nu}.
\end{aligned} \tag{4.10}$$

Теперь введём следующие обозначения:

$$\begin{aligned}
\theta_{\mu\nu} &= h_{\mu\nu} - \frac{1}{2}\eta_{\mu\nu}h - \frac{G_{4(1,0)}}{G_{4(0,0)}}\eta_{\mu\nu}\varphi, \\
\theta &= -h - 4\frac{G_{4(1,0)}}{G_{4(0,0)}}\varphi.
\end{aligned} \tag{4.11}$$

Выбрав калибровку $\partial_\mu\theta^{\mu\nu} = 0$, возможно переписать уравнения поля в виде:

$$\square\theta_{\mu\nu} = -\frac{16\pi}{c^4 G_{4(0,0)}}T_{\mu\nu}, \tag{4.12}$$

$$\square\varphi - m_\varphi^2\varphi = \frac{16\pi}{c^4}c_\varphi S, \tag{4.13}$$

здесь

$$\begin{aligned}
m_\varphi^2 &= \frac{G_{2(2,0)}}{2G_{3(1,0)} - G_{2(0,1)} - 3\frac{G_{4(1,0)}^2}{G_{4(0,0)}}}, \\
c_\varphi &= -\frac{G_{4(1,0)}}{2G_{4(0,0)}\left(2G_{3(1,0)} - G_{2(0,1)} - 3\frac{G_{4(1,0)}^2}{G_{4(0,0)}}\right)}, \\
S &= T - \frac{2G_{4(0,0)}\partial T}{G_{4(1,0)}\partial\varphi}.
\end{aligned} \tag{4.14}$$

Заметим, что уравнение (4.13) есть ни что иное, как аналог неоднородного уравнения Клейна-Гордона, причём параметр m_φ - "масса" скалярного поля - является обратной комптоновской длиной волны скалярного поля с размерностью $[c^{-1}]$ в системе СГС. Далее получим решение для скалярного поля в ведущем

порядке, используя (4.13),(4.9) и (4.14):

$$\varphi = \frac{4c_\varphi}{c^2} \sum_a \frac{m_a}{r_a} \left(1 - \frac{2s_a G_{4(0,0)}}{\varphi_0 G_{4(1,0)}} \right) e^{-m_\varphi r_a}, \quad (4.15)$$

где $r_a = |\mathbf{r} - \mathbf{r}_a(t)|$.

Также запишем решение уравнений 4.12 в ближней зоне для тензорного поля в 1 ПН порядке:

$$\begin{aligned} \theta_{00} &= \frac{4}{c^2 G_{4(0,0)}} \sum_a \frac{m_a}{r_a} + O\left(\frac{v}{c}\right)^4, \\ \theta_{ij} &= \frac{4v_i v_j}{c^4 G_{4(0,0)}} \sum_a \frac{m_a}{r_a} + O\left(\frac{v}{c}\right)^6, \\ \theta &= -\frac{4}{c^2 G_{4(0,0)}} \sum_a \frac{m_a}{r_a} + O\left(\frac{v}{c}\right)^4. \end{aligned} \quad (4.16)$$

Что позволяет нам записать выражения для возмущения метрики:

$$\begin{aligned} h_{00} &= \frac{2}{c^2 G_{4(0,0)}} \sum_a \frac{m_a}{r_a} + \frac{4c_\varphi G_{4(1,0)}}{c^2 G_{4(0,0)}} \sum_a \frac{m_a}{r_a} \left(1 - \frac{2s_a G_{4(0,0)}}{\varphi_0 G_{4(1,0)}} \right) e^{-m_\varphi r_a} + O\left(\frac{v}{c}\right)^4, \\ h_{ij} &= \delta_{ij} \left[\frac{2}{c^2 G_{4(0,0)}} \sum_a \frac{m_a}{r_a} - \frac{4c_\varphi G_{4(1,0)}}{c^2 G_{4(0,0)}} \sum_a \frac{m_a}{r_a} \left(1 - \frac{2s_a G_{4(0,0)}}{\varphi_0 G_{4(1,0)}} \right) e^{-m_\varphi r_a} \right] + \\ &\quad O\left(\frac{v}{c}\right)^4, \\ h &= \frac{4}{c^2 G_{4(0,0)}} \sum_a \frac{m_a}{r_a} - \frac{16c_\varphi G_{4(1,0)}}{c^2 G_{4(0,0)}} \sum_a \frac{m_a}{r_a} \left(1 - \frac{2s_a G_{4(0,0)}}{\varphi_0 G_{4(1,0)}} \right) e^{-m_\varphi r_a} + \left(\frac{v}{c}\right)^4, \end{aligned} \quad (4.17)$$

с $h_{oi} = O(v/c)^3$, где δ_{ij} – символ Кронекера.

4.0.3 Метод Эйнштейна - Инфельда - Хофмана. Уравнения движения

Далее нам потребуются уравнения движения для их получения воспользуемся методом, предложенным Эйнштейном, Инфельдом, Хофманом (ЭИХ)

[93]. В теории Хорндески нарушается СПЭ, поскольку инерциальная масса зависит от скалярного поля и чувствительности, о которой было сказано выше. Этот параметр показывает изменение массы тела в зависимости от скалярного поля или иными словами при его перемещении в пространстве. В связи с чем при движении в окружающем поле разные тела будут двигаться по разным траекториям и классическая орбитальная динамика будет нарушена [90].

В связи со всем вышесказанным получим теперь уравнения движения для массы m_a с помощью ЭИХ метода из материального Лагранжиана[24; 74]:

$$\begin{aligned}
L_{EIH} &= -c^2 \sum_a \int m_a(\varphi) \frac{d\tau_a}{dt} = -c^2 \sum_a m_a(\varphi) \sqrt{-g_{00} - 2g_{0i} \frac{v_a^i}{c} - g_{ij} \frac{v_a^i v_a^j}{c^2}} \\
&= - \sum_a m_a c^2 \left[1 - \frac{v_a^2}{2c^2} - \sum_{a \neq b} \left(\frac{1}{c^2 G_{4(0,0)}} \frac{m_b}{r_{ab}} + \frac{2c_\varphi G_{4(1,0)}}{c^2 G_{4(0,0)}} \frac{m_b}{r_{ab}} \left(1 - \frac{2s_b G_{4(0,0)}}{\varphi_0 G_{4(1,0)}} \right) e^{-m_\varphi r_{ab}} - \frac{4s_a c_\varphi m_b}{c^2 \varphi_0 r_{ab}} \left(1 - \frac{2s_b G_{4(0,0)}}{\varphi_0 G_{4(1,0)}} \right) e^{-m_\varphi r_{ab}} \right) + O\left(\frac{v}{c}\right)^4 \right],
\end{aligned} \tag{4.18}$$

здесь $r_{ab} = |\mathbf{r}_a(t) - \mathbf{r}_b(t)|$. Как видно из уравнения движения (4.18) для упрощения вида выражений можно выделить новый параметр - эффективную гравитационную "постоянную":

$$\begin{aligned}
G_{ab} &= \left(\frac{1}{G_{4(0,0)}} + 2c_\varphi \frac{G_{4(1,0)}}{G_{4(0,0)}} e^{-m_\varphi r_{ab}} \left(1 - \frac{2s_b G_{4(0,0)}}{\varphi_0 G_{4(1,0)}} \right) - \frac{4s_a c_\varphi}{\varphi_0} \left(1 - \frac{2s_b G_{4(0,0)}}{\varphi_0 G_{4(1,0)}} \right) e^{-m_\varphi r_{ab}} \right) \frac{2s_b G_{4(0,0)}}{\varphi_0 G_{4(1,0)}} e^{-m_\varphi r_{ab}}.
\end{aligned} \tag{4.19}$$

Этот результат является симметричным относительно перестановки индексов [94].

Теперь запишем уравнения движения n тел, определенные до Ньютоновского порядка:

$$\mathbf{a}_a = - \sum_{a \neq b} \frac{\mathcal{G}_{ab} m_b}{r_{ab}^2} \hat{\mathbf{r}}_{ab}, \tag{4.20}$$

$$\mathcal{G}_{ab} = \frac{1}{G_{4(0,0)}} \left(1 + (1 + m_\varphi r_{ab}) e^{-m_\varphi r_{ab}} \left[2c_\varphi G_{4(1,0)} \left(1 - \frac{2s_b G_{4(0,0)}}{\varphi_0 G_{4(1,0)}} \right) - \frac{4s_a c_\varphi G_{4(0,0)}}{\varphi_0} \left(1 - \frac{2s_b G_{4(0,0)}}{\varphi_0 G_{4(1,0)}} \right) \right] \right), \quad (4.21)$$

где \mathbf{a}_a – это ускорение объекта с индексом a , $\hat{\mathbf{r}}_{ab}$ – это единичный вектор направленные от объекта b к объекту a . Далее упростим выражение для эффективной гравитационной постоянной \mathcal{G}_{ab} . Для этого учтём, что масса скалярного поля – это параметр, ответственный за проявление тёмной энергии. Поскольку расстояние между компонентами двойной системы с пульсаром много меньше, чем расстояние на котором начинают влиять эффекты тёмной энергии, поэтому возможно использовать следующее приближение: $m_\varphi r_{ab} \ll 1$ и $e^{-m_\varphi r_{ab}} \rightarrow 1$. С учетом чего эффективная гравитационная постоянная примет вид:

$$\mathcal{G}_{ab} = \frac{1}{G_{4(0,0)}} \left(1 + 2c_\varphi G_{4(1,0)} \left(1 - \frac{2s_b G_{4(0,0)}}{\varphi_0 G_{4(1,0)}} \right) - \frac{4s_a c_\varphi G_{4(0,0)}}{\varphi_0} \left(1 - \frac{2s_b G_{4(0,0)}}{\varphi_0 G_{4(1,0)}} \right) \right). \quad (4.22)$$

Далее обратимся к динамике двойной системы с пульсаром, где размерами объектов можно пренебречь по сравнению с расстоянием между ними. Третий закон Кеплера для такой системы примет вид:

$$a^3 (2\pi/P_b)^2 = \mathcal{G}_{12} m \quad (4.23)$$

И энергия гравитационной связи такой системы:

$$E = -\frac{\mathcal{G}_{12} m \mu}{2a}, \quad (4.24)$$

здесь a – это большая полуось, \mathcal{G}_{12} – эффективная гравитационная постоянная взаимодействия между компонентами двойной системы, $m = m_1 + m_2$ и $\mu = m_1 m_2 / m$, P_b – это орбитальный период двойной системы.

Далее покажем связь потери энергии на гравитационное излучение и первой производной орбитального периода, используя (5.39) и (4.24):

$$\frac{\dot{E}}{E} = -\frac{2\dot{P}_b}{3P_b}. \quad (4.25)$$

4.0.4 Эффективный псевдотензор энергии-импульса

Теперь для работы в дальневолновой зоне, вдали от источника излучения, получим эффективный псевдотензор энергии-импульса. В этой области тензор энергии-импульса $T_{\mu\nu} = 0$, тем не менее нельзя сказать, что ближневолновая зона не оказывает никакого влияния. Воздействие оказывается через тензорное и скалярное излучение. Энергия и импульс этого излучения как раз таки описываются псевдотензором энергии-импульса.

Построение псевдотензора энергии-импульса является отдельной интересной нетривиальной задачей, что было подробно исследовано в работах [95; 96]. Для наших целей необходимо построить псевдотензор, который позволил бы нам описать энергию излучения. Наиболее простым выбором является построение подобного объекта с помощью теоремы Нётер, что было показано в [95]. Стоит отметить, что такой псевдотензор будет несимметричен относительно перестановки индексов, что делает его непригодным для исследования углового момента, в отличие, например, от симметричного псевдотензора Ландау-Лифшица [95]. Однако для наших целей это не является существенным фактом.

Для начала запишем действие в самом общем виде:

$$S = \int d^4x \sqrt{-g} [L_g(g_{\mu\nu}, \partial_\alpha g_{\mu\nu}, \partial_\alpha \partial_\beta g_{\mu\nu}, \varphi, \partial_\alpha \varphi, \partial_\alpha \partial_\beta \varphi) + L_m(q, \partial_\alpha q, \partial_\alpha \partial_\beta q, \varphi, \partial_\alpha \varphi, \partial_\alpha \partial_\beta \varphi)], \quad (4.26)$$

где L_g – лагранжева плотность гравитационной части, L_m – лагранжева плотность материальной части, q – материальные поля.

Вдали от источника излучения законы сохранения принимают следующую форму:

$$\partial_\alpha (\sqrt{-g} [T_\gamma^\alpha + t_\gamma^\alpha]) = 0. \quad (4.27)$$

Часть с L_m в (4.27) дает канонический материальный тензор энергии-импульса, который эквивалентен тензору энергии-импульса Гильберта $T_{\mu\nu}$. Сохраняющаяся величина t_γ^α – наш искомый псевдотензор. Метод Нётеровского тока определяет псевдотензор как:

$$\begin{aligned}
t_\gamma^\alpha &= -\frac{\partial L_g}{\partial(\partial_\alpha g_{\mu\nu})}\partial_\gamma g_{\mu\nu} + \partial_\beta \left(\frac{\partial L_g}{\partial(\partial_\alpha \partial_\beta g_{\mu\nu})} \right) \partial_\gamma g_{\mu\nu} - \frac{\partial L_g}{\partial(\partial_\alpha \partial_\beta g_{\mu\nu})} \partial_\beta \partial_\gamma g_{\mu\nu} - \\
&\frac{\partial L_g}{\partial(\partial_\alpha \varphi)} \partial_\gamma \varphi + \partial_\beta \left(\frac{\partial L_g}{\partial(\partial_\alpha \partial_\beta \varphi)} \right) \partial_\gamma \varphi - \frac{\partial L_g}{\partial(\partial_\alpha \partial_\beta \varphi)} \partial_\beta \partial_\gamma \varphi + \delta_\gamma^\alpha L_g.
\end{aligned} \tag{4.28}$$

Далее запишем лагранжеву плотность в рассматриваемом подклассе теории Хорндески (4.2), с учётом (4.1):

$$\begin{aligned}
L_2 &= \frac{c^4}{16\pi} \left(G_{2(2,0)} \varphi^2 - \frac{1}{2} G_{2(0,1)} \partial_\mu \varphi \partial^\mu \varphi \right), \\
L_3 &= -\frac{c^4}{16\pi} G_{3(1,0)} \eta_{\mu\nu} \partial_\mu \varphi \partial^\mu \varphi,
\end{aligned} \tag{4.29}$$

$$\begin{aligned}
L_4 &= \frac{c^4}{16\pi} \left[\frac{G_{4(0,0)}}{4} \left(4\partial_\mu \partial_\nu h^{\mu\nu} - 4\Box h - 8h^{\mu\nu} \partial_\mu \partial_\alpha h_\nu^\alpha + 4h^{\mu\nu} \Box h_{\mu\nu} - 4\partial_\alpha h^{\alpha\mu} \partial_\nu h_\mu^\nu + \right. \right. \\
&\quad \left. \left. 4\partial_\mu h^{\mu\nu} \partial_\nu h + 4h^{\mu\nu} \partial_\mu \partial_\nu h + 3\partial_\alpha h^{\mu\nu} \partial^\alpha h_{\mu\nu} - \partial_\mu h \partial^\mu h - 2\partial_\alpha h^{\mu\nu} \partial_\mu h_\nu^\alpha \right) + \right. \\
&\quad \left. G_{4(1,0)} \varphi (\partial_\mu \partial_\nu h^{\mu\nu} - \Box h) \right],
\end{aligned}$$

$$L_5 = 0.$$

(4.30)

Исключим полные производные из действия (1.1), используя четырехмерный аналог теоремы Остроградского – Гаусса:

$$\begin{aligned}
\sqrt{-g} L_2 &= \sqrt{-g} \frac{c^4}{16\pi} \left(G_{2(2,0)} \varphi^2 - \frac{1}{2} G_{2(0,1)} \partial_\mu \varphi \partial^\mu \varphi \right), \\
\sqrt{-g} L_3 &= \sqrt{-g} \frac{c^4}{16\pi} \left(G_{3(1,0)} \eta_{\mu\nu} \partial_\mu \varphi \partial^\mu \varphi \right), \\
\sqrt{-g} L_4 &= \sqrt{-g} \frac{c^4}{16\pi} \left[\frac{G_{4(0,0)}}{4} \left(2\partial_\alpha h^{\alpha\mu} \partial_\nu h_\mu^\nu - 2\partial_\mu h^{\mu\nu} \partial_\nu h - \partial_\alpha h^{\mu\nu} \partial^\alpha h_{\mu\nu} + \right. \right. \\
&\quad \left. \left. \partial_\mu h \partial^\mu h \right) - G_{4(1,0)} \partial_\mu \varphi (\partial_\nu h^{\mu\nu} - \partial^\mu h) \right], \\
\sqrt{-g} L_5 &= 0.
\end{aligned} \tag{4.31}$$

Наконец подставим получившиеся упрощенные лагранжевы плотности (4.31) в выражение для псевдотензора (4.28):

$$\begin{aligned}
t_\gamma^\alpha = & \frac{c^4}{16\pi} \left(G_{2(0,1)} \partial_\gamma \varphi \partial^\alpha \varphi - 2G_{3(1,0)} \partial_\gamma \varphi \partial^\alpha \varphi + \frac{G_{4(0,0)}}{4} \left(-4\partial_\nu h^{\nu\mu} \partial_\gamma h_\mu^\alpha + \right. \right. \\
& 2\partial_\mu h^{\mu\alpha} \partial_\gamma h + 2\partial_\gamma h^{\mu\nu} \partial^\alpha h_{\mu\nu} - 2\partial_\gamma h \partial^\alpha h + 2\partial_\gamma h^{\alpha\nu} \partial_\nu h \left. \right) + \\
& G_{4(1,0)} \partial_\mu \varphi \partial_\gamma h^{\mu\alpha} + G_{4(1,0)} \partial_\gamma \varphi (\partial_\nu h^{\alpha\nu} - \partial^\alpha h) - G_{4(1,0)} \partial^\alpha \varphi \partial_\gamma h \\
& + \delta_\gamma^\alpha \left[G_{2(2,0)} \varphi^2 - \frac{1}{2} G_{2(0,1)} \partial_\mu \varphi \partial^\mu \varphi + G_{3(1,0)} \partial_\mu \varphi \partial^\mu \varphi + \frac{G_{4(0,0)}}{4} \times \right. \\
& \left. \left(2\partial_\alpha h^{\alpha\mu} \partial_\nu h_\mu^\nu - 2\partial_\mu h^{\mu\nu} \partial_\nu h - \partial_\alpha h^{\mu\nu} \partial^\alpha h_{\mu\nu} + \partial_\mu h \partial^\mu h \right) - \right. \\
& \left. G_{4(1,0)} \partial_\mu \varphi (\partial_\nu h^{\mu\nu} - \partial^\mu h) \right]. \tag{4.32}
\end{aligned}$$

Вводя новые координаты (4.11) и поперечную бесследовую (ТТ) калибровку, включающую два условия $\partial_\mu \theta^{\mu\nu} = 0$ и $\eta_{\mu\nu} \theta^{\mu\nu} = 0$, получим:

$$\begin{aligned}
t_\gamma^\alpha = & \frac{c^4}{16\pi} \left[\frac{G_{4(0,0)}}{2} \partial_\gamma \theta^{\mu\nu} \partial^\alpha \theta_{\mu\nu} - \partial_\gamma \varphi \partial^\alpha \varphi \left(2G_{3(1,0)} - G_{2(0,1)} - 3 \frac{G_{4(1,0)}^2}{G_{4(0,0)}} \right) + \right. \\
& \delta_\gamma^\alpha \left(G_{2(2,0)} \varphi^2 - \frac{G_{4(0,0)}}{4} \partial_\alpha \theta^{\mu\nu} \partial^\alpha \theta_{\mu\nu} + \frac{1}{2} \partial_\mu \varphi \partial^\mu \varphi \left(2G_{3(1,0)} - G_{2(0,1)} - \right. \right. \\
& \left. \left. 3 \frac{G_{4(1,0)}^2}{G_{4(0,0)}} \right) \right] = \frac{c^4}{16\pi} \left[\frac{G_{4(0,0)}}{2} \partial_\gamma \theta^{\mu\nu} \partial^\alpha \theta_{\mu\nu} + \frac{G_{4(1,0)}}{2G_{4(0,0)} c_\varphi} \partial_\gamma \varphi \partial^\alpha \varphi \right. \\
& \left. + \delta_\gamma^\alpha \left(G_{2(2,0)} \varphi^2 - \frac{G_{4(0,0)}}{4} \partial_\alpha \theta^{\mu\nu} \partial^\alpha \theta_{\mu\nu} - \frac{G_{4(1,0)}}{4G_{4(0,0)} c_\varphi} \partial_\mu \varphi \partial^\mu \varphi \right) \right]. \tag{4.33}
\end{aligned}$$

Далее перейдём к расчётам тензорного и скалярного потоков энергии.

4.0.5 Тензорные и скалярные потоки

Одной из главных характеристик гравитационной волны, как уже было отмечено выше, является переносимая ею энергия. Этот важный параметр

описывается псевдотензором энергии-импульса, если точнее, то компонента t_{0i} отвечает за поток энергии [82; 97]. С учётом этого запишем среднюю скорость изменения энергии связи двойной системы, возникающую за счёт гравитационного излучения:

$$\langle \dot{E} \rangle = -cr^2 \int d\Omega \langle t_{0i}^{TT} \rangle, \quad (4.34)$$

здесь угловые скобки являются усреднением по времени за орбитальный период системы, Ω – телесный угол, ТТ - поперечная бесследовая калибровка [81; 82].

Напомним, что в ОТО за энергию гравитационной волны отвечает только квадрупольная часть тензорной моды. Однако в скалярно-тензорных теориях в общем случае присутствует помимо тензорной, ещё и скалярная мода. Согласно выражению 4.33, в псевдотензоре $t_{TT}^{\alpha\gamma}$ нет смешанных компонент $\theta_{\mu\nu}$ и φ , поэтому можно разделить тензорную и скалярную часть. Тогда тензорная часть:

$$t_{\alpha\gamma}^{TT}(\theta_{\mu\nu}^{TT}) = \frac{c^4}{16\pi} \left[\frac{G_{4(0,0)}}{2} \partial_\gamma \theta_{TT}^{\mu\nu} \partial_\alpha \theta_{\mu\nu}^{TT} - \delta_{\alpha\gamma} \left(\frac{G_{4(0,0)}}{4} \partial_\mu \theta_{TT}^{\mu\nu} \partial^\mu \theta_{\mu\nu}^{TT} \right) \right], \quad (4.35)$$

и скалярная часть

$$t_{\alpha\gamma}(\varphi) = \frac{c^4}{16\pi} \left[\frac{G_{4(1,0)}}{2G_{4(0,0)}c_\varphi} \partial_\gamma \varphi \partial_\alpha \varphi + \delta_{\alpha\gamma} \left(G_{2(2,0)} \varphi^2 - \frac{G_{4(1,0)}}{4G_{4(0,0)}c_\varphi} \partial_\mu \varphi \partial^\mu \varphi \right) \right]. \quad (4.36)$$

Причём учтём также тот факт, что в дальней волновой зоне, где материя отсутствует $T^{\alpha\gamma} = 0$, закон сохранения энергии примет вид: $\partial_\alpha t_{TT}^{\alpha\gamma} = 0$. Следовательно тензорная и скалярная части будут сохраняться независимо друг от друга и их можно исследовать отдельно [24; 74].

Тензорный поток

Используя (4.34), запишем поток энергии, переносимый тензорной частью:

$$\langle \dot{E}_g \rangle = -cr^2 \int d\Omega \langle t_{TT}^{0i}(\theta_{\mu\nu}) \rangle = \frac{c^5 r^2}{16\pi} \int d\Omega \left\langle \frac{G_{4(0,0)}}{2} \partial_0 \theta_{TT}^{\mu\nu} \partial_r \theta_{\mu\nu}^{TT} \right\rangle. \quad (4.37)$$

Согласно уравнению (4.12) можно сказать, что тензорная часть является безмассовой частицей со спином 2, распространяющейся со скоростью света, а в дальней зоне $\theta_{ij}(t, r)$ в ведущем порядке будет задаваться функцией следующего вида $f_{ij}(t - r/c)$. Поэтому с хорошей точностью можно считать, что будет выполняться равенство $\partial_r \theta_{ij} = -\partial_0 \theta_{ij}$, согласно которому выражение для потока энергии от тензорной моды (4.37) может быть упрощено

$$\langle \dot{E}_g \rangle = -\frac{c^5 r^2 G_{4(0,0)}}{32\pi} \int d\Omega \langle \partial_0 \theta_{TT}^{\mu\nu} \partial_0 \theta_{\mu\nu}^{TT} \rangle. \quad (4.38)$$

Также запишем формальное решение уравнения (4.12):

$$\theta_{\mu\nu} = \frac{4}{c^4 G_{4(0,0)}} \int_N d^3 \mathbf{r}' \frac{T_{\mu\nu}(t - |\mathbf{r} - \mathbf{r}'|/c)}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|}. \quad (4.39)$$

где точка источника \mathbf{r}' лежит в ближней зоне N , в то время как \mathbf{r} расположена в дальней зоне, так что $|\mathbf{r}'| \ll |\mathbf{r}|$. Принимая во внимание это условие, то можно разложить подынтегральное выражение в ряд по степеням $(\mathbf{n} \times \mathbf{r}')$ в приближении малых скоростей[24; 74; 81; 82]:

$$\theta_{\mu\nu} = \frac{4}{rc^4 G_{4(0,0)}} \sum_{l=0}^{\infty} \frac{1}{c^l l!} \frac{\partial^l}{\partial t^l} \int_N T_{\mu\nu}(t - r/c, \mathbf{r}') (\mathbf{n} \times \mathbf{r}')^l d^3 \mathbf{r}', \quad (4.40)$$

где $\mathbf{n} = \mathbf{r}/r$ – единичный вектор в направлении вектора \mathbf{r} . Используя закон сохранения $\partial_\nu T^{\mu\nu} = 0$, можно представить пространственные компоненты θ_{ij} в лидирующем порядке ($l = 0$):

$$\begin{aligned} \theta_{ij} &= \frac{4}{rc^4 G_{4(0,0)}} \int T_{ij}(t - r/c, \mathbf{r}') d^3 \mathbf{r}' = \frac{2}{rc^6 G_{4(0,0)}} \times \\ &\frac{\partial^2}{\partial t^2} \int T_{00}(t - r/c, \mathbf{r}') r'_i r'_j d^3 \mathbf{r}'. \end{aligned} \quad (4.41)$$

Величина T_{00} является энергетической плотностью. T_{00} в первом ПН порядке:

$$T_{00} = \sum_a m_a(\varphi) c^2 \delta^3(\mathbf{r} - \mathbf{r}_a(t)). \quad (4.42)$$

Подставляя это выражение в (4.41), мы получим

$$\theta_{ij} = \frac{2}{rc^4 G_{4(0,0)}} \frac{\partial^2}{\partial t^2} M_{ij} \Big|_{ret}, \quad (4.43)$$

где

$$M_{ij} = \sum_a m^a(\varphi) r_i^a(t) r_j^a(t). \quad (4.44)$$

Это квадрупольный момент. Индекс “ret” означает, что величина M_{ij} выражается через запаздывающее время $t - r/c$.

Перепишем теперь усреднённый поток энергии в тензорной части (4.38) с помощью квадрупольного момента (4.44):

$$\langle \dot{E}_g \rangle = -\frac{1}{5c^5 G_{4(0,0)}} \left\langle \ddot{M}^{kl} \ddot{M}_{kl} - \frac{1}{3} (\ddot{M}^{kk})^2 \right\rangle. \quad (4.45)$$

Напомним, что здесь как и ранее, точка над символом является производной по координатному времени. В данной главе рассматриваются только квазикруговые орбиты, которые можно параметризовать следующим образом:

$$\begin{aligned} x_1(t) &= -R_1 \cos(\omega t), & y_1(t) &= -R_1 \sin(\omega t), & z_1 &= 0; \\ x_2(t) &= -R_2 \cos(\omega t), & y_2(t) &= -R_2 \sin(\omega t), & z_2 &= 0, \end{aligned} \quad (4.46)$$

Здесь R_a – радиусы орбит компонент двойной системы и ω – орбитальная частота. Согласно третьему Кеплера (5.39), запишем окончательную форму усредненного потока энергии гравитационного излучения тензорной части:

$$\begin{aligned} \langle \dot{E}_g \rangle &= -\frac{32\mu^2 (\mathcal{G}_{12} m)^3}{5c^5 G_{4(0,0)} R^5} = -\frac{32\mu^2 m^3}{5c^5 G_{4(0,0)}^4 R^5} \left(1 + \left[2c_\varphi G_{4(1,0)} \left(1 - \frac{2s_b G_{4(0,0)}}{\varphi_0 G_{4(1,0)}} \right) \right. \right. \\ &\quad \left. \left. - \frac{4s_a c_\varphi G_{4(0,0)}}{\varphi_0} \left(1 - \frac{2s_b G_{4(0,0)}}{\varphi_0 G_{4(1,0)}} \right) \right] \right)^3, \end{aligned} \quad (4.47)$$

где $R = R_1 + R_2$ и в случае квазикруговых орбит в 5.39 $R = a$. Величина \mathcal{G}_{12} – эффективная гравитационная константа взаимодействия между компонентами двойной системы (4.22).

4.0.6 Поток скалярной энергии

Теперь перейдём к получению выражения для потока энергии от скалярной части. В начале получим формальное решение уравнения (4.13). Для решения подобного уравнения необходимо найти соответствующую функцию Грина, подробно это описано в [97–99], которая находится из условия:

$$(\square - m_\varphi^2)G(x, x') = -4\pi\delta^4(x - x'). \quad (4.48)$$

Решение с помощью функции Грина можно представить в следующем виде:

$$\varphi = -\frac{4c_\varphi}{c^4} \int d^4x' S(x') G(x, x'), \quad (4.49)$$

где $S(t, r)$ - это функция источника из выражения 4.14. Получение самой функции Грина для уравнения (4.13) в данной диссертации не будет обсуждаться, подробно это было сделано в работе [99; 100]. Поэтому сразу запишем выражение для данной функции:

$$G(x, x') = \frac{\delta(\mathbf{t} - \mathbf{t}' - |\mathbf{r} - \mathbf{r}'|/c)}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} - \Theta(\mathbf{t} - \mathbf{t}' - |\mathbf{r} - \mathbf{r}'|/c) \times \frac{m_\varphi J_1(m_\varphi \sqrt{(t - t')^2 - |\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^2/c^2})}{\sqrt{(t - t')^2 - |\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^2/c^2}}. \quad (4.50)$$

где δ - Дельта функция Дирака, Θ - функция Хевисайда, J_1 - функция Бесселя первого порядка. Теперь подставим функцию Грина в решение (4.49), а также разложим решение в ряд аналогично тому, как это было сделано в тензорной части (4.40):

$$\varphi = -\frac{4c_\varphi}{rc^4} \int_0^\infty dz J_1(z) \sum_{l=0}^\infty \frac{1}{c^l l!} \frac{\partial^l}{\partial t^l} \int_N d^3\mathbf{r}' (\mathbf{n} \times \mathbf{r}')^l \left[S(t - r/c, \mathbf{r}') - \frac{S(t - ru(r, z)/c, \mathbf{r}')}{u^{l+1}(r, z)} \right], \quad (4.51)$$

здесь $z = m_\varphi \sqrt{c^2(t - t')^2 - |\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^2}$ и $u(r, z) = \sqrt{1 + (z/m_\varphi r)^2}$. Здесь область интегрирования N находится в ближневолновой зоне, и $|\mathbf{r}'| \ll |\mathbf{r}|$. Подставим $S(t, r)$ в явном виде 4.14 и выполним интегрирование по \mathbf{r}' , после чего получим

выражение для φ , выраженное через скалярные мультипольные моменты \mathcal{M}_l^L :

$$\varphi = \frac{4c_\varphi}{rc^2} \int_0^\infty dz J_1(z) \sum_{l=0}^\infty \frac{1}{c^l l!} n_L \partial_t^l \mathcal{M}_l^L, \quad (4.52)$$

где

$$\begin{aligned} \mathcal{M}_l^L = \mathcal{M}_l^{i_1 i_2 \dots i_l}(t, r, z) = \sum_a \left(M_a(t - r/c) r_a^L(t - r/c) - u^{-(l+1)}(r, z) \right. \\ \left. \times M_a(t - ru(r, z)/c) r_a^L(t - ru(r, z)/c) \right) \end{aligned} \quad (4.53)$$

и

$$\begin{aligned} M_a(t) = m_a \left[1 - 2 \frac{G_{4(0,0)} s_a}{G_{4(1,0)} \varphi_0} - \frac{v_a^2}{2c^2} \left(1 - \frac{2G_{4(0,0)} s_a}{G_{4(1,0)} \varphi_0} \right) - 3 \sum_{b \neq a} \frac{m_b}{r_{ab}(t) c^2 G_{4(0,0)}} \right. \\ \times \left(1 - \frac{2G_{4(0,0)} s_b}{G_{4(1,0)} \varphi_0} \right) + \frac{6G_{4(1,0)} c_\varphi}{c^2 G_{4(0,0)}} \sum_{b \neq a} \frac{m_b}{r_{ab}(t)} e^{-m_\varphi R} \left(1 - \frac{2G_{4(0,0)} s_b}{G_{4(1,0)} \varphi_0} \right) \\ \left. - \sum_{b \neq a} \frac{m_b}{r_{ab}(t) c^2} e^{-m_\varphi R} \left(1 - \frac{2G_{4(0,0)} s_b}{G_{4(1,0)} \varphi_0} \right) \left(\frac{8c_\varphi s_a}{\varphi_0} - \frac{8}{\varphi_0} \frac{2G_{4(0,0)}}{G_{4(1,0)}} \right. \right. \\ \left. \left. \times (s'_a - s_a^2 + s_a) c_\varphi \right) \right], \end{aligned} \quad (4.54)$$

где $n_L = n_{i_1} n_{i_2} \dots n_{i_l}$, $r_a^L(t) = r_a^{i_1}(t) r_a^{i_2}(t) \dots r_a^{i_l}(t)$.

Запишем аналогично (4.37) усреднённый поток энергии для скалярной части:

$$\langle \dot{E}_\varphi \rangle = -cr^2 \int d\Omega \langle t^{0i}(\varphi) \rangle = \frac{c^5 r^2}{16\pi} \int d\Omega \left\langle \frac{G_{4(1,0)}}{2G_{4(0,0)} c_\varphi} \partial_0 \varphi \partial_r \varphi \right\rangle. \quad (4.55)$$

Отметим очень важный нюанс, решение для скалярной части отличается от тензорной части, поскольку здесь нельзя заменить производные по пространству на производные по времени, как было сделано в тензорном случае, потому что φ не является функцией от аргумента $(t - r/c)$. Зависимость от r более сложная, ввиду наличия массы скалярного поля в уравнении (4.13). Выпишем явно эти производные для φ :

$$\begin{aligned} \partial_0 \varphi &= \frac{4c_\varphi}{rc^2} \int_0^\infty dz J_1(z) \sum_{l=0}^\infty \frac{1}{c^{l+1} l!} n_L \partial_t^{l+1} \mathcal{M}_l^L, \\ \partial_r \varphi &= -\frac{4c_\varphi}{rc^2} \int_0^\infty dz J_1(z) \sum_{l=0}^\infty \frac{1}{c^{l+1} l!} n_L \partial_t^{l+1} \mathcal{M}_{l+1}^L, \end{aligned} \quad (4.56)$$

где скалярные мультипольные моменты \mathcal{M}_{l+1}^L определяются как

$$\begin{aligned} \mathcal{M}_l^L = \mathcal{M}_l^{i_1 i_2 \dots i_l}(t, r, z) = \sum_a \left(M_a(t - r/c) r_a^L(t - r/c) - u^{-(l+2)}(r, z) \right. \\ \left. \times M_a(t - ru(r, z)/c) r_a^L(t - ru(r, z)/c) \right). \end{aligned} \quad (4.57)$$

Учитывая вклад монопольных, дипольных, квадрупольных и диполь-октупольных членов, запишем выражение для потока энергии в скалярной части:

$$\begin{aligned} \langle \dot{E}_\Phi \rangle = -\frac{2c^5 G_{4(1,0)} c_\Phi}{G_{4(0,0)}} \int dz_1 dz_2 J_1(z_1) J_2(z_2) \times \left\langle \frac{1}{c^6} \dot{\mathcal{M}}_0 \dot{\mathcal{M}}_1 + \right. \\ \frac{1}{6c^8} \left(2\ddot{\mathcal{M}}_1^k \ddot{\mathcal{M}}_2^k + \dot{\mathcal{M}}_0 \ddot{\mathcal{M}}_3^{kk} + \dot{\mathcal{M}}_1 \ddot{\mathcal{M}}_2^{kk} \right) + \frac{1}{60c^{10}} \left(2\ddot{\mathcal{M}}_2^{kl} \ddot{\mathcal{M}}_3^{kl} \right. \\ \left. + \ddot{\mathcal{M}}_2^{kk} \ddot{\mathcal{M}}_3^{ll} \right) + \frac{1}{30c^{10}} \left(\ddot{\mathcal{M}}_1^k \ddot{\mathcal{M}}_4^{kll} + \ddot{\mathcal{M}}_2^k \ddot{\mathcal{M}}_3^{kll} \right) \Bigg\rangle, \end{aligned} \quad (4.58)$$

где использовалось соотношение:

$$\begin{aligned} \int \frac{d\Omega}{4\pi} n_{i_1} n_{i_2} \dots n_{i_k} \\ = \begin{cases} 0, & \text{for } k = \text{odd}, \\ \frac{\delta_{i_1 i_2} \delta_{i_3 i_4} \dots \delta_{i_{k-1} i_k} + \dots}{(k+1)!!}, & \text{for } k = \text{even}, \end{cases} \end{aligned} \quad (4.59)$$

многоточие в конце обозначает все возможные пары индексов.

Сейчас запишем явные выражения для производных по времени от монопольного, дипольного, квадрупольного и октупольного моментов (4.46):

1. Монопольный.

$$\dot{\mathcal{M}}_0 = \dot{\mathcal{M}}_1 = 0. \quad (4.60)$$

2. Дипольный

$$\begin{aligned} \ddot{\mathcal{M}}_1^k = \mu R \omega^2 \left(A_d + \bar{A}_d \frac{\mu}{c^2 R} \right) [\cos(\omega(t - r/c)) - u^{-2} \cos(\omega(t - ru/c)), \\ \sin(\omega(t - r/c)) - u^{-2} \sin(\omega(t - ru/c)), 0], \end{aligned} \quad (4.61)$$

$$\begin{aligned} \ddot{\mathcal{M}}_2^k = \mu R \omega^2 \left(A_d + \bar{A}_d \frac{\mu}{c^2 R} \right) [\cos(\omega(t - r/c)) - u^{-3} \cos(\omega(t - ru/c)), \\ \sin(\omega(t - r/c)) - u^{-3} \sin(\omega(t - ru/c)), 0]. \end{aligned}$$

3. Квадрупольный

$$\ddot{\mathcal{M}}_2^{kl} = \begin{pmatrix} \ddot{\mathcal{M}}_2^{11} & \ddot{\mathcal{M}}_2^{12} & 0 \\ \ddot{\mathcal{M}}_2^{12} & -\ddot{\mathcal{M}}_2^{11} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$\ddot{\mathcal{M}}_3^{kl} = \begin{pmatrix} \ddot{\mathcal{M}}_3^{11} & \ddot{\mathcal{M}}_3^{12} & 0 \\ \ddot{\mathcal{M}}_3^{12} & -\ddot{\mathcal{M}}_3^{11} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$
(4.62)

где

$$\begin{aligned} \ddot{\mathcal{M}}_2^{11} &= 4A_q \mu \omega^3 R^2 [\sin(2\omega(t - r/c)) - u^{-3} \sin(2\omega(t - ru/c))], \\ \ddot{\mathcal{M}}_2^{12} &= -4A_q \mu \omega^3 R^2 [\cos(2\omega(t - r/c)) - u^{-3} \cos(2\omega(t - ru/c))], \\ \ddot{\mathcal{M}}_3^{11} &= 4A_q \mu \omega^3 R^2 [\sin(2\omega(t - r/c)) - u^{-4} \sin(2\omega(t - ru/c))], \\ \ddot{\mathcal{M}}_3^{12} &= -4A_q \mu \omega^3 R^2 [\cos(2\omega(t - r/c)) - u^{-4} \cos(2\omega(t - ru/c))]. \end{aligned}$$
(4.63)

4. Октупольный

$$\begin{aligned} \ddot{\mathcal{M}}_3^{1kk} &= A_o \mu \omega^4 R^3 [\cos(\omega(t - r/c)) - u^{-4} \cos(\omega(t - ru/c))], \\ \ddot{\mathcal{M}}_3^{2kk} &= A_o \mu \omega^4 R^3 [\sin(\omega(t - r/c)) - u^{-4} \sin(\omega(t - ru/c))], \\ \ddot{\mathcal{M}}_4^{1kk} &= A_o \mu \omega^4 R^3 [\cos(\omega(t - r/c)) - u^{-5} \cos(\omega(t - ru/c))], \\ \ddot{\mathcal{M}}_4^{2kk} &= A_o \mu \omega^4 R^3 [\sin(\omega(t - r/c)) - u^{-5} \sin(\omega(t - ru/c))]. \end{aligned}$$
(4.64)

Выше использовались соотношения:

$$\begin{aligned} A_d &= \frac{2G_{4(0,0)}(s_2 - s_1)}{G_{4(1,0)}\varphi_0}, \\ \bar{A}_d &= -\frac{7}{2G_{4(0,0)}} \left(\frac{m_2}{m_1} - \frac{m_1}{m_2} \right) + \frac{7}{G_{4(1,0)}\varphi_0} \left(\frac{m_2 s_1}{m_1} - \frac{m_1 s_2}{m_2} \right) + \frac{6}{G_{4(1,0)}\varphi_0} (s_1 - s_2) + \\ &\frac{23}{4} c_\varphi \frac{G_{4(1,0)}}{G_{4(0,0)}} \left(\frac{m_2}{m_1} - \frac{m_1}{m_2} \right) + \frac{15c_\varphi}{2\varphi_0} \left(\frac{m_1 s_2}{m_2} - \frac{m_2 s_1}{m_1} \right) + \frac{12c_\varphi}{\varphi_0} \left(\frac{m_1 s_1}{m_2} - \frac{m_2 s_2}{m_1} \right) + \\ &\frac{14G_{4(0,0)} s_1 s_2 c_\varphi}{G_{4(1,0)}\varphi_0^2} \left(\frac{m_2}{m_1} - \frac{m_1}{m_2} \right) + \frac{c_\varphi (s_1 + s_2)}{2\varphi_0} \left(\frac{m_2}{m_1} - \frac{m_1}{m_2} \right) + \frac{8G_{4(0,0)} c_\varphi (s_1 - s_2)}{G_{4(1,0)}\varphi_0^2} + \\ &\frac{8G_{4(0,0)} c_\varphi}{G_{4(1,0)}\varphi_0^2} \left(\frac{m_2 s_1}{m_1} - \frac{m_1 s_2}{m_2} \right) + \frac{9G_{4(0,0)} c_\varphi}{G_{4(1,0)}\varphi_0^2} \left(\frac{s_2^2 m_1}{m_2} - \frac{s_1^2 m_2}{m_1} \right) + \frac{4c_\varphi (s_1 - s_2)}{\varphi_0} + \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \frac{18G_{4(0,0)}^2 c_\varphi}{G_{4(1,0)}^2 \varphi_0^3} \left(\frac{s_1^2 s_2 m_2}{m_1} - \frac{s_2^2 s_1 m_1}{m_2} \right) + \frac{16G_{4(0,0)}^2 c_\varphi}{G_{4(1,0)}^2 \varphi_0^3} (s_1^2 s_2 - s_2^2 s_1) + \\
& \frac{8G_{4(0,0)} c_\varphi}{G_{4(1,0)} \varphi_0^2} \left(\frac{m_2 s'_1}{m_1} - \frac{m_1 s'_2}{m_2} \right) + \frac{8G_{4(0,0)} c_\varphi}{G_{4(1,0)} \varphi_0^2} (s'_1 - s'_2) + \frac{16G_{4(0,0)}^2 c_\varphi s_1 s_2}{G_{4(1,0)}^2 \varphi_0^3} \left(\frac{m_1}{m_2} - \frac{m_2}{m_1} \right) + \\
& \frac{8G_{4(0,0)} c_\varphi}{G_{4(1,0)} \varphi_0^2} (s_2^2 - s_1^2) + \frac{16G_{4(0,0)}^2 c_\varphi}{G_{4(1,0)}^2 \varphi_0^3} \left(\frac{s_1 s'_2 m_1}{m_2} - \frac{s_2 s'_1 m_2}{m_1} \right) + \frac{16G_{4(0,0)}^2 c_\varphi}{G_{4(1,0)}^2 \varphi_0^3} (s_1 s'_2 - s_2 s'_1), \\
A_q &= 1 - \frac{2G_{4(0,0)} s_2 m_1 + s_1 m_2}{G_{4(1,0)} \varphi_0 m}, \\
A_o &= \frac{m_1 - m_2}{m} - \frac{2G_{4(0,0)} s_2 m_1^2 - s_1 m_2^2}{G_{4(1,0)} \varphi_0 m^2}.
\end{aligned} \tag{4.65}$$

Можно разделить поток энергии в скалярном секторе на дипольные, квадрупольные и диполь-октупольные компоненты:

$$\langle \dot{E}_\varphi \rangle = \langle \dot{E}_\varphi^D \rangle + \langle \dot{E}_\varphi^Q \rangle + \langle \dot{E}_\varphi^{DO} \rangle, \tag{4.66}$$

где скалярная дипольная выглядит следующим образом

$$\begin{aligned}
\langle \dot{E}_\varphi^D \rangle &= -\frac{2G_{4(1,0)} c_\varphi}{3c^3 G_{4(0,0)}} \int \int dz_1 dz_2 J_1(z_1) J_2(z_2) \langle \ddot{\mathcal{M}}_1^k(z_1) \ddot{\mathcal{M}}_2^k(z_2) \rangle = \\
& -\frac{2G_{4(1,0)} c_\varphi \mu^2 \mathcal{G}_{12}^2 m^2}{3c^3 G_{4(0,0)} R^4} \left(A_d^2 + A_d \bar{A}_d \frac{2\mu}{c^2 R} \right) \left[1 - \cos(\omega r/c) \langle \cos(\omega r u/c) \rangle_2 - \right. \\
& \sin(\omega r/c) \langle \sin(\omega r u/c) \rangle_2 - (\cos(\omega r/c) - \langle \cos(\omega r u/c) \rangle_2) \langle \cos(\omega r u/c) \rangle_3 - \\
& \left. (\sin(\omega r/c) - \langle \sin(\omega r u/c) \rangle_2) \langle \sin(\omega r u/c) \rangle_3 \right],
\end{aligned} \tag{4.67}$$

скалярная квадрупольная

$$\begin{aligned}
\langle \dot{E}_\varphi^Q \rangle &= -\frac{G_{4(1,0)} c_\varphi}{15c^5 G_{4(0,0)}} \int \int dz_1 dz_2 J_1(z_1) J_2(z_2) \times \langle \ddot{\mathcal{M}}_2^{kl} \ddot{\mathcal{M}}_3^{kl} \rangle = \\
& -\frac{32G_{4(1,0)} c_\varphi \mu^2 \mathcal{G}_{12}^3 m^3}{15c^5 G_{4(0,0)} R^5} A_q^2 \times \left[1 - \cos(2\omega r/c) \langle \cos(2\omega r u/c) \rangle_3 - \sin(2\omega r/c) \times \right. \\
& \langle \sin(2\omega r u/c) \rangle_3 - (\cos(2\omega r/c) - \langle \cos(2\omega r u/c) \rangle_3) \langle \cos(2\omega r u/c) \rangle_4 - (\sin(2\omega r/c) - \\
& \left. \langle \sin(2\omega r u/c) \rangle_3) \langle \sin(2\omega r u/c) \rangle_4 \right]
\end{aligned} \tag{4.68}$$

скалярная диполь-октупольная

$$\begin{aligned}
\langle \dot{E}_\phi^{DO} \rangle &= -\frac{G_{4(1,0)}c_\phi}{15c^5G_{4(0,0)}} \int \int dz_1 dz_2 J_1(z_1) J_2(z_2) \times \left\langle \left(\ddot{M}_1^k \ddot{M}_4^{kll} + \ddot{M}_2^k \ddot{M}_3^{kll} \right) \right\rangle \\
&= \frac{G_{4(1,0)}c_\phi}{15c^5G_{4(0,0)}} \frac{\mu^2 \mathcal{G}_{12}^3 m^3}{R^5} A_d A_o \left[2 - \cos(\omega r/c) (\langle \cos(\omega r u/c) \rangle_2 \right. \\
&\quad + \langle \cos(\omega r u/c) \rangle_3 + \langle \cos(\omega r u/c) \rangle_4 + \langle \cos(\omega r u/c) \rangle_5) - \sin(\omega r/c) \\
&\quad \times (\langle \sin(\omega r u/c) \rangle_2 + \langle \sin(\omega r u/c) \rangle_3 + \langle \sin(\omega r u/c) \rangle_4 + \langle \sin(\omega r u/c) \rangle_5) \\
&\quad + \langle \cos(\omega r u/c) \rangle_2 \langle \cos(\omega r u/c) \rangle_5 + \langle \cos(\omega r u/c) \rangle_3 \langle \cos(\omega r u/c) \rangle_4 \\
&\quad \left. + \langle \sin(\omega r u/c) \rangle_2 \langle \sin(\omega r u/c) \rangle_5 + \langle \sin(\omega r u/c) \rangle_3 \langle \sin(\omega r u/c) \rangle_4 \right]. \tag{4.69}
\end{aligned}$$

Отметим, что здесь был использован третий закон Кеплера (4.23) и были введены следующие обозначения для интегралов:

$$\langle \sin\left(\frac{\omega r u}{c}\right) \rangle_n \equiv \int_0^\infty \sin\left(\frac{\omega r}{c} \sqrt{1 + \left(\frac{z}{m_\phi r}\right)^2}\right) \frac{J_1(z) dz}{\left(1 + \left(\frac{z}{m_\phi r}\right)^2\right)^{n/2}}, \tag{4.70}$$

$$\langle \cos\left(\frac{\omega r u}{c}\right) \rangle_n \equiv \int_0^\infty \cos\left(\frac{\omega r}{c} \sqrt{1 + \left(\frac{z}{m_\phi r}\right)^2}\right) \frac{J_1(z) dz}{\left(1 + \left(\frac{z}{m_\phi r}\right)^2\right)^{n/2}}. \tag{4.71}$$

Далее получим окончательное выражение для потока энергии в скалярной части, для этого сначала найдём значение этих интегралов в пределе $r \rightarrow \infty$. Детально нахождение пределов было показано в [97; 98], покажем конечный результат:

$$\lim_{r \rightarrow \infty} \langle \sin\left(\frac{\omega r u}{c}\right) \rangle_n \equiv \tag{4.72}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \sin\left(\frac{\omega r}{c}\right) - \left(\frac{v_{\phi_g}(\omega)}{c}\right)^{n-1} (\omega) \cos(\omega r v_{\phi_g}(\omega)), \\ \text{for } \omega > c m_\phi, \\ \\ \sin\left(\frac{\omega r}{c}\right) - \frac{(-1)^{n-1}-1}{2} \left(\frac{v_{\phi_g}(\omega)}{c}\right)^{n-1} e^{-i\omega r v_{\phi_g}(\omega)}, \\ \text{for } \omega < c m_\phi, \end{array} \right. \tag{4.73}$$

и

$$\lim_{r \rightarrow \infty} \left\langle \cos\left(\frac{\omega r u}{c}\right) \right\rangle_n \equiv \quad (4.74)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \cos\left(\frac{\omega r}{c}\right) - \left(\frac{v_{\varphi_g}(\omega)}{c}\right)^{n-1} \cos(\omega r v_{\varphi_g}(\omega)), \\ \text{for } \omega > c m_{\varphi}, \\ \\ \cos\left(\frac{\omega r}{c}\right) - \frac{(-1)^{n-1}+1}{2} \left(\frac{v_{\varphi_g}(\omega)}{c}\right)^{n-1} (\omega) e^{-i\omega r v_{\varphi_g}(\omega)}, \\ \text{for } \omega < c m_{\varphi}, \end{array} \right. \quad (4.75)$$

где $v_{\varphi_g}(\omega) = c\sqrt{1 - m_{\varphi}^2 c^2/\omega^2}$ – это скорость распространения скалярного излучения.

Наконец, представим выражения для дипольной части скалярного излучения:

$$\left\langle \dot{E}_{\varphi}^D \right\rangle = -\frac{2G_{4(1,0)}c_{\varphi} \mu^2 \mathcal{G}_{12}^2 m^2}{3c^3 G_{4(0,0)}} \left(A_d^2 + A_d \bar{A}_d \frac{2\mu}{c^2 R} \right) \left(\frac{v_{\varphi_g}(\omega)}{c} \right)^3 \Theta(\omega - c m_{\varphi}), \quad (4.76)$$

квадрупольной части:

$$\left\langle \dot{E}_{\varphi}^Q \right\rangle = -\frac{32G_{4(1,0)}c_{\varphi} \mu^2 \mathcal{G}_{12}^3 m^3}{15c^5 G_{4(0,0)}} A_q^2 \left(\frac{v_{\varphi_g}(2\omega)}{c} \right)^5 \Theta(2\omega - c m_{\varphi}), \quad (4.77)$$

диполь-октупольной части:

$$\left\langle \dot{E}_{\varphi}^{DO} \right\rangle = \frac{G_{4(1,0)}c_{\varphi} \mu^2 \mathcal{G}_{12}^3 m^3}{15c^5 G_{4(0,0)}} A_d A_o \left(\frac{v_{\varphi_g}(\omega)}{c} \right)^5 \Theta(\omega - c m_{\varphi}), \quad (4.78)$$

где $\Theta(\omega - c m_{\varphi})$ – функция Хевисайда.

Подчеркнём, что квадрупольный, диполь-октупольный член, а также ПН поправки к дипольному члену являются слагаемыми порядка $O(1/c^4)$, при рассмотрении скалярной части мы не отбрасывали их в виду того, что тензорная часть является членом того же порядка малости по $1/c$.

Наконец запишем полное выражение для потока энергии излучения в скалярной части:

$$\begin{aligned} \langle \dot{E}_\varphi \rangle = & \langle \dot{E}_g^Q \rangle + \langle \dot{E}_\varphi^D \rangle + \langle \dot{E}_\varphi^Q \rangle + \langle \dot{E}_\varphi^{DO} \rangle = -\frac{32\mu^2(\mathcal{G}_{12}m)^3}{5c^5G_{4(0,0)}R^5} \left[1 + \right. \\ & \frac{5c^2G_{4(1,0)}c_\varphi R}{48\mathcal{G}_{12}m} \left(A_d^2 + A_d\bar{A}_d \frac{2\mu}{c^2R} \right) \left(\frac{v_{\varphi_g}(\omega)}{c} \right)^3 \Theta(\omega - cm_\varphi) + \frac{G_{4(1,0)}c_\varphi}{3} A_q^2 \times \\ & \left. \left(\frac{v_{\varphi_g}(2\omega)}{c} \right)^5 \Theta(2\omega - cm_\varphi) - \frac{G_{4(1,0)}c_\varphi}{96} A_d A_o \left(\frac{v_{\varphi_g}(\omega)}{c} \right)^5 \Theta(\omega - cm_\varphi) \right]. \end{aligned} \quad (4.79)$$

Отметим, что дипольно-октупольный член, входящий в уравнение (4.79), имеет знак противоположные остальным членам и дающий отрицательный вклад в поток энергии в том же ПН порядке, что и квадрупольный член.

Используя (4.24) и (4.25) найдем формулу для изменения орбитального периода, включающую в себя тензорную и скалярную части:

Перепишем формулу для производной в следующем виде:

$$\begin{aligned} \frac{\dot{P}_b^{th}}{P_b} = & -\frac{96\mu(\mathcal{G}_{12}m)^2}{5c^5G_{4(0,0)}R^4} \left[1 + \frac{5c^2G_{4(1,0)}c_\varphi R}{48\mathcal{G}_{12}m} \left(A_d^2 + A_d\bar{A}_d \frac{2\mu}{c^2R} \right) \left(\frac{v_{\varphi_g}(\omega)}{c} \right)^3 \right. \\ & \times \Theta(\omega - cm_\varphi) + \frac{G_{4(1,0)}c_\varphi}{3} A_q^2 \left(\frac{v_{\varphi_g}(2\omega)}{c} \right)^5 \Theta(2\omega - cm_\varphi) - \frac{G_{4(1,0)}c_\varphi}{96} \\ & \left. \times A_d A_o \left(\frac{v_{\varphi_g}(\omega)}{c} \right)^5 \Theta(\omega - cm_\varphi) \right], \end{aligned} \quad (4.80)$$

где \dot{P}_b^{th} - производная орбитального периода в теории Хорндески. Заметим, что в (4.80) основной вклад задается скалярным дипольным членом. Отметим также крайне важный нюанс: дипольный член в скалярной части зависит от разности чувствительностей $s_1 - s_2$. Данная разность будет сильно отличной от нуля в смешанных системах, где компоненты представляют собой объекты разных типов (пульсар и отличный от нейтронной звезды объект (белый карлик, звезда главной последовательности и т.д.)) [24; 74; 97].

Здесь и далее принимаем во внимание, что $m_\varphi < \omega/c$, таким образом $\Theta(\omega - cm_\varphi) = 1$. Используя третий закон Кеплера 4.23 (в квазикруговой орбите $a = R$) и выражение для скорости распространения в явном виде, (4.80)

можно переписать:

$$\begin{aligned} \frac{\dot{P}_b^{th}}{\dot{P}_b^{GR}} = & \frac{\mathcal{G}_{12}^{\frac{2}{3}}}{G^{\frac{5}{3}}G_{4(0,0)}} \left[1 + \frac{5G_{4(1,0)}c_\varphi}{48} \left(\frac{P_b c^3}{2\pi m \mathcal{G}_{12}} \right)^{\frac{2}{3}} \left(A_d^2 + \frac{2\mu}{c^2} A_d \bar{A}_d \left(\frac{4\pi^2}{P_b^2 m \mathcal{G}_{12}} \right)^{\frac{1}{3}} \right) \right. \\ & \times \left(1 - \frac{m_\varphi^2 c^2 P_b^2}{4\pi^2} \right)^{\frac{3}{2}} + \frac{G_{4(1,0)}c_\varphi}{3} A_q^2 \left(1 - \frac{m_\varphi^2 c^2 P_b^2}{16\pi^2} \right)^{\frac{5}{2}} - \frac{G_{4(1,0)}c_\varphi}{96} A_d A_o \times \\ & \left. \left(1 - \frac{m_\varphi^2 c^2 P_b^2}{4\pi^2} \right)^{\frac{5}{2}} \right], \end{aligned} \quad (4.81)$$

где \dot{P}_b^{GR} – значение производной орбитального периода, предсказываемое ОТО

$$\dot{P}_b^{GR} = -\frac{192\pi\mu}{5c^5 m} \left(\frac{2\pi Gm}{P_b} \right)^{\frac{5}{3}}. \quad (4.82)$$

Теперь мы получили окончательный вид выражения определяющего изменение орбитального периода в двойных системах с пульсаром в подклассе теории Хорндески в квазикруговой системе. Теперь перейдём к получению ограничений на параметры теории.

4.0.7 Ограничения из наблюдательных данных двойных систем с пульсарами

На данный момент все имеющиеся наблюдательные данные от двойных систем с пульсарами прекрасно согласуются с ОТО в пределах погрешности [58; 101–103]. Поэтому все предсказанные модифицированными теориями гравитации отклонения от ОТО должны давать вклад меньший, чем существующие погрешности наблюдений. Этот факт как раз и обеспечит достаточно строгие ограничения на свободные параметры рассматриваемой модели.

Наблюдаемое значение первой производной орбитального периода двойных систем с пульсаром часто включает в себя не только изменение, связанное с излучением гравитационных волн, но и различные кинематические и внутренние эффекты [58; 101–103]. Учёт этих эффектов представляет собой отдельную непростую задачу. В данной диссертации был рассмотрен только случай изменения орбитального периода за счёт излучения гравитационных волн. Поэтому

для проведения ограничений были подобраны двойные системы, где кинематические и внутренние эффекты были бы пренебрежимо малы, по сравнению эффектом, связанным с гравитационным излучением.

Ограничения на рассматриваемый частный случай теории Хорндески можно получить из сравнения предсказанной величины $\dot{P}_b^{th}/\dot{P}_b^{GR}$ и наблюдательной величины $\dot{P}_b^{obs}/\dot{P}_b^{GR}$ при 95% доверительном уровне:

$$\left| \frac{\dot{P}_b^{th}}{\dot{P}_b^{GR}} - \frac{\dot{P}_b^{obs}}{\dot{P}_b^{GR}} \right| \leq 2\sigma, \quad (4.83)$$

где σ – наблюдаемая погрешность.

Ограничения на частные случаи теории Хорндески

Как уже было отмечено выше в смешанных системах сильнее проявляется вклад скалярной части гравитационного излучения, по сравнению с несмешанными[97]. В качестве смешанной квазикруговой системы для тестирования исследуемого подкласса теории Хорндески выбрана PSR J1738+0333. Среди всех подобных систем у данной наиболее точно определены необходимые параметры системы, причём массы пульсаров определены не только из пульсарного тайминга[101], но и из спектроскопических наблюдений [102]. Орбитальные параметры для данной системы приведены в Таблице (1).

Таблица 1 — Параметры PSR J1738+0333 [101; 102]

Параметр	Физический смысл	Экспериментальные данные
$P_b(day)$	Орбитальный период	0.3547907398724(13)
e	эксцентриситет	$0.34(11) \times 10^{-6}$
\dot{P}_b^{obs}	производная орбитального периода	$-0.259(32) \times 10^{-13}$
$\frac{\dot{P}_b^{obs}}{\dot{P}_b^{GR}}$	Отношение \dot{P}_b^{obs} к \dot{P}_b^{GR}	0.93(13)
$m_1(m_\odot)$	масса пульсара	$1.46_{-0.05}^{+0.06}$
$m_2(m_\odot)$	масса белого карлика	$0.181_{-0.005}^{+0.007}$
$m(m_\odot)$	полная масса системы	$1.65_{-0.06}^{+0.07}$

Учитывая тот факт, что дипольное излучение является ведущим в скалярной части в изменении производной орбитального периода, возможно пренебречь квадрупольным, диполь-октупольным слагаемыми, а также ПН поправками к дипольному излучению, поскольку их вклад оказывается пренебрежимо малым. С учётом этого перепишем изменение орбитального периода (4.81):

$$\begin{aligned} \frac{\dot{P}_b^{th}}{\dot{P}_b^{GR}} = & \frac{\mathcal{G}_{12}^{\frac{2}{3}}}{G^{\frac{5}{3}}G_{4(0,0)}} \left[1 + \frac{5c_\varphi}{12} \left(\frac{P_b c^3}{2\pi m \mathcal{G}_{12}} \right)^{\frac{2}{3}} \right. \\ & \left. \times \left(\frac{G_{4(0,0)}^2 (s_{NS} - s_{WD})^2}{G_{4(1,0)} \varphi_0^2} \right) \left(1 - \frac{m_\varphi^2 c^2 P_b^2}{4\pi^2} \right)^{\frac{3}{2}} \right], \end{aligned} \quad (4.84)$$

где s_{NS} - чувствительность нейтронной звезды, а s_{WD} - чувствительность белого карлика.

Получим теперь ограничения на исследуемую теорию с помощью (4.83) и (4.84):

$$\left| \frac{\mathcal{G}_{12}^{\frac{2}{3}}}{G^{\frac{5}{3}}G_{4(0,0)}} \left[1 + \frac{5c_\varphi}{12} \left(\frac{P_b c^3}{2\pi m \mathcal{G}_{12}} \right)^{\frac{2}{3}} \left(1 - \frac{m_\varphi^2 c^2 P_b^2}{4\pi^2} \right)^{\frac{3}{2}} \left(\frac{G_{4(0,0)}^2 (s_{NS} - s_{WD})^2}{G_{4(1,0)} \varphi_0^2} \right) \right] - 0.93 \right| \leq 0.26. \quad (4.85)$$

С помощью условия $m_\varphi < \omega/c$ найдем ограничение на массу скалярного поля (см. Таблицу 1):

$$m_\varphi < 7 \times 10^{-13} [cm^{-1}]. \quad (4.86)$$

Как видно из (4.84) ограничение, получающееся на массу, зависит от орбитального периода, и чем он больше, тем более строгое ограничение получается для массы скалярного поля. Однако точно измерен орбитальный период у не такого большого количества систем. PSR J1738 + 0333 - это одна из немногих систем совмещающих хорошие наблюдательные измерения и большое значение орбитального периода.

Как уже было отмечено выше, наилучшие ограничения скалярно-тензорной модели обеспечивает смешанная двойная система, поскольку в этом случае разность чувствительностей оказывается сильно отличной от нуля и вклад дипольного члена оказывается самым значительным. Однако, было бы ошибкой не

рассмотреть особый случай двойного пульсара PSR J0737-3039[103]. Эта система является единственным известным на данный момент двойным пульсаром, оба компонента которой пульсары. Именно этот факт делает возможным получать чрезвычайно точные данные об этой системе. Помимо этого, близость компонент системы и малый орбитальный период, говорят нам о том, что мы видим почти предельный случай двойной системы, а значит релятивистские эффекты должны проявляться заметнее, чем в других двойных системах с пульсаром[103]. Наблюдательные данные для этой системы приведены в Таблице 2 [103].

Особенно интересным является использование данной системы для тестирования скалярно-тензорных теорий без чувствительностей, поскольку в таких теориях в скалярной части останется только отличное от нуля квадрупольное слагаемое. Оно также будет отлично от нуля в несмешанных системах в случае если у теории есть чувствительности. Примером модели без чувствительности является гибридная метрическая-Палатини $f(R)$ - гравитации, поскольку в данной модели скалярное поле является фиктивным и никакой реальной связи материи и скалярного поля нет. Ограничения на параметры этой теории будут получены ниже, но сначала получим ограничения на модели без чувствительностей в общем случае рассматриваемого подкласса теории Хорндески.

Таблица 2 — Параметры PSR J0737-3039 [103]

Параметры	Физический смысл	Экспериментальное значение
$P_b(\text{day})$	орбитальный период	0.10225156248(5)
e	эксцентриситет	0.0877775(9)
\dot{P}_b^{obs}	Производная орбитального периода	$-1.252(17) \times 10^{-12}$
$\frac{\dot{P}_b^{obs}}{\dot{P}_b^{GR}}$	отношение \dot{P}_b^{obs} к \dot{P}_b^{GR}	1.003(14)
$m_1(m_\odot)$	масса пульсара 1	1.3381(7)
$m_2(m_\odot)$	масса пульсара 2	1.2489(7)
$m(m_\odot)$	полная масса системы	2.58708(16)

Используя уравнение (4.83) и данные из Таблицы 2, получим ограничения на параметры рассматриваемого частного случая теории Хорндески без

чувствительностей:

$$\left| 1.003 - \frac{\mathcal{G}_{12}^{\frac{2}{3}}}{G^{\frac{5}{3}} G_{4(0,0)}} \left[1 + \frac{G_{4(1,0)} c_{\varphi}}{3} (1 - 4 \times 10^{22} m_{\varphi}^2)^{\frac{5}{2}} \right] \right| \leq 0.028. \quad (4.87)$$

Для массы скалярного поля из данных PSR J0737-3039 получаются следующие ограничения:

$$m_{\varphi} < 2 \times 10^{-11} [cm^{-1}]. \quad (4.88)$$

Теперь получим ограничения на параметры гибридной $f(R)$ - гравитации, напомним, что переход к данной модели из теории Хорндески возможен с помощью следующего выбора G_i :

$$G_2 = -\frac{3X}{G\varphi} - V(\varphi), \quad G_3 = 0, \quad G_4 = \frac{1 + \varphi}{G}, \quad G_5 = 0 \quad (4.89)$$

и

$$\begin{aligned} G_{4(0,0)} &= \frac{1 + \varphi_0}{G}, \quad G_{4(1,0)} = \frac{1}{G}, \\ G_{3(1,0)} &= 0, \quad G_{2(0,1)} = -\frac{3}{G\varphi_0}. \end{aligned} \quad (4.90)$$

Запишем теперь ограничения, которые получаются из данных PSR J0737-3039, на гибридную $f(R)$ -гравитацию (из уравнения 4.87):

$$0.975 \leq \frac{1}{(1 + \varphi_0)^{\frac{5}{3}}} \left(1 - \frac{5\varphi_0}{18} (1 - 2 \times 10^{22} m_{\varphi}^2) \right) \leq 1. \quad (4.91)$$

На Рис.4.1 показана зависимость φ_0 от массы скалярного поля m_{φ} для системы PSR J0737-3039.

Смешанный двойной пульсар PSR J1738 + 0333 дает следующие ограничения (из уравнения 4.85) в случае гибридного $f(R)$ -гравитации (см. Рис.4.2):

$$0.67 \leq \frac{1}{(1 + \varphi_0)^{\frac{5}{3}}} \left(1 - \frac{5\varphi_0}{18} (1 - 10^{24} m_{\varphi}^2) \right) \leq 1. \quad (4.92)$$

Сопоставляя ограничения (4.91) и (4.92), заметим, что PSR J1738 + 0333 обеспечивает лучшие ограничения на массу скалярного поля, тогда как PSR

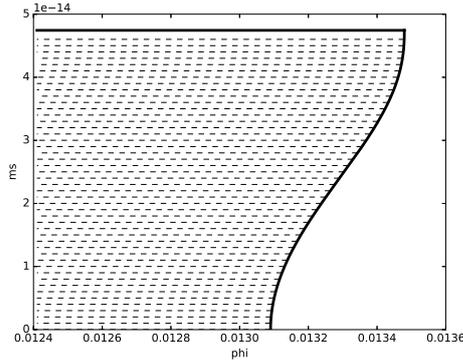


Рисунок 4.1 — Гибридная $f(R)$ -гравитация. Зависимость массы скалярного поля от фонового значения скалярного поля PSR J0737-3039. Область допустимых значений закрашена пунктирными линиями. Сплошной горизонтальной линией показано предельное значение массы скалярного поля ($m_\phi = 2\omega/c$).

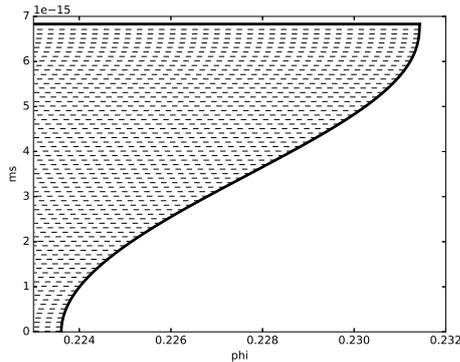


Рисунок 4.2 — Гибридная $f(R)$ -гравитация. Зависимость массы скалярного поля от фонового значения скалярного поля PSR J1738+0333. Область допустимых значений закрашена пунктирными линиями. Сплошной горизонтальной линией показано предельное значение массы скалярного поля ($m_\phi = \omega/c$).

J0737-3039 ограничивает ϕ_0 лучше. Однако как видно из Рис. 4.3, сравниваются ограничения, полученные из двойных систем с пульсаром, и ограничения, связанные с измерением PPN-параметра $\gamma_{PPN} = 1 + 2.1 \times 10^{-5} \pm 2.3 \times 10^{-5}$ [104], параметр ϕ_0 всё же лучше ограничивается из ППН тестов. Тем не менее ППН тестирование не даёт никаких ограничений на массу скалярного поля. Далее приведём объединенные ограничения на параметры гибридной $f(R)$ -

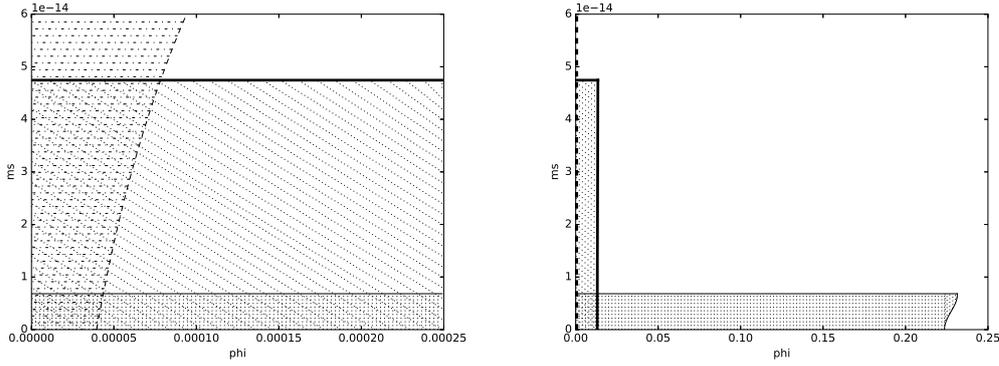


Рисунок 4.3 — Гибридная $f(R)$ -гравитация. Зависимость массы скалярного поля от фонового значения скалярного поля. Два рисунка представляют ограничения на различных масштабах. Наклонные точечные линии соответствуют области допустимых значений в случае J0737-3039, жирная сплошная горизонтальная линия отвечает за предельный случай массы скалярного поля ($m_\varphi = 2\omega/c$ в случае PSR J0737-3039 and $m_\varphi = \omega/c$ в случае PSR J1738+0333), пунктирные вертикальные линии закрашивают область возможных значений в случае PSR J1738+0333, горизонтальными линиями (точка - пунктир) закрашен регион допустимых значений для случая ППН параметра γ .

гравитации:

$$|\varphi_0| \leq 0.00004, \quad |m_\varphi| \leq 7 \times 10^{-13} \text{cm}^{-1}. \quad (4.93)$$

Также эти ограничения можно переписать для функции $f(\mathfrak{R})$, используя обратный переход к исходным обозначениям для гибридной $f(R)$ -гравитации:

$$\begin{aligned} & \left| \lim_{r \rightarrow \infty} f_{\mathfrak{R}}(\mathfrak{R}) \right| < 0.00004, \\ & \left| \lim_{r \rightarrow \infty} \frac{1}{3} \left[2\mathfrak{R}f_{\mathfrak{R}}(\mathfrak{R}) - 2f(\mathfrak{R}) - \frac{\partial \mathfrak{R}}{\partial f_{\mathfrak{R}}(\mathfrak{R})} f_{\mathfrak{R}}(\mathfrak{R}) - \mathfrak{R} + \frac{\partial f(\mathfrak{R})}{\partial f_{\mathfrak{R}}(\mathfrak{R})} - \right. \right. \\ & \quad \left. \left. - \frac{1 + f_{\mathfrak{R}}(\mathfrak{R})}{f_{\mathfrak{R}}(\mathfrak{R})} \left(\frac{\partial^2 \mathfrak{R}}{\partial f_{\mathfrak{R}}(\mathfrak{R})^2} f_{\mathfrak{R}}(\mathfrak{R}) + 2 \frac{\partial \mathfrak{R}}{\partial f_{\mathfrak{R}}(\mathfrak{R})} - \frac{\partial^2 f(\mathfrak{R})}{\partial f_{\mathfrak{R}}(\mathfrak{R})^2} \right) \right] \right| \leq 7 \times 10^{-13} \text{cm}^{-1}, \end{aligned} \quad (4.94)$$

где $f_{\mathfrak{R}}(\mathfrak{R}) = \frac{\partial f(\mathfrak{R})}{\partial \mathfrak{R}}$.

4.0.8 Изменение орбитального периода \dot{P}_b в случае орбит с ненулевым эксцентриситетом в гибридной $f(R)$ - гравитации

Теперь перейдём к рассмотрению случая орбит с ненулевым эксцентриситетом. Данный случай особенен тем, что в отличие от квазикругового случая уравнение (4.13) не может быть решено аналитически, поэтому дальнейшее аналитическое рассмотрение возможно только в приближении малой массы скалярного поля $m_\varphi R \ll 1$. В целом процедура получения \dot{P}_b будет почти полностью повторять уже вышеописанную для квазикругового случая. Для начала напомним выражение для изменения энергии двойной системы:

$$\langle \dot{E}_{grav} \rangle = \langle \dot{E}_{tensor} \rangle + \langle \dot{E}_{scalar} \rangle, \quad (4.95)$$

здесь тензорная часть выглядит абсолютно аналогично (4.38):

$$\langle \dot{E}_{tensor} \rangle = -\frac{G}{5c^5(1 + \varphi_0)} \left\langle \ddot{M}^{kl} \ddot{M}_{kl} - \frac{1}{3}(\ddot{M}^{kk})^2 \right\rangle, \quad (4.96)$$

$$M_{ij} = \sum_a m^a(\varphi) r_i^a(t) r_j^a(t) \quad (4.97)$$

— квадрупольный момент; скалярная часть может быть представлена в виде аналогичном квазикруговому случаю:

$$\begin{aligned} \langle \dot{E}_{scalar} \rangle = & \frac{2c^5 G \varphi_0}{6(1 + \varphi_0)} \int dz_1 dz_2 J_1(z_1) J_2(z_2) \left\langle \frac{1}{c^6} \dot{\mathcal{M}}_0 \dot{\mathcal{M}}_1 \right. \\ & + \frac{1}{6c^8} \left(2\ddot{\mathcal{M}}_1^k \ddot{\mathcal{M}}_2^k + \dot{\mathcal{M}}_0 \ddot{\mathcal{M}}_3^{kk} + \dot{\mathcal{M}}_1 \ddot{\mathcal{M}}_2^{kk} \right) \\ & + \frac{1}{60c^{10}} \left(2\ddot{\mathcal{M}}_2^{kl} \ddot{\mathcal{M}}_3^{kl} + \ddot{\mathcal{M}}_2^{kk} \ddot{\mathcal{M}}_3^{ll} \right) \\ & \left. + \frac{1}{30c^{10}} \left(\ddot{\mathcal{M}}_1^k \ddot{\mathcal{M}}_4^{kll} + \ddot{\mathcal{M}}_2^k \ddot{\mathcal{M}}_3^{kll} \right) \right\rangle, \quad (4.98) \end{aligned}$$

здесь $J_1(z)$ — функция Бесселя первого порядка, $z = m_\varphi \sqrt{c^2(t-t')^2 - |\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^2}$ и

$$\begin{aligned} \mathcal{M}_l^L &= \mathcal{M}_l^{i_1 i_2 \dots i_l}(t, r, z) = \sum_a \left(M_a(t - r/c) r_a^L(t - r/c) \right. \\ & \left. - u^{-(l+1)}(r, z) M_a(t - ru(r, z)/c) r_a^L(t - ru(r, z)/c) \right), \quad (4.99) \end{aligned}$$

где

$$M_a(t) = m_a \left[1 - \frac{v_a^2}{2c^2} - 3 \sum_{b \neq a} \frac{Gm_b}{r_{ab}(t)c^2(1 + \varphi_0)} - \frac{G\varphi_0}{c^2(1 + \varphi_0)} \sum_{b \neq a} \frac{m_b}{r_{ab}(t)} e^{-m_\varphi R} \right]. \quad (4.100)$$

Здесь $r_a^L(t) = r_a^{i_1}(t)r_a^{i_2}(t)\dots r_a^{i_l}(t)$, $u(r, z) = \sqrt{1 + (z/m_\varphi r)^2}$, m_a и v_a — соответственно являются массой и скоростью объекта a .

Далее учтём, то, что у орбиты теперь есть ненулевой эксцентриситет и запишем уравнение орбиты:

$$r = \frac{a(1 - e^2)}{1 + e \cos \theta}, \quad (4.101)$$

где (r, θ) - полярные координаты с полюсом в фокусе эллипса, e - эксцентриситет. С учётом уравнения 4.102 получить окончательное выражение для производной орбитального периода возможно только в приближении малой массы скалярного поля $m_\varphi R \ll 1$. Поскольку в отличие от квазикругового случае расстояние между объектами, а также их скорости будут зависеть от времени в результате чего расчёт интегралов без дополнительных приближений (4.59) станет аналитически невозможен. С учётом этого допущения и с помощью соотношения (4.25) получим отношение изменения производной орбитального периода в гибридной $f(R)$ гравитации и в ОТО:

$$\frac{\dot{P}_b}{\dot{P}_b^{GR}} = \frac{(1 - \frac{\varphi_0}{3})^{2/3}}{(1 + \varphi_0)^{5/3}} \left[1 + \frac{(19\varphi_0 - 57)\varphi_0}{15552(1 - \frac{\varphi_0}{3})^3(1 + \frac{73}{24}e^2 + \frac{37}{96}e^4)} \times \left(\frac{1}{19}((15e^4 + 64e^2 - 12)(3 - \varphi_0)^2 - \frac{8973}{152} \left(\left(\varphi_0^2 + \frac{5538\varphi_0}{997} + 9 \right) e^4 + \left(\frac{62200\varphi_0^2}{8973} + \frac{117520\varphi_0}{2991} + \frac{62200}{997} \right) e^2 + \frac{17440}{997} + \frac{34240\varphi_0}{2991} + \frac{17440\varphi_0^2}{8973} \right) \right) \right], \quad (4.102)$$

где \dot{P}_b^{GR} - производная орбитального периода в рамках ОТО:

$$\dot{P}_b^{GR} = -\frac{192\pi\mu}{5c^5m} \left(\frac{2\pi Gm}{P_b} \right)^{\frac{5}{3}} \frac{1}{(1 - e^2)^{7/2}} \left(1 + \frac{73}{24}e^2 + \frac{37}{96}e^4 \right). \quad (4.103)$$

Как уже было отмечено выше выражение (4.102) состоит из тензорной и скалярной части. Тензорная часть схожа с выражением, получаемым в случае ОТО, так же как и в ОТО оно будет состоять только из квадрупольной

составляющей, однако, будет и отличие, заключающееся в присутствии эффективной гравитационной постоянной G^{eff} (5.40) между компонентами системы, вместо обычной гравитационной постоянной, также как это было в квазикруговом случае. Скалярная часть содержит ПН поправки к монополю, монополь-квадрупольному членам, а также квадрупольное слагаемое, в отличие от квазикругового случая, где есть только квадрупольный член. Подчеркнем, что в гибридной $f(R)$ гравитации нет дипольного слагаемого ни в квазикруговом случае, ни в случае с эксцентриситетом.

4.0.9 Обсуждение результатов главы

В данной главе обсуждался частный случай теории Хорндески без экранирующих механизмов в контексте квазикруговых систем с пульсаром. Используя метод Нётор показано построение псевдотензора энергии-импульса. Данный математический объект позволяет найти изменение энергии системы за счёт гравитационного излучения, используя которое было найдено изменение орбитального периода. Этот параметр определяется экспериментально из пульсарного тайминга, благодаря чему становится возможно получить ограничения на параметры теории путем сравнения измеренного и теоретически предсказанного значения. Важной особенностью рассматриваемого частного случая теории Хорндески является наличие чувствительностей. Именно из-за наличия этих параметров наибольший вклад в гравитационное излучение со стороны скалярного поля получается в смешанных системах, например таких как: PSR J1738 + 0333.

Также в данной главе рассматривался частный случай рассматриваемой модели - гибридная $f(R)$ - гравитация. В данной модели скалярное поле - фиктивно и чувствительностей нет. Для данной теории также было показано получение ограничений с использованием двойного пульсара PSR J0737-3039.

В конце главы на основании проделанных выкладок было получено выражение для изменения производной орбитального периода в случае орбит с ненулевым эксцентриситетом в гибридной $f(R)$ -гравитации в приближении маломассивного поля. В следующей главе данный результат будет использован для проведения полного теста теории на двойных системах с пульсаром.

Глава 5. ППК тест гибридной $f(R)$ - гравитации⁵

Начнём получение ограничений на константы гибридной метрической-Палатини $f(R)$ - гравитации из теста на двойных системах с пульсаром с описания ППК формализма.

5.0.1 ППК формализм

В 1974 году Халсом и Тейлором была открыта система PSR B1913+16, состоящая из пульсара и нейтронной звезды. Данная система позволила получать из данных пульсарного тайминга информацию о тонких параметрах орбитальной динамики. Предсказания относительно этих параметров в разных теориях гравитации оказываются сильно зависящими от структуры теории гравитации. Однако для работы с подобной информацией необходимо было разработать формализм, описывающий орбитальную динамику и позволяющий получать сведения о ней теоретически независимым способом. Предпринимался ряд попыток построить такой формализм, и в 1986 году Дамуром и Дюриэль была получена его окончательная форма[61]. Он позволяет описывать орбитальную динамику вплоть до порядка малости (v^2/c^2) теоретически независимо и получил название параметризованного посткеплеровского (ППК) формализма. ППК - формализм позволяет работать в более сильном, чем в Солнечной системе, гравитационном поле и проверять теории гравитации с помощью данных, полученных от двойных систем с пульсаром, сравнивая предсказания теории с реальными наблюдательными данными. Далее опишем структуру данного формализма.

Он строится на описании времени прихода импульса пульсара, которое описывается следующей формулой [60; 61]:

$$t_b - t_0 = F(T; \{p^K\}; \{p^{PK}\}; \{q^{PK}\}) \quad (5.1)$$

где t_b - барицентрическое время прихода импульсов пульсара, T - собственное время пульсара с поправками на аберрацию. $\{p^K\}; \{p^{PK}\}; \{q^{PK}\}$ - три набора

⁵Данная глава основана на результатах статьи 1 из списка публикаций по теме диссертации.

параметров, приведём их:

$$\{p^K\} = \{P_b, T_0, e_0, \omega_0, x_0\} \quad (5.2)$$

— набор кеплеровских параметров, где P_b — орбитальный период, e — эксцентриситет, ω — долгота периастра, x — проекция большой полуоси орбиты пульсара;

$$\{p^{PK}\} = \{\dot{\omega}, \gamma, \dot{P}_b, r, s, \delta_\theta, \dot{e}, \dot{x}\} \quad (5.3)$$

— набор независимо измеряемых посткеплеровских параметров, где γ — параметр задержки Эйнштейна, δ_θ — безразмерный параметр, определяющий релятивистскую деформацию орбиты, \dot{e} — вековое изменение эксцентриситета, \dot{x} — вековое смещение проекции большой полуоси; \dot{P}_b — изменение орбитального периода; $\dot{\omega}$ — изменение долготы периастра; r и s — параметры задержки Шапиро;

$$\{q^{PK}\} = \{\delta_r, A, B, D\} \quad (5.4)$$

— набор посткеплеровских параметров, который зависит от значений величин (5.2), где δ_r — безразмерный параметр, определяющий релятивистскую деформацию орбиты, связанный с δ_θ ; A, B — параметры аберрации; D — доплеровский фактор.

Далее будем рассматривать только параметры: $\dot{P}_b, \dot{\omega}, r, s$, поскольку для них были получены наблюдательные ограничения.

5.0.2 Изменение долготы периастра $\dot{\omega}$

Для получения первой производной от долготы периастра для начала запишем лагранжиан для описания орбитального движения по ЭИХ методу [81; 93].

Вначале представим скалярное φ и тензорное $g_{\mu\nu}$ поле в следующем виде:

$$\varphi = \varphi_0 + \varphi, \quad g_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu} + h_{\mu\nu}, \quad (5.5)$$

где φ_0 — асимптотическое фоновое значение скалярного поля вдали от источника, $\eta_{\mu\nu}$ — метрика Минковского, $h_{\mu\nu}$ и φ — малые возмущения тензорного и скалярного полей соответственно. Будем считать φ_0 постоянной величиной,

хотя в общем случае это и неверно и $\varphi_0(t)$ зависит от времени t . Однако, поскольку, в данной работе рассматривается динамическая локальная шкала времени много меньшая характерной шкалы изменения φ_0 , то, следовательно, можно считать, что φ_0 не изменяется.

Скалярный потенциал $V(\varphi)$ представим в виде разложения Тейлора относительно фонового значения скалярного поля φ_0 в следующем виде:

$$V(\varphi) = V_0 + V'\varphi + \frac{V''\varphi^2}{2!} + \frac{V'''\varphi^3}{3!} \dots \quad (5.6)$$

тогда его производная по отношению к φ примет вид: $V_\varphi = V' + V''\varphi + V'''\varphi^2/2$; а масса скалярного поля может быть выражена следующим образом: $m_\varphi^2 = [2V_0 - V' - (1 + \varphi_0)\varphi_0 V'']/3$ [55].

Таким образом, ЭИХ лагранжиан принимает следующим вид:

$$\begin{aligned} L^{rel}(\mathbf{R}, \mathbf{V}) \equiv \mu^{-1} L_O^{rel}(\mathbf{R}, \mathbf{V}) = & \frac{1}{2} \mathbf{V}^2 + \frac{GM}{R} \frac{1}{(1 + \varphi_0)} \left(1 - \frac{\varphi_0}{3} e^{-m_\varphi R} \right) + \\ & + \frac{1}{8} (1 - 3\mathbf{v}) \frac{\mathbf{V}^4}{c^2} + \frac{GM}{2Rc^2} \left[\frac{1}{(1 + \varphi_0)} \left(3 + \mathbf{v} + \frac{\varphi_0}{3} e^{-m_\varphi R} (1 - \mathbf{v}) \right) \mathbf{V}^2 + \right. \\ & \left. + \frac{1}{(1 + \varphi_0)} \left(1 - \frac{\varphi_0}{3} e^{-m_\varphi R} \right) \mathbf{v} (\mathbf{N} \cdot \mathbf{V})^2 - \frac{GM}{R} \frac{9e^{2m_\varphi R} - \varphi_0(6e^{m_\varphi R} + 1)}{(3e^{m_\varphi R} - \varphi_0)^2} \right], \quad (5.7) \end{aligned}$$

где $\mathbf{R} \equiv \mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2$, $\mathbf{V} = \mathbf{v}_1 - \mathbf{v}_2$, m, m' — массы пульсара и компаньона, $M = m + m'$ — общая масса, $\mu = \frac{mm'}{m+m'}$ — приведенная масса, $\mathbf{v} = \frac{\mu}{M}$, \mathbf{N} — единичный вектор в направлении излучения в системе отсчета, связанной с пульсаром.

С помощью данного лагранжиана можно записать четыре интеграла движения (энергия системы E и момент импульса \mathbf{J}), поскольку он инвариантен относительно сдвигов во времени и пространственного вращения:

$$E = \mathbf{V} \cdot \frac{\partial L^{rel}}{\partial \mathbf{V}} - L^{rel}, \quad \mathbf{J} = \mathbf{R} \times \frac{\partial L^{rel}}{\partial \mathbf{V}}. \quad (5.8)$$

Используя выражение (5.7), можно представить энергию и момент импульса в следующем виде:

$$E = \frac{1}{2} \mathbf{V}^2 - \frac{GM}{R} \frac{1}{(1+\varphi_0)} \left(1 - \frac{\varphi_0}{3} e^{-m_\varphi R} \right) + \frac{3}{8} (1 - 3\nu) \frac{V^4}{c^2} \quad (5.9)$$

$$+ \frac{GM}{2Rc^2} \left[\frac{1}{(1+\varphi_0)} \left(3 + \nu + \frac{\varphi_0}{3} e^{-m_\varphi R} (1 - \nu) \right) \mathbf{V}^2 \right. \quad (5.10)$$

$$+ \left. \frac{(\mathbf{N} \cdot \mathbf{V})^2}{(1+\varphi_0)} \left(1 - \frac{\varphi_0}{3} e^{-m_\varphi R} \right) \nu \right. \quad (5.11)$$

$$+ \left. \frac{GM}{R} \frac{9e^{2m_\varphi R} - \varphi_0(6e^{m_\varphi R} + 1)}{(3e^{m_\varphi R} - \varphi_0)^2} \right], \quad (5.12)$$

$$\mathbf{J} = \mathbf{R} \times \mathbf{V} \left[1 + \frac{1}{2} (1 - 3\nu) \frac{V^2}{c^2} \right. \quad (5.13)$$

$$\left. + \frac{GM}{Rc^2} \frac{1}{(1+\varphi_0)} \left(3 + \nu + \frac{\varphi_0}{3} e^{-m_\varphi R} (1 - \nu) \right) \right]. \quad (5.14)$$

То, что существует первый интеграл (5.13), означает, что компоненты системы будут двигаться в координатной плоскости. В связи с этим далее будет удобно перейти к полярным координатам $\{R, \theta\}$: $R_x = R \cos \theta$, $R_y = R \sin \theta$ и $R_z = 0$. Тогда используем следующие обозначения:

$$\mathbf{V}^2 = \left(\frac{dR}{dt} \right)^2 + R^2 \left(\frac{d\theta}{dt} \right)^2, \quad (5.15)$$

$$|\mathbf{R} \times \mathbf{V}| = R^2 \frac{d\theta}{dt}, \quad (5.16)$$

$$(\mathbf{N} \cdot \mathbf{V}) = \frac{dR}{dt}, \quad (5.17)$$

и, пренебрегая всеми членами до порядка $\left(\frac{v}{c}\right)^2$, мы можем представить уравнения относительного движения в полярных координатах с помощью выражений для первых интегралов (5.9)-(5.13):

$$\left(\frac{dR}{dt} \right)^2 = A + \frac{2B}{R} + \frac{C}{R^2} + \frac{D}{R^3}, \quad (5.18)$$

$$\frac{d\theta}{dt} = \frac{H}{R^2} + \frac{I}{R^3}, \quad (5.19)$$

где

$$A = 2E \left[1 + \frac{3}{2} (3\nu - 1) \frac{E}{c^2} \right], \quad (5.20)$$

$$\begin{aligned}
B &= GM \frac{1}{(1 + \varphi_0)} \left\{ \left[1 - \frac{\varphi_0}{3} e^{-m_\varphi R} \right] \right. \\
&\quad \left. + \left[7\nu - 6 - \frac{\varphi_0}{3} e^{-m_\varphi R} (7\nu - 2) \right] \frac{E}{c^2} \right\}, \tag{5.21}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
C &= -J^2 \left[1 + 2(3\nu - 1) \frac{E}{c^2} \right] \\
&+ \left\{ \frac{1 - \frac{\varphi_0}{3} e^{-m_\varphi R}}{(1 + \varphi_0)^2} \left[5\nu - 9 - \frac{\varphi_0}{3} e^{-m_\varphi R} (5\nu - 1) \right] \right. \\
&\quad \left. - \frac{9e^{2m_\varphi R} - \varphi_0(6e^{m_\varphi R} + 1)}{(3e^{m_\varphi R} - \varphi_0)^2} \right\} \frac{G^2 M^2}{c^2}, \tag{5.22}
\end{aligned}$$

$$D = \frac{1}{(1 + \varphi_0)} \left[-3\nu \left(1 - \frac{\varphi_0}{3} e^{-m_\varphi R} \right) + 8 \right] \frac{GMJ^2}{c^2}, \tag{5.23}$$

$$H = J \left[1 + (3\nu - 1) \frac{E}{c^2} \right], \tag{5.24}$$

$$I = \frac{1}{(1 + \varphi_0)} \left[2\nu \left(1 - \frac{\varphi_0}{3} e^{-m_\varphi R} \right) - 4 \right] \frac{GMJ}{c^2}. \tag{5.25}$$

Следуя методу, описанному в работе [60], решим эти уравнения и получим выражение для изменения долготы периастра:

$$\dot{\omega} = n(K - 1), \tag{5.26}$$

где n является средним движением:

$$\begin{aligned}
n &= \frac{(-2E)^{3/2}(1+\varphi_0)}{GM \left(1 - \frac{\varphi_0}{3} \right)} \left\{ 1 - \frac{1}{4 \left(1 - \frac{\varphi_0}{3} \right)} \right. \\
&\quad \left. \times \left[\nu - 15 - \frac{\varphi_0}{3} (\nu + 1) \right] \frac{E}{c^2} - \frac{GM\varphi_0}{2E(1+\varphi_0)} m_\varphi \right\}, \tag{5.27}
\end{aligned}$$

$$K = \frac{H}{n(a'')^2 \sqrt{1 - e_\theta^2}}, \tag{5.28}$$

где e_θ — эффективный эксцентриситет:

$$e_\theta^2 = 1 + \frac{2E(1+\varphi_0)^2}{G^2M^2\left(1-\frac{\varphi_0}{3}\right)^2} \quad (5.29)$$

$$\times \left\{ 1 + \left[\frac{17}{2}\nu - \frac{7}{2} - \frac{4}{1-\frac{\varphi_0}{3}} \left[2\nu + 1 - \frac{\varphi_0}{3} (2\nu - 1) \right] \right] \frac{E}{c^2} \right\} \left\{ J^2 + \left[\frac{1-\frac{\varphi_0}{3}}{(1+\varphi_0)^2} \left[-7 - \frac{\varphi_0}{3} \right] \right. \right. \quad (5.30)$$

$$\left. + \frac{9-7\varphi_0}{9\left(1-\frac{\varphi_0}{3}\right)^2} \right] \frac{G^2M^2}{c^2} \right\} + \frac{2\varphi_0(1+\varphi_0)J^2}{2GM\left(1-\frac{\varphi_0}{3}\right)^2} m_\varphi, \quad (5.31)$$

$$+ \frac{2\varphi_0(1+\varphi_0)J^2}{2GM\left(1-\frac{\varphi_0}{3}\right)^2} m_\varphi, \quad (5.32)$$

и a'' — эффективная большая полуось:

$$a'' = -\frac{GM}{2E(1+\varphi_0)} \left[1 - \frac{\varphi_0}{3} \right] \left\{ 1 - \left[1 - 3\nu \right] \frac{E}{2c^2} \right\} \quad (5.33)$$

$$+ \left(\frac{GM}{2E(1+\varphi_0)} \right)^2 \left[1 - \frac{\varphi_0}{3} \right] \frac{2\varphi_0}{3} m_\varphi. \quad (5.34)$$

ППК формализм предполагает разложение по малой величине v^2/c^2 . Однако помимо этой в данных выражениях присутствует и другая малая величина $m_\varphi R \ll 1$, по которому также следует произвести разложение в ряд Тейлора. Вследствие этого возможно пренебречь членами вида $\frac{m_\varphi}{c^2}$, возможно также использовать разложение в ряд Тейлора функции $e^{-m_\varphi R}$. Параметр $m_\varphi R$ отвечает за описание ускоренного расширения Вселенной в гибридной $f(R)$ -гравитации, поэтому влияние этого параметра должно быть заметно на масштабах значительно превышающих расстояния между компонентами двойных систем. Далее будет наглядно показано, почему слагаемое содержащее только массу скалярного поля обязательно должно быть рассмотрено.

В итоге подставим выражения (5.27, 5.28, 5.29 и 5.33) в (5.26), а после оставим только слагаемые до первого порядка малости, после чего получим изменение долготы периастра:

$$\dot{\omega} = \frac{(GM)^{2/3} \pi (2\pi)^{2/3}}{c^2 P_b^{5/3} (1-e^2)} \frac{(1+\varphi_0)^{4/3}}{\left(1-\frac{\varphi_0}{3}\right)^{4/3}} \left[\frac{1-\frac{\varphi_0}{3}}{(1+\varphi_0)^2} \left[7 + \frac{\varphi_0}{3} \right] - \frac{9-7\varphi_0}{9\left(1-\frac{\varphi_0}{3}\right)^2} \right] - \frac{(GM)^{1/3} 4\varphi_0 (4^2\pi)^{1/3}}{3P_b^{1/3} (1+\varphi_0)^{1/3} \left(1-\frac{\varphi_0}{3}\right)^{2/3}} m_\varphi. \quad (5.35)$$

Покажем, что предположение о том, что важно оставить первый порядок разложения по массе скалярного поля, действительно выполняется. Для этого оценим слагаемые в получившемся выражении, а также массу скалярного поля. Из выражения $m_\varphi R \ll 1$ можно найти нижний предел на этот параметр, используя в качестве R - расстояние между телами в двойной системе. Для примера возьмём PSR J0737-3039 на основе его данных получим: $m_\varphi \ll 2,3557 \times 10^{-9}$. Оценим теперь оба слагаемых в полученном выше выражении, для этого разделим второе на первое и получим:

$$\frac{4^{4/3} c^2 P_b^{4/3} (1-e^2)}{3\pi^{4/3} (GM)^{1/3}} \frac{\varphi_0 m_\varphi \left(1 - \varphi_0/3\right)^{2/3}}{(1+\varphi_0)^{5/3} \left(\frac{1-\varphi_0/3}{(1+\varphi_0)^2} \left(7+\varphi_0/3\right) - \frac{9-7\varphi_0}{9(1\varphi_0/3)^2}\right)} \sim \quad (5.36)$$

$$\sim 10^{15} \frac{\varphi_0 m_\varphi \left(1 - \varphi_0/3\right)^{2/3}}{(1+\varphi_0)^{5/3} \left(\frac{1-\varphi_0/3}{(1+\varphi_0)^2} \left(7+\varphi_0/3\right) - \frac{9-7\varphi_0}{9(1\varphi_0/3)^2}\right)} \ll \quad (5.37)$$

$$\ll 2 \cdot 10^6 \frac{\varphi_0 \left(1 - \varphi_0/3\right)^{2/3}}{(1+\varphi_0)^{5/3} \left(\frac{1-\varphi_0/3}{(1+\varphi_0)^2} \left(7+\varphi_0/3\right) - \frac{9-7\varphi_0}{9(1\varphi_0/3)^2}\right)} \ll 20. \quad (5.38)$$

Здесь для получившегося отношения была помимо оценки массы скалярного поля ещё и ограничение для фонового значения скалярного поля, полученное из Солнечной системы (4.93). Основной вывод, который показывает нам данная оценка заключается в том, что заранее только исходя из малости массы скалярного поля нельзя отбросить второе слагаемое, поэтому его также нужно рассматривать. Однако отметим, что слагаемые содержащие массу скалярного поля в более высокой степени уже будут давать заметно меньший вклад, нежели первое слагаемое, поэтому включать в рассмотрение ещё и их большого смысла нет.

5.0.3 ППК параметры s и r

Рассмотрим теперь параметры, связанные с задержкой Шапиро. Начнём с параметра s , равного синусу угла наклона орбиты $\sin i$.

Запишем третий закон Кеплера для данной двойной системы:

$$a^3(2\pi/P_b)^2 = G^{eff}m, \quad (5.39)$$

здесь a — большая полуось орбиты в системе центра масс, G^{eff} — эффективная гравитационная постоянная [55]:

$$G^{eff} = \frac{G}{(1+\varphi_0)} \left(1 - \frac{\varphi_0}{3}e^{-m_\varphi R}\right). \quad (5.40)$$

В данной работе рассматривается случай лёгкого скалярного поля $m_\varphi R \ll 1$. Далее, используя третий закон Кеплера для гибридной f(R)-гравитации (5.39), найдём большую полуось орбиты a :

$$a = \left(\frac{GM P_b^2}{4\pi^2(1+\varphi_0)}\right)^{1/3} \left(1 - \frac{\varphi_0}{3}\right)^{1/3}. \quad (5.41)$$

Выразим большую полуось орбиты пульсара относительно центра масс системы как $a_1 = \frac{m_2 a}{M} \equiv \frac{cx}{\sin i}$, тогда, с использованием выражения (5.41), получим:

$$s = \sin i = \frac{cxM}{m_2 a} = \frac{cx(4\pi^2)^{1/3} M^{2/3}}{G^{1/3} P_b^{2/3} m_2} \left(\frac{1+\varphi_0}{1-\frac{\varphi_0}{3}}\right)^{1/3}. \quad (5.42)$$

Далее вычислим следующий параметр задержки Шапиро r . Для того, чтобы получить аналитическое выражение для этого параметра, необходимо использовать уравнение геодезической:

$$-1 + h_{00}^{(2)} + \left(\delta_{ij} + h_{ij}^{(2)}\right) u^i u^j = 0, \quad (5.43)$$

где

$$h_{00}^{(2)} = \frac{2}{c^2} G^{eff} \frac{M}{r}, \quad (5.44)$$

$$h_{ij}^{(2)} = \frac{2}{c^2} G^{eff} \frac{M}{r} \delta_{ij} \quad (5.45)$$

- возмущения метрики до порядка $O(2)$ [55], δ_{ij} — символ Кронекера. Также необходимо учесть, что $u^\mu = dx_a^\mu/d\tau_a$ — четырехскорость a -ой частицы, $d\tau = \sqrt{-ds^2}/c$, $ds^2 = g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu$ — интервал.

Таким образом, (5.43) принимает вид:

$$-1 + \frac{2}{c^2} G^{eff} \frac{m_2}{r} + \left(1 + \frac{2}{c^2} G^{eff} \gamma_{PPN} \frac{m_2}{r} \right) |\mathbf{u}|^2 = 0, \quad (5.46)$$

где

$$\gamma_{PPN} = \frac{\frac{\varphi_0}{1 + \frac{\varphi_0}{3} e^{-m_\varphi R}}}{\frac{\varphi_0}{1 - \frac{\varphi_0}{3} e^{-m_\varphi R}}} \quad (5.47)$$

— эффективный постньютоновский параметр γ [55].

Для фотона, испущенного в точке \mathbf{x}_e в направлении \mathbf{n} в момент времени t_e , возможно описать его траекторию с учётом постньютоновских (ПН) поправок $x_{PN}^i(t)$ следующим образом:

$$x^i(t) = x_e^i + n^i (t - t_e) + x_{PN}^i(t). \quad (5.48)$$

Используя тождество

$$|\mathbf{u}|^2 = 1 + 2 \left(\mathbf{n} \cdot \frac{d\mathbf{x}_{PN}(t)}{dt} \right) = 1 + 2 \frac{dx_{PN}^{\parallel}(t)}{dt} + O(c^4), \quad (5.49)$$

мы получим

$$\frac{dx_{PN}^{\parallel}(t)}{dt} = -\frac{1}{c^2} G^{eff} (1 + \gamma_{PPN}) \frac{m_2}{r}. \quad (5.50)$$

Тогда время прохождения фотона от \mathbf{x}_e до \mathbf{x} и обратно будет равно:

$$\Delta t = \frac{2}{c} |\mathbf{x} - \mathbf{x}_e| - \frac{1}{c^3} \int_{t_e}^t G_{PPN}^{eff} (1 + \gamma_{PPN}) \frac{m_2}{r} dt', \quad (5.51)$$

и параметр r из задержки Шапиро, соответственно имеет вид [59; 97]:

$$r = \frac{Gm_2}{c^3 (1 + \varphi_0)}. \quad (5.52)$$

Ограничения из наблюдательных данных

Теперь проведём проверку гибридной $f(R)$ - гравитации, используя данные от двойных систем с пульсаром. Для этого мы будем использовать две

системы: первая система - это уже упоминавшийся двойной пульсар PSR J0737-3039 [103], вторая - PSR J1903+0327 [105], состоящая из звезды главной последовательности и пульсара.

Отметим важную деталь относительно системы PSR J0737-3039, на которой не заострялось внимание в предыдущей главе. Данная система обладает малым, однако, всё же отличным от нуля эксцентриситетом, ранее этот двойной пульсар рассматривался в контексте квазикруговых систем, однако, правильнее учитывать наличие эксцентриситета. Так как оба компонента системы PSR J0737-3039 являются пульсарами возможно измерить большую полуось орбиты каждого компонента, и как следствие найти отношение масс компонент системы:

$$\frac{a_2}{a_1} = \frac{m_1}{m_2} = R. \quad (5.53)$$

Таблица 3 — Параметры PSR J0737-3039 [103]

Параметр	Физический смысл	Экспериментальное значение
$P_b(day)$	орбитальный период	0.10225156248(5)
e	эксцентриситет	0.08777775(9)
$x(s)$	проекция большой полуоси орбиты пульсара	1.415032(1)
$\dot{\omega}(deg/yr)$	вековое изменение долготы периастра	16.89947(68)
\dot{P}_b	изменение орбитального периода	$-1.252(17) \times 10^{-12}$
s	параметр задержки Шапиро	0.99974^{+16}_{-39}
$r(\mu s)$	параметр задержки Шапиро	6.21(33)
$R = \frac{m_1}{m_2}$	отношение масс	1.0714(11)

Здесь, как ранее было упомянуто, важно отделять вклад кинематических эффектов в изменение орбитального периода \dot{P}_b . Для проверки гибридной $f(R)$

гравитации использовался метод, первоначально предложенный в работе [59]. На двумерной плоскости, где по оси абсцисс отложены всевозможные массы пульсара m_1 , по оси ординат – значения массы компаньона m_2 , строятся кривые, каждая из которых задаётся ППК параметром. Для успешного прохождения теста все кривые должны пересекаться в пределах погрешности, точка пересечения при этом определяет массы пульсара и компаньона. Если кривые не пересекаются, то это говорит о том, что модель не работает при данных значениях параметров теории.

В данной главе были получены аналитические выражения для 4 ППК параметров: $\dot{\omega}$, \dot{P}_b , r , s . Далее используя наблюдательные данные системы PSR J0737-3039 (см. Таблицу 3), в плоскости (m_1, m_2) были нарисованы 5 кривых: 4 соответствуют 4 ППК параметрам и одна отношению масс (5.53). Эти кривые должны пересекаться в одной точке с учётом погрешности наблюдений. Таким образом меняя значения φ_0 и m_φ возможно найти предельные значения этих параметров, при которых кривые перестают пересекаться - это и будут ограничения накладываемые на эти параметры в гибридной $f(R)$ гравитации. Сами ограничения получились следующими: $\varphi_0 < 0.001$ and $\frac{\varphi_0 m_\varphi}{(1+\varphi)^{\frac{1}{3}}(1-\frac{\varphi_0}{3})^{\frac{2}{3}}} < 1.3 \times 10^{-17}$. К сожалению, нам не удалось наложить ограничения на массу скалярного поля отдельно, только на комбинацию параметров, указанную выше. Однако мы получили предсказания для масс компонентов системы в рамках гибридной $f(R)$ -гравитации: $1.3374 M_\odot < m_1 < 1.3440 M_\odot$ и $1.2482 M_\odot < m_2 < 1.2537 M_\odot$. В то же время ОТО предсказывает следующие значения масс для этой системы: $1.3374 M_\odot < m_1 < 1.3388 M_\odot$ и $1.2482 M_\odot < m_2 < 1.2496 M_\odot$ [103]. Как мы видим, наличие скалярного поля увеличивает возможные наблюдаемые массы компонентов системы.

Другая выбранная система – PSR J1903+0327, она обладает большим эксцентриситетом и для неё с высокой точностью получены 3 ППК параметра. К сожалению, в этой системе невозможно выделить ту часть изменения орбитального периода, которая связана с гравитационным излучением. Поэтому наш тест основан на параметрах $\dot{\omega}$, r , s , а также на отношении масс, которое было получено теоретически независимым путем [105]. Используя наблюдательные данные системы PSR J1903+0327 (см. Таблицу 4), мы получили следующие ограничения: $\varphi_0 < 0.02$ и $\frac{\varphi_0 m_\varphi}{(1+\varphi)^{\frac{1}{3}}(1-\frac{\varphi_0}{3})^{\frac{2}{3}}} < 2 \times 10^{-20}$. Графический результат наших исследований отображен на рис. 5.2. Как мы видим ограничения на φ_0 из данных системы PSR J0737-3039 лучше, чем ограничения из PSR J1903+0327.

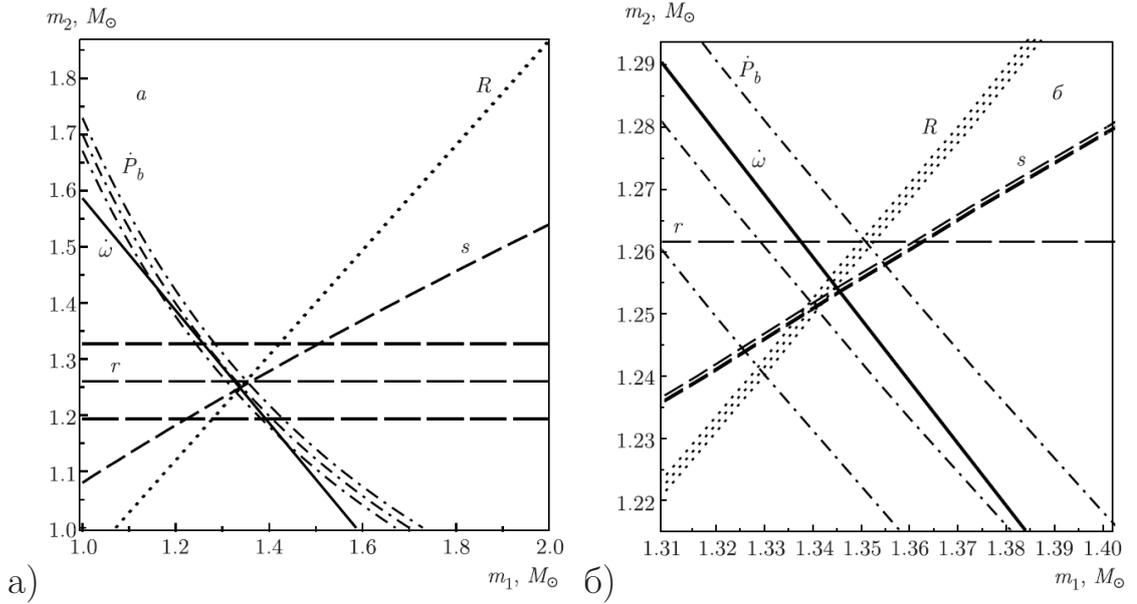


Рисунок 5.1 — Зависимость массы компаньона от массы пульсара в системе PSR J0737-3039. Каждая кривая указана с учетом погрешности $\pm 1\sigma$ (ширина кривой). а) случай ОТО; б) случай гибридной $f(R)$ -гравитации на граничных значениях параметров модели.

В этой системе мы также получили предсказания масс компонентов системы: $1.021 M_{\odot} < m_{mss} < 1.08 M_{\odot}$ и $1.646 M_{\odot} < m_p < 1.785 M_{\odot}$ (m_p — масса пульсара, m_{mss} — масса компаньона). Верхний предел также будет превышать верхний предел, предсказываемый ОТО: $1.021 M_{\odot} < m_{mss} < 1.037 M_{\odot}$ и $1.646 M_{\odot} < m_p < 1.688 M_{\odot}$ [105].

5.0.4 Обсуждение результатов главы

В данной главе был рассмотрен параметризованный посткеплевский формализм применительно к гибридной метрической-Палатини $f(R)$ -гравитации. Были получены аналитические выражения для трех ППК параметров: $\dot{\omega}$, r , s . Выражение для ППК параметра \dot{P}_b было получено в предыдущей главе. Для получения ограничений использовались данные от систем PSR J0737-3039 и PSR J1903+0327. В отличие от квазикругового случая здесь невозможно получить аналитическое решение некоторых уравнений, в частности (4.13), не прибегая к приближению малой массы скалярного поля. Было показано, что в отличие от квазикругового случая в выражения для

Таблица 4 — Параметры PSR J1903+0327

Параметр	Физический смысл	Экспериментальное значение
$P_b(day)$	орбитальный период	95.174118753(14)
e	эксцентриситет	0.436678409(3)
$x(lt - s)$	проекция большой полуоси орбиты пульсара	105.5934643(5)
$\dot{\omega}(deg/yr)$	вековое изменение долготы периастра	0.0002400(2)
s	параметр задержки Шапиро	0.9760(15)
$r(\mu s)$	параметр задержки Шапиро	1.03(3)
$R = \frac{m_p}{m_{mss}}$	отношение масс	1.55(20)

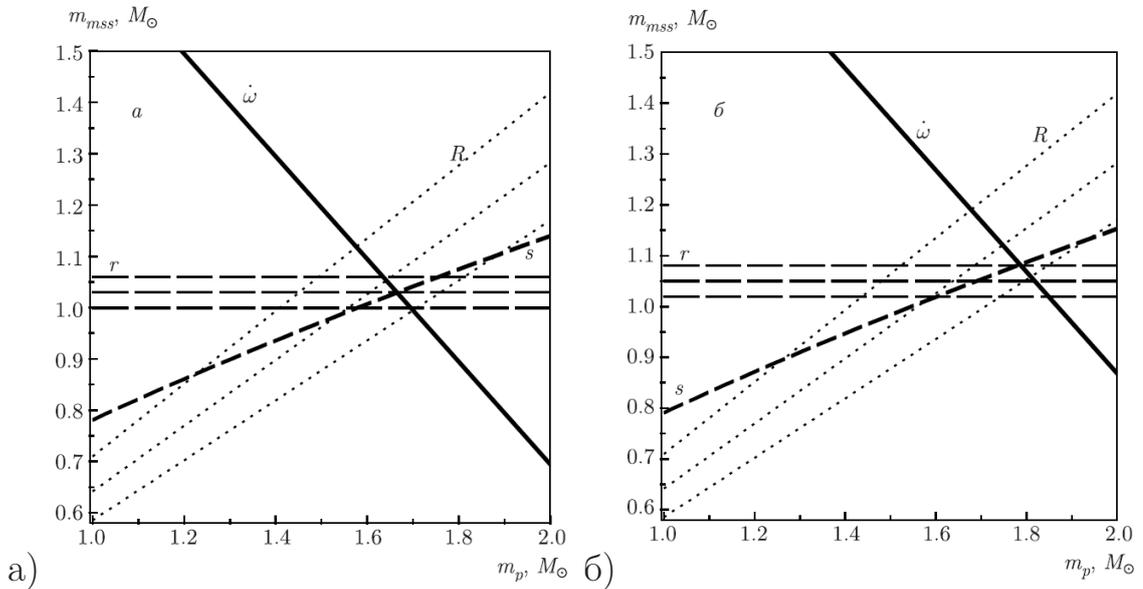


Рисунок 5.2 — Зависимость массы компаньона от массы пульсара в системе PSR J1903+0327. Каждая кривая указана с учетом погрешности $\pm 1\sigma$ (ширина кривой). а) случай ОТО; б) случай гибридной $f(R)$ -гравитации на граничных значениях параметров модели.

изменения орбитального периода к квадрупольному слагаемому добавятся монопольное и монопольно-квадрупольное. Однако ни в одном из случаев нет дипольного члена.

Было ограничено фоновое значение скалярного поля и комбинация параметров, содержащая массу скалярного поля. Ограничение для фонового значения скалярного поля φ_0 в случае орбиты с ненулевым эксцентриситетом ($\varphi < 0.001$) получаются точнее, чем в квазикруговом случае ($\varphi < 0.0131$ см. рис. 4.1), однако, в случае орбит с эксцентриситетом нельзя получить ограничения на массу скалярного поля.

Также были получены массы компонентов систем PSR J0737 3039 и PSR J1903 + 0327 в рамках гибридной $f(R)$ - гравитации. Было показано, что гибридная $f(R)$ - гравитация предсказывает массы большие, чем те, что получаются в рамках ОТО. Этот результат хорошо согласуется с работой [68], где было показано, что в гибридной $f(R)$ -гравитации нейтронные звезды тяжелее, чем в ОТО.

Заключение

Данная работа посвящена изучению инфляции в модифицированных теориях гравитации, а именно частных случаев теории Хорндески, а также анализу данных моделей. Эту диссертацию можно разделить на две части. Первая посвящена изучению инфляции в скалярно-тензорной теории гравитации с неминимальной кинетической связью, вторая посвящена изучению жизнеспособности гибридной $f(R)$ -гравитации, как частного случая теории Хорндески, в современной Вселенной с использованием данных двойных систем с пульсаром.

В Главе 1 носит вводный характер, в ней была описана теория Хорндески и её частные случаи, рассматриваемые в последующих главах.

Первая часть состоит из Главы 2 и Главы 3. В Главе 2 был получен важный результат, заключающийся в том, что теория инфляции с неминимальным кинетическим членом и $\kappa > 0$ и степенным потенциалом $V = V_0\varphi^\alpha$ не может объяснить современные наблюдательные данные. В частности было показано, что предсказания теории относительно тензорно-скалярного отношения и спектрального индекса не соответствуют последним имеющимся наблюдательным ограничениям (WMAP/PLANCK/BICEP).

В Главе 3 исследовался случай $\kappa < 0$ и $V = 0$ и $V = V_0|\varphi|^{1.5}$, были найдены области начальных значений $\dot{\varphi}$ и H , приводящие к правдоподобной инфляции в 60 ефолдов. В случае с нулевым потенциалом только узкая полоса начальных данных приводит к следующей инфляции, в другом случае к подобной инфляции приводит довольно большая область начальных значений.

В дальнейшем автором планируется провести детальное исследование спектра первичных возмущений для случая $\kappa < 0$ при помощи численных методов, что позволит закрыть вопрос о жизнеспособности данной теории.

Вторая часть работы отражена в Главе 4 и Главе 5. В Главе 4 был показан тест теория Хорндески и её частного случая, гибридной $f(R)$ -гравитация, на данных двойных систем с пульсаром с квазикруговыми орбитами. Аналитически было показано получение выражения для первой производной орбитального периода \dot{P}_b . А также показаны ограничения на свободные параметры этих моделей. Было получено выражение для \dot{P}_b в случае орбит с ненулевым экс-

центриситетом в гибридной $f(R)$ -гравитации в приближении маломассивного скалярного поля.

В Главе 5 была проведена проверка гибридной $f(R)$ -гравитации на данных двойных систем с пульсаром с ненулевым эксцентриситетом в приближении лёгкого скалярного поля. Были получены аналитические выражения для 3 ППК параметров $\dot{\omega}, r, s$. Также было показано, что гибридная $f(R)$ - гравитация успешно проходит все имеющиеся тесты, основанные на наблюдательных данных от двойных систем с пульсаром. Помимо этого, был сделан важный вывод о том, что ограничение, которое можно получить из этого теста на фоновое значение скалярного поля - лучше, чем аналогичное полученное в случае квазикруговых орбит. Однако из подобного теста не удалось найти ограничение на массу скалярного поля, что возможно сделать из квазикругового случая.

В дальнейшем автором планируется проведение других тестов этих моделей гравитации. Также с накоплением данных от двойных систем с пульсаром и увеличением точности определения параметров орбиты станет возможно улучшить полученные в данной диссертации ограничения на параметры модели.

Благодарности

Автор хотел бы выразить огромную благодарность А.В. Топоренскому и П.И.Дядиной - своим соавторам за конструктивную критику и неоценимую помощь. Также хотел бы выразить признательность своему научному руководителю Попову Сергею Борисовичу.

Также автор хотел бы выразить благодарность Алексееву С.О. за ценные консультации и помощь в организации выступления на семинаре А.Л.Зельманова.

Автор хотел бы выразить огромную благодарность своей семье и в особенности жене за помощь и поддержку в написании данной диссертации.

Список литературы

1. *Feng J. L.* Dark Matter Candidates from Particle Physics and Methods of Detection // Annual Review of Astronomy and Astrophysics. — 2010. — Т. 48, № 1. — С. 495—545.
2. *Li M., Li X., Wang S. e. a.* Dark energy: A brief review // Frontiers of Physics. — 2013. — Т. 8, № 6. — С. 828—846.
3. *Oort J. H.* The force exerted by the stellar system in the direction perpendicular to the galactic plane and some related problems // Bulletin of the Astronomical Institutes of the Netherlands. — 1932. — Т. 6, № 239. — С. 249—287.
4. *Zwicky F.* Die Rotverschiebung von extragalaktischen Nebeln // Helvetica Physica Acta. — 1933. — Т. 6. — С. 110—127.
5. *Vegetti S., Koopmans L. V. E., al. et.* Inference of the cold dark matter substructure mass function at $z = 0.2$ using strong gravitational lenses // Monthly Notices of the Royal Astronomical Society. — 2014. — Т. 442, № 3. — С. 2017—2035.
6. *Markevitch M., Gonzalez A. H., al. et.* Direct Constraints on the Dark Matter Self-Interaction Cross Section from the Merging Galaxy Cluster 1E 0657–56 // The Astrophysical Journal. — 2004. — Т. 606, № 2. — С. 819—824.
7. *Adam G. Riess e. a.* Observational Evidence from Supernovae for an Accelerating Universe and a Cosmological Constant // The Astrophysical Journal. — 1998. — Т. 116, № 3. — С. 1009—1038.
8. *Adam G. Riess e. a.* Type Ia Supernova Discoveries at $z > 1$ from the Hubble Space Telescope: Evidence for Past Deceleration and Constraints on Dark Energy Evolution* // The Astrophysical Journal. — 2004. — Т. 607, № 2. — С. 665—687.
9. *Starobinsky A.* A new type of isotropic cosmological models without singularity // Physics Letters B. — 1980. — Март. — Т. 91, № 1. — С. 99—102.

10. *Starobinsky A.* Dynamics of phase transition in the new inflationary universe scenario and generation of perturbations // *Physics Letters B.* — 1982. — Ноябрь. — Т. 117, № 3/4. — С. 175—178. — URL: <https://ui.adsabs.harvard.edu/abs/1982PhLB..117..175S>.
11. *Guth A. H., Weinberg E. J.* Cosmological consequences of a first-order phase transition in the // *Physical Review D.* — 1981. — Февр. — Т. 23, № 4. — С. 876—885.
12. *Linde A.* A new inflationary universe scenario: A possible solution of the horizon, flatness, homogeneity, isotropy and primordial monopole problems // *Physics Letters B.* — 1982. — Февр. — Т. 108, № 6. — С. 389—393. — URL: <https://ui.adsabs.harvard.edu/abs/1982PhLB..108..389L>.
13. *Albrecht A., Steinhardt P. J.* Cosmology for Grand Unified Theories with Radiatively Induced Symmetry Breaking // *Physical Review Letters.* — 1982. — Апр. — Т. 48, № 17. — С. 1220—1223.
14. *Linde A. D.* Particle physics and inflationary cosmology. — 1990. — URL: <https://ui.adsabs.harvard.edu/abs/1990ppic.book.....L>.
15. *Liddle A. R., Lyth D. H.* *Cosmological Inflation and Large-Scale Structure.* — 2000. — URL: <https://ui.adsabs.harvard.edu/abs/2000cils.book.....L>.
16. *Baumann D.* TASI Lectures on Inflation // arXiv e-prints. — 2009. — Июль. — arXiv:0907.5424. — arXiv: [0907.5424](https://arxiv.org/abs/0907.5424) [[hep-th](https://arxiv.org/abs/0907.5424)]. — URL: <https://ui.adsabs.harvard.edu/abs/2009arXiv0907.5424B>.
17. *Mukhanov V., Chibisov G.* Quantum fluctuations and a nonsingular universe // *Soviet Journal of Experimental and Theoretical Physics Letters.* — 1981. — Май. — Т. 33. — С. 532. — URL: <https://ui.adsabs.harvard.edu/abs/1981JETPL..33..532M>.
18. *Hawking S.* The development of irregularities in a single bubble inflationary universe // *Physics Letters B.* — 1982. — Сент. — Т. 115, № 4. — С. 295—297. — URL: <https://ui.adsabs.harvard.edu/abs/1982PhLB..115..295H>.
19. *Rampei Kimura e. a.* Extended vector-tensor theories // *Journal of Cosmology and Astroparticle Physics.* — 2017. — Т. 2017, № 1. — С. 002.
20. *Hassan S., Rosen R.* Bimetric gravity from ghost-free massive gravity. // *Journal of High Energy Physics.* — 2012. — Т. 2012, № 126.

21. *De Felice A., Tsujikawa S.* f(R) Theories // Living Reviews in Relativity. — 2010. — Т. 13, № 3.
22. *Langlois D. e. a.* Mimetic gravity as DHOST theories // Journal of Cosmology and Astroparticle Physics. — 2019. — Т. 2019, № 2. — С. 036.
23. *Horndeski G. W.* Second-order scalar-tensor field equations in a four-dimensional space // International Journal of Theoretical Physics. — 1974. — Sept. — Vol. 10, no. 6. — P. 363—384.
24. *Dyadina P. I., Avdeev N. A., Alexeyev S. O.* Horndeski gravity without screening in binary pulsars // Monthly Notices of the Royal Astronomical Society. — 2018. — Ноябрь. — Т. 483, № 1. — С. 947—963.
25. *Matsumoto J., Sushkov S. V.* Cosmology with nonminimal kinetic coupling and a Higgs-like potential // Journal of Cosmology and Astroparticle Physics. — 2015. — Ноябрь. — Т. 2015, № 11. — С. 047—047.
26. *Avdeev N. A., Toporensky A. V.* Ruling Out Inflation Driven by a Power Law Potential: Kinetic Coupling Does Not Help // Gravitation and Cosmology. — 2022. — Ноябрь. — Т. 28, № 4. — С. 416—419.
27. *Avdeev N., Toporensky A.* On Viability of Inflation in Nonminimal Kinetic Coupling Theory // Gravitation and Cosmology. — 2021. — Июль. — Т. 27, № 3. — С. 269—274.
28. *Sushkov S. V.* Realistic cosmological scenario with nonminimal kinetic coupling // Physical Review D. — 2012. — Июнь. — Т. 85, № 12. — С. 123520.
29. *Rafkat G., Ruslan M., A. S. A., V. S. S., S. V. M.* Anisotropic cosmological models in Horndeski gravity // Physical Review D. — 2021. — Т. 103, № 10. — С. 104015.
30. *Jiaming S., Taishi K., Taotao Q.* Dark matter candidate induced by Horndeski theory: Dark matter halo and cosmological evolution // Physical Review D. — 2020. — Т. 101, № 2. — С. 024046.
31. *Alberto D.-T., Francisco F., Gustavo N.* Horndeski dark matter and beyond // Physical Review D. — 2018. — Т. 97, № 12. — С. 123524.
32. *Avdeev N. A., Dyadina P. I., Labazova S. P.* Test of Hybrid Metric-Palatini f(R)-Gravity in Binary Pulsars // Journal of Experimental and Theoretical Physics. — 2020. — Октябрь. — Т. 131, № 4. — С. 537—547.

33. *Torres I., Fabris J. C., Piattella O. F.* Classical and quantum cosmology of Fab Four John theories // *Physics Letters B.* — 2019. — Ноябрь. — Т. 798. — С. 135003.
34. *Kase R., Tsujikawa S.* Dark energy in Horndeski theories after GW170817: A review // *International Journal of Modern Physics D.* — 2019. — Т. 28, № 5.
35. *Hohmann M.* Parametrized post-Newtonian limit of Horndeski's gravity theory // *Physical Review D.* — 2015. — Т. 92, № 6. — С. 064019.
36. *Germani C., Kehagias A.* New Model of Inflation with Nonminimal Derivative Coupling of Standard Model Higgs Boson to Gravity // *Physical Review Letters.* — 2010. — Июль. — Т. 105, № 1. — С. 011302.
37. *Germani C., Kehagias A.* Cosmological perturbations in the new Higgs inflation // *Journal of Cosmology and Astroparticle Physics.* — 2010. — Май. — Т. 2010, № 05. — С. 019—019.
38. *Germani C., Watanabe Y.* Addendum: UV-protected (natural) inflation: primordial fluctuations and non-gaussian features // *Journal of Cosmology and Astroparticle Physics.* — 2011. — Июль. — Т. 2011, № 07. — A01—A01.
39. *Germani C., Kehagias A.* Ultraviolet-Protected Inflation // *Physical Review Letters.* — 2011. — Апрель. — Т. 106, № 16. — С. 161302.
40. *Germani C., Watanabe Y., Wintergerst N.* Self-unitarization of New Higgs Inflation and compatibility with Planck and BICEP2 data // *Journal of Cosmology and Astroparticle Physics.* — 2014. — Декабрь. — Т. 2014, № 12. — С. 009—009.
41. *Granda L., Jimenez D.* Slow-roll inflation in scalar-tensor models // *Journal of Cosmology and Astroparticle Physics.* — 2019. — Сентябрь. — Т. 2019, № 09. — С. 007—007.
42. *Tsujikawa S.* Observational tests of inflation with a field derivative coupling to gravity // *Physical Review D.* — 2012. — Апрель. — Т. 85, № 8. — С. 083518.
43. *Горбунов Д., Рубаков В.* Введение в теорию ранней вселенной. Космологические возмущения. — УРСС, 2010.
44. *Collaboration: P., Akrami Y., al et.* Planck 2018 results // *Astronomy Astrophysics.* — 2020. — Сентябрь. — Т. 641. — A10.

45. *Oliveira-Costa e. de.* Significance of the largest scale CMB fluctuations in WMAP // Physical Review D. — 2004. — Т. 69, № 6. — С. 063516.
46. *Collaboration: P., Akrami Y., et.al.* Planck 2018 results VI. Cosmological parameters // Astronomy & Astrophysics. — 2021. — Т. 652, № C4.
47. *Yu P. C., Zeng L., Zhang C., Zhang S.* Improved Constraints on Primordial Gravitational Waves using Observations through the 2018 Observing Season // Physical Review Letters. — 2021. — Окт. — Т. 127, № 15. — С. 151301.
48. *Ade P. A. R., (BICEP/Keck Collaboration) et al.* Improved Constraints on Primordial Gravitational Waves using Planck, WMAP, and BICEP/Keck Observations through the 2018 Observing Season // Physical Review Letters. — 2021. — Т. 127, № 15. — С. 151301.
49. *Bezrukov F., Shaposhnikov M.* The Standard Model Higgs boson as the inflaton // Physics Letters B. — 2008. — Т. 659, № 3. — С. 703—706.
50. *Koshelev A. S., Kumar K. S., Mazumdar A., Starobinsky A. A.* Non-Gaussianities and tensor-to-scalar ratio in non-local R²-like inflation // Journal of High Energy Physics. — 2020. — Июнь. — Т. 2020, № 6.
51. *Gorbunov D., Panin A.* Are R²- and Higgs-inflations really unlikely? // Physics Letters B. — 2015. — Т. 743. — С. 79—81.
52. *Poisson E., Will C. M.* Gravity Newtonian, Post-Newtonian, Relativistic : Newtonian, Post-Newtonian, Relativistic. — imusti. — С. 792.
53. *Will C. M.* Theoretical Frameworks for Testing Relativistic Gravity. II. Parametrized Post-Newtonian Hydrodynamics, and the Nordtvedt Effect // The Astrophysical Journal. — 1971. — Февр. — Т. 163. — С. 611.
54. *Will C. M., Kenneth J. N.* Conservation Laws and Preferred Frames in Relativistic Gravity. I. Preferred-Frame Theories and an Extended PPN Formalism // The Astrophysical Journal. — 1972. — Ноябрь. — Т. 177. — С. 757.
55. *Dyadina P. I., Labazova S. P., Alexeyev S. O.* Post-Newtonian Limit of Hybrid Metric-Palatini f(R)-Gravity // Journal of Experimental and Theoretical Physics. — 2019. — Ноябрь. — Т. 129, № 5. — С. 838—848.

56. *Zhang X., Zhao W., Huang H., Cai Y.* Post-Newtonian parameters and cosmological constant of screened modified gravity // Physical Review D. — 2016. — ИЮНЬ. — Т. 93, № 12. — С. 124003.
57. *Barreira A., Brax P., Clesse S., Li B., Valageas P.* K-mouflage gravity models that pass Solar System and cosmological constraints // Physical Review D. — 2015. — ИЮНЬ. — Т. 91, № 12. — С. 123522.
58. *Hulse R. A., Taylor J. H.* Discovery of a pulsar in a binary system. // apjl. — 1975. — ЯНВ. — Т. 195. — С. L51—L53. — URL: <https://ui.adsabs.harvard.edu/abs/1975ApJ...195L..51H>.
59. *Damour T., Taylor J. H.* Strong-field tests of relativistic gravity and binary pulsars // Physical Review D. — 1992. — МАРТ. — Т. 45, № 6. — С. 1840—1868.
60. *Damour T., Deruelle N.* General relativistic celestial mechanics of binary systems. I. The post-Newtonian motion. // Annales de L'Institut Henri Poincare Section (A) Physique Theorique. — 1985. — ЯНВ. — Т. 43, № 1. — С. 107—132. — URL: <https://ui.adsabs.harvard.edu/abs/1985AIHPA..43..107D>.
61. *Damour T., Deruelle N.* General relativistic celestial mechanics of binary systems. II. The post-Newtonian timing formula. // Annales de L'Institut Henri Poincare Section (A) Physique Theorique. — 1986. — ЯНВ. — Т. 44, № 3. — С. 263—292. — URL: <https://ui.adsabs.harvard.edu/abs/1986AIHPA..44..263D>.
62. *Olmo G. J.* Limit to general relativity in $f(R)$ theories of gravity // Physical Review D. — 2007. — Т. 75, № 2. — С. 023511.
63. *Hu W., Sawicki I.* Models of $f(R)$ cosmic acceleration that evade solar system tests // Physical Review D. — 2007. — Т. 76, № 6. — С. 064004.
64. *Odintsov S., Sáez-Chillón Gómez D., Sharov G.* Is exponential gravity a viable description for the whole cosmological history? // The European Physical Journal C. — 2017. — Т. 77, № 862.
65. *Koivisto T., Kurki-Suonio H.* Cosmological perturbations in the Palatini formulation of modified gravity // Classical and Quantum Gravity. — 2006. — Т. 23, № 2. — С. 023511.

66. *Capozziello S., Harko T., Koivisto T. S., Lobo F. S. N., Olmo G. J.* Wormholes supported by hybrid metric-Palatini gravity // *Physical Review D*. — 2012. — Дек. — Т. 86, № 12. — С. 127504.
67. *Dănilă B., Harko T., Lobo F. S. N., Mak M. K.* Spherically symmetric static vacuum solutions in hybrid metric-Palatini gravity // *Physical Review D*. — 2019. — Т. 99, № 6. — С. 064028.
68. *Danila B., Harko T., Lobo F. S. N., Mak M. K.* Hybrid metric-Palatini stars // *Physical Review D*. — 2017. — Февр. — Т. 95, № 4. — С. 044031.
69. *Capozziello S., Harko T., Koivisto T., Lobo F., Olmo G.* Hybrid Metric-Palatini Gravity // *Universe*. — 2015. — Авг. — Т. 1, № 2. — С. 199—238.
70. *Capozziello S., Harko T., Koivisto T. S., Lobo F. S., Olmo G. J.* Cosmology of hybrid metric-Palatini -gravity // *Journal of Cosmology and Astroparticle Physics*. — 2013. — Апр. — Т. 2013, № 04. — С. 011—011.
71. *Kobayashi T., Yamaguchi M., Yokoyama J.* Generalized G-Inflation: –Inflation with the Most General Second-Order Field Equations– // *Progress of Theoretical Physics*. — 2011. — Сент. — Т. 126, № 3. — С. 511—529.
72. *Matsumoto J., Sushkov S. V.* General dynamical properties of cosmological models with nonminimal kinetic coupling // *Journal of Cosmology and Astroparticle Physics*. — 2018. — Янв. — Т. 2018, № 01. — С. 040—040.
73. *Christos C., J. C. E., Antonio P., M. S. P.* General Second-Order Scalar-Tensor Theory and Self-Tuning // *Physical Review Letters*. — 2012. — Т. 108, № 5. — С. 051101.
74. *Дядина П. И.* Астрофизические следствия скалярно-тензорных моделей и теорий с высшими поправками по кривизне : дис. ... канд. физ.-мат. наук : 01.03.02. — М., 2019. — 112 с.
75. *Granda L. N., Jimenez D. F.* Slow-roll inflation with exponential potential in scalar-tensor models // *The European Physical Journal C*. — 2019. — Сент. — Т. 79, № 9.
76. *Liddle A. R., Lyth D. H.* *Cosmological Inflation and Large-Scale Structure*. — Cambridge University Press, 2000.

77. *Arnowitt R., Deser S., Misner C. W.* Dynamical Structure and Definition of Energy in General Relativity // *Physical Review*. — 1959. — Т. 116, № 5. — С. 1322—1330.
78. *Mishra S. S., Müller D., Toporensky A. V.* Generality of Starobinsky and Higgs inflation in the Jordan frame // *Physical Review D*. — 2020. — Сент. — Т. 102, № 6. — С. 063523.
79. *Авдеев Н. А.* Проявления теории Хорндески в двойных системах с пульсарами: диплом специалиста: 03.05.01. — М., 2018. — 54 с.
80. *Eardley D. M.* Observable effects of a scalar gravitational field in a binary pulsar. // *apjl*. — 1975. — Март. — Т. 196. — С. L59—L62. — URL: <https://ui.adsabs.harvard.edu/abs/1975ApJ...196L..59E>.
81. *Will C. M.* *Theory and Experiment in Gravitational Physics*. — Cambridge University Press, 03.1993.
82. *Poisson E., Will C. M.* *Gravity*. — Cambridge University Press, 05.2014.
83. *Khoury J., Weltman A.* Chameleon Fields: Awaiting Surprises for Tests of Gravity in Space // *Physical Review Letters*. — 2004. — Окт. — Т. 93, № 17. — С. 171104.
84. *Khoury J., Weltman A.* Chameleon cosmology // *Physical Review D*. — 2004. — Февр. — Т. 69, № 4. — С. 044026.
85. *Hinterbichler K., Khoury J.* Screening Long-Range Forces through Local Symmetry Restoration // *Physical Review Letters*. — 2010. — Июнь. — Т. 104, № 23. — С. 231301.
86. *E. Babichev C. D., Ziour R.* k-Mouflage gravity // *International Journal of Modern Physics D*. — 2009. — Т. 18, № 14. — С. 2147—2154.
87. *Vainshtein A.* To the problem of nonvanishing gravitation mass // *Physics Letters B*. — 1972. — Т. 39, № 3. — С. 393—394.
88. *Babichev E., Deffayet C.* An introduction to the Vainshtein mechanism // *Classical and Quantum Gravity*. — 2013. — Т. 30, № 18. — С. 184001.
89. *T. Damour A. P.* The string dilation and a least coupling principle // *Nuclear Physics B*. — 1995. — Т. 423. — С. 532—558.

90. *Casola E. D., Liberati S., Sonogo S.* Nonequivalence of equivalence principles // *American Journal of Physics*. — 2015. — ЯНВ. — Т. 83, № 1. — С. 39–46.
91. *Gao X.* Conserved cosmological perturbation in Galileon models // *Journal of Cosmology and Astroparticle Physics*. — 2011. — ОКТ. — Т. 2011, № 10. — С. 021.
92. *Abhay Ashtekar B. B., Kesavan A.* Gravitational Waves from Isolated Systems: Surprising Consequences of a Positive Cosmological Constant // *Physical Review Letters*. — 2016. — Февр. — Т. 116, № 5. — С. 051101.
93. *Einstein A., Infeld L., Hoffmann B.* The Gravitational Equations and the Problem of Motion // *The Annals of Mathematics*. — 1938. — ЯНВ. — Т. 39, № 1. — С. 65.
94. *Hou S., Gong Y.* Constraints on Horndeski theory using the observations of Nordtvedt effect, Shapiro time delay and binary pulsars // *The European Physical Journal C*. — 2018. — Март. — Т. 78, № 247. — С. 16.
95. *Alexander Saffer N. Y., Yagi K.* The gravitational wave stress–energy (pseudo)-tensor in modified gravity // *Classical and Quantum Gravity*. — 2018. — Февр. — Т. 35, № 5. — С. 055011.
96. *Petrov A. N.* *Classical and Quantum Gravity Research The Chapter 2*. — Nova Science Publishers, N.Y., 2008. — 79 - 160.
97. *Alsing J., Berti E., Will C. M., Zaslauer H.* Gravitational radiation from compact binary systems in the massive Brans-Dicke theory of gravity // *Physical Review D*. — 2012. — Март. — Т. 85, № 6. — С. 064041.
98. *Xing Zhang T. L., Zhao W.* Gravitational radiation from compact binary systems in screened modified gravity // *Physical Review D*. — 2017. — Т. 95, № 10. — С. 104027.
99. *Morse P., Feshbach H.* *Methods of Theoretical Physics*. (McGraw-Hill, New York). — 1953. — 260 p.
100. *Eric Poisson A. P., Vega I.* *The Motion of Point Particles in Curved Spacetime*. — 2011.

101. *Freire P. C. C., et.al.* The relativistic pulsar–white dwarf binary PSR J1738+0333 – II. The most stringent test of scalar–tensor gravity // Monthly Notices of the Royal Astronomical Society. — 2012. — Т. 423, № 4. — С. 3328–3343.
102. *Antoniadis J., al. et.* The relativistic pulsar–white dwarf binary PSR J1738+0333 – I. Mass determination and evolutionary history // Monthly Notices of the Royal Astronomical Society. — 2012. — Т. 423, № 4. — С. 3316–3327.
103. *Kramer M.* [и др.]. Tests of General Relativity from Timing the Double Pulsar // Science. — 2006. — Окт. — Т. 314, № 5796. — С. 97–102.
104. *Bertotti B., Iess L., Tortora P.* A test of general relativity using radio links with the Cassini spacecraft. // Nature. — 2003. — Т. 425. — С. 374–376.
105. *Freire P. C. C.* [и др.]. On the nature and evolution of the unique binary pulsar J1903 // Monthly Notices of the Royal Astronomical Society. — 2011. — Март. — Т. 412, № 4. — С. 2763–2780.