МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ

имени М. В. ЛОМОНОСОВА

На правах рукописи

Удалов Артем Сергеевич

Численные методы повышенного порядка точности в механике трещин

Специальность 1.1.8. – Механика деформируемого твердого тела

АВТОРЕФЕРАТ

диссертации на соискание ученой степени

кандидата физико-математических наук

Москва – 2024

Работа выполнена на кафедре газовой и волновой динамики механико-математического факультета Московского государственного университета имени М.В. Ломоносова.

Научный руководитель:

Звягин Александр Васильевич

доктор физико-математических наук, профессор

Официальные оппоненты:

Димитриенко Юрий Иванович

доктор физико-математических наук, профессор, Московский государственный технический университет имени Н.Э. Баумана, кафедра «Вычислительная математика и математическая физика», заведующий кафедрой

Федулов Борис Никитович

доктор физико-математических наук, Московский государственный университет имени М. В. Ломоносова, механико-математический факультет, кафедра теории пластичности, профессор

Боронин Сергей Андреевич

кандидат физико-математических наук, Сколковский институт науки и технологий, лаборатория цифрового моделирования многофазных систем в нефтегазовой индустрии, руководитель лаборатории

Защита состоится 19 апреля 2024 года в 15 часов 00 минут на заседании диссертационного совета МГУ.011.6 Московского государственного университета им. М.В. Ломоносова по адресу: 119192, Москва, Мичуринский проспект, д. 1, НИИ механики МГУ, к. 240.

E-mail: pvchist@mail.ru

С диссертацией можно ознакомиться в отделе диссертаций научной библиотеки МГУ имени М.В. Ломоносова (Ломоносовский проспект, д. 27) и на портале: https://dissovet.msu.ru/dissertation/2828

Автореферат разослан «   » марта 2024 года.

Ученый секретарь
диссертационного совета МГУ.011.6,
кандидат физико-математических наук

П.В. Чистяков

Актуальность и степень проработанности темы исследования.

Прочность материалов в смысле их «трещиностойкости» - одна из основных областей практического приложения механики разрушения. Разрушение тел, связанное с зарождением и развитием в них трещин, для некоторых материалов называется хрупким. Для таких материалов область пластических деформаций пренебрежимо мала по сравнению с размерами трещины. Для большинства конструкционных материалов разрушение не является хрупким. Тем не менее, если размеры области пластических деформаций много меньше размеров трещины, упругое решение достаточно точно описывает поле напряжений вне пластической области. При этом пластические свойства учитываются в механике линейного разрушения физическими константами материала. Эти константы (например, коэффициенты интенсивности напряжений) определяются в экспериментах с учетом пластического поведения материала на конце трещины при её росте. Это позволяет применять методы линейной механики разрушения в тех случаях, когда характерные размеры областей развитых пластических деформаций малы по сравнению с размерами трещин. Дополнительный учет дефектов в математической модели описания среды позволяет корректировать предельно допустимые значений напряжений и деформаций для конструкционных материалов и более точно предсказывать поведение тех или иных сред.

Для предсказательного моделирования сред во всех этих случаях требуется поставить и решить многопараметрические масштабные задачи. Классическим подходом решения подобного рода задач можно считать так называемую линейную механику разрушения, то есть теорию трещин в рамках линейно упругого приближения. Такой подход позволяет делать выводы о возможном разрушении тел на основе малого количества констант материала, геометрии тела, а также конфигурации нагрузок. Причем использующиеся константы уже получены экспериментально для большинства материалов, реально использующихся на практике. В рамках этого подхода обычно не учитываются особенности микроструктуры материалов, однако даже в этом случае получение точного аналитического решения задачи связано со значительными математическими затруднениями. Все это приводит к необходимости развития численных методов и использования вычислительных машин как в чисто научных целях, так и для многочисленных приложений. При этом особый интерес представляет увеличение скорости получения результата при неизменной мощности и достаточной для приложений точности вычислений.

В работе представлены численные методы линейной механики трещин для математического моделирования процесса разрушения среды под действием механических и тепловых нагрузок в рамках квазистатического приближения. Реализованные алгоритмы позволяют вычислять все необходимые параметры сред, ослабленных различными системами дефектов, с достаточной для приложений точностью. Представленные численные методы применимы как для ограниченных тел, так и для бесконечных. При помощи гипотезы о конечности области существенного влияния трещины на распределение искомых полей в среде они помимо конечного числа дефектов также позволяют моделировать бесконечные периодические системы трещин.

Цели работы.

Основной целью работы является разработка методов моделирования процесса разрушения линейно упругого теплопроводящего материала, вызванного эволюцией находящихся в нем трещин и применение этих методов при исследовании конкретных задач механики разрушения. Эта работа подразумевает создание алгоритмов численного моделирования, в рамках рассмотренных теорий, поиск базовых аналитических решений, являющихся основой предлагаемых численных методов. Разрабатываются методики поиска важных в механике трещин параметров среды. Особое внимание уделяется коэффициентам интенсивности напряжений, которые являются необходимыми параметрами для анализа поведения тел с трещинами. С их помощью в каждом конкретном случае делаются выводы о возможности роста трещины, его направлении, устойчивости, а также траектории итогового разрушения. Для упрощения анализа и сравнения поведения различных систем трещин можно использовать так называемые коэффициенты влияния, являющиеся отношениями коэффициентов интенсивности напряжений в рассматриваемой задаче к коэффициентам, найденным в задаче об одиночной трещине при той же конфигурации нагрузки. С их помощью делаются выводы о локальном ослаблении среды по сравнению с классическим случаем, имеющим точное аналитическое решение. Такой подход упрощает описание свойств конкретной сложной системы трещин.

Помимо поиска параметров каждой трещины систем в различных задачах дополнительной целью является проверка гипотезы о конечности области существенного влияния трещины на распределение полей параметров состояния среды. Использование этой гипотезы в связке с алгоритмом, способным моделировать большие системы дефектов, дает возможность получать результаты в задачах о бесконечных периодических системах трещин.

Научная новизна работы.

В данной работе впервые получены некоторые аналитические решения задачи теплопроводности и теории упругости сред с линией потери сплошности. На основе этих решений построены численные методы моделирования задач механики разрушения в рамках этих теорий. Предложена методика поиска коэффициентов интенсивности напряжений, использующая разложение М. Уильямса. Получены и проанализированы параметры сред с ломаными трещинами сложной формы и системами прямолинейных трещин, составляющих сложные двоякопериодические структуры.

Теоретическая и практическая ценность работы.

Результаты, полученные в рамках данной работы, могут быть использованы в исследовательских целях. С помощью предложенных методик можно моделировать различные ранее не рассмотренные конфигурации дефектов как в бесконечных средах, так и в конечных телах, подверженных тепловым и механическим нагрузкам. Также числовые значения в конкретных случаях могут быть использованы как верификационная база для других методов решения подобных задач.

Благодаря достаточной для приложений точности представленные алгоритмы и методики можно использовать для предсказательного моделирования процессов хрупкого и квазихрупкого разрушения в реальных материалах.

Методология и методы исследования.

Численные методы, предложенные в данной работе, основываются на разложении искомого решения задачи в ряд по некоторым полученным аналитическим решениям теории теплопроводности или линейной теории упругости в зависимости от рассматриваемой задачи. Таким образом, в силу линейности уравнений, описывающих поведение среды, полученная сумма таких решений будет тождественно удовлетворять системе уравнений выбранной модели среды. Граничные условия выполняются на дискретном достаточно плотном множестве точек границы. Таким образом, граничные условия исходной задачи выполняются приближенно.

Достоверность и обоснованность полученных результатов.

Достоверность результатов диссертации подтверждается верификацией и валидацией полученных результатов с результатами других авторов. Основная часть результатов тестовых задач сравнивалась с точными аналитическими решениями линейной механики разрушения, а также приближенными аналитическими и численными результатами, взятыми из хорошо известных публикаций других исследователей. Проведено сравнение с некоторыми экспериментальными данными. Сравнение производилось как для полей напряжений, перемещений и температур, так и для коэффициентов интенсивности напряжений и коэффициентов интенсивности теплового потока.

Апробация работы.

Основные результаты, полученные в диссертации, докладывались и обсуждались на следующих научных конференциях и семинарах:

- Международный научный симпозиум по проблемам механики деформируемых тел, посвященного 110-летию со дня рождения А. А. Ильюшина.
- XIII всероссийский съезд по теоретической и прикладной механике, Санкт-Петербург.
- Ломоносовские чтения 2021, 2023.
- Международная научная конференция студентов, аспирантов и молодых ученых Ломоносов 2020, 2022, 2023.
- Конференция-конкурс молодых ученых Научно-исследовательского института механики МГУ имени М.В. Ломоносова 2021, 2022.
- Научно-исследовательский семинар кафедры волновой и газовой динамики механико-математического факультета МГУ им. М.В. Ломоносова под руководством академика РАН Р.И. Нигматулина.

- Научно-исследовательский семинар кафедры механики композитов механико-математического факультета МГУ им. М.В. Ломоносова под руководством проф. В.И. Горбачева.
- Научно-исследовательский семинар кафедры теории упругости механико-математического факультета МГУ им. М.В. Ломоносова под руководством проф. Д.В. Георгиевского.
- Научно-исследовательский семинар кафедры теории пластичности механико-математического факультета МГУ им. М.В. Ломоносова под руководством члена-корр. РАН Е.В. Ломакина.

Публикации.

Основные результаты диссертации изложены в 5 печатных работах, из них 4 опубликованы в рецензируемых научных журналах, индексируемых в базах данных RSCI, Web of Science, Scopus.

Личный вклад.

Результаты, представленные в диссертации, получены лично автором. Во всех опубликованных работах вклад автора является определяющим. Автор занимался разработкой теоретических моделей, проведением численных расчетов, обработкой полученных результатов и подготовке их к публикации. В совместных работах А. В. Звягину принадлежат постановки задач и общее научное руководство.

Положения, выносимые на защиту.

1. Предложенные численные методы повышенного порядка точности решения плоских задач линейной механики разрушения и теплопроводности для сред, ослабленных произвольной системой трещин, позволяют получить решение в близкой окрестности трещин с относительной ошибкой менее 1%.
2. Разработанный метод численного определения коэффициентов интенсивности напряжений и T-напряжений, использующий асимптотическое разложение М. Уильямса, позволяет моделировать рост и возможный поворот трещин, используя дальнюю асимптотику.
3. Для двоякопериодических систем трещин установлено существенное влияние относительного сдвига трещин соседних слоев на коэффициенты интенсивности как в механической, так и в тепловой задачах.
4. Показано, что для трещин наличие V-образного излома приводит к уменьшению коэффициента интенсивности напряжений по сравнению с прямолинейной трещиной той же длины.

Структура диссертации. Диссертация состоит из введения, 3 глав, заключения и списка литературы. Работа представлена на 83 страницах. Список литературы включает 99 источников.

В **главе 1** рассмотрены задачи о линейно-упругой бесконечной среде, ослабленной системой трещин. В плоских задачах механики разрушения под трещиной понимается кривая, на которой терпит разрыв вектор перемещений $u(x,y)$. Использованы обозначения: для компонент вектора перемещений – u_x, u_y;

для компонент тензора напряжений – $\sigma_{xx}, \sigma_{xy}, \sigma_{yy}$; E – модуль Юнга; ν – коэффициент Пуассона. Задача ставится в напряжениях, компоненты тензора напряжений должны в отсутствие массовых сил удовлетворять уравнениям равновесия и условию совместности деформаций, записанного в напряжениях:

$$\begin{aligned} &\frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{yx}}{\partial y} = 0, \\ &\frac{\partial \sigma_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{yy}}{\partial y} = 0, \\ &\Delta(\sigma_{xx} + \sigma_{yy}) = 0. \end{aligned} \tag{1}$$

Граничные условия во всех рассматриваемых задачах ставятся в напряжениях. Они задаются известным вектором напряжения на берегах трещин и на бесконечности. Нагрузки предполагаются постоянными и уравновешенными. При необходимости задачи представляются в виде суперпозиции двух задач. Одна из них представляет собой задачу о трещинах под действием напряжений на ее берегах. Вторая есть задача о среде бездефектной под действием исходных напряжений, приложенных на бесконечности. Ее решением является однородное поле напряжений. После взятия суперпозиции двух решений вектор напряжений на берегах трещины должен равняться исходному.

Общее решение системы уравнений (1) может быть представлено формулами Колосова – Мусхелишвили через две произвольные голоморфные функции комплексной переменной $z = x + iy$.

$$\begin{aligned} &\sigma_{xx} + \sigma_{yy} = 2\left(\varphi'(z) + \overline{\varphi'(z)}\right) \\ &\sigma_{yy} - \sigma_{xx} + 2i\sigma_{xy} = 2\left(\overline{z}\varphi''(z) + \psi'(z)\right) \end{aligned} \tag{2}$$

При этом перемещения будут выражаться в следующей форме:

$$2\mu\left(u_x + i u_y\right) = \kappa\varphi(z) - z\,\overline{\varphi'(z)} - \overline{\psi(z)} \tag{3}$$

Функции $\varphi(z), \psi(z)$, благодаря которым строятся все требуемые поля, предлагается искать в виде конечных функциональных рядов. Ряд строится как линейная комбинация аналитических решений некоторых вспомогательных задач теории упругости. Функциями разложения являются решения двух краевых задач о разрыве перемещений на отрезке заданной длины *2h*:

Задача I.

$$y = 0;\ |x| < h:\quad [u_y] = D_y(x);\quad \sigma_{xy} = 0. \tag{4}$$

Задача II.

$$y = 0;\ |x| < h:\quad [u_x] = D_x(x);\quad \sigma_{yy} = 0. \tag{5}$$

В (4) и (5) квадратные скобки означают разность краевых значений соответствующей компоненты перемещений для значений аргумента $y = 0^{\pm}$, D_x, D_y − величины скачков перемещений, зависящие от локальной координаты отрезка, на котором рассматривается разрыв. В работе для постоянной, линейной, квадратичной и корневой зависимостей поля напряжений и перемещений получены в аналитическом виде.

Далее каждая трещина заменяется набором прямолинейных отрезков длины $2h$, называемых граничными элементами. На каждом таком отрезке в его локальной системе координат с началом в центре элемента рассматриваются две задачи о нормальном и тангенсальном скачках вектора перемещений заданного функционального вида с неизвестными коэффициентами. Дальнейшая реализация метода заключается в получении замкнутой системы линейных уравнений на искомые коэффициенты разрывов смещений. Все решения тождественно удовлетворяют исходной дифференциальной системе уравнений состояния среды, и в силу линейности этой системы, их сумма также будет решением. Просуммировав напряжения, создаваемые всеми элементами в какой-то точке границы, и приравняв их к данному по условию значению напряжений в этой точке, можно получить одно уравнение на искомые коэффициенты. При выполнении данного равенства получившееся решение будет удовлетворять граничному условию в некоторой точке границы.

Таким образом, в итоге получившееся решение удовлетворяет граничным условиям исходной задачи в некотором дискретном наборе точек. В случае рассмотрения квадратичной или линейной зависимостей дополнительно накладываются требования непрерывности скачков и их производных на концах необходимого количества соседних элементов. Получив замкнутую систему линейных уравнений и решив ее, можно получить искомое разложение для решения исходной задачи по выбранным нами функциям в аналитическом виде.

В работе проведено сравнение классического численного метода, в котором величины скачков вектора перемещений на граничных элементах считаются константами (полиномы нулевого порядка), и методов повышенного порядка точности, в которых в качестве плотности берутся линейные (полиномы первого порядка) и квадратичные (полиномы второго порядка) зависимости разрывов для внутренних элементов и корневые – для крайних. Для демонстрации сравнительной эффективности этих подходов рассматривается задача о прямолинейной единичной трещине нормального отрыва. При сравнении решений, полученных при помощи этих методов, с известным аналитическим решением сделаны следующие выводы: даже при сравнительно малом количестве граничных элементов решение «методом второго порядка» намного точнее аппроксимирует аналитическое решение по сравнению с классическим «методом нулевого порядка» и с «методом первого порядка».

Вдали от трещины все три метода могут с некоторой приемлемой погрешностью моделировать поведение среды. Однако при приближении к концу трещины из величин относительных ошибок становится ясно, что, как и в случае сравнения по раскрытию трещины, «метод второго порядка» работает значительно точнее, чем классический метод, а «метод первого порядка» приближает решение хуже двух других. Из этого делается вывод о фактической неработоспособности «метода первого порядка» точности. Получен вывод о заметном выигрыше метода с квадратичными плотностями скачков как в точности при заданном числе элементов разбиения, так и в количестве элементов необходимом для достижения приемлемой для приложений точности.

Использование корневых зависимостей для крайних элементов в алгоритме второго порядка точности при разбиении трещины на 20 элементов позволяет для компоненты тензора напряжения σ_{yy} достичь относительной ошибки менее 1%.

Что является важным для приложений, учет асимптотики вместе с требованиями непрерывной дифференцируемости плотности решения при моделировании среды, позволяет, не теряя точности, производить расчеты в близкой окрестности границ трещины. При этом точность расчета сохраняется, в отличие от классического «метода нулевого порядка», для которого естественным ограничением считается невозможность точных вычислений для точек, которые расположены на расстоянии, меньшем характерной длины граничного элемента от границ трещины.

В данной главе также рассматриваются численные методы определения коэффициентов интенсивности напряжений. Первый и второй коэффициенты интенсивности напряжения задаются следующим образом:

$$K_I = \lim_{s\to 0}\sqrt{2\pi s}\sigma_{yy}(s); \quad K_{II} = \lim_{s\to 0}\sqrt{2\pi s}\sigma_{xy}(s)$$

где s – расстояние от конца трещины до точки среды, находящейся на продолжении трещины. Для определения этих коэффициентов предлагается два метода. Их верификация происходит при помощи задачи о нагружении среды с одиночной трещиной косой нагрузкой на бесконечности.

В первом методе, чтобы найти их численно по определению, рассматривается соответствующее произведение из предела в точках на продолжении трещины с вычисленными численно значениями соответствующей компоненты тензора напряжения. Значения, взятые на расстоянии одной миллионной длины трещины от кончика, позволяют получить КИН с относительной ошибкой менее 0.1%.

Во втором методе рассматривается разложение М. Уильямса для решения в окрестности конца трещины. В малой окрестности конца трещины со свободными от напряжения брегами поле напряжений может быть представлено в виде:

$$\sigma_{ij}(r,\theta) = \sum_{m=1}^{2}\sum_{k=1}^{\infty} a_k^m \cdot f_k^{m,ij}(\theta)\cdot r^{k/2-1}$$

От геометрии задачи, величины и типа нагрузки зависят только коэффициенты a_k^m. Найдя эти коэффициенты, можно получить разложение полей напряжений и перемещений в некоторой области в виде ряда.

Для численного определения коэффициентов разложения определяются численные значения напряжений для дискретного набора точек среды в окрестности конца трещины. После этого, оставляя фиксированное конечное число членов разложения, используя метод наименьших квадратов, можно найти некоторое число этих коэффициентов. При помощи них моделируются поля напряжений с относительной ошибкой менее 0.2%. Показано, что основные коэффициенты разложения, использующиеся в дальнейшем, удается находить с относительной ошибкой менее 1%.

При помощи описанного численного метода реализуется второй метод поиска коэффициентов интенсивности напряжений. Он применим только в случаях свободных от нагружения берегов трещин. Получить выражения коэффициентов интенсивности напряжений и Т-напряжений через коэффициенты разложения Уильямса можно в следующем виде:

$$K_I = \sqrt{2\pi} \cdot a_1^1 \cdot f_1^{1,yy}(0)$$

$$K_{II} = \sqrt{2\pi} \cdot a_1^2 \cdot f_1^{2,xy}(0)$$

$$T = a_2^1 \cdot f_2^{1,xx}(0)$$

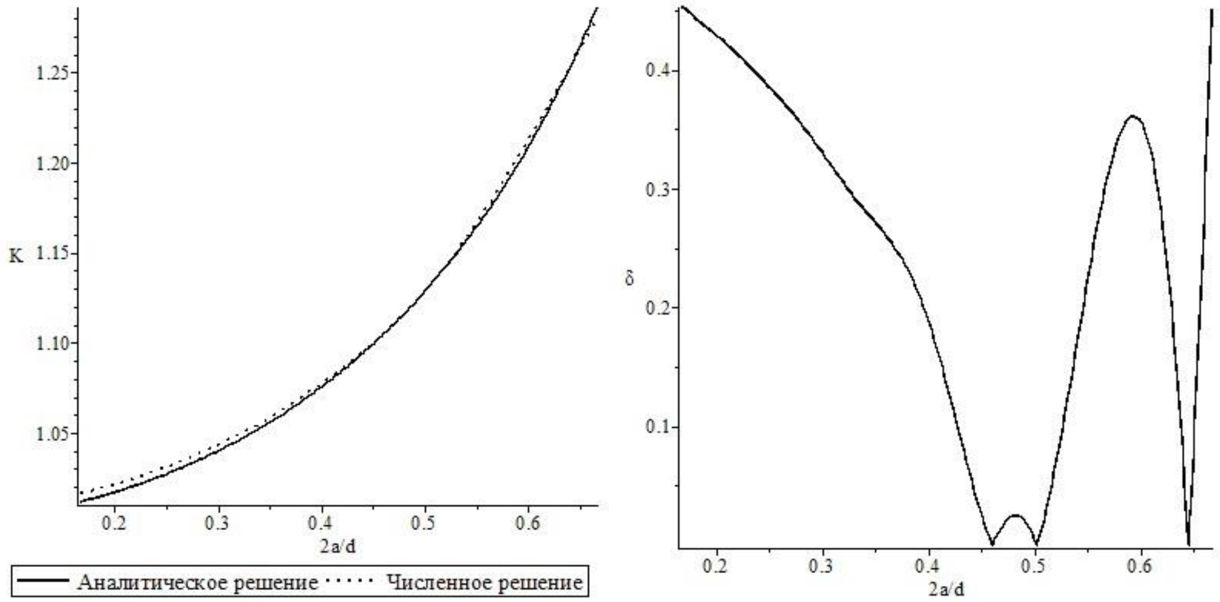
Таким образом удается получить зависимость обоих коэффициентов интенсивности напряжений от угла приложения нагрузки с относительной ошибкой, не превышающей 1,5%.

По результатам, описанным в главе 1, можно утверждать, что разработан и реализован алгоритм повышенного порядка точности решения плоских задач механики разрушения для бесконечной линейно-упругой среды, ослабленной произвольной системой трещин. Проведенная верификация показала, что решение методом второго порядка аппроксимирует аналитическое точнее решения классическим методом нулевого порядка точности, как качественно, так и количественно. Метод первого порядка точности фактически неработоспособен. Также разработан метод численного определения коэффициентов интенсивности напряжений и Т-напряжений, использующий асимптотическое разложение М. Уильямса в вершине трещины.

В **главе 2** для демонстрации возможностей использования предложенного метода в новых исследованиях, связанных с описанием поведения больших систем трещин, рассмотрены дополнительные верификационные задачи. В задачах о системах трещин, находящихся под действием внешней нагрузки, при анализе состояния среды используются коэффициенты влияния. Это отношения коэффициентов интенсивности напряжений, вычисленных в вершинах выбранной трещины в рассматриваемой задаче, к коэффициентам интенсивности напряжений, вычисленным в задаче об одиночной трещине с той же внешней нагрузкой. Если коэффициент влияния меньше единицы, то опасность разрушения для тела с системой трещин меньше в сравнении с телом, ослабленном одиночной трещиной. Если коэффициент влияния больше единицы – ситуация с опасностью разрушения меняется на обратную. Далее сравниваются численные результаты и аналитическое решение в задаче о двух трещинах нормального отрыва одинаковой длины. Относительная ошибка в этом случае менее 1%.

Формулируется гипотеза о конечности области существенного влияния трещины на распределение напряжений в среде, за пределами которой влияние пренебрежимо мало. Это позволяет вместо большой системы (в случае периодических трещин – бесконечно большой) рассматривать только трещины, дающие заметный вклад в окрестности выделенной конкретной трещины. При этом детальный анализ проводится для центральной трещины.

Далее рассматриваются системы из 2, 5, 10, 15 и 20 трещин на одной прямой при разбитии каждой из них на 11 граничных элементов. Численные значения первого коэффициента влияния для кончика центральной трещины в зависимости от расстояния между трещинами сравниваются с аналитическими для бесконечной периодической системы. Уже для 20 трещин получается достичь приемлемой точности. Относительная ошибка коэффициентов влияния в этом случае менее 0.5% (рис. 1).



(a) *(b)*

Рис. 1. Сравнение численных и аналитических значений первого коэффициента влияния в задаче о периодической системе трещин нормального отрыва, лежащих на одной прямой, при рассмотрении 20 трещин (*a*) и соответствующая относительная ошибка в процентах (*b*).

На основе данной гипотезы рассматривается новая задача о двоякопериодической системе коллинеарных трещин. Все трещины системы прямолинейны и имеют одинаковую длину. Слоем называются трещины, лежащие вдоль одной прямой. Все слои геометрически эквивалентны. Для верификации рассматривается случай, когда центры трещин различных слоев находятся друг над другом. В этом случае имеется приближенное решение. Используя гипотезу для центральной трещины AB, рассматривая вместо бесконечной системы трещин – конечную и увеличивая рассматриваемую область, удается добиться достаточной точности вычислений необходимых для анализа параметров. При рассмотрении пяти слоёв по пять трещин в каждом слое относительная ошибка не превышает 3%.

Далее рассматриваются задачи о поведении среды, ослабленной трещинами сложной геометрической формы. Трещины берутся в виде двухзвенной ломаной и в виде дуги окружности. В обоих случаях относительная ошибка коэффициентов интенсивности напряжений составляет менее 3%. Это позволяет, в свою очередь, провести валидацию численных методов, рассматривая задачу о поиске траектории квазистатического роста трещин. При помощи критерия максимальных растягивающих напряжений моделируется задача о вычислении траектории роста изначально прямолинейной трещины, находящейся под косой нагрузкой. Полученная траектория была наложена на фотографию эксперимента распространении трещины в пластинке из плексигласа, взятой из работы других авторов. Сравнение показало, что предложенные численные методы позволяют с достаточной точностью моделировать задачи поиска траектории эволюции трещин.

Получены результаты в ранее не исследованных задачах. Рассматривалась «квазишахматная» система при наличии сдвига (рис. 2).

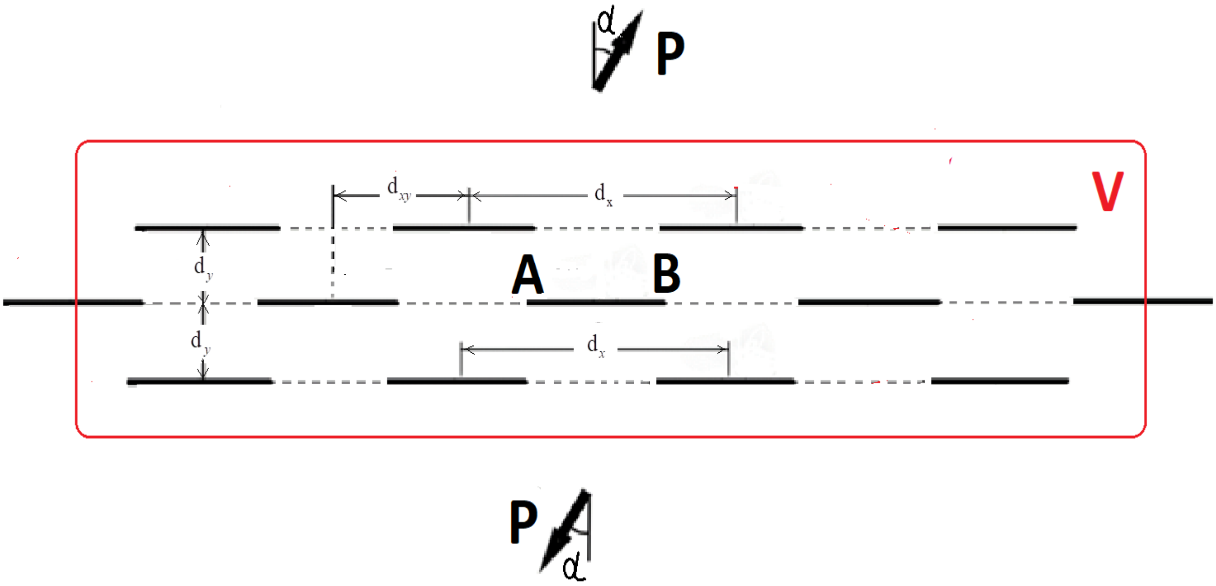


Рис. 2. Задача о периодической системе трещин в бесконечной линейно-упругой среде, составляющих упорядоченную структуру и находящихся под косой нагрузкой, приложенной на бесконечности.

Исследовалось влияние геометрического сдвига слоев трещин относительно друг друга на коэффициенты влияния центральной трещины. В работе приведены зависимости коэффициентов влияния k_1 и k_2 для различных конфигураций систем трещин (рис. 3). Максимумы k_1 были равны 1.8 и 2.51. Были показаны области, в которых с уменьшением расстояния между слоями коэффициент влияния k_2 становится больше единицы. По представленным зависимостям были сделаны выводы о существенном влиянии системы трещин подобной конфигурации на прочностные характеристики образца.

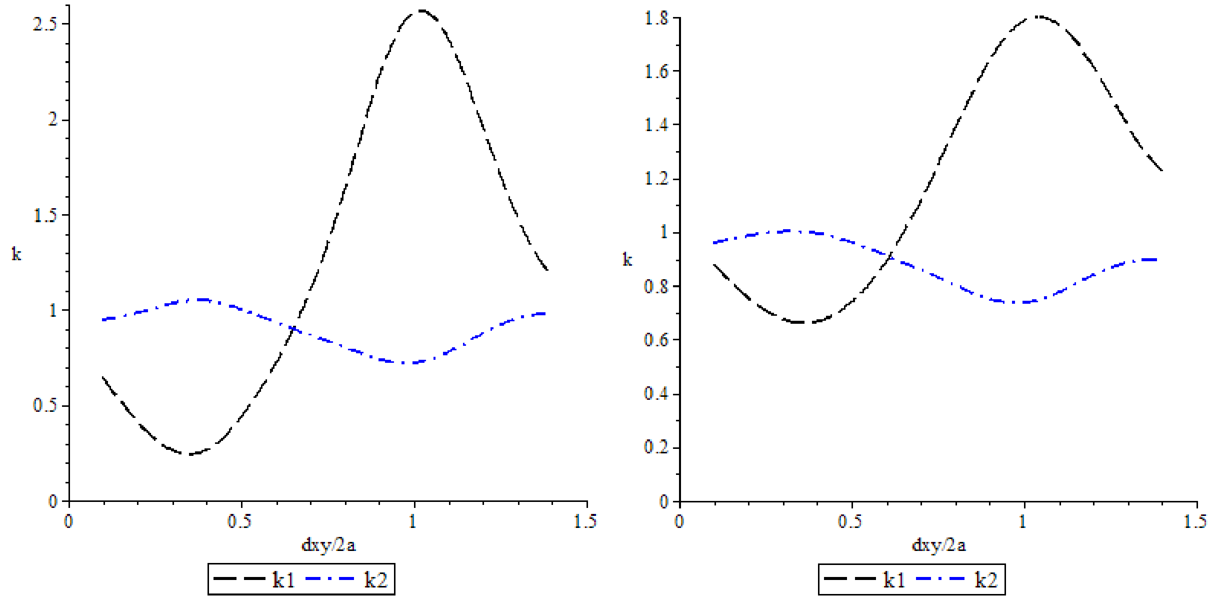


Рис. 3. Зависимость коэффициентов влияния от геометрического относительного сдвига слоев трещин d_{xy}/L с фиксированными расстояниями между слоями $d_y/L = 0.3$ (a) и $d_y/L = 0.5$ (b) и между соседними трещинами $d_x/L = 1.5$.

Рассмотрена новая задача о четырехзвенной V-образной ломаной трещине под действием уравновешенных нагрузок на бесконечности. Нагрузка предполагалась нормальной по отношению к звеньям, в концах которых рассматривались коэффициенты интенсивности напряжений. В работе было показано, что наличие излома уменьшает коэффициент интенсивности по сравнению с конфигурацией прямолинейной трещины.

Исходя из результатов, представленных в главе 2, можно утверждать, что использование представленной в работе методики позволяет достаточно точно описывать параметры линейно упругой среды, ослабленной большой (в том числе и бесконечно большой) системой трещин. Совпадение численных результатов с известными аналитическими решениями позволяет сделать вывод об эффективности предложенных алгоритмов исследования.

Показано, что предложенную гипотезу, о возможности сведения бесконечной системы трещин к конечной, можно использовать при исследовании задач для периодических систем. При определенных конфигурациях системы трещин установлено существенное влияние относительного сдвига соседних слоев на коэффициенты интенсивности напряжений (увеличение в 2,5 раз).

Получено, что для трещин наличие V-образного излома всегда приводит к уменьшению коэффициента интенсивности напряжений по сравнению с прямолинейной трещиной той же длины.

Показано, что предложенные численные методы позволяют с достаточной точностью моделировать задачи поиска траектории эволюции трещин.

В **главе 3** рассмотрены стационарные плоские задачи теплопроводности бесконечной теплопроводящей среды с N частично проницаемыми разрезами под действием теплового потока на бесконечности (рис. 4).

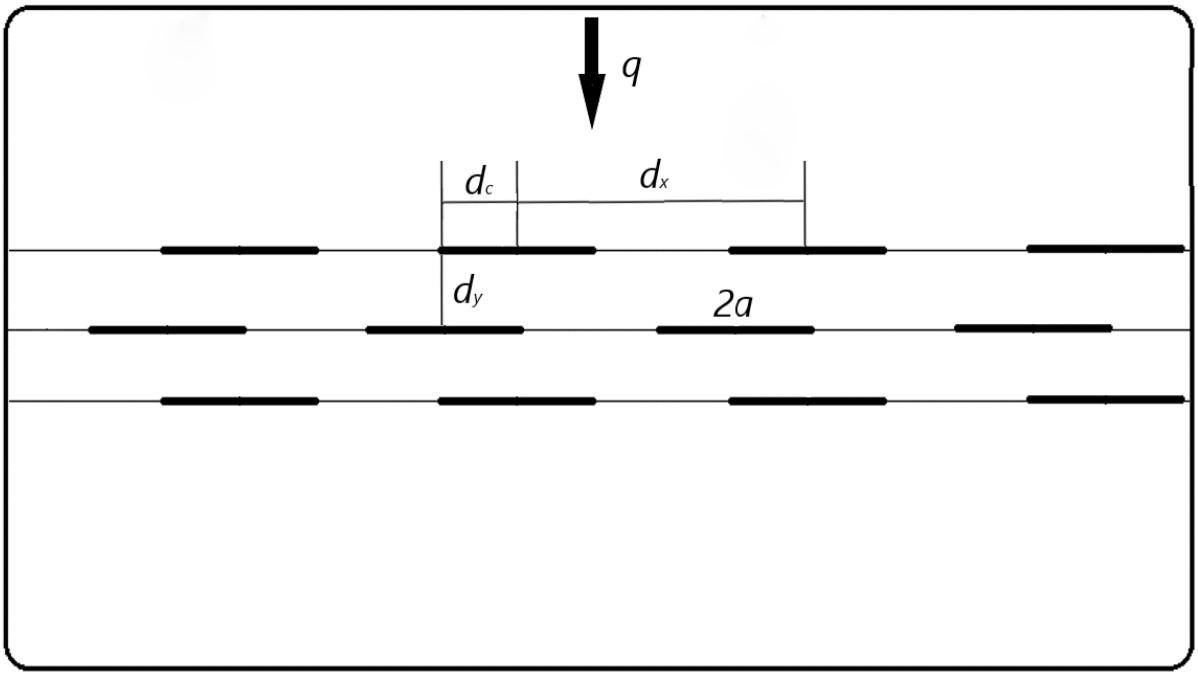


Рис. 4. Задача теплопроводности бесконечной теплопроводящей среды с N частично проницаемыми разрезами под действием теплового потока на бесконечности.

Все разрезы системы прямолинейны и параллельны оси *OX* декартовой системы координат. Те разрезы, которые лежат вдоль одной прямой, будем называть слоем. Все слои геометрически эквивалентны. На бесконечности действует тепловой поток величины q^{∞}. Трещины считаются частично теплопроницаемыми, на их берегах действует тепловой поток q^{0}. В случае теплоизолированных разрезов полагается $q^{0}=0$. Постановка задачи теплопроводности для стационарного поля температур без источников тепла и граничные условия, используя закон теплопроводности Фурье, брались следующие:

$$\Delta T(x,y)=0$$

$$k\frac{\partial T}{\partial y}=-q^{\infty}, x^2+y^2\to\infty$$

$$k\left.\frac{\partial T(x,y)}{\partial y}\right|_{y=y_i+0^+}=k\left.\frac{\partial T(x,y)}{\partial y}\right|_{y=y_i+0^-}=-q^{0}, |x-x_i|\le a$$

Здесь k – коэффициент теплопроводности материала, x_i, y_i – координаты центров разрезов. Решение задачи представлялось в виде суммы двух решений. Первое является решением задачи о распределении температуры в бездефектном материале. Вторая краевая задача определяется следующими соотношениями:

$$\Delta T(x,y)=0$$

$$k\frac{\partial T}{\partial y}=0, x^2+y^2\to\infty$$

$$k\left.\frac{\partial T\left(x,y\right)}{\partial y}\right|_{y=y_i+0^+}=k\left.\frac{\partial T\left(x,y\right)}{\partial y}\right|_{y=y_i+0^-}=q^{\infty}-q^{0},\left|x-x_i\right|\le a$$

Сумма решений этих двух задач будет являться решением исходной задачи. Решение второй задачи ищем в виде конечного функционального ряда по некоторым решениям модельных задач теории теплопроводности. Для построения модельного решения рассмотрим задачу элементарного разрыва температуры величины *D(x)* на отрезке длины *2h*, называющемся граничным элементом. Для определенных видов функциональной зависимости *D(x)* решение удается найти аналитически. В данной работе используются функции в виде многочленов и корневой зависимости, которые ранее уже рассматривались в главе 1. Далее линии разрезов разбиваются на отрезки. Решение задачи представляется в виде суммы элементарных скачков на каждом из разрезов с неизвестными постоянными коэффициентами функций *D(x)*, своими для каждого скачка. Приравняв к заданному значению тепловой поток, создаваемый всеми элементарными разрывами температур в центре какого-то выбранного граничного элемента, получим одно алгебраическое уравнение на величины скачков. В случае рассмотрения величин скачков константами, проделав данную операцию для центров каждого отрезка, на которые мы разбили разрезы, получим замкнутую систему уравнений. Для того, чтобы аналогично предыдущему случаю получить замкнутую систему линейных алгебраических уравнений при рассмотрении квадратичных зависимостей скачков температур, граничные условия дополняются условиями непрерывности решений в концах граничных элементов, а также непрерывности их производных в необходимом числе точек.

Для верификации описанного метода рассматривались задачи об *N* коллинеарных разрезах, лежащих на одной прямой, то есть случай одиночного слоя. Для этих задач имеются точные решения. Сравнивая аналитические и численные результаты поля температуры, вычисленные в точках на линии параллельной линии разрезов на некотором расстоянии *v* вверх от нее, удалось показать следующее. При рассмотрении постоянных скачков температуры удается достаточно точно моделировать поле температуры в точках среды, не лежащих в малой окрестности трещины. Усовершенствованный метод с квадратичными зависимостями позволяет использовать меньшее количество элементов для достижения заданной точности. При этом из-за отсутствия разрывов на границах элементов решение лучше воспроизводит физическую природу явления. Дополнительно учитывая особенности решения в окрестности вершины трещины и рассматривая два крайних элемента каждого разреза в корневой форме, удается моделировать большие системы разрезов в теплопроводящей среде с достаточно высокой точностью при разбиении разрезов на малое количество граничных элементов. Для демонстрации такой возможности была рассмотрена задача о бесконечном числе разрезов на одной прямой. При помощи гипотезы о конечности области существенного влияния разреза на распределение температурного поля в среде удалось достичь относительная ошибки в окрестности основного рассматриваемого разреза менее 1,5%.

Далее был рассмотрен численный метод определения коэффициента интенсивности теплового потока. По аналогии со случаем линейно упругой механики разрушения он вводился следующим образом:

$$K = \lim_{s\to 0} \sqrt{s} q_y(s)$$

Здесь q_y - нормальная к трещине составляющая теплового потока, s – расстояние от вершины трещины до точки на линии продолжения трещины. В задаче одиночного разреза известно его аналитическое значение. Численно он искался при помощи определения. Вычислялось выражение из определения в некоторой точке на продолжении трещины, после чего рассматривались точки все более и более близкие к вершине трещины. Таким образом получалось приближенное значение коэффициента интенсивности теплового потока. При разбиении разреза на 17 граничных элементов относительная ошибка составляла менее 1%.

Далее использовались коэффициенты влияния, представляющие собой отношение коэффициента интенсивности теплового потока, найденного в вершине некоторого разреза системы, к коэффициенту интенсивности теплового потока одиночного разреза при той же величине теплового потока. Рассматривалась задача с «квазишахматной» структурой. Вычисления производились для системы из 25 трещин: пять слоев по пять трещин каждый. Разбиение каждой трещины происходило на 10 граничных элементов. Было показано, что в зависимости от относительного геометрического сдвига слоев коэффициент интенсивности теплового потока может быть как больше, так и меньше случая единичного разреза (рис. 5).

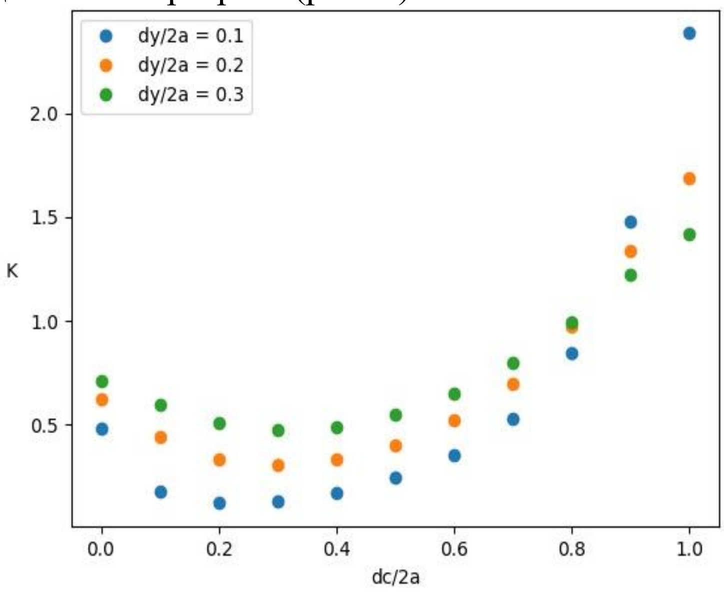


Рис. 5. Зависимость коэффициента влияния в задаче о «квазишахматной» системе разрезов от величины сдвига d_c при разных d_y и фиксированном $d_x = 4a$.

Из полученных значений делался вывод о том, что точное моделирование температурного поля в материале с большой системой трещин невозможно без учета влияния всех трещин системы, лежащих в некоторой окрестности выбранной трещины.

Таким образом утверждалось, что предложенные методы моделирования поведения теплопроводящей среды, ослабленной системой частично теплопроницаемых разрезов, позволяют с необходимой для приложений точностью искать поля температуры и теплового потока в любой точке среды. Гипотеза ограниченности области существенного влияния трещин на температурное поле в среде подтвердилась при моделировании и применима вместе с представленным алгоритмом для анализа поведения периодических систем. Для двоякопериодических систем трещин установлено существенное влияние относительного сдвига трещин соседних слоев на коэффициенты интенсивности теплового потока.

В **заключении** сформулированы основные итоги работы. Построенные численные методы повышенного порядка точности позволяют решать плоские задачи линейной механики разрушения и теплопроводности для сред, ослабленных произвольной системой трещин, и вычислять все параметры необходимые для дальнейшего анализа процессов разрушения.

Разработаны методы численного определения коэффициентов интенсивности напряжений, Т-напряжений, использующие асимптотическое разложение М. Уильямса в вершине трещины и методы определения коэффициентов интенсивности теплового потока.

Показано существенное влияние геометрии ослаблений среды на коэффициенты интенсивности напряжений и теплового потока. В частности, в случае двоякопериодических систем трещин установлены зависимости коэффициентов влияния от величины относительного смещения слоев трещин.

В случае трещин с V-образным изломом под косой нагрузкой, показано локальное упрочнение среды по сравнению с прямолинейной трещиной той же длины.

Обсуждены возможные перспективные направления для развития некоторых изложенных методов. Одним из них является обобщение на случай пространственных задач. Возможным путем усовершенствования рассмотренного подхода можно считать задачи термоупругости и нелинейной механики разрушения.

Список основных публикаций автора.

Научные статьи, опубликованные в рецензируемых журналах, индексируемых в международных базах Scopus, WoS, RSCI:

1. Звягин А.В., Удалов А.С. Метод разрывных смещений высокого порядка точности в механике трещин. // Вестник Моск. ун-та, Сер. 1. Математика. Механика. — 2020. — № 6. — С. 34-39. (РИНЦ Импакт фактор 0.3)
2. A.V. Zvyagin, A.S. Udalov, A.A. Shamina, Boundary element method for investigating large systems of cracks using the Williams asymptotic series // Acta Astronautica. — 2022. — Vol. 194. — P. 480–487. (Scopus SJR 1)

3. Звягин А. В., Удалов А. С. Численное моделирование ломаных трещин // Вестник Моск. ун-та, Сер. 1. Математика. Механика. — 2023. — № 1. — С. 44–48. (РИНЦ Импакт фактор 0.3)
4. Zvyagin A. V., Udalov A. S., Shamina A. A. Numerical modeling of heat conduction in bodies with cracks // Acta Astronautica. — 2023. — Vol. 214. — P. 196–201. (Scopus SJR 1)

Прочие публикации:

5. Звягин А.В., Лужин А.А., Удалов А.С., Шамина А.А. Численный расчет периодических систем трещин в упругом теле // Упругость и Неупругость. Материалы Международного научного симпозиума по проблемам механики деформируемых тел, посвященного 110-летию со дня рождения А. А. Ильюшина // Под ред. Г. Л. Бровко, И. Н. Молодцов, Н. В. Овчинникова. — М.: Изд-во Моск. ун-та, 2021. — С. 379–389.