МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
имени М. В. Ломоносова

На правах рукописи

Галстян Арсен Хачатурович

ПРОБЛЕМА ФЕРМА–ШТЕЙНЕРА В ГИПЕРПРОСТРАНСТВАХ

Специальность 1.1.3 —
«Геометрия и топология»

Автореферат
диссертации на соискание учёной степени
кандидата физико-математических наук

Москва — 2023

Работа выполнена на кафедре дифференциальной геометрии и приложений Механико-математического факультета ФГБОУ ВО «Московский государственный университет имени М. В. Ломоносова»

Научный руководитель:	доктор физико-математических наук, профессор **Тужилин Алексей Августинович**
Официальные оппоненты:	**Кушнер Алексей Гурьевич,** доктор физико-математических наук, доцент, ФГБОУ ВО «Московский государственный университет имени М. В. Ломоносова», Физический факультет, Отделение прикладной математики, Кафедра физико-математических методов управления, профессор
	Ковалёв Михаил Дмитриевич, доктор физико-математических наук, доцент, ФГБОУ ВО «Московский государственный университет имени М. В. Ломоносова», Механико-математический факультет, Отделение математики, Кафедра дискретной математики, профессор
	Гусева Надежда Ивановна, кандидат физико-математических наук, доцент, ФГБОУ ВО «Московский педагогический государственный университет», Институт математики и информатики, Кафедра геометрии имени Л. С. Атанасяна, профессор

Защита состоится 10 ноября 2023 г. в 16 часов 45 минут на заседании диссертационного совета 011.4 на базе ФГБОУ ВО «Московский государственный университет имени М. В. Ломоносова» по адресу: Российская Федерация, 119991, ГСП-1, Москва, Ленинские горы, д.1, МГУ имени М.В. Ломоносова, Механико-математический факультет, аудитория 14-08.

E-mail: vladimir.manuilov@gmail.com

С диссертацией можно ознакомиться в отделе диссертаций научной библиотеки МГУ имени М.В.Ломоносова (Ломоносовский просп., д. 27) и на портале: https://dissovet.msu.ru/dissertation/011.4/2680

Автореферат разослан 10 октября 2023 г.

Ученый секретарь
диссертационного совета
011.4, д-р физ.-мат. наук, доцент В.М. Мануйлов

Общая характеристика работы

Актуальность темы. Диссертация посвящена развитию теории кратчайших сетей (более общо, экстремальных сетей), которая составляет большую область метрической геометрии.

В диссертационной работе решены две следующие задачи. Первая задача решена автором, А. А. Тужилиным и А. О. Ивановым с равнозначным вкладом всех трёх специалистов, вторая задача решена автором диссертации самостоятельно.

1. Построить универсальную теорию, позволяющую проводить различного рода геометричекие оптимизации при решении проблемы Ферма–Штейнера в гиперпространствах над конечномерными нормированными пространствами для случая границ, состоящих лишь из конечных множеств. В качестве основного практического ориентира взять конфигурацию из работы[1]. А именно, требуется упростить предлагаемое в[1] решение, сделать его более прозрачным, конструктивным и методичным.
2. Дать ответ на вопрос: что можно сказать о решении проблемы Ферма–Штейнера в гиперпространствах над конечномерными нормированными пространствами при переходе от границы, состоящей из конечных компактов, к границе из их выпуклых оболочек? А именно, в каких случаях переход не повлияет на значение минимума суммы расстояний до граничных компактов, а в каких он его изменит? И если изменит, то можно ли в таком случае предъявить какие-то оценки снизу на разницу минимумов для двух границ?

Краткая историческая справка и общая постановка проблемы Ферма–Штейнера. Геометрические вариационные задачи об оптимальном соединении привлекают внимание специалистов на протяжении столетий как своей математической красотой и сложностью, так и прикладной значимостью. Если говорить неформальным языком, общая постановка проблемы такова: требуется соединить заданное конечное подмножество $A = \{A_1, \ldots, A_n\}$ метрического пространства (Y,ρ) неким оптимальным, в смысле общей длины соединения, образом (мы предполагаем известным как соединять пары точек

[1] A. Ivanov A., Tropin A., Tuzhilin A. Fermat–Steiner problem in the metric space of compact sets endowed with Hausdorff distance // J. Geom., 108:2 (2017), 575–590.

в (Y,ρ), поэтому остаётся выбрать, какие именно точки соединить). Подробный исторический обзор и сводку современных результатов можно найти в книгах[2] [3] [4] [5].

Впервые подобную задачу поставил, видимо, П. Ферма, предложивший своим ученикам найти такую точку плоскости, что сумма расстояний от нее до трех фиксированных точек минимальна. Таким образом, уже Ферма рассматривал дополнительные вершины, “дорожные развилки”, при минимизации общей длины соединения. Сходные вопросы обсуждались в работах Ж. Д. Жергонна, И. К. Ф. Гаусса и других специалистов, и современная формулировка задачи поиска кратчайшего дерева, соединяющего данное конечное подмножество точек метрического пространства, появилась (для случая плоскости) в работе В. Ярника и М. Кёсслера[6]. Благодаря замечательной книге[7], эта задача стала широко известна как *проблема Штейнера*.

Поиск глобального минимума может быть чрезвычайно труден, и это в полной мере относится к проблеме Штейнера. Здесь сложность возникает благодаря так называемому “комбинаторному взрыву” — очень быстро растущему (с ростом числа n граничных точек) количеству возможных способов соединить между собой исходные и добавленные точки пространства, другими словами, количеству структур деревьев, которые могут соединять данную границу.

Чтобы уменьшить комбинаторную сложность, рассматривают другие постановки задачи о минимальном соединении. Одна из возможностей состоит в том, чтобы зафиксировать структуру дерева (так называемая задача о поиске минимального параметрического дерева, см.[2]). Самая простая структура в этом случае — дерево типа звезда, единственная дополнительная вершина y которого соединена с каждой точкой исходного множества A. Длина такого дерева, очевидно, равна сумме расстояний от y до всех точек из A. Та-

[2] Ivanov A. O., Tuzhilin A. A. Branching solutions to one–dimensional variational problems // World Sci. Publ., River Edge, NJ, 2001, xxii+342 pp.

[3] Cieslik D. Steiner minimal trees // Nonconvex Optim. Appl., 23, Kluwer Acad. Publ., Dordrecht, 1998, xii+319 pp.

[4] Ivanov A. O., Tuzhilin A. A. Minimal networks: a review // Advances in dynamical systems and control, Stud. Syst. Decis. Control, 69, Springer, Cham, 2016, 43–80 pp.

[5] Hwang F. K., Richards D. S., Winter P. The Steiner Tree Problem // North–Holland, 1992, 339 p.

[6] Jarnik V., Kössler M. On minimal graphs containing n given points // Časopis Pěst. Mat. Fys., 63:8 (1934), 223–235 pp.

[7] Курант Р., Роббинс Г. Что такое математика? Элементарный очерк идей и методов, 3-е изд., испр. и доп. // МЦНМО, М., 2001, 568 с.

ким образом, возникает следующая *задача Ферма–Штейнера*: для заданного конечного подмножества $A = \{A_1, \ldots, A_n\}$ метрического пространства (Y,ρ) требуется найти все точки $y \in Y$, в которых функция $S(A, y) = \sum_i \rho(y, A_i)$ принимает наименьшее значение. Именно этим обобщением задачи Ферма занимался Я. Штейнер для случая плоскости и трехмерного пространства.

Точки из множества A называют *граничными*, а само множество A — *границей* или *граничным множеством*. Через $\Sigma(A)$ мы обозначим множество всех решений задачи Ферма–Штейнера для граничного множества A. Сами решения обычно называют *точками Ферма–Штейнера* или, иногда, *геометрическими средними* для A.

Следует отметить, что задача Ферма–Штейнера на плоскости эквивалентна так называемой задаче Вебера с постоянной весовой функцией, см.[8]. Еще одна близкая, но другая задача была поставлена Д. Цисликом, который предложил минимизировать длину всех деревьев, соединяющих данное граничное множество и имеющих не более k дополнительных вершин, см.[3]. Подчеркнем, что при $k = 1$ эта задача неэквивалентна задаче Ферма–Штейнера: единственная дополнительная вершина в случае Цислика не обязана соединяться со всеми граничными вершинами.

В общем случае множество решений $\Sigma(A)$ задачи Ферма–Штейнера может оказаться пустым, но для ограниченно компактных метрических пространств (напомним, что метрическое пространство называется ограниченно компактным, если каждый замкнутый шар в нём компактен) решение существует для любого непустого граничного множеста A, см.[1].

Обзор проблемы Ферма–Штейнера в гиперпространствах. Далее будет говориться о так называемом расстоянии Хаусдорфа[9] [10]. Введём соответствующие определения.

Определение 1.1.1. *Пусть A — подмножество метрического пространства X. Расстоянием от точки $p \in X$ до подмножества A называется величина*

$$|p\,A| = \inf\{|pa| \,:\, a \in A\}.$$

[8]Drezner Z., Klamroth K., Schöbel A., Wesolowsky G. O. The Weber problem // Facility Location: Applications and Theory, Springer, Berlin, 2002, 1–36 pp.

[9]Schlicker S. The geometry of the Hausdorff metric // GVSU REU 2008, Grand Valley State Univ., Allendale, MI, 2008, 11 pp., http://faculty.gvsu.edu/schlicks/ HMG2008.pdf.

[10]Бураго Д. Ю., Бураго Ю. Д., Иванов С. В. Курс метрической геометрии // Москва-Ижевск: Институт компьютерных исследований, 2004. 512 с.

В частности, когда $A = \emptyset$, полагаем

$$|p\,\emptyset| = \infty.$$

Определение 1.2.1. *Пусть A — подмножество метрического пространства. Множества*

$$B_r(A) = \{p\,:\,|pA| \le r\};\;\; U_r(A) = \{p\,:\,|pA| < r\}$$

называются, соответственно, замкнутым и открытым шаром с центром в A радиуса r.

Определение 1.4.2. *Расстоянием Хаусдорфа между подмножествами A и B метрического пространства называется величина*

$$d_H(A,B) = \inf\bigl\{r\,:\,A \subset B_r(B), B \subset B_r(A)\bigr\}.$$

В диссертации проблема Ферма–Штейнера рассматривается в метрическом пространстве $Y = \mathcal{H}(X)$ непустых замкнутых ограниченных подмножеств метрического пространства X, где в качестве метрики на $\mathcal{H}(X)$ берётся расстояние Хаусдорфа. Пространство $Y = \mathcal{H}(X)$ в литературе[11] часто называют *гиперпространством над пространством* X. Геометрия пространств $\mathcal{H}(X)$ активно изучается благодаря таким важным приложениям, как распознавание и сравнение образов, построение непрерывных деформаций геометрических объектов друг в друга и др. (см., например,[12], где изучаются кратчайшие кривые в пространствах $\mathcal{H}(X)$, или[13] [14] [15], где рассматривается более общее расстояние Громова–Хаусдорфа).

Проблема Ферма–Штейнера в $\mathcal{H}(X)$ также имеет потенциальные приложения. По сравнению с *задачей о поиске точки $x \in X$*, на которой достигается минимум суммы расстояний Хаусдорфа до подмножеств A_i, входящих

---

[11] Nadler S. B. Hyperspaces of sets // Marcel Dekker Inc., New York and Basel, 1978, 707 p.

[12] Blackburn C. C., Lund K., Schlicker S., Sigmon P., Zupan A. An introduction to the geometry of $\mathcal{H}(\mathbb{R}^n)$ // GVSU REU 2007, Grand Valley State Univ., Allendale, MI, 2007.

[13] Memoli F. On the use of Gromov–Hausdorff distances for shape comparison // Eurographics symposium on point based graphics, The Eurographics Association, Prague, 2007, 81–90.

[14] Memoli F. Some properties of Gromov–Hausdorff distances // Discrete Comput. Geom., 48:2 (2012), 416–440.

[15] Ivanov A. O., Tuzhilin A. A. Isometry group of Gromov–Hausdorff space // Mat. Vesnik, 71:1-2 (2019), 123–154.

в границу A, при решении проблемы Ферма–Штейнера в $\mathcal{H}(X)$ минимизация идет по существенно более широкому классу объектов, а именно, по всем (а не только по одноточечным) замкнутым ограниченным подмножествам в X. Как следствие, минимальное значение может существенно уменьшиться. В этом случае более сложные неодноточечные "развилки" могут дать существенную экономию в стоимости соединения в целом. С другой стороны, каждый элемент $K \in \Sigma(A)$ можно рассматривать как некое "усреднение" исходных граничных множеств A_i, что дает возможность строить деформацию любого A_i в любое A_j через общую "усредненную развилку" K. Проблема Ферма–Штейнера в $\mathcal{H}(X)$ для ограниченно компактного метрического пространства X рассматривалась в работе[1]. В этом случае $\mathcal{H}(X)$ совпадает с множеством всех компактных подмножеств пространства X. Помимо доказательства существования решения для любого непустого конечного граничного множества $A \subset \mathcal{H}(X)$, в работе[1] описана структура множества $\Sigma(A)$ всех решений, которые называются *компактами Штейнера*. Напомним основные результаты из[1].

Пусть $K \in \Sigma(A)$ — некоторый компакт Штейнера. Рассмотрим вектор расстояний от него до граничных компактов: $d(K,A) = \big(d_H(K,A_1),\dots,d_H(K,a_n)\big)$ и пусть $\Omega(A) = \big\{d(K,A) : K \in \Sigma(A)\big\}$. Для каждого $d \in \Omega(A)$ положим $\Sigma_d(A) = \big\{K \in \Sigma(A) : d(K,A) = d\big\}$. Таким образом, множество $\Sigma(A)$ непусто и разбито на классы $\Sigma_d(A)$, $d \in \Omega(A)$, соответствующие наборам расстояний d до граничных компактов $A_i \in A$. Каждый класс $\Sigma_d(A)$, как правило, состоит более чем из одного элемента, и эти элементы частично упорядочены по включению. В работе[1] показано, что каждый класс $\Sigma_d(A)$ содержит наибольший элемент (так называемый *максимальный компакт Штейнера*), минимальные элементы (соответственно, *минимальные компакты Штейнера*), и, более того, компакт $K \subset X$ является компактом Штейнера из класса $\Sigma_d(A)$, если и только если K содержится в наибольшем и содержит один из минимальных компактов Штейнера из $\Sigma_d(A)$. Отметим, что поиск векторов расстояний d является отдельной и нетривиальная задачей.

Также статья[1] содержит неожиданный пример симметричного граничного множества $A = \{A_1,A_2,A_3\} \subset \mathcal{H}(\mathbb{R}^2)$, где каждое A_i состоит из двух соседних вершин правильного шестиугольника, и A_i получается из A_j поворотом вокруг центра O описанной вокруг этого шестиугольника окружности на угол $\pm 2\pi/3$, см. рис. 2.16 в диссертации. Для этого случая в[1] полностью описаны все компакты Штейнера, а именно, оказалось, что имеется три класса $\Sigma_d(A)$, для каждого из которых максимальный компакт Штейнера представляет собой невыпуклый криволинейный 4-угольник, единственный минимальный компакт состоит из двух точек, а компакты одного класса получаются из другого поворотами вокруг точки O на углы $\pm 2\pi/3$. Каждое кратчайшее дерево неинвариантно относительно таких поворотов, а длина его меньше 3, см. точный ответ ниже, теорема 2.18 из диссертационной работы (в данной конфигурации функционал $S(A,K)$ принимает значение 3 при $K = O$ — интуитивно напрашивающемся решении).

Подробная постановка проблемы Ферма–Штейнера в гиперпространствах. В диссертации изучается проблема Ферма–Штейнера в метрическом пространстве $\mathcal{H}(X)$ всех непустых компактных подмножеств конечномерного нормированного пространства X над полем $\mathbb{R}$ с метрикой Хаусдорфа. Изначально заданный конечный набор точек пространства $\mathcal{H}(X)$, до которых ищется минимум суммы расстояний Хаусдорфа, мы называем *граничным множеством* или просто *границей*, а сами точки — *граничными компактами*. Итак, задача состоит в поиске всех таких элементов $K \in \mathcal{H}(X)$, которые минимизируют функцию $S(A,K) = d_H(A_1,K) + \cdots + d_H(A_n,K)$. В дальнейшем минимальное значение функции $S(A,K)$ будет обозначаться через S_A.

Как известно[1], в рассматриваемом случае множество решений $\Sigma(A)$ проблемы Ферма–Штейнера непусто. Каждый элемент из $\Sigma(A)$ далее будем называть *компактом Штейнера*.

Пусть $K \in \Sigma(A)$. Тогда обозначим расстояние по Хаусдорфу между K и $A_i \in A$ через d_i. Вектор $d = (d_1, \cdots, d_n)$ назовём *вектором решения* проблемы. Множество всех таких векторов решений для границы A обозначим через $\Omega(A)$. Отметим, что разные компакты Штейнера могут задавать один и тот же элемент из $\Omega(A)$. При этом очевидно, что по элементу из $\Sigma(A)$ его вектор d восстанавливается однозначно. Таким образом, множество решений проблемы Ферма–Штейнера в $\mathcal{H}(X)$ разбивается на попарно непересекающиеся классы $\Sigma_d(A)$, каждый из которых соответствует своему вектору решения $d \in \Omega(A)$. Согласно работе[1] в ограниченно компактных пространствах каждый класс $\Sigma_d(A)$ содержит в себе по включению единственный *макси-*

мальный компакт Штейнера (он обозначается через K_d) и, вообще говоря, множество *минимальных компактов Штейнера.* В[1] также было доказано для случая ограниченно компактных пространств, что если $d \in \Omega(A)$, то $K_d = \bigcap\limits_{i=1}^{n} B_{d_i}(A_i)$, где $B_{d_i}(A_i)$ — шар (или ещё говорят замкнутая окрестность) с центром в компакте A_i. Более того, $K \in \Sigma_d(A)$ тогда и только тогда, когда с некоторым минимальным компактом Штейнера $K_\lambda \in \Sigma_d(A)$ справедливо $K_\lambda \subset K \subset K_d$.

Методы исследования. В диссертации применяются методы и конструкции из таких разделов математики, как математический анализ, метрическая геометрия, топология, евклидова геометрия, теория графов и теория минимальных сетей.

Положения, выносимые на защиту. Прежде, чем формулировать утверждения, необходимо ввести ряд определений и обозначений.

Определение 2.0.1. *Границу A, все элементы которой являются конечными множествами, назовём финитной.*

Определение 2.4.1. *Пусть дана финитная граница $A = \{A_1, \dots, A_n\} \subset \mathcal{H}(X)$, где $\mathcal{H}(X)$ — гиперпространство над конечномерным нормированным пространством X и $\mathrm{Conv}(K)$ — это выпуклая оболочка компакта K. Обозначим границу $\big\{\mathrm{Conv}(A_1), \dots, \mathrm{Conv}(A_n)\big\}$ через A^{Conv}. Финитную границу A мы называем устойчивой, если $S_A = S_{A^{\mathrm{Conv}}}$, иначе — неустойчивой.*

Определение 2.2.1. *Точку a из граничного компакта $A_i \in A$ назовём далёкой точкой компакта A_i для вектора $\widetilde{d} = (\widetilde{d}_1, \dots, \widetilde{d}_n) \in \mathbb{R}^n$, где $\widetilde{d}_j \geq 0$, если $U_{\widetilde{d}_i}(a) \cap \bigcap\limits_{j=1}^{n} B_{\widetilde{d}_j}(A_j) = \emptyset$. Множество всех далёких для вектора $\widetilde{d}$ точек компакта $A_i \in A$ обозначим через $F_{\widetilde{d}}^{A_i}$. Также положим $F_{\widetilde{d}}^{A} = \bigcup\limits_{j} F_{\widetilde{d}}^{A_j}$.*

Определение 2.2.2. *Точку a из граничного компакта $A_i \in A$ назовём неплотной точкой компакта A_i для вектора $\widetilde{d} = (\widetilde{d}_1, \dots, \widetilde{d}_n) \in \mathbb{R}^n$, где $\widetilde{d}_j \geq 0$, если $\mathrm{Int}\big(B_{\widetilde{d}_i}(a) \cap \bigcap\limits_{j=1}^{n} B_{\widetilde{d}_j}(A_j)\big) = \emptyset$. Множество всех неплотных для вектора $\widetilde{d}$ точек компакта $A_i \in A$ обозначим через $L_{\widetilde{d}}^{A_i}$. Также положим $L_{\widetilde{d}}^{A} = \bigcup\limits_{j} L_{\widetilde{d}}^{A_j}$.*

Определение 2.1.2. *Точку a из граничного компакта $A_i \in A$ назовём дискретной точкой компакта A_i для вектора $\widetilde{d} = (\widetilde{d}_1, \ldots, \widetilde{d}_n) \in \mathbb{R}^n$, где $\widetilde{d}_j \geq 0$, если $\# B_{\widetilde{d}_i}(a) \cap \bigcap\limits_{j=1}^{n} B_{\widetilde{d}_j}(A_j) < \infty$. Множество всех дискретных для вектора $\widetilde{d}$ точек компакта $A_i \in A$ обозначим через $D_{\widetilde{d}}^{A_i}$. Также положим $D_{\widetilde{d}}^{A} = \bigcup\limits_j D_{\widetilde{d}}^{A_j}$.*

Введём ещё некоторые обозначения. Пусть $\widetilde{d} \in \mathbb{R}^n$, и $\widetilde{d}_j \geq 0$ для всех j. Положим также, что $Y_{\widetilde{d}}^{A_i}$ — один из трёх типов точек $F_{\widetilde{d}}^{A_i}$, $L_{\widetilde{d}}^{A_i}$ или $D_{\widetilde{d}}^{A_i}$, то есть $Y_{\widetilde{d}}^{A_i} \in \{F_{\widetilde{d}}^{A_i}, L_{\widetilde{d}}^{A_i}, D_{\widetilde{d}}^{A_i}\}$ и $Y_{\widetilde{d}}^{A} \in \{F_{\widetilde{d}}^{A}, L_{\widetilde{d}}^{A}, D_{\widetilde{d}}^{A}\}$. Тогда

- $\mathrm{HP}(p, Y_{\widetilde{d}}^{A_i}) := B_{\widetilde{d}_i}(p) \cap \bigcap\limits_{j=1}^{n} B_{\widetilde{d}_j}(A_j)$, где $p \in Y_{\widetilde{d}}^{A_i}$;
- $\mathrm{HP}(Y_{\widetilde{d}}^{A_i}) := \bigcup\limits_{p \in Y_{\widetilde{d}}^{A_i}} \mathrm{HP}(p, Y_{\widetilde{d}}^{A_i})$;
- $\mathrm{HP}(Y_{\widetilde{d}}^{A}) := \bigcup\limits_i \mathrm{HP}(Y_{\widetilde{d}}^{A_i})$.

Отметим, что если $\widetilde{d} = d \in \Omega(A)$, то $\bigcap\limits_{j=1}^{n} B_{\widetilde{d}_j}(A_j) = K_d$ — максимальный компакт Штейнера в классе $\Sigma_d(A)$. Поэтому в таком случае $\mathrm{HP}(p, Y_d^{A_i}) = B_{d_i}(p) \cap \bigcap\limits_{j=1}^{n} B_{d_j}(A_j) = B_{d_i}(p) \cap K_d$, где $p \in Y_d^{A_i}$.

Подчеркнём, что в обозначении $\mathrm{HP}(p, Y_{\widetilde{d}}^{A_i})$ параметр $Y_{\widetilde{d}}^{A_i}$ определяет свойство, которым обладает множество $B_{\widetilde{d}_i}(p) \cap \bigcap\limits_{j=1}^{n} B_{\widetilde{d}_j}(A_j)$. А именно, при $p \in F_{\widetilde{d}}^{A_i}$ имеем $U_{\widetilde{d}_i}(p) \cap \bigcap\limits_{j=1}^{n} B_{\widetilde{d}_j}(A_j) = \emptyset$; при $p \in L_{\widetilde{d}}^{A_i}$ верно $\mathrm{Int}\big(B_{\widetilde{d}_i}(p) \cap \bigcap\limits_{j=1}^{n} B_{\widetilde{d}_j}(A_j)\big) = \emptyset$; а при $p \in D_{\widetilde{d}}^{A_i}$ справедливо $\# B_{\widetilde{d}_i}(p) \cap \bigcap\limits_{j=1}^{n} B_{\widetilde{d}_j}(A_j) < \infty$.

Определение 2.4.2. *Минимальный компакт $K_\lambda \in \Sigma_d(A)$ назовём погружённым, если $K_\lambda \setminus \mathrm{HP}(D_d^A) \subset \mathrm{Int}\, K_d$.*

Следующие результаты являются основными и выносятся автором на защиту.

Все перечисленные ниже результаты получены для случая произвольного конечномерного нормированного пространства X над полем $\mathbb{R}$.

Подробные доказательства перечисленных ниже результатов представлены в автореферате в разделе “Содержание”.

1. Следующие два результата являются решением первой задачи диссертации.

– В главе 2 разделе 1 подразделе 1 (под названием “Критерии минимальности компакта Штейнера”) диссертационной работы было определено *каноническое отношение* $R(K)$ между точками из произвольного непустого компакта $K \subset X$ и точками из граничных компактов. А именно, $(p, a) \in R(K)$, где $p \in K$ и $a \in A_i$, если $|p\,a| \le d_i$. Также в диссертации было введено некоторое условие 1 на отношение между произвольными множествами P и Q, где Q представлено в виде дизъюнктного объединения конечного числа непустых конечных множеств C_i. Это условие заключается в том, что каждая точка $p \in P$ состоит в отношении по крайней мере с одним элементом из каждого C_i и для p найдётся такой элемент $q \in Q$, что q состоит в отношении только с элементом p, см. условие 1. Для случая финитной границы A ***автором, А. А. Тужилиным и А. О. Ивановым с равнозначным вкладом всех трёх специалистов доказано***, что для финитной границы A и некоторого непустого компакта K каноническое отношение $R(K)$ является соответствием (то есть многозначным сюръективным отображением), удовлетворяющим условию 1, тогда и только тогда, когда K — минимальный компакт Штейнера в классе $\Sigma_d(A)$. Тем самым в терминах канонического отношения доказан критерий того, что данный компакт K является минимальным компактом Штейнера.
– В главе 2 разделе 1 подразделе 4 (под названием “Оценки количества точек в минимальном компакте Штейнера”) диссертации для случая финитной границы A ***автором, А. А. Тужилиным и А. О. Ивановым с равнозначным вкладом всех трёх авторов доказано***, что каждый минимальный компакт Штейнера K_λ конечен, получена оценка сверху на количество точек в нём. А именно, пусть $\widetilde{A}$ — дизъюнктное объединение всех n компактов в финитной границе A. Тогда для финитной границы дока-

зана справедливость следующего неравенства:

$$\#K_\lambda \leq \#\widetilde{A} - n + 1,$$

а в случае, когда имеется больше одного более чем одноточечного компакта в границе A, доказано, что

$$\#K_\lambda \leq \#\widetilde{A} - n.$$

Также если норма объемлющего пространства X строго выпукла, а в максимальном компакте Штейнера отсутствуют изолированные точки, то доказана выполнимость неравенства ниже:

$$\#K_\lambda \leq \#\widetilde{A} - n.$$

2. Следующий результат является решением второй задачи диссертации.

   В главе 2 разделе 4 подразделах 1 и 2 (под названиями "Устойчивость границы в проблеме Ферма–Штейнера" и "О достаточном условии неустойчивости, дающем оценку на умньшение веса сети" соответственно) диссертации ***автором доказаны*** три достаточных условия неустойчивости границы, одно из которых содержит оценку снизу на величину уменьшения минимальной сети типа звезда при переходе от финитной границы $A = \{A_1, \ldots, A_n\}$ к границе $A^{\mathrm{Conv}} = \big\{\mathrm{Conv}(A_1), \ldots, \mathrm{Conv}(A_n)\big\}$. А именно, пусть d является вектором решения проблемы Ферма–Штейнера для финитной границы A. Тогда автором доказано следующее.

   – Пусть граница $A = \{A_1, \ldots, A_n\}$ финитна и $d \in \Omega(A)$. Рассмотрим границу $A^{\mathrm{Conv}} = \big\{\mathrm{Conv}(A_1), \ldots, \mathrm{Conv}(A_n)\big\}$. Если для всех i верно $F_d^{\mathrm{Conv}(A_i)} = \emptyset$ или для всех i верно $L_d^{\mathrm{Conv}(A_i)} = \emptyset$, то граница A неустойчива.
   – Пусть граница $A = \{A_1, \ldots, A_n\}$ финитна. Пусть также все d_i положительны для некоторого $d \in \Omega(A)$. Рассмотрим границу $A^{\mathrm{Conv}} = \big\{\mathrm{Conv}(A_1), \ldots, \mathrm{Conv}(A_n)\big\}$. Если существует номер s такой, что $\mathrm{HP}\big(F_d^{\mathrm{Conv}(A_s)}\big) = \emptyset$ и для любой

$p \in \mathrm{HP}\bigl(F_d^{A^{\mathrm{Conv}}}\bigr)$ верно $p \notin \partial B_{d_s}\bigl(\mathrm{Conv}(A_s)\bigr)$, тогда граница A неустойчива.

– Пусть

  (1) норма пространства X строго выпукла;

  (2) граница $A = \{A_1, \ldots, A_n\}$ финитна;

  (3) $U_d^{\mathrm{Conv}} = \mathrm{Int}\, K_d^{\mathrm{Conv}} \neq \emptyset$, где $d \in \Omega(A)$;

  (4) $d_s > 0$;

  (5) $\Bigl(\bigcup\limits_{j=1}^{m_s} \partial B_{d_s}(a_j^s)\Bigr) \cap \mathrm{HP}(D_d^A) \subset U_d^{\mathrm{Conv}}$, где m_s — количество точек в компакте A_s.

$\Bigl($Автором доказано, что из пунктов (1) и (2) следует равенство $\mathrm{HP}(D_d^A) = \mathrm{HP}(L_d^A)$, поэтому пункт (5) из условий выше можно заменить на $\Bigl(\bigcup\limits_{j=1}^{m_s} \partial B_{d_s}(a_j^s)\Bigr) \cap \mathrm{HP}(L_d^A) \subset U_d^{\mathrm{Conv}}$. Более того, автор доказал, что если помимо пунктов (1) и (2) выполнено $\mathrm{Cl}(\mathrm{Int}\, K_d) = K_d$, то справедливо $\mathrm{HP}(D_d^A) = \mathrm{HP}(L_d^A) = \mathrm{HP}(F_d^A)$ и, значит, пункт (5) из условий выше можно также заменить на $\Bigl(\bigcup\limits_{j=1}^{m_s} \partial B_{d_s}(a_j^s)\Bigr) \cap \mathrm{HP}(F_d^A) \subset U_d^{\mathrm{Conv}}.\Bigr)$

Итак, автором диссертации доказано, что из пунктов (1)-(5) вытекает неустойчивость границы A.

Более того, в случае выполнения пунктов (1)-(5) для произвольного погружённого минимального компакта Штейнера $K_\lambda \in \Sigma_d(A)$ автор доказал неравенство

$$\delta_1 := \Bigl|K_\lambda\ \partial B_{d_s}\bigl(\mathrm{Conv}(A_s)\bigr)\Bigr| > 0;$$

и доказал неравенство

$$\delta_2 := \Bigl|\mathrm{Conv}(A_s)\ \partial B_{d_s}\bigl(K_d^{\mathrm{Conv}}\bigr)\Bigr| > 0.$$

Значит, $\min\{\delta_1, \delta_2, d_s\} > 0$. Выберем произвольное $0 < \delta \le \min\{\delta_1, \delta_2, d_s\}$ и положим $K = B_{d_s - \delta}\bigl(\mathrm{Conv}(A_s)\bigr) \cap K_d^{\mathrm{Conv}}$. Тогда, как доказано автором, справедливы следующие неравенства:

$$
\begin{aligned}
S_A - S_{A^{\mathrm{Conv}}} \geq S_A - S(A^{\mathrm{Conv}}, K) \geq \\
\geq S(A^{\mathrm{Conv}}, K_d^{\mathrm{Conv}}) - S(A^{\mathrm{Conv}}, K) \geq \delta > 0.
\end{aligned}
$$

Научная новизна. Для финитных границ: получен ряд критериев минимальности компакта Штейнера в классе решений проблемы Ферма–Штейнера; предложен алгоритм построения минимального компакта Штейнера в классе решений; предъявлены оценки сверху на количество точек в минимальном компакте Штейнера; доказаны некоторые новые свойства минимального и максимального компактов Штейнера. В граничных компактах для произвольных границ были определены три типа точек, характеризующиеся своей особой геометрией. Для каждого типа точек были выписаны условия на границу и объемлющее пространство, при которых эти точки обязаны присутствовать по крайней мере в одном граничном компакте. В терминах таких особых точек были получены три достаточных условия неустойчивости границы в проблеме Ферма–Штейнера. Более того, для неустойчивого случая в одном из условий приводится оценка снизу на уменьшение веса сети типа звезда при переходе от границы из конечных компактов к границе из их выпуклых оболочек. Продемонстрировано применение на практике развитой в диссертации теории. А именно, предложено существенно более эффективное решение проблемы Ферма–Штейнера для границы из работы[1], доказана неустойчивость этой границы и предъявлена оценка снизу на уменьшение веса сети при переходе от такой границы к границе из выпуклых оболочек исходных компактов. Помимо перечисленного выше в диссертации была также показана непрерывность в конечномерных нормированных пространствах некоторой операции с выпуклыми компактами, оказавшейся полезной при изучении проблемы Ферма–Штейнера.

Теоретическая и практическая ценность работы. Диссертация имеет как теоретический, так и практический характер. Результаты работы представляют интерес для специалистов в области минимальных сетей, вариационного исчисления и метрической геометрии.

Разработанные в диссертации техники оказались полезными на практике для эффективного построения и анализа минимальных параметрических сетей типа звезда в гиперпространствах над конечномерными нормированными пространствами, см. подразделы 2.1.7 и 2.4.3 диссертации.

Также приводимые в диссертации построения используют методы деформации элементов гиперпространств и помогают описывать свойства этих элементов в рамках проблемы Ферма–Штейнера.

Степень достоверности. ***Кроме теоремы 2.4 и следствия 4, все результаты из раздела 2.1 главы 2, а также из раздела 1.5 главы 1 диссертации являются оригинальными и получены совместно с равнозначным вкладом автора, профессора А. О. Иванова и профессора А. А. Тужилина. Все остальные результаты главы 2, теорема 2.4 и следствие 4 из раздела 2.1, а также результат из подраздела 1.6 главы 1 диссертации являются также оригинальными и получены автором самостоятельно.***

Все содержащиеся в диссертации результаты обоснованы с помощью строгих математических доказательств и опубликованы в открытой печати.

Результаты других авторов, используемые в диссертации, отмечены соотвествующими ссылками.

Апробация результатов. Полученные автором результаты диссертации были представлены на следующих международных и всероссийских конференциях и научных семинарах:

– XXV Международная научная конференция студентов, аспирантов и молодых учёных “Ломоносов–2018”, МГУ имени М. В. Ломоносова, Москва, Россия, 9–13 апреля 2018;
– Международная конференция “Геометрические методы в теории управления и математической физике”, РГУ, г. Рязань, Россия, 25–28 сентября 2018;
– XVII Всероссийская молодежная школа–конференция “Лобачевские чтения–2018”, КФУ, г. Казань, Россия, 23–28 ноября 2018;
– XXVI Международная научная конференция студентов, аспирантов и молодых учёных “Ломоносов–2019”, МГУ имени М. В. Ломоносова, Москва, Россия, 11 апреля 2019;
– Воронежская зимняя математическая школа С. Г. Крейна–2020, ВГУ, г. Воронеж, Россия, 27 января–4 февраля 2020;

– XXIX Международная научная конференция студентов, аспирантов и молодых ученых “Ломоносов–2022”, МГУ имени М. В. Ломоносова, Москва, Россия, 11–22 апреля 2022;
– Вторая конференция Математических центров России. Секция “Геометрия и топология”, МГУ имени М. В. Ломоносова, Москва, Россия, 7–11 ноября 2022;
– VI–ая международная молодежная научная школа “Актуальные направления математического анализа и смежные вопросы”, ВГУ, г. Воронеж, Россия, 14–15 ноября 2022;
– Семинар “Дифференциальная геометрия и приложения” под руководством акад. А. Т. Фоменко, МГУ имени М. В. Ломоносова, 28 ноября 2022;
– Семинар “Теория экстремальных сетей” под руководством проф. А. А. Тужилина и проф. А. О. Иванова, МГУ имени М. В. Ломоносова, 2018–2022.

Публикации автора. Результаты диссертации обоснованы в виде строгих математических доказательств и опубликованы в четырёх статьях [24, 25, 26, 27], из которых четыре опубликованы в рецензируемых научных журналах, удовлетворяющих положению о присуждении ученых степеней в МГУ. Работа [24] опубликована в журнале, входящем в реферативные базы данных MathSciNet, Scopus, Web of Science и RSCI; работы [25, 26] опубликованы в журнале, входящем в реферативные базы данных MathSciNet, Scopus и RSCI; русскоязычная версия работы [27] вышла в журнале, входящем в реферативную базу РИНЦ, а англоязычная версия работы [27] опубликована в журнале, входящем в реферативные базы данных zbMATH издательства Springer, Scopus и Mathematical Reviews.

Отметим, что результаты работ [24, 27], опирающиеся на лемму 1.7, прямо обобщаются без изменения доказательств на случай конечномерных нормированных пространств со строго выпуклой нормой, а все остальные утверждения из параграфов 2 и 3 статьи [24] и раздела 3 статьи [27] обобщаются точно так же без каких бы то ни было изменений в доказательствах на случай произвольных конечномерных нормированных пространств. Более того, все результаты работ [24, 27] аналогично без изменений распространяются на случай, быть может, пересекающихся конечных граничных компактов.

Именно в таком обобщённом виде данные результаты из [24, 27] представлены в диссертации.

Отметим, что предварительный вариант статьи [25] был выложен в систему arXiv.org, см. [28], а статья [26] является существенно переработанным и дополненным вариантом работы [29] из системы arXiv.org.

Структура и объем диссертации. Диссертация состоит из введения, двух глав, заключения и списка литературы, а также содержит 25 рисунков. Первая глава разбита на восемь разделов, вторая — на четыре. В свою очередь раздел 2.1 диссертационной работы состоит из семи подразделов, а раздел 2.4 диссертации — из трёх. При этом подраздел 2.4.3 дополнительно разбит ещё на семь частей. Текст работы изложен на 108-ми страницах. Список литературы содержит 37 наименований.

В главе 1 диссертации приводятся все нужные определения и вспомогательные утверждения, которые используются в работе. Эта часть также содержит в себе утверждение, имеющее самостоятельный интерес, см. теорему 1.15 из раздела 1.6 диссертации. А именно, в разделе 1.6 изучается деформация пересечения одного компакта с замкнутой окрестностью другого компакта посредством изменения радиуса этой окрестности. Автором доказано, что в конечномерных нормированных пространствах в случае, когда оба компакта являются непустыми выпуклыми подмножествами, такая операция непрерывна в топологии, порождённой метрикой Хаусдорфа.

Раздел 2.1 посвящён изучению компактов Штейнера из фиксированного класса решений $\Sigma_d(A)$ в случае *финитных границ* (то есть границ, все элементы которых являются конечными множествами). В этом разделе в подразделе 2.1.1 автором, А. А. Тужилиным и А. О. Ивановым доказаны критерии того, когда компакт $K \in \mathcal{H}(X)$ является минимальным компактом Штейнера (теоремы 2.1 из диссертации и 2.2), в подразделе 2.1.2 автором, А. А. Тужилиным и А. О. Ивановым предъявлен и обоснован алгоритм построения минимальных компактов для заданного вектора d (алгоритм 1 в диссертации), в подразделе 2.1.3 автором, А. А. Тужилиным и А. О. Ивановым найден и доказан ряд геометрических свойств максимального компакта Штейнера. Далее на основе этих результатов, а также результатов из раздела 1.5 главы 1 в подразделе 2.1.4 автором, А. А. Тужилиным и А. О. Ивановым выписаны и доказаны оценки на количество точек в минимальном компакте для случая финитной границы (теоремы 2.6 и 2.7 в диссертации).

В подразделе 2.1.5 диссертации введены понятие *множества дискретных точек* $D^{A_i}_{\widetilde{d}}$ компакта A_i для вектора $\widetilde{d} = (\widetilde{d}_1, \dots, \widetilde{d}_n) \in \mathbb{R}^n$, где все $\widetilde{d}_i$ неотрицательны, и соответствующее ему понятие *множества сцепки* $\mathrm{HP}(p, D^{A_i}_{\widetilde{d}})$ *компакта* $\bigcap\limits_{j=1}^{n} B_{\widetilde{d}_j}(A_j)$ *с точкой* $p \in D^{A_i}_{\widetilde{d}}$, которое по определению равно $B_{\widetilde{d}_i}(p) \cap \bigcap\limits_{j=1}^{n} B_{\widetilde{d}_j}(A_j)$. Автором доказано, что в случае финитных границ и пространств X со строго выпуклой нормой для любого вектора решения d по крайней мере у одного граничного компакта A_i множество дискретных точек $D^{A_i}_d$ и множество $\bigcup\limits_{p \in D^{A_i}_d} \mathrm{HP}(p, D^{A_i}_d)$ непусты, см. теорему 2.4 и следствие 4 в диссертации.

В том же подразделе 2.1.5 раздела 2.1 главы 1 в терминах множеств сцепки для случая финитных границ автор, А. А. Тужилин и А. О. Иванов доказали критерий единственности минимального компакта Штейнера (теорема 2.8 диссертации) в классе $\Sigma_d(A)$. Посредством множеств сцепки для финитных границ и строго выпуклой нормы пространства X в разделе 2.1.5 автором, А. А. Тужилиным и А. О. Ивановым доказано, что для каждого номера i существует точка из минимального компакта Штейнера K_λ такая, что на ней *реализуются* минимум два различных расстояния d_i и d_k из вектора решения, см. следствие 6 (по определению, на точке $p \in X$ *реализуется расстояние* d_i, если существует $a \in A_i$ такая, что $|a\,p| = d_i$).

В подразделе 2.1.6 автор, А. А. Тужилин и А. О. Иванов доказали достаточное условие для того, чтобы непустой компакт из конечномерного пространства со строго выпуклой нормой не являлся компактом Штейнера, см. теорему 2.12 в диссертации.

В следующем подразделе 2.1.7 диссертации полученные результаты применяются к изученному в работе[1] граничному множеству. Разработанная в проведённом исследовании техника позволила получить тот же нетривиальный ответ (теорема 2.18 в диссертации), но существенно более простым и прозрачным образом.

В разделе 2.2 диссертационной работы вводятся дополнительные типы точек: *множество далёких точек* $F^{A_i}_{\widetilde{d}}$ компакта A_i для вектора $\widetilde{d} \in \mathbb{R}^n$ и *множество неплотных точек* $L^{A_i}_{\widetilde{d}} \in \mathbb{R}^n$ компакта A_i для вектора $\widetilde{d}$, где все компоненты вектора $\widetilde{d}$ неотрицательны. Для всех этих типов точек (дискретные, далёкие и неплотные) вводится общее понятие *множества сцепки* $\mathrm{HP}(p,Y_{\widetilde{d}}^{A_i})$ *компакта* $\bigcap\limits_{j=1}^{n} B_{\widetilde{d}_j}(A_j)$ с *точкой* $p \in Y_{\widetilde{d}}^{A_i}$, где $Y \in \{D, F, L\}$, которое по определению равно $B_{\widetilde{d}_i}(p) \cap \bigcap\limits_{j=1}^{n} B_{\widetilde{d}_j}(A_j)$. Ключевыми утверждениями в данном разделе являются теорема 2.21, доказанная автором, о существовании в случае *выпуклой границы* для любого вектора решения d по крайней мере в одном граничном компакте A_i далёких точек $F_d^{A_i}$ (границы, все компакты в которых являются выпуклыми множествами, в работе называются выпуклыми), а также теорема 2.23, тоже доказанная автором, о совпадении множеств $D_d^{A_i}$, $F_d^{A_i}$ и $L_d^{A_i}$ в случае финитной границы, строго выпуклой нормы пространства X и выполнения условия $\mathrm{Cl}(\mathrm{Int}\, K_d) = K_d$, где K_d — максимальный компакт Штейнера в классе $\Sigma_d(A)$.

Главным результатом раздела 2.3 является доказанная автором теорема 2.28 (см. текст диссертации) описывающая некоторое свойство максимального компакта Штейнера K_d для случая выпуклых границ в терминах множеств сцепки. А именно, теорема 2.28 говорит о том, что если A_i не содержит в себе далёких точек, то тогда множество $\partial B_{d_i}(A_i)$ пересекается с $\bigcup\limits_{p \in F_d^{A_j}} \mathrm{HP}(p, F_d^{A_j})$ по крайней мере для одного A_j. Здесь явным образом используется тот факт, что в случае выпуклых границ для любого вектора решения хотя бы один граничный компакт имеет своё множество далёких точек. Отметим, что на теорему 2.28 существенно опирается второе достаточное условие неустойчивости (следствие 12).

В разделе 2.4 диссертационной работы исследуются вопросы того, что можно сказать при переходе от границы из конечных компактов A_i к границе, состоящей из их выпуклых оболочек $\mathrm{Conv}(A_i)$. Напомним, что в диссертации финитные границы $A = \{A_1, \dots, A_n\}$, для которых минимумы функционалов $S\Big(\{A_1, \dots, A_n\}, K\Big)$ и $S\Big(\{\mathrm{Conv}(A_1), \dots, \mathrm{Conv}(A_n)\}, K\Big)$ равны, называются *устойчивыми*, иначе — *неустойчивыми*. Теория устойчивости здесь также существенно опирается на результаты, связанные с множествами сцепки для финитных и выпуклых границ.

Основными результатами раздела 2.4 являются утверждение 2.4.2 из подраздела 2.4.1, доказанное автором, опирающееся на утверждение 2.4.1, которое также доказал автор, и дающее ответ на вопрос, что произойдёт с векторами решений из $\Omega(A)$ и каким будет максимальный компакт Штейнера в случае устойчивой границы; следствия 11, 12 из подраздела 2.4.1 и теорема 2.40 из подраздела 2.4.2, которые тоже доказал автор, приводящие различные достаточные условия неустойчивости границы (в теореме 2.40, в частности, приводится оценка снизу на величину уменьшения веса сети в неустойчивом случае), и наконец, теорема 2.32 из подраздела 2.4.1, доказанная автором и раскрывающая связь между третьим достаточным условием неустойчивости (теорема 2.40) и вторым (следствие 12). В подразделе 2.4.3 автор демонстрирует приложение теоремы 2.40 из секции 2.4.2 на примере конкретной задачи из подраздела 2.1.7.

Отметим, что утверждение 2.4.2, упомянутое выше, не является новым, его можно найти в статье[16], однако в диссертации автор самостоятельно приводит его альтернативное доказательство.

Наконец, в разделе “Заключение” подводятся итоги проделанной работы.

Содержание работы

В диссертации рассматриваются только гиперпространства $\mathcal{H}(X)$, построенные над конечномерными нормированными пространствами, а в качестве метрики на них берётся расстояние Хаусдорфа.

Итак, пусть X всюду далее — конечномерное нормированное пространство над полем $\mathbb{R}$.

Далее потребуются следующие определения.

Определение 2.0.1. *Границу A, все элементы которой являются конечными множествами, назовём финитной.*

Определение 1.5.1. *Отношением между множествами A и B называется произвольное подмножество декартова произведения $A \times B$.*

Определение 1.5.2. *Отношение R между A и B называется соответствием, если ограничение канонических проекций*

$$\pi_A : A \times B \to A \text{ и } \pi_B : A \times B \to B$$

[16]Тропин А. М. Оценка длины минимальной параметрической сети в гиперпространствах при деформации граничного множества // Интеллектуальные системы. Теория и приложения, 25, 2, 2021, стр. 81–107

на R — сюръекции.

Определение 2.1.1. *Пусть $K \in \mathcal{H}(X)$. Зададим отношение $R(K) \subset K \times \widetilde{A}$ следующим образом: $(p,a^i_j) \in R(K)$, если и только если $|pa^i_j| \le d_i$. Отношение $R(K)$ назовём* d-каноническим *или просто* каноническим.

Решение первой задачи диссертации

На протяжении всего этого раздела $A = \{A_1,\dots,A_n\} \subset \mathcal{H}(X)$ — финитная граница, $\widetilde{A} = \sqcup_i A_i$, $d = \{d_1,\dots,d_n\} \in \Omega(A)$ и $K_d \in \Sigma_d(A)$ — максимальный компакт Штейнера. В случае финитной границы A количество точек в компакте $A_i \in A$ будет обозначаться через m_i, а сами точки через a^i_j. Таким образом, $A_i = \bigcup\limits_{j=1}^{m_i}\{a^i_j\}$. Для удобства в настоящем разделе, там где это не вызовет недоразумений, вместо $B_{d_i}(a^i_j)$, $B_{d_i}(A_i)$, $U_{d_i}(a^i_j)$, $U_{d_i}(A_i)$ будем писать B^i_j, B^i, U^i_j и U^i соответственно.

Критерий минимальности компакта Штейнера.

В диссертации было введено условие 1 на отношение между произвольными множествами P и Q, где Q представлено в виде дизъюнктного объединения конечного числа непустых конечных множеств C_i. Это условие заключается в том, что каждая точка $p \in P$ состоит в отношении по крайней мере с одним элементом из каждого C_i и для p найдётся такой элемент $q \in Q$, что q состоит в отношении только с элементом p, см. условие 1 из диссертации.

Теорема 2.2 (А.Х. Галстян, А.О. Иванов, А.А. Тужилин)**.** [24]. *Пусть $K \in \mathcal{H}(X)$. Каноническое отношение $R(K)$ является соответствием, удовлетворяющим условию* 1 *из диссертации, тогда и только тогда, когда K — минимальный компакт Штейнера в классе $\Sigma_d(A)$.*

Доказательство. Покажем, что $R(K)$ является соответствием, удовлетворяющим условию 1 (см. диссертацию), тогда и только тогда, когда для K справедливы все три пункта теоремы 2.1 (см. диссертацию).

Пусть сначала $R(K)$ — соответствие, удовлетворяющее условию 1 из диссертации. Тогда K конечно по лемме 1.12 из диссертации, и для любой точки $p \in K$ ее образ $R(p)$ пересекается с каждым A_i, значит, $p \in B^i_j$ для подходящего j, откуда $K \subset B^i$ для любого i, т.е. $K \subset K_d$, и выполнено свойство (1) из теоремы 2.1 из диссертационной работы. Далее, так как $R(K)$

— соответствие, то для каждой точки $a^i_j \in \widetilde{A}$ найдется точка $p \in K$ такая, что $(p,a^i_j) \in R$, т.е. $|pa^i_j| \le d_i$, т.е. выполнено свойство (2) из теоремы 2.1 из диссертации. Наконец, $R(p)$ содержит такую точку a^i_j, что $R^{-1}(a^i_j) = \{p\}$, поэтому $K \setminus \{p\}$ не пересекается с B^i_j, т.е. выполнено свойство (3) из теоремы 2.1 диссертации.

Обратно, пусть $K \in \mathcal{H}(X)$ удовлетворяет условиям теоремы 2.1 (см. диссертацию). Так как $K \subset K_d$, то каждая точка $p \in K$ содержится в каждом шаре B^i, значит, $|pa^i_j| \le d_i$ для некоторого j, поэтому $R(p)$ пересекается с каждым множеством A_i. И обратно, пересечение $K \cap B^i_j$ непусто, и, значит, $R^{-1}(a^i_j)$ непусто для любых i и j. Итак, R — соответствие, образ которого пересекается с каждым A_i. Наконец, для каждой точки $p \in K$ найдется $a^i_j \in A_i$ такая, что $K \setminus \{p\}$ не пересекается с B^i_j. Последнее означает, что $R^{-1}(a^i_j) = \{p\}$. Поэтому соответствие R удовлетворяет условию 1. Теорема доказана.

$\square$

Оценки количества точек в минимальном компакте Штейнера.

Теорема 2.6 (А.Х. Галстян, А.О. Иванов, А.А. Тужилин)**.** [24]. *Каждый минимальный компакт $K_\lambda \in \Sigma_d(A)$ является конечным множеством, количество его точек не превосходит $\#\widetilde{A} - n + 1$, а в случае, когда имеется больше одного A_i, для которого $m_i > 1$, оно не превосходит $\#\widetilde{A} - n$.*

Доказательство. Пусть $R(K_\lambda)$ — каноническое отношение. Так как K_λ — минимальный компакт Штейнера, то согласно теореме 2.2 отношение $R(K_\lambda)$ является соответствием, для которого справедливы условия 1 из диссертации. Осталось применить теорему 1.13, содержащуюся в тексте диссертации.

$\square$

В самом общем случае оценки в теореме 2.6 не улучшаемы. А именно, в примере 1 из текста диссертации имеем: $\#K_2 = 3 = (m_1 + m_2) - n$, где $m_1 = 3$, $m_2 = 2$, $n = 2$.

Также приведем пример, когда достигается оценка $\#\widetilde{A} - n + 1$.

Пример 3. *Рассмотрим $A = \{A_1,A_2\}$, где $A_1 = \{a^1_1,a^1_2\}, A_2 = \{a^2_1\} \in \mathcal{H}(\mathbb{R}^2)$. Точки a^1_1 и a^1_2 симметричны относительно a^2_1, см. рис. 2.3. Пусть $\rho = |a^2_1a^1_1| = |a^2_1a^1_2|$, тогда $d_H(A_1,A_2) = \rho$. Фиксируем d_1 и d_2 такие, что $d_1 > d_2 > 0$, $d_1 + d_2 = \rho$. Из теоремы* 2.1 *диссертации следует, что*

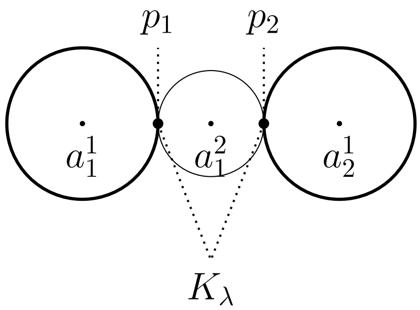

Рис. 2.3 — Верхняя оценка $\#K_\lambda$ достигается.

$\{p_1,p_2\} = K_\lambda \in \Sigma_{(d_1,d_2)}(A)$ *(заметим, что в данном случае* $K_\lambda = K_{(d_1,d_2)}$*). При этом в границе* A *меньше двух компактов, состоящих более чем из одной точки, и* $\#K_\lambda = 2 = (m_1 + m_2) - n + 1$*, где* $m_1 = 2$*,* $m_2 = 1$*,* $n = 2$*.*

Замечание 5. *Отметим, что теорема 1.13 из текста диссертации говорит о точности верхних оценок для произвольных значений* n *и* m_i*. Но мы не можем гарантировать точность этих оценок в случае, когда отношение* R *— каноническое, а не произвольное, как в теореме 1.13 диссертации.*

Гипотеза 1. *Оценки в теореме 2.6 точны для произвольных* n *и* m_i*.*

Замечание 6. *Из теоремы 2.6 следует, что если класс* $\Sigma_d(A)$ *содержит в себе всего один компакт, то он является конечным, причём количество точек в нём не превосходит соответствующей оценки (в этом случае* $K_d = K_\lambda$*). Однако, из того, что максимальный компакт* K_d *является конечным, не следует, что класс* $\Sigma_d(A)$ *содержит в себе всего один элемент. Построим соответствующий пример.*

Пример 4. *Рассмотрим* $A = \{A_1,A_2\}$*, где* $A_1 = \{a_1^1,a_2^1\}, A_2 = \{a_1^2,a_2^2\} \in \mathcal{H}(\mathbb{R}^2)$*. Все четыре точки расположены на одной прямой так, как показано на рис. 2.4. Пусть* $r = |a_1^1a_1^2| = |a_1^2a_2^1| = |a_2^1a_2^2|$*, тогда* $d_H(A_1,A_2) = \rho$*. Фиксируем* $d_1 > d_2 > 0$ *такие, что* $d_1 + d_2 = \rho$*. Максимальный компакт* $K_{(d_1,d_2)}$ *состоит из трех точек, а именно,* $p_1 = B_1^1 \cap B_1^2$*,* $p_2 = B_1^2 \cap B_2^1$ $p_3 = B_2^1 \cap B_2^2$*. Граф* G_R *канонического отношения* $R \subset K_{(d_1,d_2)} \times \widetilde{A}$ *состоит из шести ребер* $a_1^1p_1$*,* $p_1a_1^2$*,* $a_1^2p_2$*,* $p_2a_2^1$*,* $a_2^1p_3$*,* $p_3a_2^2$*, его вершина* p_2 *смежна только с вершинами степени 2, поэтому может быть удалена в соответствии с алгоритмом 1 из диссертации. В результате получим компакт Штейнера* $K = \{p_1,p_3\}$*, который, как легко видеть, является минимальным.*

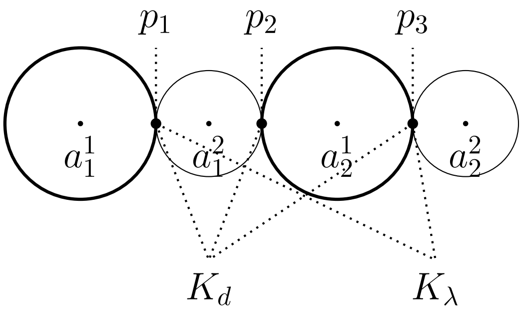

Рис. 2.4 — Пример, когда K_d является конечным и $K_d \neq K_\lambda$

Теорема 2.7 (А.Х. Галстян, А.О. Иванов, А.А. Тужилин). [24]. *Пусть норма пространства X строго выпукла. Тогда если в K_d нет изолированных точек, то $\#K_\lambda \le \#\widetilde{A} - n$.*

Доказательство. По следствию 3 из диссертации, если все m_i равны 1, то $\#K_d = 1$, и поэтому условие теоремы не выполняется. Таким образом, без ограничения общности будем предполагать, что хотя бы для одного i мы имеем $m_i > 1$.

Пусть $R = R(K_\lambda)$ — каноническое отношение. Так как K_λ — минимальный компакт Штейнера, то по теореме 2.2 отношение $R(K_\lambda)$ является соответствием, удовлетворяющим условиям 1, выписанным в тексте диссертации. Покажем, что R удовлетворяет условиям 2 из диссертации, т.е. существует точка $p \in K_\lambda$ и A_i такие, что $R(p) \cap A_i$ состоит не менее чем из двух точек.

Заметим, что

$$K_d = K_d \cap B^i = K_d \cap \Big(\bigcup_{j=1}^{m_i} B_j^i\Big) = \bigcup_{j=1}^{m_i} \big(K_d \cap B_j^i\big).$$

По предположению в K_d нет изолированных точек, значит, по утверждению 2.1.8 из диссертации найдётся такая точка a_j^i, что $U_j^i \cap K_d = \emptyset$, откуда, согласно утверждению 2.1.10 диссертации, следует, что множество $B_j^i \cap K_d$ конечно, поэтому у каждой точки $p \in B_j^i \cap K_d$ существует окрестность U такая, что $U \cap (B_j^i \cap K_d) = \{p\}$. Если p не содержится ни в каком другом множестве $K_d \cap B_k^i$, где $k \neq j$, то, уменьшая U если нужно так, чтобы она не пересекалась с шарами B_k^i, $k \neq j$, получим, что $U \cap K_d = \{p\}$, т.е. p — изолированная точка в K_d, противоречие. Поэтому каждая точка из множества $B_j^i \cap K_d$ лежит ещё в некотором замкнутом шаре B_k^i, $k \neq j$.

По теореме 2.1 диссертации пересечение $K_\lambda \cap B_j^i$ непусто для любых i и j, и, очевидно, содержится в $B_j^i \cap K_d$, поэтому оно содержит точку p, лежащую также и в B_k^i, $k \neq j$. Отсюда вытекает, что $R(p) \supset \{a_j^i, a_k^i\}$, что и требовалось. Для завершения доказательства теоремы остается применить теорему 1.14 (см. диссертацию).

$\square$

Замечание 7. *Пусть даны границы*

$$A = \{A_1, \dots, A_n\} \text{ и } A' = \{A_1, \dots, A_n, \{a_1\}, \dots, \{a_k\}\},$$

где $\{a_1\}, \dots, \{a_k\}$ — одноточечные множества. Пусть $K_\lambda \in \Sigma_d(A)$ и $K'_\lambda \in \Sigma_{d'}(A')$. Отметим, что $d \neq d'$, вообще говоря, однако при этом величины из теорем 2.6 и 2.7, оценивающие количество точек в минимальных компактах Штейнера K_λ и K'_λ, равны.

Как в теореме 2.6, оценка в теореме 2.7 в самом общем случае не улучшаема. Приведем соответствующий пример.

Пример 5. *Рассмотрим $A = \{A_1, A_2\}$, где $A_1 = \{a_1^1, a_2^1\}, A_2 = \{a_1^2\} \in \mathcal{H}(\mathbb{R}^2)$. Все три точки расположены на одной прямой так, как показано на рис. 2.5. Пусть $d_1 < |a_1^2 a_1^1|$, $d_2 = |a_1^2 a_1^1| + d_1$, $|a_1^1 a_2^1| = 2d_1$, тогда $d_H(A_1, A_2) = d_1 + d_2$.*

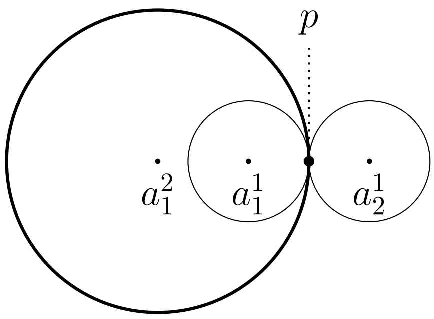

Рис. 2.5 — Пример достижения верхней оценки $\#K_\lambda$

Положим $d = \{d_1, d_2\}$, тогда $K_d = B_1^1$. Пусть $p = B_1^2 \cap B_2^1$. Покажем, что $K_\lambda = \{p\}$. Очевидно $K_\lambda \subset K_d$. Далее, точка p принадлежит всем трем шарам B_2^1, B_1^2 и B_1^1. Наконец, $K_\lambda \setminus \{p\} = \emptyset$, откуда, по теореме 2.1, K_λ — минимальный компакт в классе $\Sigma_d(A)$.

С другой стороны, $m_1 = 2$, $m_2 = 1$, $n = 2$, и $\#K_\lambda = 1 = (m_1+m_2)-n$, так что оценка достигается. Отметим, что граница A содержит только один компакт, состоящий более чем из одной точки.

Напомним, что теорема 1.14 также говорит о точности верхней оценки для произвольных значений n и m_i. Но мы не можем гарантировать точность этой оценки, когда отношение R специального вида, а именно, когда оно каноническое.

Гипотеза 2. *Оценка в теореме 2.7 точна для произвольных n и m_i.*

Таким образом, пусть $\widetilde{A}$ — дизъюнктное объединение всех n компактов в финитной границе A. Теорема 2.2 и неравенство ниже являются **решением первой задачи диссертации**.

$$\#K_\lambda \le \begin{cases} \#\widetilde{A} - n + 1, & \text{в общем случае;} \\ \#\widetilde{A} - n, & \text{если существуют } A_i, A_j \in A \ (i \ne j): \\ & \#A_i > 1 \text{ и } \#A_j > 1 \text{ или} \\ & \text{если норма пространства } X \text{ строго выпукла и} \\ & \text{в } K_d \text{ нет изолированных точек.} \end{cases}$$

Решение второй задачи диссертации

О переходе от финитной границы к границе из выпуклых оболочек.

Устойчивость границы в проблеме Ферма–Штейнера. Пусть $A = \{A_1, \ldots, A_n\} \subset \mathcal{H}(X)$ — произвольная граница и $d \in \Omega(A)$. Положим

$$K_d^{\mathrm{Conv}} = \bigcap_{i=1}^{n} B_{d_i}\big(\mathrm{Conv}(A_i)\big).$$

Пусть дана финитная граница $A = \{A_1, \ldots, A_n\} \subset \mathcal{H}(X)$. Положим

$$A^{\mathrm{Conv}} = \big\{\mathrm{Conv}(A_1), \ldots, \mathrm{Conv}(A_n)\big\}.$$

Введём определение устойчивой границы.

Определение 2.4.1. *Финитную границу $A = \{A_1, \ldots, A_n\} \subset \mathcal{H}(X)$ назовём устойчивой, если $S_A = S_{A^{\mathrm{Conv}}}$, иначе — неустойчивой.*

Замечание 11. *В силу утверждения* 2.4.1 *из диссертационной работы для любой финитной границы A верно неравенство $S_A \geq S_{A^{\mathrm{Conv}}}$.*

Пусть нам дана финитная граница $A = \{A_1, \ldots, A_n\}$ (неважно, устойчивая или нет), произвольный вектор решения $d \in \Omega(A)$ и соответствующий компакт $K_d^{\mathrm{Conv}} = \bigcap\limits_{i=1}^{n} B_{d_i}\bigl(\mathrm{Conv}(A_i)\bigr)$. Чтобы сформулировать следующие утверждения, напомним некоторые обозначения, введённые выше, а именно, выпишем их для частного случая вектора $d \in \Omega(A)$ и границы $A^{\mathrm{Conv}} = \{\mathrm{Conv}(A_1), \ldots, \mathrm{Conv}(A_n)\}$:

– $F_d^{\mathrm{Conv}(A_i)} := \bigl\{a \in \mathrm{Conv}(A_i) \mid U_{d_i}(a) \cap K_d^{\mathrm{Conv}} = \emptyset\bigr\}$;

– $\mathrm{HP}\bigl(F_d^{\mathrm{Conv}(A_i)}\bigr) := B_{d_i}\bigl(F_d^{\mathrm{Conv}(A_i)}\bigr) \cap K_d^{\mathrm{Conv}}$;

– $\mathrm{HP}\bigl(F_d^{A^{\mathrm{Conv}}}\bigr) := \bigcup\limits_{i} \mathrm{HP}\bigl(F_d^{\mathrm{Conv}(A_i)}\bigr)$;

– $L_d^{\mathrm{Conv}(A_i)} := \bigl\{a \in \mathrm{Conv}(A_i) \mid \mathrm{Int}\bigl(B_{d_i}(a) \cap K_d^{\mathrm{Conv}}\bigr) = \emptyset\bigr\}$.

Из утверждения 2.4.2 диссертации и теоремы 2.21 диссертации вытекает следующее следствие.

Следствие 11 (А.Х. Галстян. **Первое достаточное условие неустойчивости**). [26]. *Пусть граница $A = \{A_1, \ldots, A_n\}$ финитна и $d \in \Omega(A)$. Если для всех i верно $F_d^{\mathrm{Conv}(A_i)} = \emptyset$ или для всех i верно $L_d^{\mathrm{Conv}(A_i)} = \emptyset$, то граница A неустойчива.*

Доказательство. Допустим противное, что граница A устойчива. Но тогда согласно утверждению 2.4.2 из текста диссертации верно, что $d \in \Omega(A^{\mathrm{Conv}})$ и компакт K_d^{Conv} является максимальным компактом Штейнера в классе $\Sigma_d(A^{\mathrm{Conv}})$.

Пусть для всех i выполняется $F_d^{\mathrm{Conv}(A_i)} = \emptyset$. В таком случае вектор решения $d \in \Omega(A^{\mathrm{Conv}})$ является вектором, для которого ни в одном граничном компакте нет далёких точек. Так как граница A^{Conv} выпукла, то мы приходим к противоречию с теоремой 2.21 из диссертационной работы.

Пусть теперь для всех i верно $L_d^{\mathrm{Conv}(A_i)} = \emptyset$. Тогда согласно определению множества $L_d^{\mathrm{Conv}(A_i)}$ для всех $a \in \mathrm{Conv}(A_i)$ справедливо, что

$$\emptyset \neq \mathrm{Int}\bigl(B_{d_i}(a) \cap K_d^{\mathrm{Conv}}\bigr) = \mathrm{Int}\, B_{d_i}(a) \cap \mathrm{Int}\, K_d^{\mathrm{Conv}}.$$

Отсюда $\operatorname{Int} K_d^{\mathrm{Conv}} \neq \emptyset$. Значит, согласно следствию 8 из диссертации в силу выпуклости границы A^{Conv} получаем

$$L_d^{\mathrm{Conv}(A_i)} = F_d^{\mathrm{Conv}(A_i)}.$$

Таким образом, снова имеем ситуацию, когда для всех i выполнено $F_d^{\mathrm{Conv}(A_i)} = \emptyset$, что в случае выпуклой границы противоречит теореме 2.21 из диссертационной работы, как отмечено выше. Следовательно, граница $A = \{A_1, \ldots, A_n\}$ неустойчива.

$\square$

Далее, также из утверждения 2.4.2 диссертации и теоремы 2.28 диссертации вытекает следствие ниже.

Следствие 12 (А.Х. Галстян. **Второе достаточное условие неустойчивости**). [26]. *Пусть граница $A = \{A_1, \ldots, A_n\}$ финитна. Пусть также все d_i положительны для некоторого $d \in \Omega(A)$. Если существует номер s такой, что $\mathrm{HP}\big(F_d^{\mathrm{Conv}(A_s)}\big) = \emptyset$ и для любой $p \in \mathrm{HP}\big(F_d^{A^{\mathrm{Conv}}}\big)$ верно $p \notin \partial B_{d_s}\big(\mathrm{Conv}(A_s)\big)$, тогда граница A неустойчива.*

Доказательство. Допустим противное, что граница A устойчива. Но тогда согласно утверждению 2.4.2 из диссертации компакт K_d^{Conv} является максимальным компактом Штейнера в классе $\Sigma_d(A^{\mathrm{Conv}})$. Таким образом, мы пришли к тому, что существует номер s такой, что для всех точек $p \in \mathrm{HP}\big(F_d^{A^{\mathrm{Conv}}}\big)$ верно, что $p \notin \mathrm{HP}\big(F_d^{\mathrm{Conv}(A_s)}\big)$ $\Big($так как $\mathrm{HP}\big(F_d^{\mathrm{Conv}(A_s)}\big) = \emptyset\Big)$ и согласно условию $p \notin \partial B_{d_s}\big(\mathrm{Conv}(A_s)\big)$. Также отметим, что граница A^{Conv} является выпуклой и по условию все d_i положительны. Следовательно, получаем противоречие с теоремой 2.28 диссертации. Значит, граница $A = \{A_1, \ldots, A_n\}$ неустойчива.

$\square$

Положим

$$U_d^{\mathrm{Conv}} = \operatorname{Int} K_d^{\mathrm{Conv}}.$$

Заметим, что так как для конечных пересечений внутренность пересечения равна пересечению внутренностей, то верно $U_d^{\mathrm{Conv}} = \bigcap\limits_{i=1}^{n} \operatorname{Int} B_{d_i}\big(\mathrm{Conv}(A_i)\big)$. Отметим, что для любого $K \in \mathcal{H}(X)$ при $r > 0$ справедливо $\operatorname{Int} B_r(K) = U_r(K)$, а при $r = 0$ и $\operatorname{Int} K \neq \emptyset$ выполнено $\operatorname{Int} B_0(K) = \operatorname{Int} K \neq U_0(K) = \emptyset$.

Напомним, что согласно теореме 2.22 диссертационной работы в случае финитной границы A и пространства X со строго выпуклой нормой для любого класса $\Sigma_d(A)$ по крайней мере в одном граничном компакте A_i найдётся дискретная точка, то есть $\mathrm{HP}(D_d^A) \neq \emptyset$.

Сформулируем отдельно условия, которыми будем пользоваться далее.

Условия 3.

(1) *Норма пространства* X *строго выпукла;*
(2) *Граница* $A = \{A_1, \dots, A_n\}$ *финитна;*
(3) $U_d^{\mathrm{Conv}} = \mathrm{Int}\, K_d^{\mathrm{Conv}} \neq \emptyset$, *где* $d \in \Omega(A)$;
(4) $d_s > 0$;
(5) $\left(\bigcup\limits_{j=1}^{m_s} \partial B_{d_s}(a_j^s)\right) \cap \mathrm{HP}(D_d^A) \subset U_d^{\mathrm{Conv}}$.

В силу утверждения 2.2.5, содержащегося в диссертации, имеем $\mathrm{HP}(D_d^A) = \mathrm{HP}(L_d^A)$, поэтому пункт (5) из условий 3 можно заменить на

$$\left(\bigcup_{j=1}^{m_s} \partial B_{d_s}(a_j^s)\right) \cap \mathrm{HP}(L_d^A) \subset U_d^{\mathrm{Conv}}. \tag{2.23}$$

Более того, если также выполнено $\mathrm{Cl}(\mathrm{Int}\, K_d) = K_d$, то по теореме 2.23 из диссертации получаем $\mathrm{HP}(D_d^A) = \mathrm{HP}(L_d^A) = \mathrm{HP}(F_d^A)$ и, значит, пункт (5) из условий 3 или выражение (2.23) можно заменить на

$$\left(\bigcup_{j=1}^{m_s} \partial B_{d_s}(a_j^s)\right) \cap \mathrm{HP}(F_d^A) \subset U_d^{\mathrm{Conv}}. \tag{2.24}$$

О достаточном условии неустойчивости, дающем оценку на уменьшение веса сети. Теорема 2.32 из диссертационной работы говорит о том, что в случае выполнения пунктов (1)–(5) из условий 3 для K_d^{Conv} нарушается свойство максимального компакта Штейнера из теоремы 2.28 диссертации. В свою очередь если все $d_i > 0$, то следствие 12 говорит, что при нарушении свойства из теоремы 2.28 (см. диссертацию) для K_d^{Conv} граница A оказывается неустойчивой.

Целью данного раздела является поиск значения $\delta' > 0$ такого, что при выполнении всех пунктов (1)–(5) условий 3 для любого $0 < \delta \leq \delta'$ справедливо

$$S(A^{\mathrm{Conv}}, K_d^{\mathrm{Conv}}) - S\Big(A^{\mathrm{Conv}}, B_{d_s-\delta}\big(\mathrm{Conv}(A_s)\big) \cap K_d^{\mathrm{Conv}}\Big) \geq \delta. \tag{2.29}$$

Отметим, что из неравенства (2.29) вытекает неустойчивость границы A. Действительно, согласно утверждению 2.4.1 из диссертации верно

$$S(A^{\mathrm{Conv}}, K_d^{\mathrm{Conv}}) \leq S_A.$$

Поэтому

$$\begin{aligned} 0 < \delta \leq S(A^{\mathrm{Conv}}, K_d^{\mathrm{Conv}}) - S\Big(A^{\mathrm{Conv}}, B_{d_s-\delta}\big(\mathrm{Conv}(A_s)\big) \cap K_d^{\mathrm{Conv}}\Big) \leq \\ \leq S_A - S\Big(A^{\mathrm{Conv}}, B_{d_s-\delta}\big(\mathrm{Conv}(A_s)\big) \cap K_d^{\mathrm{Conv}}\Big) \leq S_A - S_{A^{\mathrm{Conv}}}. \end{aligned}$$

Отсюда по определению граница A неустойчива.

Таким образом, в данном разделе мы заодно докажем, что пунктов (1)–(5) из условий 3 уже достаточно, чтобы граница A была неустойчивой, то есть ненужно требовать положительности всех компонент d_i вектора решения $d \in \Omega(A)$, а именно, следствием 12 в этом случае пользоваться уже необязательно.

Далее нам понадобится следующая лемма, доказанная автором в диссертации.

Лемма 2.37. *Пусть выполнены все пункты* (1)–(5) *условий* 3. *Тогда*

$$\emptyset \neq \mathrm{HP}(D_d^A) \subset U_{d_s}\big(\mathrm{Conv}(A_s)\big).$$

Замечание 12. *Ввиду утверждения* 2.2.5 *из диссертации в рамках выполнения пунктов* (1) *и* (2) *условий* 3 *верно* $\mathrm{HP}(D_d^A) = \mathrm{HP}(L_d^A)$, *поэтому согласно лемме* 2.37 *из условий* 3 *также следует*

$$\mathrm{HP}(L_d^A) \subset U_{d_s}\big(\mathrm{Conv}(A_s)\big).$$

И если при этом справедливо $\mathrm{Cl}(\mathrm{Int}\, K_d) = K_d$, *то в силу теоремы* 2.23, *содержащейся в диссертации, и леммы* 2.37 *в условиях* 3 *имеем*

$$\mathrm{HP}(D_d^A) = \mathrm{HP}(L_d^A) = \mathrm{HP}(F_d^A) \subset U_{d_s}\big(\mathrm{Conv}(A_s)\big).$$

Определение 2.4.2. *Минимальный компакт* $K_\lambda \in \Sigma_d(A)$ *назовём погружённым, если* $K_\lambda \setminus \mathrm{HP}(D_d^A) \subset \mathrm{Int}\, K_d$.

Лемма 2.38 (А.Х. Галстян)**.** [26]. *Пусть все пункты* (1)–(5) *условий* 3 *выполнены и минимальный компакт Штейнера* $K_\lambda \in \Sigma_d(A)$ *является погружённым. Тогда*

$$\delta_1 := \Big| K_\lambda \ \partial B_{d_s}\big(\mathrm{Conv}(A_s)\big) \Big| > 0.$$

Доказательство. В силу леммы 2.37 верно

$$K_\lambda \cap \mathrm{HP}(D_d^A) \subset U_{d_s}\big(\mathrm{Conv}(A_s)\big). \tag{2.34}$$

Но по определению погружённого минимального компакта верно

$$K_\lambda \setminus \mathrm{HP}(D_d^A) \subset \mathrm{Int}\, K_d \subset U_d^{\mathrm{Conv}} \subset U_{d_s}\big(\mathrm{Conv}(A_s)\big). \tag{2.35}$$

Значит, согласно (2.34) и (2.35)

$$K_\lambda \subset U_{d_s}\big(\mathrm{Conv}(A_s)\big).$$

Наконец, в силу компактности K_λ и $\partial B_{d_s}\big(\mathrm{Conv}(A_s)\big)$ получаем $\Big| K_\lambda \ \partial B_{d_s}\big(\mathrm{Conv}(A_s)\big) \Big| > 0$.

□

Лемма 2.39 (А.Х. Галстян)**.** [26]. *Пусть все пункты* (1)–(5) *условий* 3 *выполнены, тогда*

$$\delta_2 := \Big| \mathrm{Conv}(A_s) \ \partial B_{d_s}\big(K_d^{\mathrm{Conv}}\big) \Big| > 0.$$

Доказательство. Аналогично доказательству леммы 2.33 из диссертации покажем, что

$$\mathrm{Conv}(A_s) \subset U_{d_s}\big(K_d^{\mathrm{Conv}}\big).$$

Для этого сначала докажем $A_s \subset U_{d_s}\big(K_d^{\mathrm{Conv}}\big)$.

Пусть $a \in A_s$. Рассмотрим два случая: $B_{d_s}(a) \cap K_d$ конечно и бесконечно. Напомним, что множество $B_{d_s}(a) \cap K_d$ не может быть пустым, так как $A_s \subset B_{d_s}(K_d)$.

Если $B_{d_s}(a) \cap K_d$ конечно, то $a \in D_d^{A_s}$ и $B_{d_s}(a) \cap K_d = \mathrm{HP}(a, D_d^{A_s})$. Значит, $\partial B_{d_s}(a) \cap K_d \subset \mathrm{HP}(a, D_d^{A_s})$. Но $\mathrm{HP}(a, D_d^{A_s}) \subset K_d$. Отсюда $\partial B_{d_s}(a) \cap K_d = \partial B_{d_s}(a) \cap \mathrm{HP}(a, D_d^{A_s})$. Тогда согласно пунктам (3) и (5) условий 3 справедливо

$$\partial B_{d_s}(a) \cap K_d \subset U_d^{\mathrm{Conv}}. \tag{2.36}$$

Далее возможны два варианта.

Первый, $\partial B_{d_s}(a) \cap K_d = \emptyset$. Тогда $U_{d_s}(a) \cap K_d \neq \emptyset$, так как $B_{d_s}(a) \cap K_d \neq \emptyset$. Но тогда ввиду $K_d \subset K_d^{\mathrm{Conv}}$ справедливо $U_{d_s}(a) \cap K_d^{\mathrm{Conv}} \neq \emptyset$.

Второй вариант, $\partial B_{d_s}(a) \cap K_d \neq \emptyset$. Ввиду (2.36) справедливо $\partial B_{d_s}(a) \cap K_d \cap U_d^{\mathrm{Conv}} \neq \emptyset$. Отсюда имеем $\partial B_{d_s}(a) \cap U_d^{\mathrm{Conv}} \neq \emptyset$. Следовательно, так как U_d^{Conv} открыто, по лемме 1.17 (см. диссертацию) получаем $U_{d_s}(a) \cap U_d^{\mathrm{Conv}} \neq \emptyset$. Таким образом, когда $B_{d_s}(a) \cap K_d$ конечно $U_{d_s}(a) \cap K_d^{\mathrm{Conv}} \neq \emptyset$.

Рассмотрим теперь второй случай: $B_{d_s}(a) \cap K_d$ бесконечно. Но тогда $B_{d_s}(a) \cap K_d^{\mathrm{Conv}}$ тоже бесконечно, так как $K_d \subset K_d^{\mathrm{Conv}}$. Отсюда согласно пункту (1) условий 3 и выпуклости компакта K_d^{Conv} верно $U_{d_s}(a) \cap K_d^{\mathrm{Conv}} \neq \emptyset$.

Следовательно, для любой $a \in A_s$ имеем $U_{d_s}(a) \cap K_d^{\mathrm{Conv}} \neq \emptyset$, что эквивалентно

$$A_s \subset U_{d_s}(K_d^{\mathrm{Conv}}).$$

Но выпуклая оболочка подмножества лежит в выпуклой оболочке объемлющего множества. Также замечаем, что в силу выпуклости K_d^{Conv} и леммы 1.2.3 (см. диссертацию) множество $U_{d_s}(K_d^{\mathrm{Conv}})$ выпукло. Следовательно, справедливо

$$\mathrm{Conv}(A_s) \subset \mathrm{Conv}\Big(U_{d_s}\big(K_d^{\mathrm{Conv}}\big)\Big) = U_{d_s}\big(K_d^{\mathrm{Conv}}\big). \tag{2.37}$$

Поэтому ввиду компактности $\mathrm{Conv}(A_s)$ из пунктов (1)–(5) условий 3 вытекает

$$\Big|\mathrm{Conv}(A_s)\ \partial B_{d_s}\big(K_d^{\mathrm{Conv}}\big)\Big| > 0.$$

Лемма доказана.

$\square$

Теорема 2.40 (А.Х. Галстян. **Теорема об уменьшении веса сети или третье достаточное условие неустойчивости**). [26]. *Пусть все пункты* (1)–(5) *условий* 3 *выполнены. Тогда граница* $A = \{A_1, \ldots, A_n\}$ *неустойчива. Более того, в таком случае согласно леммам* 2.38 *и* 2.39 *выполнено* $\delta_1 > 0$ *и* $\delta_2 > 0$*, значит,* $\min\{\delta_1, \delta_2, d_s\} > 0$*. Выберем произвольное* $0 < \delta \leq \min\{\delta_1, \delta_2, d_s\}$ *и положим*

$$K = B_{d_s-\delta}\big(\mathrm{Conv}(A_s)\big) \cap K_d^{\mathrm{Conv}}. \tag{2.38}$$

Тогда также справедливы следующие неравенства:

$$S_A - S_{A^{\mathrm{Conv}}} \geq S_A - S(A^{\mathrm{Conv}}, K) \geq S(A^{\mathrm{Conv}}, K_d^{\mathrm{Conv}}) - S(A^{\mathrm{Conv}}, K) \geq \delta > 0. \tag{2.39}$$

Доказательство. Из неравенств (2.39) прямо вытекает неустойчивость границы A. Поэтому доказательство теоремы будет заключаться в доказательстве справедливости неравенств (2.39). Оно будет состоять из трёх частей, каждая из которых оформлена в отдельную лемму.

Лемма 2.41. *Верно неравенство*

$$d_H\big(\mathrm{Conv}(A_s), K\big) \leq d_s - \delta < d_s.$$

Доказательство. В силу выражения (2.37), леммы 2.39, выпуклости K_d^{Conv}, положительности d_s и леммы 1.10 (см. диссертацию) получаем $\mathrm{Conv}(A_s) \subset B_{d_s-\delta}\big(K_d^{\mathrm{Conv}}\big)$. Это эквивалентно тому, что для любой $a \in \mathrm{Conv}(A_s)$ верно

$$B_{d_s-\delta}(a) \cap K_d^{\mathrm{Conv}} \neq \emptyset.$$

Отсюда, а также согласно (2.38) для любой $a \in \mathrm{Conv}(A_s)$ справедливо

$$B_{d_s-\delta}(a) \cap K = B_{d_s-\delta}(a) \cap B_{d_s-\delta}\big(\mathrm{Conv}(A_s)\big) \cap K_d^{\mathrm{Conv}} = B_{d_s-\delta}(a) \cap K_d^{\mathrm{Conv}} \neq \emptyset.$$

Поэтому

$$\mathrm{Conv}(A_s) \subset B_{d_s-\delta}(K). \tag{2.40}$$

Таким образом, в силу (2.38) и (2.40) имеем $d_H\big(\mathrm{Conv}(A_s), K\big) \leq d_s - \delta < d_s$.

$\square$

Теперь рассмотрим произвольный граничный компакт $\mathrm{Conv}(A_i)$, $i \neq s$.

Лемма 2.42. *Верно неравенство*

$$d_H\big(\mathrm{Conv}(A_i), K\big) \le d_i.$$

Доказательство. Имеем

$$K \subset K_d^{\mathrm{Conv}} \subset B_{d_i}\big(\mathrm{Conv}(A_i)\big). \tag{2.41}$$

Покажем далее, что $\mathrm{Conv}(A_i) \subset B_{d_i}(K)$.

В силу утверждения 2.4.4 (см. диссертацию) в случае строго выпуклой нормы пространства X и финитности границы A каждый класс $\Sigma_d(A)$ содержит в себе погружённый минимальный компакт Штейнера. Пусть $K_\lambda \in \Sigma_d(A)$ — погружённый минимальный компакт Штейнера. Тогда согласно лемме 2.38, выпуклости $\mathrm{Conv}(A_s)$, положительности d_s и лемме 1.10 (см. диссертацию) имеем $K_\lambda \subset B_{d_s-\delta}\big(\mathrm{Conv}(A_s)\big)$. И так как $K_\lambda \subset K_d \subset K_d^{\mathrm{Conv}}$, то в силу (2.38) получаем

$$K_\lambda \subset B_{d_s-\delta}\big(\mathrm{Conv}(A_s)\big) \cap K_d^{\mathrm{Conv}} = K.$$

Отсюда, а также согласно $K_\lambda \in \Sigma_d(A)$ справедливо

$$A_i \subset B_{d_i}(K_\lambda) \subset B_{d_i}(K). \tag{2.42}$$

Множество K выпукло как пересечение выпуклых, и $B_{d_i}(K)$ выпукло по лемме 1.2.2 из диссертационной работы. Таким образом, в силу (2.42), так как выпуклая оболочка подмножества лежит в выпуклой оболочке объемлющего множества, имеем $\mathrm{Conv}(A_i) \subset B_{d_i}(K)$.

Поэтому, а также в силу (2.41) для всех $i \neq s$ справедливо

$$d_H\big(\mathrm{Conv}(A_i), K\big) \le d_i.$$

□

Лемма 2.43. *Справедливы неравенства*

$$S_A - S_{A^{\mathrm{Conv}}} \ge S_A - S(A^{\mathrm{Conv}}, K) \ge S(A^{\mathrm{Conv}}, K_d^{\mathrm{Conv}}) - S(A^{\mathrm{Conv}}, K) \ge \delta > 0.$$

Доказательство. Ввиду лемм 2.41 и 2.42 получаем

$$S(A^{\mathrm{Conv}}, K_d^{\mathrm{Conv}}) - S(A^{\mathrm{Conv}}, K) \geq \delta > 0.$$

Далее, согласно утверждению 2.4.1 из диссертационной работы верно, что $S_A \geq S(A^{\mathrm{Conv}}, K_d^{\mathrm{Conv}})$. Поэтому

$$S_A - S_{A^{\mathrm{Conv}}} \geq S_A - S(A^{\mathrm{Conv}}, K) \geq S(A^{\mathrm{Conv}}, K_d^{\mathrm{Conv}}) - S(A^{\mathrm{Conv}}, K) \geq \delta > 0.$$

□

Из леммы 2.43 прямо вытекает, что граница $A = \{A_1, \ldots, A_n\}$ неустойчива. Теорема доказана.

□

Таким образом, следствие 11, следствие 12 и теорема 2.40 вкупе являются **решением второй задачи.**

Заключение

В диссертации изучалась проблема Ферма–Штейнера в гиперпространствах над конечномерными нормированными пространствами. Основное внимание уделялось построению теории для финитных и выпуклых границ $A = \{A_1, \ldots, A_n\}$. Финитными мы называем границы, состоящие из конечных множеств, а выпуклыми — границы из выпуклых компактов.

Для финитных границ одними из ключевых результатов, сыгравших важную роль на практике, являются критерий минимальности компакта Штейнера в терминах соответствий (теорема 2.2), а также оценки на количество точек в минимальном компакте Штейнера (см. раздел 2.1.4 диссертации). С их помощью, например, в разделе 2.1.7 диссертационной работы автору, А.А. Тужилину и А.О. Иванову удалось существенно эффективней (по сравнению с работой[1]) доказать, что в рассматриваемой там конфигурации минимальный компакт Штейнера состоит ровно из двух точек.

Пусть $\widetilde{d} = (\widetilde{d}_1, \ldots, \widetilde{d}_n) \in \mathbb{R}^n$ — вектор, все компоненты которого неотрицательны. В процессе исследования задачи оказалось полезным ввести ряд новых понятий: *множество дискретных точек* $D_{\widetilde{d}}^{A_i}$ компакта A_i для вектора $\widetilde{d}$, *множество далёких точек* $F_{\widetilde{d}}^{A_i}$ компакта A_i для вектора $\widetilde{d}$ и *множество неплотных точек* $L_{\widetilde{d}}^{A_i}$ компакта A_i для вектора $\widetilde{d}$. Напомним, что точку $a \in A_i$ мы называли *дискретной*, если $\#B_{\widetilde{d}_i}(a) \cap \bigcap\limits_{j=1}^{n} B_{\widetilde{d}_j}(A_j) < \infty$, *далёкой* — если $U_{\widetilde{d}_i}(a) \cap \bigcap\limits_{j=1}^{n} B_{\widetilde{d}_j}(A_j) = \emptyset$, и *неплотной* — если $\mathrm{Int}\big(B_{\widetilde{d}_i}(a) \cap \bigcap\limits_{j=1}^{n} B_{\widetilde{d}_j}(A_j)\big) = \emptyset$, см. определения 2.1.2, 2.2.1 и 2.2.2. Для всех этих типов точек мы ввели понятие *множества сцепки* $\mathrm{HP}(p, Y_{\widetilde{d}}^{A_i})$ *компакта* $\bigcap\limits_{j=1}^{n} B_{\widetilde{d}_j}(A_j)$ *с точкой* $p \in Y_{\widetilde{d}}^{A_i}$, где $Y \in \{D, F, L\}$, которое по определению равно $B_{\widetilde{d}_i}(p) \cap \bigcap\limits_{j=1}^{n} B_{\widetilde{d}_j}(A_j)$, и *множества сцепки* $\mathrm{HP}(Y_d^{A_i}) = \bigcup\limits_{p \in Y_d^{A_i}} \mathrm{HP}(p, Y_d^{A_i})$ *компакта* $\bigcap\limits_{j=1}^{n} B_{\widetilde{d}_j}(A_j)$ *с граничным компактом* A_i, где также $Y \in \{D, F, L\}$.

Автором было доказано, что у финитных границ и пространств X со строго выпуклой нормой в случае произвольного вектора решения d проблемы Ферма–Штейнера для границы A найдётся компакт A_i, у которого множество дискретных точек $D_d^{A_i}$ и соответствующее ему множество сцепки $\mathrm{HP}(D_d^{A_i})$ непусты, см. теоремы 2.4 и 2.22 в тексте диссертации. Заметим, что, вообще говоря, не каждый граничный компакт A_i даже в случае финитных границ и пространства X со строго выпуклой нормой обладает непустым множеством дискретных точек $D_d^{A_i}$. Например, в решении проблемы Ферма–Штейнера из раздела 2.1.7 диссертации для каждого вектора решения d существовал граничный компакт, не содержащий в себе дискретных точек. Отметим, что множества $D_d^{A_i}$ и $\mathrm{HP}(D_d^{A_i})$ существенно использовались при выводе достаточного условия *неустойчивости границы*, дающего оценку на уменьшение веса сети, см. раздел 2.4.2 из диссертации.

В том же случае финитных границ, строго выпуклой нормы пространства X и произвольного вектора решения d автор, А.А. Тужилин и А.О. Иванов установили, что каждая точка из $\mathrm{HP}(p, D_d^{A_i})$ лежит на границе минимум двух шаров с центрами, принадлежащими разным граничным компактам A_j и A_k, где j и k, вообще говоря, не обязаны совпадать с i, см. в диссертации утверждение 2.1.12. При этом в случае произвольной нормы верно, что для всякой точки $p \in D_d^{A_i}$ каждый минимальный компакт Штейнера K_λ пересекается с $\mathrm{HP}(p, D_d^{A_i})$ (утверждение 2.1.11 в тексте диссертации), а также для строго выпуклой нормы пространства X каждое расстояние d_i из вектора решения d *реализуется* по крайней мере на одной точке из $K_\lambda \cap \bigcup\limits_{j=1}^{n} \mathrm{HP}(D_d^{A_j})$, см. теорему 2.10 в диссертации. Мы говорим, что на точке $p \in X$ *реализуется расстояние* d_i, если существует $a \in A_i$ такая, для которой справедливо $|a\,p| = d_i$. Перечисленные выше факты позволили доказать автору, А.А. Тужилину и А.О. Иванову следствие 6 (см. в диссертацию) про то, что для каждого номера i существует точка из минимального компакта Штейнера K_λ, на которой реализуются минимум два различных расстояния d_i и d_k из вектора решения. На это следствие опирается лемма 2.20 из раздела 2.1.7 диссертации, в котором автору, А.А. Тужилину и А.О. Иванову более конструктивно и эффективно (в сравнении с работой[1]) решаем проблему Ферма–Штейнера в конкретной конфигурации.

Далее также было доказано автором, что для выпуклых границ в случае произвольной нормы пространства X для любого вектора решения d найдётся номер i, для которого множество далёких точек $F_d^{A_i}$ и соответствующее ему множество сцепки $\mathrm{HP}(F_d^{A_i})$ непусты, см. теорему 2.21 в диссертационной работе. Напомним, что факт существования дискретных точек для финитных границ существенно опирался на строгую выпуклость нормы пространства. Также для финитных границ и строго выпуклой нормы пространства X был построен гипотетический пример того, когда каждый граничный компакт не содержит в себе далёких точек, см. рисунок 2.15 из диссертации. Таким образом, далёкие точки являются неким аналогом дискретных в случае выпуклой границы и даже произвольной нормы пространства X, а дискретные — аналогом далёких для случая финитной границы и строго выпуклой нормы.

Подчеркнём, что факт существования далёких точек для выпуклых границ сыграл важную роль в разделе 2.4.1 про устойчивость границы в проблеме Ферма–Штейнера, а также в доказательстве теоремы 2.28 (см. диссертацию), доказанной автором самостоятельно, о взаимосвязи выпуклой границы с K_d. Под взаимосвязью здесь имеется в виду, что если компакт A_i не содержит далёких точек, то множество $\partial B_{d_i}(A_i) \cap \bigcup\limits_{j=1}^{n} \mathrm{HP}(F_d^{A_j})$ непусто. Теорему 2.28 можно воспринимать в качестве некоторого аналога теоремы 2.10 из диссертации, которая была сформулирована для финитных границ и строго выпуклой нормы X. Действительно, из теоремы 2.28 тоже напрямую вытекает, что каждое расстояние d_i реализуется по крайней мере на одной точке из $\bigcup\limits_{j=1}^{n} \mathrm{HP}(F_d^{A_j})$.

Кроме того, автором было доказано, что если граница выпукла и внутренность K_d непуста, то для всех i множества далёких точек $F_d^{A_i}$ и множества неплотных точек $L_d^{A_i}$ совпадают (следствие 8 из диссертации). Таким образом, автор доказал, что для выпуклых границ, если $\mathrm{Int}\, K_d \neq \emptyset$, то для любого вектора решения d найдётся компакт A_i, для которого множество неплотных точек $L_d^{A_i}$ и соответствующее ему множество сцепки $\mathrm{HP}(L_d^{A_i})$ непусты. Более того, в работе автором доказано, что в случае финитной границы и пространства X со строго выпуклой нормой для всех i множества дискретных точек $D_d^{A_i}$ и множества неплотных точек $L_d^{A_i}$ совпадают (утверждение 2.2.5 из диссертации). Тем самым автор одновременно доказал, что для финитных границ и пространств со строго выпуклой нормой для любого вектора решения d найдётся компакт A_i, для которого множество неплотных точек $L_d^{A_i}$ и соответствующее ему множество сцепки $\mathrm{HP}(L_d^{A_i})$ тоже непусты. Также автор доказал, что в случае финитных границ, строго выпуклой нормы пространства X и выполнения условия $\mathrm{Cl}(\mathrm{Int}\, K_d) = K_d$ множества дискретных, далёких и неплотных точек для вектора решения d и всех компактов A_i равны (теорема 2.23 в диссертации). В таком случае на практике, а также в теоретических выкладках можно без дополнительных проверок одинаково пользоваться свойствами всех трёх типов точек.

Отметим, что неплотные точки появились в работе естественным образом при попытке обобщить понятия далёких и дискретных точек, и в данном исследовании множество неплотных точек носит скорее теоретический характер. Быть может, этот объект окажется полезным в дальнейших научных изысканиях.

Также в рамках настоящей работы для доказательства существования далёких точек $F_d^{A_i}$ по крайней мере для одного граничного компакта A_i в случае выпуклых границ был получен результат, имеющий самостоятельный интерес. А именно, автор доказал, что в конечномерном нормированном пространстве следующая операция непрерывна.

Пусть в таком пространстве даны два непустых выпуклых компакта A и B, и пусть $r \in \bigl[\min\limits_{a \in A} |aB|, +\infty\bigr)$. Положим

$$f(r) = B_r(A) \cap B,$$

где $B_r(A)$ — замкнутая окрестность радиуса r с центром в A. Теорема 1.15 (см. диссертацию), доказанная автором, посвящена доказательству непрерывности отображения f, где на пространстве непустых компактов задана топология, порождённая метрикой Хаусдорфа.

Помимо всего перечисленного выше, важной частью данного исследования было изучение вопроса *устойчивости границы* в проблеме Ферма–Штейнера (см. разделы 2.4.1 и 2.4.2 диссертации). Напомним, что границу $\bigl\{\mathrm{Conv}(A_1), \ldots, \mathrm{Conv}(A_n)\bigr\}$ в тексте настоящей работы мы обозначали через A^{Conv}, функционал $\sum\limits_{i=1}^{n} d_H(A_i, K)$ — через $S(A, K)$, а минимум функционала $S(A, K)$ для границы A — через S_A. Под *устойчивостью финитной границы* $A = \{A_1, \ldots, A_n\}$ мы имели в виду выполнение следующего условия:

$$S_A = S_{A^{\mathrm{Conv}}}.$$

Множество всех векторов решений для границы A обозначалось в тексте через $\Omega(A)$. В разделах 2.4.1 и 2.4.2 диссертации были автором выведены три различных достаточных условия неустойчивости границы. В первом достаточном условии (следствие 11) для установления неустойчивости требуется показать, что хотя бы для одного вектора решения $d \in \Omega(A)$ ни один компакт $\mathrm{Conv}(A_i)$ не содержит далёких точек для этого вектора d.

Второе достаточное условие (следствие 12) может быть полезно в случае, когда относительно границы A^{Conv} далёкие точки для каждого вектора решения в каких-то граничных компактах $\mathrm{Conv}(A_i)$ всё же нашлись, но при этом для некоторого вектора $d \in \Omega(A)$, все компоненты которого положительны, существует компакт A_s, не содержащий в себе далёких точек (подчеркнём, что в данном случае неизвестно, является ли d вектором решения проблемы Ферма–Штейнера для A^{Conv}). Тогда, как говорится в следствии 12, чтобы показать неустойчивость границы A, нужно проверить справедливость для A_s следующего включения:

$$\bigcup_{i=1}^{n} \mathrm{HP}\Big(F_d^{\mathrm{Conv}(A_i)}\Big) \subset U_{d_s}\big(\mathrm{Conv}(A_s)\big).$$

Если оно выполняется, то граница неустойчива.

Третье достаточное условие (первая часть теоремы 2.40) требует, во-первых, чтобы норма пространства X была строго выпукла, во-вторых, чтобы у вектора решения d проблемы Ферма–Штейнера для исходной финитной границы A одна из его компонент d_s была положительна, в-третьих, чтобы внутренность компакта $\bigcap\limits_{i=1}^{n} B_{d_i}\big(\mathrm{Conv}(A_i)\big)$, которая обозначалась через U_d^{Conv}, была непуста, и в-четвёртых, чтобы было справедливо

$$\Big(\bigcup_{j=1}^{m_s} \partial B_{d_s}(a_j^s)\Big) \cap \bigcup_{i=1}^{n} \mathrm{HP}(D_d^{A_i}) \subset U_d^{\mathrm{Conv}}.$$

Граница A является неустойчивой в случае выполнения всех четырёх перечисленных выше условий, как утверждает первая часть теоремы 2.40. Такое достаточное условие может пригодиться, с одной стороны, в случае, когда, например, первые три условия выполнены и проверить выполнимость четвёртого условия оказывается проще, чем находить множество всех далёких точек $F_d^{\mathrm{Conv}(A_i)}$ по всем компактам $\mathrm{Conv}(A_i)$, что требуется в следствиях 11 и 12. С другой стороны, вторая часть теоремы 2.40 заодно даёт ответ на вопрос, как в неустойчивом случае при достаточно малых $\delta > 0$ построить компакт K, для которого верно следующее неравенство:

$$S_A - S(A^{\mathrm{Conv}}, K) \geq \delta > 0.$$

Отметим, что теорема 2.40 существенно опирается на утверждение 2.4.4 из текста диссертации, доказательство которого получено автором и основывано на алгоритме 1 (см. диссертацию) построения минимального компакта Штейнера в случае финитной границы.

Применение третьего достаточного условия неустойчивости было продемонстрировано в диссертации на конфигурации из раздела 2.1.7 диссертации, где исходная граница находится в евклидовой плоскости и состоит из трёх компактов, лежащих определённым образом на единичной окружности, см. раздел 2.4.3 диссертации. А именно, для данной конфигурации посредством теоремы 2.40 автором была доказана её неустойчивость, а также оценена величина $S_A - S_{A^{\mathrm{Conv}}}$.

Благодарности

Автор выражает глубокие искренние благодарности своему научному руководителю, профессору А. А. Тужилину, а также профессору А. О. Иванову за постановки задач и плодотворные обсуждения в процессе совместной работы.

Автор выражает большую благодарность заведующему кафедрой дифференциальной геометрии и приложений академику А. Т. Фоменко и всем сотрудникам кафедры за постоянное внимание и интерес к работе.

Автор также горячо благодарит свою маму, Веронику Алексанян, за воспитательский подвиг и поддержку.

Публикации автора по теме диссертации

Статьи в рецензируемых научных изданиях, рекомендованных для защиты в диссертационном совете МГУ

[24] Галстян А. Х., Иванов А. О., Тужилин А. А. Проблема Ферма–Штейнера в пространстве компактных подмножеств $\mathbb{R}^m$ с метрикой Хаусдорфа // Математический сборник, 2021, т. 212, вып. 1, с. 28–62.

Перевод:
Galstyan A. Kh., Ivanov A. O., Tuzhilin A. A. The Fermat–Steiner problem in the space of compact subsets of $\mathbb{R}^m$ endowed with the Hausdorff metric // Sb. Math., 212:1 (2021), 25–56.

Журнал входит в реферативные базы данных MathSciNet, Scopus, Web of Science и RSCI.
IF WoS=1.274; SJR=1.158.

Теорема 5 и следствие 4 доказаны автором самостоятельно. Все остальные результаты статьи получены с равнозначным вкладом автора, А. О. Иванова и А. А. Тужилина.

[25] Галстян А. Х. Про непрерывность одной операции с выпуклыми компактами в конечномерных нормированных пространствах // Чебышевский сборник, 2022, т. 23, вып. 5, с. 152–160.

Журнал входит в реферативные базы данных MathSciNet, Scopus и RSCI.
IF SJR=0.305.

Все результаты статьи получены автором самостоятельно.

[26] Галстян А. Х. Устойчивость границы в проблеме Ферма–Штейнера в гиперпространствах над конечномерными нормированными пространствами // Чебышевский сборник, 2023, т. 24, вып. 2, с. 80–127.

Журнал входит в реферативные базы данных MathSciNet, Scopus и RSCI.
IF SJR=0.305.

Все результаты статьи получены автором самостоятельно.

[27] Галстян А. Х. Проблема Ферма-Штейнера в пространстве компактных подмножеств евклидовой плоскости // Итоги науки и техники. Серия Современная математика и ее приложения. Тематические обзоры, 2020, Т. 175, С. 44–55.

Журнал “Итоги науки и техники. Серия Современная математика и ее приложения. Тематические обзоры” входит в реферативную базу данных РИНЦ.
IF РИНЦ=0.205.

Перевод:
Galstyan A. H. The Fermat–Steiner problem in the space of compact subsets of the euclidean plane // Journal of Mathematical Sciences, 2023, vol. 272, no. 6, pp. 791–802.

Журнал “Journal of Mathematical Sciences” входит в реферативные базы данных MathSciNet, Scopus и RSCI.
IF SJR=0.357.

Все результаты статьи получены автором самостоятельно.

Предварительные версии работ автора, опубликованные в системе arxiv.org

[28] Galstyan A. Kh. About the continuity of one operation with convex compacts in finite-dimensional normed spaces // arXiv:2211.03847, 2022.

[29] Galstyan A. Kh. Boundary stability in the Fermat–Steiner problem in hyperspaces over finite-dimensional normed spaces // arXiv:2212.01881, 2022.

Тезисы докладов

[30] Галстян А. Х. Проблема Ферма–Штейнера в пространстве компактных подмножеств евклидовой плоскости // Проблема Ферма-Штейнера в пространстве компактных подмножеств евклидовой плоскости // Труды Математического центра имени Н. И. Лобачевского / Казанское математическое общество. Лобачевские чтения – 2018 // Материалы Семнадцатой Всероссийской молодежной школы-конференции. – Т. 56. – Казанское математическое общество, Казань: 2018. – С. 87–88.

[31] Галстян А. Х. Проблема Ферма–Штейнера в метрическом пространстве компактных множеств, наделенном расстоянием Хаусдорфа // Материалы Международного молодежного научного форума Ломо-

носов–2018 / Под ред. И. А. Алешковский, А. В. Андриянов, Е. А. Антипов. – Москва: ООО МАКС Пресс, 2018.

[32] Galstyan A. Fermat–Steiner problem in space of compact subsets of the euclidean plane // Тезисы докладов Международной конференции Геометрические методы в теории управления и математической физике. – Ряз. гос. ун-т имени С. А. Есенина, Рязань: 2018. – P. 63–63.

[33] Галстян А. Х. Проблема Ферма–Штейнера в пространстве компактных подмножеств евклидовой плоскости // Материалы Международного молодежного научного форума Ломоносов–2019 / Под ред. И. А. Алешковский, А. В. Андриянов, Е. А. Антипов. – Москва: ООО МАКС Пресс, 2019.

[34] Галстян А. Х. Проблема Ферма–Штейнера в пространстве компактных подмножеств $\mathbb{R}^m$ с метрикой Хаусдорфа // Материалы Международной конференции Воронежская зимняя математическая школа С.Г. Крейна – 2020. – Издательско-полиграфический центр Научная книга, Воронеж: 2020. – С. 101–103.

[35] Галстян А. Х. Устойчивость решения проблемы Ферма–Штейнера в гиперпространствах над конечномерными нормированными пространствами // Вторая конференция Математических центров России (7–11 ноября 2022 г.): сборник тезисов. – Издательство Московского университета, Москва: 2022. – С. 49–51.

[36] Галстян А. Х. Устойчивость решения проблемы Ферма-Штейнера в гиперпространствах над конечномерными нормированными пространствами // Материалы Международного молодежного научного форума Ломоносов–2022 / Под ред. И. А. Алешковский, А. В. Андриянов, Е. А. Антипов и др. — Москва: ООО МАКС Пресс, 2022.

[37] Галстян А. Х. Устойчивость границы в проблеме Ферма-Штейнера в гиперпространствах над конечномерными нормированными пространствами // Некоторые вопросы анализа, алгебры, геометрии и математического образовния. – Т. 12 из Материалов VI международной молодежной научной школы Актуальные направления математического анализа и смежные вопросы. – Воронежский го-

сударственный педагогический университет, Воронеж: 2022. – С. 37–38.