Отзыв официального оппонента на диссертацию на соискание ученой степени кандидата физико-математических наук
Куценко Владимира Александровича
«Эффекты случайных сред в процессах с генерацией и блужданием частиц по решеткам»
по специальности 1.1.4 — теория вероятностей и математическая статистика

Диссертация В.А. Куценко посвящена исследованию ряда задач о ветвящихся случайных блужданиях по многомерным решеткам с непрерывным временем и случайными интенсивностями деления и гибели частиц. Ветвящимся процессам с диффузией во второй половине 20-века и 21-веке было посвящено огромное количество работ. В частности, в этой области работали такие ученые, как Б.А. Севастьянов, А.В. Скороход, С. Ассмуссен, Д. Биггинс и многие другие.

Отдельный интерес представляют случайные блуждания в случайных средах. Одна из основных особенностей таких процессов заключается в существенном влиянии флуктуаций на поведение процесса. В связи с этим, попытка описать процесс с помощью «средних» сталкивается с различными сложностями. Отметим, что нерегулярность в росте моментов численностей частиц, возникающая в следствии таких флуктуаций, представляет интерес с точки зрения физики процесса. В литературе такой эффект обычно называют перемежаемостью.

Первая глава диссертации посвящена исследованию асимптотического поведения усредненных по среде моментов локальной численности частиц ветвящегося случайного блуждания. Вторая глава посвящена исследованию модельной задачи – одномерного простого ветвящегося случайного блуждания в случайной убивающей среде с единственным неслучайным центром размножения. Наконец, третья глава посвящена численному моделированию ветвящегося случайного блуждания в случайной среде и, в частности, численному исследованию перемежаемости в таких задачах. Все три рассмотренных вопроса представляют существенный интерес с точки зрения современных случайных процессов. Отметим также, что задача о ветвящемся случайном блуждании в случайной среде, является технически сложной и в ней пока немного общих результатов, так что исследование частных случаев представляется разумным подходом. Актуальность исследованного вопроса подтверждается также высоким уровнем публикаций и апробации работы.

Опишем подробно содержание диссертационной работы. В первой главе диссертации рассматривается задача об асимптотическом поведении ветвящегося случайного блуждания на решетке $\mathbb{Z}^d$ в случайной среде. Предполагается, что пространственное перемещение определяется простым случайным блужданием. Случайная среда определяется с помощью двух полей, образованных независимыми одинаково распределенными случайными величинами $\mathcal{L} = \{\lambda(x), x \in \mathbb{Z}^d\}$ и $\mathcal{M} = \{\mu(x), x \in \mathbb{Z}^d\}$. При фиксированной среде поведение частицы в некоторой точке $x \in \mathbb{Z}^d$ устроено следующим образом: с вероятностью $\mu(x,\omega)t + o(t)$ частица умирает, с вероятностью $\lambda(x,\omega)t + o(t)$, с вероятностью $\varkappa t + o(t)$ переместится равновероятно в одну из соседних точек, с вероятностью $1 - \lambda(x,\omega)t - \mu(x,\omega)t - \varkappa t + o(t)$ никаких изменений не произойдет. Основной результат первой главы – это теорема об асимптотическом поведении моментов численностей частиц, усредненных по среде, в случае, когда случайный потенциал имеет гумбелевский хвост, то есть его функция распределения при $z \to +\infty$ удовлетворяет

$$-\ln(1 - F(z)) \sim ce^{\alpha z}, \quad c > 0, \quad \alpha > 1.$$

Такие результаты для случая, когда случайный потенциал имеет вейбулловский хвост были доказаны в работе С. Альбеверио, Л. Богачева, С. Молчанова, Е. Яровой (2000 г.). Отметим, что доказаны все вспомогательные технические леммы, необходимые для получения результата, а само доказательство основного результата (теорема 1) опущено в силу того, что оно повторяет доказательство аналогичного результата из упомянутой выше работы.

Во второй главе диссертации рассматривается задача об асимптотическом поведении ветвящегося случайного блуждания на одномерной решетке $\mathbb{Z}$ в случайной среде с единственным центром размножения и ограниченной случайной убивающей средой. На решетке вне нуля задано поле независимых одинаково распределенных случайных величин $\mathcal{M} = \{\mu(x), x \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}\}$. При фиксированной среде источник в $x \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$ устроен следующим образом: с вероятность $\mu(x,\omega)t + o(t)$ частица умирает, а с вероятностью $1 - \mu(x,\omega)t + o(t)$ изменений не происходит. Предполагается, что случайная величина $\mu(x)$ принимает значения из $[0, c]$, $c \geq 0$, и имеет на нем положительную плотность. Источник в нуле устроен следующим образом: с вероятностью $\Lambda t + o(t)$ частица может разделиться на 2, а с вероятностью $1 - \Lambda t + o(t)$ изменений не происходит. Предполагается, что в начальный момент времени в системе находится одна частица в некоторой точке $x \in \mathbb{Z}$. Как и для неслучайной среды, можно показать, что математическое ожидание числа частиц в некоторой точке y, удовлетворяет некоторой задаче Коши с оператором $H(\omega) = \varkappa\Delta + V(x,\omega)$, но потенциал уже является случайным. Здесь $V(x,\omega) = \Lambda\delta_0(x) + \mu(x,\omega)(1 - \delta_0(x))$. Структура спектра исследована в лемме 8. Показано, что спектр $H(\omega)$ почти наверное состоит из неслучайной существенной части $[-2\varkappa - c; 0]$ и, возможно, случайного собственного значения $\lambda(\Lambda, \varkappa, c, \omega) > 0$. В теореме 2 получены необходимые и достаточные условия того, что с вероятностью 1 существует положительное собственное значение. В случае, когда условие теоремы 2 не выполнено, получены верхняя (теорема 3) и нижняя оценки (теорема 4) на вероятность существования положительного значения в спектре оператора $H(\omega)$.

В третьей главе диссертации содержатся описание и результаты численного моделирования. Проведены следующие эксперименты: моделирование системы частиц методом Монте-Карло, приближенное решение дифференциальных уравнений для моментов при помощи представлений типа Фейнмана-Каца, оценка плотности распределения положительного собственного значения эволюционного оператора ветвящегося случайного блуждания.

В своей диссертационной работе Куценко В.А. сумел добиться продвижения в достаточно сложной теме случайный блужданий в случайной среде. Это потребовало от диссертанта освоения разнообразных технических инструментов из асимптотической теории, спектральной теории операторов, модели Андерсона. Выносимые на защиту результаты снабжены подробными доказательствами и являются достоверными научными фактами. Основные результаты диссертации содержатся в шести работах, входящих в реферативные базы Web of Science, Scopus и RSCI. Диссертация несомненно привлечет внимание специалистов по теории вероятностей и теории случайных процессов.

К существенным замечаниям, на мой взгляд, стоит отнести следующие.

1. В формулировке леммы 1 допущено несколько неточностей, затрудняющих ее понимание. Именно, вместо предела должен быть верхний предел, вместо величины x должна быть ее норма в ℓ_1, вместо функции f, должен быть потенциал V.

2. В доказательстве леммы 4 неверно применен метод Лапласа. В работе написано, что $W_0(t) \sim te^{at\ln t}$. Верной асимптотикой является $W_0(t) \sim \sqrt{t}e^{at\ln t}$. Это не влияет на итоговый результат доказательства леммы, так как в ней объявлялся только главный член логарифмической асимптотики. Аналогичная ошибка допущена в доказательстве леммы 5.

3. В доказательстве теоремы 2, показано, что решение соответствующее положительному λ существует, но не показано, что оно принадлежит $\ell_2(\mathbb{Z})$. Таким образом, не доказано, что λ является собственным значением.

4. В параграфе 3.1 объяснение неравенств 3.1 неверно. Именно в формуле 3.3 написано, что предел некоторого выражения по t зависит от t, в то время, как этот предел равен бесконечности, и с помощью таких рассуждений доказать 3.1 не удается.

Также диссертация содержит достаточно большое число ошибок редакционного характера.

1. Страница 10, 5-ая строка снизу: слово «параметр» повторяется два раза подряд.

2. Страница 11, 7-ая строка снизу: лишнее слово «на».

3. Страница 14, формула; страница 24 формула (1.13); страница 25 первая формула: для обозначения дельта функции использована заглавная буква дельта, которая использована в диссертации для обозначения оператора Лапласа.

4. Параграф 1.4 и параграф 1.6: символ x используется одновременно для обозначения одного из аргументов на решетке и аргумента плотности распределения потенциала.

5. Параграф 1.4: во всех интегралах на протяжении параграфа пропущен знак дифференциала.

6. Страница 18, 4-ая строка снизу: пропущена норма у x.

7. Страница 21, 3-ая строка сверху: константа должна быть равна $1/2$, а не $-1/2$.

8. Страница 22, последний абзац: вместо номеров всех лемм написан номер параграфа.

9. В параграфе 1.7 часто стоит точка между словом «лемма» и ее номером.

10. Страница 26, 3-ья строка сверху: «слудет» вместо следует.

11. Страница 27, 4-ая строка сверху: аргумент в формуле равен $t/2$, а сама формула записана в точке t.

12. Страница 28, 7-ая строка сверху: вместо $c = 0$ должно быть $c = 1$.

13. Страница 28, следующая после (1.21) формула: пропущен минус в аргументе первой экспоненты, во втором интеграле вместо dx должно быть dz.

14. Страница 28, формула перед (1.22) и текст перед ней: написано, что интеграл равен $1 + O(t^{-1})$, этот интеграл равен $\sqrt{2\pi} + O(t^{-1})$.

15. Страница 29, 1-ая строка сверху: вместо $c = 0$ должно быть $c = 1$.

16. Страница 30, формула перед (1.27): пропущен знак $\sim$ во второй части формулы.

17. Страница 31, 3-ья строка снизу: «передела» вместо предела.

18. Страница 32, 6-ая строка сверху: максимум достигается в точке 0, а не -1.

19. Страница 37, формула после (2.4): после формулы написано «где» и формула повторена еще один раз. Скорее всего, после формулы просто должна была стоять точка.

20. Страница 38, формулировка леммы 7: после определения ψ_λ стоит лишняя точка.

21. Страница 39: активно используемый символ $\approx$ не определен.

22. Страница 44, последняя строка: вместо «дать предложить оценки» должно быть «предложить оценки».

23. Страница 45, формула (2.22): не указано, что такое функция $\psi(x)$.

24. Страница 45, формула (2.22): в третьей строке формулы должно быть $x \leq -1$, а не $x \leq 1$.

25. Страница 46, первая строка сверху: вместо ссылки на формулу (2.21) должна быть ссылка на формулу (2.20).

26. Страница 47, 13-ая строка сверху: вместо «верхней оценки» должно быть «нижней оценки».

27. Страница 55, формула после (2.43): вместо последнего знака минус должен быть знак равно.

28. Страница 56, 8-ая строка сверху: вместо «$f(0) = 1$ по норме» должно быть «$\psi(0) = 1$».

29. Страница 56, формула перед (2.46): после последнего знака равно должно быть $\varkappa k^2/2$ вместо k^2.

30. Страница 58, формула (2.50): вместо $1831(x, \omega)$ должно быть $\varphi(x, \omega)$.

31. Страница 62, 13-ая строка снизу: вместо «овтета» должно быть «ответа».

32. Страница 66, 7-ая строка снизу: после слова «условий» должна быть запятая, а не точка. Далее, слово «включая» должно быть с маленькой буквы. После $\mathcal{M}(\omega)$ должна быть точка.

33. Страница 67, 14-ая строка сверху: вместо «БРВ» должно быть «ВСБ».

34. Страница 77, 8-ая строка сверху: вместо «для упрощенного распределения законе распределения» должно быть «для упрощенного закона распределения».

35. Страница 78, 4-ая строка снизу: вместо «далекая» должно быть «далекую».

36. Страница 82: первый абзац заключения написан дважды.

Указанные замечания не умаляют значимости диссертационного исследования. Диссертация отвечает требованиям, установленным Московским государственным университетом имени М.В. Ломоносова к работам подобного рода. Содержание диссертации соответствует паспорту специальности 1.1.4 — теория вероятностей и математическая статистика (по физико-математическим наукам), а также критериям, определенным пп. 2.1-2.5 Положения о присуждении ученых степеней в Московском государственном университете имени М.В. Ломоносова, а также оформлена согласно требованиям Положения о совете по защите диссертаций на соискание ученой степени кандидата наук, на соискание ученой степени доктора наук Московского государственного университета имени М.В. Ломоносова.

Таким образом, соискатель Куценко Владимир Александрович заслуживает присуждения ученой степени кандидата физико-математических наук по специальности 1.1.4 – «теория вероятностей и математическая статистика».

Официальный оппонент:
кандидат физико-математических наук,
научный сотрудник лаборатории прикладных
вероятностных и алгоритмических методов
Санкт-Петербургского отделения Математического института им. В.А. Стеклова РАН
РЯДОВКИН Кирилл Сергеевич

Контактные данные:
e-mail: kryadovkin@gmail.com,
Специальность, по которой офиц. оппонентом защищена диссертация:
01.01.05 — теория вероятностей и математическая статистика
Адрес места работы: 191023, г. Санкт-Петербург, наб. р. Фонтанки 27
Тел.: +7 812-312-40-58, e-mail: admin@pdmi.ras.ru

Подпись сотрудника Санкт-Петербургского отделения Математического института им. В.А. Стеклова РАН К.С. Рядовкина удостоверяю:

Помощник директора по кадрам А.А. Зотова
14.05.2024.