

**Отзыв официального оппонента
на диссертационную работу на соискание ученой степени
кандидата физико-математических наук
Денисова Константина Юрьевича
на тему: «Большие нижние локальные уклонения
ветвящихся процессов в случайной среде»
по специальности 1.1.4 — теория вероятностей и
математическая статистика**

Диссертационная работа относится по своей тематике к одному из современных направлений теории случайных процессов – теории больших уклонений для ветвящихся процессов в случайной среде (ВПСС). Эта теория богата глубокими результатами, в частности, хорошо известно, как с привлечением ветвящихся процессов можно описывать, например, динамику популяций, распространение эпидемий, ядерные цепные реакции и многие другие процессы, см., например, классические монографии Б.А. Севастьянова и Т. Харриса.

В диссертационной работе эволюция ветвящихся процессов изучается в случайной среде, порожденной последовательностью независимых одинаково распределенных случайных величин. Этому направлению посвящены многочисленные работы российских и зарубежных математиков, среди которых В.А. Афанасьев, В.А. Ватутин, Е.Е. Дьяконова, Г. Керстинг, В. Бансайе, К. Боингхофф и многие другие ученые. Несмотря на многочисленные значительные результаты в этом направлении, достаточно сложными и малоизученными остаются вопросы о поведении больших уклонений ВПСС. Основопологающими в этом направлении можно назвать, например, работы М.В. Козлова, в которых стали рассматриваться различные зоны больших уклонений в зависимости от параметров модели ВПСС.

В работе изучается хорошо известный ветвящийся процесс Z_n с геометрическим распределением числа непосредственных потомков одной частицы в случайной среде (ВПССГ), представляющей собой последовательность независимых одинаково распределенных случайных величин (модель Смита-Вилкинсона). В зависимости от значений параметров поведение ВПССГ принято грубо классифи-

цировать как надкритическое, критическое и докритическое. Кроме этого существует дополнительная классификация докритических и надкритических ВПСС, основанная в том числе на различии в поведении функции уклонений для больших верхних и больших нижних уклонений.

Целью диссертационной работы является изучение точной асимптотики локальных вероятностей больших нижних уклонений для надкритического ВПССГ, а также больших верхних уклонений для надкритического, критического, слабо и умеренно докритического и частично для строго докритического ВПССГ.

Именно, путем введения (достаточно ограничительного) предположения о геометрическом распределении числа потомков одной частицы автору удалось получить теоремы о поведении локальных вероятностей больших уклонений в различных случаях.

Остановимся на оценке **актуальности** работы. Изучение асимптотического поведения вероятностей верхних больших уклонений для ВПСС началось с работ М.В. Козлова (2006, 2009) для частного случая ВПСС с геометрическим числом непосредственных потомков одной частицы (ВПССГ). Им были выделены две принципиально различные по поведению вероятностей больших уклонений зоны изменения параметра, которые принято называть первой и второй зонами уклонений. Затем В. Бансайе и Ж. Берестицким (2009) была получена грубая (логарифмическая) асимптотика вероятностей верхних больших уклонений для более общего класса распределений числа потомков одной частицы.

В последние десять лет обозначился новый всплеск к настоящей тематике, в недавних работах Д. Бурашевского и П. Дишевского (2017), А.В. Шкляева (2020) и М.А. Струлёвой и Е.И. Прокопенко (2022) была исследована точная асимптотика тех же вероятностей в так называемой первой зоне больших уклонений для широкого класса распределений числа потомков одной частицы. В работе А.В. Шкляева (2022) аналогичные результаты были получены для второй зоны уклонений. В последнее время появился ряд результатов уже для многотипных ВПСС, см., например, недавнюю работу

Й. Грамы, К. Лью, Т. Нгуена (2024).

Исследование асимптотического поведения вероятностей нижних больших уклонений для ВПСС до недавнего времени проводилось только в грубой (логарифмической форме), чему посвящены работы В. Бансайе и К. Боингхоффа (2008, 2013). Лишь в 2024 году вышла работа А.В. Шкляева, посвященная исследованию точной асимптотики вероятностей нижних больших уклонений в так называемой первой зоне уклонений. Задачи же, связанные с оценкой вероятностей нижних больших уклонений для ВПСС в различных зонах до сих пор оставались менее изучены. Этим можно объяснить упоминание лишь о нижних уклонениях в самом названии диссертационной работы.

Таким образом данная тема **актуальна** и привлекает внимание многих специалистов в области ВПСС.

Диссертационная работа носит теоретический характер, состоит из введения, трех глав, заключения и списка литературы. Объём работы составляет 73 страницы. Список литературы содержит 50 наименований.

Опишем более детально **структуру и основные результаты** работы.

Автором исследована точная асимптотика вероятностей верхних и нижних больших уклонений для ВПССГ в локальной форме. Доказаны локальные предельные теоремы для вероятностей больших уклонений. Для верхних больших уклонений исследована первая зона уклонений, для нижних больших уклонений – первая и вторая зона уклонений. Особое внимание заслуживают результаты о переходных явлениях на границе зон уклонений.

Во введении приведен подробный обзор результатов предшествующих работ в данном направлении, сформулирована цель и пять основных положений, выносимых на защиту.

В первой главе изложены классические результаты теории больших уклонений для случайных блужданий в случайных средах и получен новый факт в теории случайных блужданий для общего параметрического случая (лемма 2), названный автором леммой об

экспоненциальном функционале. Из леммы 2 вытекает лемма 3 об экспоненциальном функционале для сопряженных величин. Данные леммы существенно используются в дальнейших конструкциях. В первой главе обобщается ранее известный результат М.В. Козлова, полученный им в работе 2006г., значительно расширяя возможности его применения. Таким образом, первое положение выносимое на защиту полностью доказано.

Во второй главе приведены основные результаты работы и обоснованы положения 2–4, выносимые на защиту. Данная глава посвящена исследованию вероятностей нижних больших уклонений для надкритического ВПССГ. В ней получена теорема о вероятностях нижних больших уклонений в первой зоне уклонений (теорема 5), во второй зоне уклонений (теорема 6) и ряд теорем о поведении вероятностей нижних больших уклонений на границе первой и второй зон больших уклонений (теоремы 7, 8, 9). Все указанные результаты обобщаются до общего (достаточно громоздкого), результата об асимптотике вероятностей нижних больших уклонений во всем диапазоне нижних больших уклонений (теорема 10). Наиболее интересной здесь, по моему мнению, является теорема 6, открывающая следующий любопытный феномен – вероятности всех возможных значений количеств частиц в ВПССГ от единицы до некоторого экспоненциально большого по n порога имеют одну и ту же точную асимптотику. Иными словами, для данного процесса любые значения в некотором экспоненциально большом диапазоне асимптотически равновероятны! Этот факт до сих пор не был обнаружен предыдущими исследователями ВПССГ и требует дальнейшего развития и обобщения на случай, когда число потомков одной частицы имеет более общий вид.

В третьей главе рассматриваются верхние большие уклонения ВПССГ. Доказана теорема 11 (положение 5, выносимое на защиту) об асимптотическом поведении верхних больших уклонений ВПССГ в первой зоне уклонений. Новизна полученных результатов по сравнению с работой М.В. Козлова (2006) заключается в том, что полученная асимптотика описывается именно для локальных вероятно-

стей.

В заключении кратко перечислены основные результаты работы.

Автор продемонстрировал владение методами теории больших уклонений, теории случайных блужданий, а также теории ветвящихся процессов в случайной среде; он активно пользуется методом крамеровского преобразования мер, а также интегро-локальным подходом к предельным теоремам. Им решен ряд достаточно сложных технических задач, представляющих значительный интерес для будущих исследований. Результаты могут быть использованы для дальнейшего развития теории ветвящихся процессов в случайной среде, в частности, дальнейшего исследования вероятностей больших уклонений этих процессов, а также для развития теории случайных блужданий в случайной среде.

Результаты доложены на четырех конференциях, две из которых международные, а также на трех научных семинарах, в том числе на Большом семинаре кафедры теории вероятностей (руководитель акад. А.Н. Ширяев). Результаты работы опубликованы в четырех статьях, индексируемых Web of Science, SCOPUS и RSCI. Все статьи без соавторов. В сборниках тезисов международных конференций представлено три публикации.

Положения, выносимые на защиту, получены лично автором, обоснованы и подтверждены четко сформулированными и строго доказанными теоремами и согласуются с результатами, полученными другими авторами. Тема диссертации соответствует паспорту специальности 1.1.4 – теория вероятностей и математическая статистика (физико-математические науки), а именно — областям исследований: *6. Предельные теоремы и 10. Марковские процессы и поля, а также связанные с ними модели.*

Автореферат соответствует содержанию диссертации.

Хотелось бы отметить, что у меня нет существенных претензий к содержательной стороне работы, однако имеется ряд замечаний к изложению диссертации, а также к выполнению формальных требований, предъявляемым к диссертациям.

Остановимся сначала **на общих замечаниях**, относящихся как к диссертации, так и к автореферату. Текст написан сжато и четко, но в расчете на узких специалистов в области ветвящихся процессов. В особенности на тех, кто занимается большими отклонениями ветвящихся процессов в случайных средах. На мой взгляд, не уделено должного внимания неформальному описанию эффектов случайных сред и мотивации их изучения.

В формулировках теорем встречается ряд функций: ρ_n , h_θ и $\Lambda(\theta)$ (функция отклонений) о поведении которых не упоминается в самих теоремах. Из-за этого, каждый раз приходится искать в тексте их формальные определения и понимать, какая же сходимость подразумевается. Неоднократно встречаются фразы типа: “Таким образом, получаем, что требуемое утверждение следует из теорем...”, но не всегда расписано каким же образом.

Ниже приведем некоторые более детальные замечания: к автореферату (А) и к диссертации (Д).

- Стр. 3 (А): “один из наших результатов был обобщен...” Не указано какой именно.
- Стр. 4 (А): “Кроме того, случай ВПССГ является важным случаем для приложения к теории случайных блужданий в случайной среде.” Не хватает ссылки.
- Стр. 5 (А): после “размера популяции” следует ввести соответствующее обозначение “ Z_n ”, чтобы понять смысл изучаемой вероятности.
- Стр. 10 (А): ключевым результатом первой главы является лемма 2 для общего параметрического случая, а в автореферате приведена лемма 3 (лемма 1 (А)) для сопровождающего случайного блуждания.
- (А): В автореферате не указано, в каких организациях могут быть использованы полученные результаты.

- Стр. 7 (Д): “Центральным утверждением главы является лемма об экспоненциальном функционале для общего параметрического случая. Данный результат является обобщением утверждений, полученных М.В. Козловым в [20]”. Здесь было бы уместно привести утверждения из [20], которые обобщаются автором.
- Стр. 15 (Д): В лемме 2 обозначение U_n^α излишне. Далее в первой главе оно не используется.
- Стр. 27 (Д): При определении первой, второй и граничной зон нижних больших уклонений не хватает ссылок на работы, в которых они были впервые определены.
- Стр. 54 (Д): Не хватает ссылки после “Первая зона больших верхних уклонений определяется следующими условиями:...” Следует объяснить, в какой из предшествующих работ перечислены именно эти условия или эти условия введены автором.

Несмотря на высказанные замечания, полученные локальные предельные теоремы о размере популяции в ВПССГ, а также предложенные для их исследования подходы, представляют **несомненный научный интерес** и могут быть применены для изучения новых моделей ветвящихся процессов и случайных блужданий в случайной среде.

Диссертационная работа отвечает требованиям, установленным Московским государственным университетом имени М.В.Ломоносова к работам подобного рода. Содержание диссертации соответствует специальности 1.1.4 — теория вероятностей и математическая статистика (по физико-математическим наукам), а также критериям, определенным пп. 2.1-2.5 «Положения о присуждении ученых степеней в Московском государственном университете имени М.В.Ломоносова», а также оформлена согласно требованиям «Положения о совете по защите диссертаций на соискание ученой степени кандидата наук Московского государственного университета имени М.В.Ломоносова».

Соискатель Денисов Константин Юрьевич заслуживает присуждения ученой степени кандидата физико-математических наук по специальности 1.1.4 — Теория вероятностей и математическая статистика.

Доктор физико-математических наук,
профессор кафедры теории вероятностей
механико-математического факультета
Федерального государственного бюджетного образовательного
учреждения высшего образования «Московский
государственный университет имени М.В.Ломоносова»

Яровая Елена Борисовна

Почтовый адрес: 119991, ГСП-1, Российская Федерация, Москва,
Ленинские горы, Главное здание,
Московский государственный университет имени М. В. Ломоносова,
механико-математического факультет,
кафедра теории вероятностей
Телефон: +79859243911
Адрес электронной почты: yarovaya@mech.math.msu.su

Специальность, по которой официальным оппонентом защищена
диссертация: 01.01.05 — теория вероятностей и математическая
статистика.

Подпись Е. Б. Яровой заверяю:

Декан
механико-математического факультета
Федерального государственного бюджетного образовательного
учреждения высшего образования «Московский
государственный университет имени М. В. Ломоносова»
член.-корр. РАН, доктор физико-математических наук, профессор

Шафаревич Андрей Игоревич