

**ОТЗЫВ официального оппонента**  
**на диссертацию на соискание ученой степени**  
**кандидата физико-математических наук**  
**Александрова Ильи Игоревича**  
**на тему: «Дисперсионная цепочка уравнений Власова»,**  
**по специальности 1.3.3. – теоретическая физика.**

**Актуальность темы.** На сегодняшний день формализм функции распределения, разработанный в работах А.А. Власова, получил широкое теоретическое и практическое распространение в физике плазмы, астрофизике, физике твердого тела, в ускорительной и статистической физике. Прикладное использование теории Власова отражается в уравнениях Власова-Максвелла (электродинамика), Власова-Пуассона (гравитация), Власова-Эйнштейна (релятивистская гравитация), Власова-Максвелла-Эйнштейна (ОТО и электродинамика), Власова-Больцмана (транспортировка пучка в ускорительной физике). Стоит отметить, что существенная часть работ по данной тематике имеет фокус только на втором уравнении из бесконечной само-зацепляющейся цепочки уравнений Власова. В силу практической эффективности подхода Власова логичным видится освоение и расширение потенциальных возможностей остальных уравнений цепочки.

**Научная новизна и практическая значимость исследований.** В диссертации И.И. Александрова представлены результаты, обладающие научной новизной, имеющие практическую значимость:

1. Построена дисперсионная цепочка уравнений Власова для функций распределения смешанного типа.
2. На основе дисперсионной цепочки уравнений Власова получены законы сохранения для кинематических величин высшего порядка.

3. Получена дисперсионная цепочка для  $H^{n_1 \dots n_R}$  - функций Больцмана.
4. Предложена динамическая аппроксимация для векторного поля потока ускорений второго порядка  $\langle \ddot{\vec{v}} \rangle$ .
5. Получена модификация третьего уравнения Власова –  $\Psi$  - уравнение Власова для систем с излучением.
6. Найдены точные решения нестационарного уравнения Шрёдингера и соответствующие им функции Вигнера. Проведен анализ динамических свойств квантовой системы с позиции статистической физики, механики сплошных сред и квантовой механики в фазовом пространстве.

#### **Обоснованность и достоверность научных положений и выводов.**

Обоснованность и достоверность полученных результатов обусловлена применением в исследовании строгого математического аппарата. Полученные в работе аналитические выражения для модельных систем подтверждены результатами численного эксперимента.

#### **Рекомендации по использованию результатов диссертации.**

Результаты диссертационной работы Александрова И.И. могут быть применены в трех аспектах. Во-первых, как теоретическая база, расширяющая формализм функций распределения Власова. Во-вторых, использование нового уравнения для описания систем с излучением, например, таких как плазма. В третьих, как метод рассмотрения классических и квантовых систем в рамках единого математического описания.

## **Краткая характеристика основного содержания диссертации.**

Диссертация И.И. Александрова состоит из введения, трех глав, заключения и списка литературы. Объем диссертации 187 стр., список литератур содержит 87 ссылок. Введение содержит обзор литературы по теории цепочки уравнений Власова, обоснование актуальности поставленной задачи, новизны и практической значимости основных результатов, полученных в работе.

Глава 1 посвящена описанию процедуры построение бесконечной само-цепляющейся цепочки уравнений Власова. В §1.1 рассматривается обобщенное фазовое пространство высших кинематических величин, вводится понятие обобщенной фазовой траектории и скорости. В §1.2 определяются функции распределения плотности вероятностей кинематических величин высших порядков, кинематических средних потоков вероятностей и описываются их свойства. §1.3 содержит описание процедуры построение цепочки Власова на основе первого принципа – закона сохранения вероятностей в обобщенном фазовом пространстве, также рассмотрен простейший пример обрыва цепочки на втором уравнении. §1.4 посвящен возможному эволюционному (по времени) продолжению функции распределения, удовлетворяющей цепочки Власова, по известным в некоторый фиксированный момент времени функциям распределения более высокого порядка. Также в §1.4 рассмотрена усредненная обобщенная фазовая траектория и ее свойства.

В главе 2 строится дисперсионная цепочка уравнений Власова для функций распределения и средних потоков кинематических величин смешанного типа. В §2.1 описываются функции распределения смешанного типа и соответствующие им средние потоки кинематических величин в виде

«тензорного» представления (экстенсива). Функции распределения, имеющие одинаковое количество переменных относятся к одному рангу, а их совокупность представима в виде экстенсива/тензора соответствующего ранга. Аналогичный формализм записи применяется к кинематическим средним, эволюционным дифференциальным операторам и самой дисперсионной цепочке уравнений Власова в §2.1-§2.2. В §2.3-§2.4 на основе дисперсионной цепочки доказан ряд теорем, формулирующих законы сохранения для средних кинематических величин высших порядков, а так же исследованы их свойства. В §2.5 вводится так называемый в диссертационной работе аналог  $Hn$  – функции Больцмана для функций распределения смешанного типа. На основе дисперсионной цепочки Власова для  $Hn$  – функций получены эволюционные уравнения и рассмотрены их свойства.

Глава 3 содержит модельные примеры описания классических и квантовых систем в рамках дисперсионной цепочки уравнений Власова. В §3.1-§3.2 обсуждаются возможные варианты построения динамической аппроксимации для кинематического среднего потока ускорения второго порядка  $\langle \ddot{\mathbf{v}} \rangle$ . Предлагается два подхода: на основе уравнения Лоренца-Абрахама-Дирака и путем построения расширенного кинематического аналога системы уравнений Максвелла. Оба подхода применяются в §3.3 для обрыва цепочки на третьем уравнении. Также в §3.3 описывается возможный алгоритм численного решения третьего уравнения цепочки для физических систем, характеризующихся наличием электромагнитного излучения или требующих повышения порядка аппроксимации разностной схемы в рамках второго уравнения Власова. В §3.4-§3.6 приведен пример построения точного нестационарного решения уравнений первого и второго ранга дисперсионной цепочки Власова. Используя взаимосвязь между первым уравнением Власова и уравнением Шрёдингера, а также между вторым уравнением Власова и уравнением Моэля для функции Вигнера в §3.4-§3.5 строятся точные

нестационарные решения уравнения Шрёдингера и Моэля для модельной квантовой системы с потенциалом в виде бесконечно глубокой ямы. Точное нестационарное решение уравнения Шрёдингера представляется через тета-функцию Якоби с дополнительным параметром  $\tau$ , который может иметь трактовку как «температура» квантовой системы. Доказан ряд теорем о переходе решения нестационарной задачи в стационарное решение при стремлении «температуры» к нулю. В §3.5 для найденного решения уравнения Шрёдингера строится нестационарная функция Вигнера, представимая в виде разложения по многочленам Чебышева. Аргументами полиномов Чебышева являются характеристические прямые, угол наклона которых связан с номером состояния квантовой системы. Используя формализм Власова, внутри потенциальной ямы рассматривается нестационарное поведение волн вероятностей и квантового потенциала. «Заморозка» квантовой системы (при  $\tau \rightarrow 0$ ) приводит к исчезновению волн вероятностей (§3.5). В §3.6 показывается, что для рассматриваемой квантовой системы можно ввести понятие распределения Гиббса и функции энтропии. Усреднение функции энергии по распределению Гиббса дает энергетический спектр состояний квантовой системы, зависящий от «температуры»  $\tau$ . В предельном случае при  $\tau \rightarrow 0$  («заморозка» квантовой системы) энергетический спектр сходится к известному спектру стационарной задачи, а функция энтропии сходится к нулю.

Основные научные результаты диссертации были опубликованы в рецензируемых научных изданиях, индексируемых в базах данных Web of Science, Scopus, RSCI и в изданиях из перечня ВАК, рекомендованного Минобрнауки России для защиты по специальности в соответствии с требованиями диссертационного совета МГУ. Две работы входят в список МГУ ТОП-25%.

По работе имеются замечания:

- Интересно продемонстрировать взаимосвязь между уравнением Шрёдингера в импульсном представлении и соответствующим ему уравнением 1-го ранга из дисперсионной цепочки Власова.
- В главах 1 и 3 диссертации стоило бы привести заключение, аналогично тому, как это сделано в главе 2, а также указать, в каких именно статьях автора диссертации опубликованы результаты каждой главы.
- В главе 3 абзац, содержащий описание рисунка 1, повторяется дважды: над и под рисунком.
- Ссылка [78] в списке литературы совпадает со статьей 1 из списка публикаций автора, в то время как остальные публикации автора отсутствуют в общем списке литературы.
- В диссертации присутствуют опечатки, в том числе в формулах, и стилистические неточности. Например, интеграл в правой части формулы (1.34) не должен содержать элемент  $d^3r$ , а подынтегральная функция зависит от  $t_0$ , а не от  $t$ .

Вместе с тем, указанные замечания не умаляют значимости диссертационного исследования. Диссертация отвечает требованиям, установленным Московским государственным университетом имени М.В.Ломоносова к работам подобного рода. Содержание диссертации соответствует паспорту специальности 1.3.3 — «теоретическая физика» (по физико-математическим наукам), а также критериям, определенным пп. 2.1–2.5 Положения о присуждении ученых степеней в Московском государственном университете имени М.В.Ломоносова, а также оформлена, согласно приложениям № 5, 6 Положения о диссертационном совете Московского государственного университета имени М.В.Ломоносова.

Таким образом, соискатель Александров Илья Игоревич заслуживает присуждения ученой степени кандидата физико-математических наук по специальности 1.3.3 — «теоретическая физика».

Официальный оппонент:

Доктор физико-математических наук, доцент,  
профессор кафедры высшей математики  
ГБОУ ВО Московской области «Университет «Дубна»

Арбузова Елена Владимировна

Контактные данные:

тел.: 7(49624)66079, e-mail: arbuzova@uni-dubna.ru

Специальность, по которой официальным оппонентом  
защищена диссертация:

01.04.02 – Теоретическая физика

Адрес места работы:

141982, г. Дубна Московской обл., ул. Университетская, д. 19,  
ГБОУ ВО Московской области «Университет «Дубна»  
Тел.: 7(49624)66079; e-mail: rector@uni-dubna.ru

Подпись сотрудника профессора кафедры высшей математики ГБОУ ВО Московской области «Университет «Дубна» Е.В. Арбузовой удостоверяю: