

МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ  
ИМЕНИ М.В. ЛОМОНОСОВА  
Физический факультет

*На правах рукописи*

*АЛЕКСАНДРОВ Илья Игоревич*

**ДИСПЕРСИОННАЯ ЦЕПОЧКА УРАВНЕНИЙ ВЛАСОВА**

Специальность 1.3.3 – теоретическая физика

Диссертация на соискание ученой степени  
кандидата физико-математических наук

Научный руководитель  
доктор физико-математических наук  
Перепёлкин Е.Е.

МОСКВА – 2023

## **ОГЛАВЛЕНИЕ**

|  |            |
|--|------------|
| <b>ВВЕДЕНИЕ.....</b>   | <b>3</b>   |
| <b>ГЛАВА 1 ЦЕПОЧКА УРАВНЕНИЙ ВЛАСОВА.....</b>                          | <b>22</b>  |
| §1.1 Обобщенное фазовое пространство.....                              | 22         |
| §1.2 Функции распределения и кинематические средние.....               | 26         |
| §1.3 Первый принцип – закон сохранения вероятностей.....               | 30         |
| §1.4 Переход от временной зависимости к кинематической.....            | 34         |
| <br>   |            |
| <b>ГЛАВА 2 ДИСПЕРСИОННАЯ ЦЕПОЧКА.....</b>                              | <b>42</b>  |
| §2.1 Смешанные функции распределения и кинематические<br>средние. .... | 42         |
| §2.2 Группы уравнений дисперсионной цепочки.....                       | 47         |
| §2.3 Законы сохранения кинематических величин.....                     | 58         |
| §2.4 Свойства средних производных.....                                 | 79         |
| §2.5 $H_n$ - функции Больцмана.....                                    | 89         |
| <br>   |            |
| <b>ГЛАВА 3 КЛАССИЧЕСКИЕ И КВАНТОВЫЕ СИСТЕМЫ .....</b>                  | <b>105</b> |
| §3.1 Гидро-газодинамическое приближение.....                           | 105        |
| §3.2 Электромагнитное представление.....                               | 110        |
| §3.3 $\Psi$ -уравнение Власова .....                                   | 123        |
| §3.4 Точное решение нестационарного уравнения Шрёдингера.....          | 132        |
| §3.5 Функция Вигнера .....   | 149        |
| §3.6 Распределение Гиббса.....   | 162        |
| <br>   |            |
| <b>ЗАКЛЮЧЕНИЕ.....</b>   | <b>178</b> |
| <br>   |            |
| <b>ЛИТЕРАТУРА.....</b>   | <b>179</b> |

## ВВЕДЕНИЕ

### Обзор литературы, историческая справка и актуальность темы исследования

Одной из задач теоретической физики является построение фундаментальной математически строгой модели, описывающей с приемлемой точностью наблюдаемые экспериментально результаты [1]. Механика является наиболее полно описанным разделом физики. Первый эмпирический закон движения был получен еще Аристотелем в III-IV веке до н.э.  $\vec{v} = \vec{F}/\kappa m$ , где  $\kappa$  – коэффициент пропорциональности между скоростью  $\vec{v}$ , силой  $\vec{F}$  и массой  $m$ . По мере повышения уровня точности экспериментальной техники Ньютон в 1686 г. сформулировал закон движения  $\dot{\vec{v}} = \vec{F}/m$ , ставший фундаментом классической механики. Теоретическая интерпретация второго закона Ньютона возможна на основе принципа наименьшего действия (ПНД) и получения уравнения Эйлера-Лагранжа  $\frac{d}{dt}\nabla_{\vec{v}}L - \nabla_{\vec{r}}L = 0$  для функции  $L = L(\vec{r}, \vec{v}, t) = T - U$ , где  $T, U$  – кинетическая и потенциальная энергия соответственно. С развитием физики и появлением электромагнитной теории на основе работ Дж. Лармора в 1897 г. по излучению электромагнитной волны заряженной частицей, движущейся с ускорением, Х. Лоренцем было предложено уравнение

$$m\tau_0\ddot{\vec{v}} = m\dot{\vec{v}} - \vec{F}_{ext}, \quad (i.1)$$

где  $\tau_0 = \frac{e^2}{6\pi\epsilon_0 mc^3}$ ;  $\vec{F}_{ext}$  – внешняя сила. Производная  $\ddot{\vec{v}}$  содержит информацию о силе радиационного трения и определяет третий порядок дифференциального уравнения движения (i.1), что выходит за рамки классической механики. Заметим, что механика материальных точек не

отвечает на вопрос – почему уравнения движения второго порядка, так как они являются исходными уравнениями в этой теории.

В 1860 г. М.В. Остроградский предложил расширенный вариант лагранжева формализма  $L_N = L_N(\vec{r}, \dot{\vec{r}}, \ddot{\vec{r}}, \dots, \vec{r}^{(N)}, t)$  и рассмотрел фазовое пространство, содержащее конечный набор  $N + 1$  кинематических величин высшего порядка  $\vec{r}, \dot{\vec{r}}, \ddot{\vec{r}}, \dots, \vec{r}^{(N)}$ . Уравнение Эйлера-Лагранжа, соответствующее механике М.В. Остроградского имеет вид:

$$\nabla_r L_N + \sum_{n=1}^N (-1)^n \frac{d^n}{dt^n} \nabla_{\vec{r}^{(n)}} L_N = 0, \quad (i.2)$$

которое при  $N = 1$  переходит в известное уравнение движения в классическом фазовом пространстве (второй закон Ньютона). Механика М.В.Остроградского получила свое дальнейшее применение в теории поля [2-5].

В середине XX века А.А. Власов рассмотрел бесконечномерное фазовое пространство (обобщенное фазовое пространство (ОФП) [6, 7]), содержащее полный набор кинематических величин всех порядков  $\vec{r}, \dot{\vec{r}}, \ddot{\vec{r}}, \dots, \vec{r}^{(N)}, \dots$  [8]. В обобщенном фазовом пространстве  $\Omega$  А.А.Власов постулировал первый принцип – закон сохранения вероятностей [8, 9]

$$\frac{\partial f_\infty}{\partial t} + \text{div}_\xi (f_\infty \vec{u}_\xi) = 0, \quad (i.3)$$

где  $\vec{\xi} = \{\vec{r}, \vec{v}, \dot{\vec{v}}, \ddot{\vec{v}}, \dots\}^T$ ,  $f_\infty = f_\infty(\vec{\xi}, t)$  – функция распределения;  $\text{div}_\xi = \text{div}_r + \text{div}_v + \text{div}_{\dot{v}} + \dots$ , а  $\vec{u}_\xi = \{\vec{v}, \dot{\vec{v}}, \ddot{\vec{v}}, \dots\}^T$  – векторное поле «скорости» потока вероятностей. Континуальное интегрирование уравнения (i.3) по подпространствам  $\Omega_r, \Omega_v, \Omega_{\dot{v}}, \dots$  обобщенного фазового пространства  $\Omega$

дало бесконечную само-зацепляющуюся цепочку уравнений Власова [8, 9] для функций распределений  $f_1(\vec{r}, t)$ ,  $f_2(\vec{r}, \vec{v}, t)$ ,  $f_3(\vec{r}, \vec{v}, \dot{\vec{v}}, t)$ ,  $f_4(\vec{r}, \vec{v}, \dot{\vec{v}}, \ddot{\vec{v}}, t)$ , ...:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial f_1}{\partial t} + \operatorname{div}_r [f_1 \langle \vec{v} \rangle] &= 0, \\
\frac{\partial f_2}{\partial t} + \operatorname{div}_r [f_2 \vec{v}] + \operatorname{div}_v [f_2 \langle \dot{\vec{v}} \rangle] &= 0, \\
\frac{\partial f_3}{\partial t} + \operatorname{div}_r [f_3 \vec{v}] + \operatorname{div}_v [f_3 \dot{\vec{v}}] + \operatorname{div}_{\dot{v}} [f_3 \langle \ddot{\vec{v}} \rangle] &= 0, \\
\dots & \\
\frac{\partial f_n}{\partial t} + \operatorname{div}_r [f_n \vec{v}] + \operatorname{div}_v [f_n \dot{\vec{v}}] + \dots + \operatorname{div}_{v^{(n-2)}} f_n \langle \vec{v}^{(n-1)} \rangle &= 0, \\
\dots &
\end{aligned} \tag{i.4}$$

где функции распределения связаны между собой условиям:

$$\begin{aligned}
f_0(t) &= \int_{(\infty)} f_1(\vec{r}, t) d^3 r = \int_{(\infty)} \int_{(\infty)} f_2(\vec{r}, \vec{v}, t) d^3 r d^3 v = \\
&= \int_{(\infty)} \int_{(\infty)} \int_{(\infty)} f_3(\vec{r}, \vec{v}, \dot{\vec{v}}, t) d^3 r d^3 v d^3 \dot{v} = \int_{(\infty)} \int_{(\infty)} \int_{(\infty)} \int_{(\infty)} f_4(\vec{r}, \vec{v}, \dot{\vec{v}}, \ddot{\vec{v}}, t) d^3 r d^3 v d^3 \dot{v} d^3 \ddot{v} = \dots,
\end{aligned} \tag{i.5}$$

Средние кинематические величины  $\langle \vec{v} \rangle$ ,  $\langle \dot{\vec{v}} \rangle$ ,  $\langle \ddot{\vec{v}} \rangle$ , ... определяются соотношениями

$$\begin{aligned}
f_1(\vec{r}, t) \langle \vec{v} \rangle(\vec{r}, t) &= \int_{(\infty)} f_2(\vec{r}, \vec{v}, t) \vec{v} d^3 v, \\
f_2(\vec{r}, \vec{v}, t) \langle \dot{\vec{v}} \rangle(\vec{r}, \vec{v}, t) &= \int_{(\infty)} f_3(\vec{r}, \vec{v}, \dot{\vec{v}}, t) \dot{\vec{v}} d^3 \dot{v}, \\
f_3(\vec{r}, \vec{v}, \dot{\vec{v}}, t) \langle \ddot{\vec{v}} \rangle(\vec{r}, \vec{v}, \dot{\vec{v}}, t) &= \int_{(\infty)} f_4(\vec{r}, \vec{v}, \dot{\vec{v}}, \ddot{\vec{v}}, t) \ddot{\vec{v}} d^3 \ddot{v}, \\
\dots &
\end{aligned} \tag{i.6}$$

Цепочка уравнений Власова (i.4) содержит кинематические уравнения, для решения которых необходим разрыв цепочки на некотором уравнении и введение динамической аппроксимации кинематической средней (i.6). Номер уравнения, на котором производится разрыв цепочки, определяет уровень кинематической информации о системе. С практической точки зрения особое распространение получило второе уравнение в цепочке Власова (i.4) для функции распределения  $f_2(\vec{r}, \vec{v}, t)$ , известное как уравнение Власова. В области классической физики А.А. Власов предложил динамическую аппроксимацию для среднего потока ускорений

$$\langle \dot{\vec{v}} \rangle = \frac{\vec{F}}{m}, \quad (\text{i.7})$$

где  $\vec{F}$  – сила, которая в физике плазмы имеет вид  $\vec{F} = q(\vec{E} + \vec{v} \times \vec{B})$ , а в статистической физике  $\vec{F} = -\nabla_r U$ . Поля  $\vec{E}$  и  $\vec{B}$  соответствуют электрическому и магнитному полю и удовлетворяют уравнениям Максвелла. Функция  $U$  соответствует скалярному потенциалу. Первая аппроксимация Власова (i.7) широко используется в статистической физике [10-13], в физике конденсированного состояния [14-16], в физике плазмы [17-21], ускорительной физике [22-24] и астрофизике [25-30].

Дальнейшее исследование свойств цепочки уравнений Власова показало, что цепочка (i.4) обеспечивает фундаментальную связь между различными областями классической и квантовой физики: статистической физикой, термодинамикой, механикой сплошных сред, теорией поля и квантовой нерелятивистской механикой [31, 32, 33]. Так из первого уравнения Власова (i.4) для функции распределения  $f_1(\vec{r}, t)$  может быть получено уравнение Шрёдингера для скалярной частицы в электромагнитном поле [31]:

$$\frac{i}{\beta} \frac{\partial \Psi}{\partial t} = -\alpha \beta \left( \hat{\mathbf{p}} - \frac{\gamma}{2\alpha\beta} \vec{A} \right)^2 \Psi + U \Psi, \quad (\text{i.8})$$

где  $\hat{\mathbf{p}} \stackrel{\text{det}}{=} -\frac{i}{\beta} \nabla_r$ ;  $\alpha, \beta, \gamma$  – постоянные величины; функция распределения  $f_1 = |\Psi|^2 \geq 0$  является положительной, а векторное поле потока вероятностей  $\langle \vec{v} \rangle$  (i.4), (i.6) по теореме Гельмгольца представимо в виде суперпозиции вихревого  $\vec{A}$  и потенциального  $\nabla_r \Phi$  поля:

$$\langle \vec{v} \rangle(\vec{r}, t) = -\alpha \nabla_r \Phi(\vec{r}, t) + \gamma \vec{A}(\vec{r}, t), \quad (\text{i.9})$$

при этом  $\vec{B} = \text{rot } \vec{A}$ ,  $\Phi = 2\varphi + 2\pi k$ ,  $k \in \mathbb{Z}$ . Функция  $\varphi$  является фазой волновой функции  $\Psi(\vec{r}, t) = \sqrt{f_1} e^{i\varphi}$  и удовлетворяет уравнению Гамильтона-Якоби:

$$-\frac{1}{2\beta} \frac{\partial \Phi}{\partial t} = \frac{1}{4\alpha\beta} |\langle \vec{v} \rangle|^2 + V = H, \quad (\text{i.10})$$

$$V \stackrel{\text{det}}{=} U + Q, \quad Q = \frac{\alpha}{\beta} \frac{\Delta_r |\Psi|}{|\Psi|} = -\frac{\hbar^2}{2m} \frac{\Delta_r |\Psi|}{|\Psi|},$$

где  $\alpha \stackrel{\text{det}}{=} -\frac{\hbar}{2m}$ ,  $\beta \stackrel{\text{det}}{=} \frac{1}{\hbar}$ ,  $\gamma \stackrel{\text{det}}{=} -\frac{e}{m}$ . Величина  $Q$  является квантовым потенциалом, используемым в теории «волны-пилота» де'Бройля-Бома [34-36], который связан с тензором квантового давления  $P_{\mu\lambda}^{(q)}$ :

$$-\frac{1}{f_1} \frac{\partial P_{\mu\lambda}^{(q)}}{\partial x^\lambda} = 2\alpha^2 \frac{\partial}{\partial x^\mu} \left( \frac{1}{\sqrt{f_1}} \frac{\partial^2 \sqrt{f_1}}{\partial x^\lambda \partial x^\lambda} \right) = 2\alpha\beta \frac{\partial Q}{\partial x^\mu}. \quad (\text{i.11})$$

Уравнение (i.10) в гидродинамическом приближении представимо через тензор давления  $P_{\mu\lambda} = \int_{(-\infty)} f_2(v_\mu - \langle v_\mu \rangle)(v_\lambda - \langle v_\lambda \rangle) d^3v$  в виде:

$$\frac{d\langle v_\mu \rangle}{dt} = \left( \frac{\partial}{\partial t} + \langle v_\lambda \rangle \frac{\partial}{\partial x_\lambda} \right) \langle v_\mu \rangle = -\frac{1}{f_1} \frac{\partial P_{\mu\lambda}}{\partial x_\lambda} + \langle \dot{v}_\mu \rangle. \quad (\text{i.12})$$

С учетом выражений (i.9), (i.10) уравнение (i.12) для случая электродинамики представимо как

$$\frac{d\langle \vec{v} \rangle}{dt} = -\gamma (\vec{E} + \langle \vec{v} \rangle \times \vec{B}), \quad \vec{E} = -\frac{\partial \vec{A}}{\partial t} - \frac{2\alpha\beta}{\gamma} \nabla_r V, \quad (\text{i.13})$$

откуда естественным образом следуют уравнения Максвелла:  $\text{rot}_r \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$  и  $\text{div}_r \vec{B} = 0$ .

Второе уравнение Власова (i.4) для функции распределения  $f_2(\vec{r}, \vec{v}, t)$  может быть рассмотрено не только в области классической физики (уравнение Власова с аппроксимацией (i.7)), но и для квантовой механики в фазовом пространстве. Рассмотрение квантовых систем в фазовом пространстве было инициировано в 1930-32 г.г. работами Е. Вигнера и Г.Вейля [37, 38]. Функция  $f_2(\vec{r}, \vec{v}, t) = mW(\vec{r}, \vec{p}, t)$  соответствует функции Вигнера  $W(\vec{r}, \vec{p}, t)$ , являющейся квази-плотностью вероятностей квантовой системы в фазовом пространстве:

$$W(\vec{r}, \vec{p}, t) = \frac{1}{(2\pi\hbar)^3} \int_{-\infty}^{+\infty} \exp\left(-i\frac{\vec{p}\vec{s}}{\hbar}\right) \left\langle \vec{r} + \frac{\vec{s}}{2} \left| \hat{\rho}(t) \right| \vec{r} - \frac{\vec{s}}{2} \right\rangle d^3s, \quad (\text{i.14})$$



где  $\rho$  – матрица плотности. Термин квази-вероятность обусловлен наличием отрицательных значений у функции  $W(\vec{r}, \vec{p}, t)$ . Несмотря на необычные свойства, функция Вигнера получила широкое применение в квантовой информатике [39-41], томографии [42-45] в теории квантовой связи и квантовой криптографии [46-47]. Функция Вигнера удовлетворяет уравнению Моэля [48]:

$$\frac{\partial W}{\partial t} + \frac{1}{m}(\vec{p}, \nabla_r)W - (\nabla_r U, \nabla_p W) = \sum_{l=1}^{+\infty} \frac{(-1)^l (\hbar/2)^{2l}}{(2l+1)!} U(\vec{\nabla}_r, \vec{\nabla}_p)^{2l+1} W, \quad (i.15)$$

которое является частным случаем второго уравнения Власова с аппроксимацией Власова-Моэля для среднего потока ускорений [49]:

$$\langle \dot{v}_\mu \rangle = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^{n+1} (\hbar/2)^{2n}}{m^{2n+1} (2n+1)!} \frac{\partial^{2n+1} U}{\partial x_\mu^{2n+1}} \frac{1}{f_2} \frac{\partial^{2n} f_2}{\partial v_\mu^{2n}}, \quad (i.16)$$

где  $\langle \langle \dot{v}_\mu \rangle \rangle = -\frac{1}{m} \frac{\partial U}{\partial x_\mu}$ . Таким образом, при усреднении по пространству скоростей аппроксимация Власова-Моэля (i.16) переходит в аппроксимацию Власова (i.7) и квантовые поправки не присутствуют в явном виде на макроуровне в уравнении (i.12). Если считать, что члены в разложении (i.16) с коэффициентами  $\hbar^{2n}$  малы в классическом приближении ( $\hbar \ll 1$ ), тогда аппроксимация (i.16) переходит в аппроксимацию (i.7). Такой «предельный» переход переводит второе уравнение Власова/Моэля (i.15) в классическое уравнение Лиувилля.

Заметим, что при построении цепочки уравнений Власова (i.4) нигде не накладывалось условие положительности функций распределения. При рассмотрении первого уравнения Власова предположение о положительности  $f_1 = |\Psi|^2 \geq 0$  привело к введению волновой функции  $\Psi$  и

соответствующего ей уравнению Шрёдингера (i.8). Отсутствие условия положительности для функции  $f_2$  приводит к ее связи с функцией Вигнера  $W$ . В работе [33] рассмотрен случай, когда все функции распределения в цепочке Власова являются положительными. Условие  $f_n = |\Psi_n|^2 \geq 0$  приводит к цепочке уравнений квантовой механики высших кинематических величин [33].

Таким образом, обрыв цепочки уравнений Власова приводит к разным уровням информации о системе: закон Аристотеля, уравнение Ньютона, Лоренца, механика М.В. Остроградского. На каком уравнении необходимо остановиться и произвести обрыв цепочки определяются объёмом информации, который необходим для анализа системы. Цепочка Власова описывает фундаментальный подход к многоуровневому информационному рассмотрению, не ограничиваясь феноменологией. Естественным образом цепочка уравнений Власова связывает классическую и статистическую механику, теорию поля, механику сплошных сред, физику плазмы, астрофизику, квантовую механику и ускорительную физику [50-54].

В связи с фундаментальной важностью цепочки уравнений Власова, целью данной работы является расширение исходных уравнений на функции распределения «смешанного» типа. Проблема состоит в следующем. Цепочка уравнений Власова имеет иерархическую структуру, то есть рассматриваются уравнения для функций  $f_1(\vec{r}, t)$ ,  $f_2(\vec{r}, \vec{v}, t)$ ,  $f_3(\vec{r}, \vec{v}, \dot{\vec{v}}, t)$ ,  $f_4(\vec{r}, \vec{v}, \dot{\vec{v}}, \ddot{\vec{v}}, t), \dots$ . Так как кинематические величины  $\vec{r}, \vec{v}, \dot{\vec{v}}, \ddot{\vec{v}}, \dots$  являются независимыми, то логичным видится иметь информацию о функциях распределения «смешанного» типа, например,

$$f(\vec{v}, t), f(\dot{\vec{v}}, t), f(\ddot{\vec{v}}, t), \dots \quad (\text{i.17})$$

$$f(\vec{r}, \dot{\vec{v}}, t), f(\vec{r}, \ddot{\vec{v}}, t), \dots, f(\vec{v}, \dot{\vec{v}}, t), f(\vec{v}, \ddot{\vec{v}}, t), \dots, f(\dot{\vec{v}}, \ddot{\vec{v}}, t), f(\ddot{\vec{v}}, \ddot{\vec{v}}, t), \dots$$

$$f(\vec{r}, \vec{v}, \ddot{\vec{v}}, t), \dots, f(\vec{r}, \dot{\vec{v}}, \ddot{\vec{v}}, t), \dots$$

а так же о смешанных средних кинематических величинах

$$\langle \dot{\vec{v}} \rangle(\vec{v}, t), \langle \vec{v} \rangle(\dot{\vec{v}}, t), \langle \vec{v} \rangle(\vec{r}, \dot{\vec{v}}, t), \langle \dot{\vec{v}} \rangle(\vec{r}, \vec{v}, \ddot{\vec{v}}, t), \dots \quad (i.18)$$

Заметим, что средние кинематические величины, присутствующие в уравнении Власова, являются функциями от кинематических величин низшего порядка, то есть  $\langle \vec{v} \rangle(\vec{r}, t)$ ,  $\langle \dot{\vec{v}} \rangle(\vec{r}, \vec{v}, t)$ ,  $\langle \ddot{\vec{v}} \rangle(\vec{r}, \vec{v}, \dot{\vec{v}}, t)$ , ... или после последующих усреднений  $\langle \langle \dot{\vec{v}} \rangle \rangle(\vec{r}, t)$ ,  $\langle \langle \vec{v} \rangle \rangle(\vec{v}, t)$ ,  $\langle \langle \ddot{\vec{v}} \rangle \rangle(\vec{r}, \vec{v}, t)$ ,  $\langle \langle \langle \ddot{\vec{v}} \rangle \rangle \rangle(\vec{r}, t)$ .

Рассмотрение уравнений (i.12) или (i.1) возможно проводить разными способами. С одной стороны, глядя на уравнение (i.12) можно считать, что величина  $\dot{\vec{v}}$  определяется величиной  $\vec{v}$ , то есть высшая кинематическая величина зависит от низшей кинематической величины в соответствии с представлением (i.7). Аналогично в уравнении (i.1) можно считать, что величина  $\ddot{\vec{v}}$  определяется  $\dot{\vec{v}}$ . Такие рассуждения связаны с иерархической формой записи цепочки уравнений Власова (i.4). С другой стороны, в силу независимости кинематических величин  $\vec{r}, \vec{v}, \dot{\vec{v}}, \ddot{\vec{v}}, \dots$  можно строить смешанные функции распределения (i.17) и соответствующие средние кинематические величины (i.18). В этом случае уравнение (i.1) можно трактовать как зависимость низшей кинематической величины  $\dot{\vec{v}}$  от высшей кинематической величины  $\ddot{\vec{v}}$ . Аналогичные рассуждения можно провести для уравнения (i.12). Внешне такой подход близок классической механике, если вспомнить разложение в ряд Тейлора траектории движения материальной

точки  $\vec{r}(t) = \vec{r}_0 + \vec{v}_0 t + \dot{\vec{v}}_0 \frac{t^2}{2} + \ddot{\vec{v}}_0 \frac{t^3}{3!} + \dots$ , аналогично для  $\vec{v}(t) = \vec{v}_0 + \dot{\vec{v}}_0 t + \ddot{\vec{v}}_0 \frac{t^2}{2!} + \dots$  и далее.

В данной работе построена бесконечная цепочка для функций распределения смешанного типа (i.17) и соответствующих им кинематическим величинам (i.18), которая была названа *дисперсионной цепочкой уравнений Власова*. По аналогии с работой [55] построены группы уравнений для смешанных  $H^{n_1 \dots n_r}$  - функций Больцмана и исследованы их свойства. Также получены дисперсионные уравнения законов сохранения для смешанных функций распределения.

Полученные результаты позволили найти частные решения нестационарного уравнения Шрёдингера, построить для них функции Вигнера, связать их с классическим термодинамическим описанием в терминах обратной температуры.

Другим важным следствием из законов сохранения дисперсионной цепочки Власова стало построение новой аппроксимации для средней кинематической величины  $\langle \ddot{\vec{v}} \rangle$ , которая позволяет разорвать цепочку (i.4) на третьем уравнении. Третье уравнение Власова (i.4) для функции распределения плотности вероятностей  $f^{1,2,3}(\vec{r}, \vec{v}, \dot{\vec{v}}, t)$  позволяет по-новому взглянуть на классические системы с излучением. Примером такой физической системы может служить плазма и широкий спектр прикладных задач, связанных с термоядерным синтезом. Другой областью применения третьего уравнения Власова является физика высоких энергий, методами которой проектируются ускорительные комплексы, учитывающие синхротронное излучение. Также стоит отметить задачи астрофизики, связанные с моделированием излучения гравитационных волн. Третье уравнение Власова может быть рассмотрено как расширенный вариант второго уравнения Власова для описания диссипативных систем. Для учёта диссипаций феноменологическим образом модифицируют второе уравнение

Власова добавлением слагаемых в правую часть [56, 57]. В третьем уравнении Власова диссипация в виде излучения естественным образом содержится в уравнении, благодаря средней кинематической величине  $\langle \ddot{\mathbf{v}} \rangle$ , которой определяется сила радиационного трения.

Моделирование сложных физических систем, как правило, производится с использованием численных методов. Существует множество работ по численному решению уравнений Власова, Власова-Пуассон и Власова-Максвелла [58-63]. Третье уравнение Власова может быть использовано при численном моделировании в качестве дополнительных законов сохранения, необходимых при построении консервативных разностных схем. Наличие дополнительных законов сохранения имеет особое значение при моделировании устойчивости плазмы.

Таким образом, исходя из сказанного выше, тема диссертации является актуальной.

### Цель работы

Целью данной работы было построение дисперсионной цепочки уравнений Власова и соответствующих ей законов сохранения с последующим применением их к задачам классической и квантовой физики.

### Научная новизна

- Построена новая дисперсионная цепочка уравнений Власова для функций распределений смешанного типа.
- На основе дисперсионной цепочки уравнений Власова получены новые законы сохранения для кинематических величин высшего порядка.
- Получена новая дисперсионная цепочка для  $H^{n_1 \dots n_k}$  - функций Больцмана.
- Предложена новая динамическая аппроксимация для векторного поля потока ускорений второго порядка  $\langle \ddot{\mathbf{v}} \rangle$ .

- Получена новая модификация третьего уравнения Власова –  $\Psi$ -уравнение Власова для систем с излучением.
- Для модельной системы получены новые точные решения нестационарного уравнения Шрёдингера, соответствующие им функции Вигнера и проведен анализ динамических свойств решений с позиции статистической физики, механики сплошных сред и квантовой механики в фазовом пространстве.

### Методология и методы исследования

Дисперсионная цепочка уравнений получается путем явного интегрирования исходной цепочки уравнений Власова по соответствующим подпространствам обобщенного фазового пространства. Функции распределения и кинематические величины принимают форму записи в виде экстенсивов (тензоров). Уравнения дисперсионной цепочки группируются на ранги. Интегрирование уравнений дисперсионной цепочки, умноженными на различные кинематические величины разного порядка, приводит к трем группам законов сохранения, которые условно можно назвать законами сохранения «массы», «момента движения» и «энергии».

$H^{n_1 \dots n_R}$  - функции Больцмана строятся как расширение известной  $H$ -функции Больцмана на функции распределения смешанного типа, удовлетворяющие дисперсионной цепочке уравнений Власова. Используя математические преобразования на основе дисперсионной цепочки уравнений Власова строится дисперсионная цепочка для  $H^{n_1 \dots n_R}$  - функции. Эволюция  $H^{n_1 \dots n_R}$  - функции определяется источниками диссипаций смешанного типа.

Вторая аппроксимация Власова для среднего поля  $\langle \ddot{v} \rangle$  строится на основе полученных из дисперсионной цепочки законов сохранения «момента движения» при условии ослабления корреляций в тензоре давления  $P_{\alpha\beta}$ . В результате величине  $\langle \ddot{v} \rangle$  ставится в соответствие мощность излучения.

Непосредственная подстановка второй аппроксимации Власова в третье уравнение цепочки (i.4) приводит к  $\Psi$ -уравнению Власова, описывающему системы с излучением.

Точное решение нестационарного уравнения Шрёдингера выражается через эллиптические  $\theta$ -функции Якоби. Анализ полученных решений производится методами квантовой механики в фазовом пространстве, механики сплошных сред, теории «волны-пилота» де'Бройля-Бома и аппаратом статистической физики.

#### Положения, выносимые на защиту

- Цепочка уравнений Власова может быть разложена в дисперсионную цепочку уравнений для функций распределения смешанного типа.
- Дисперсионная цепочка уравнений Власова содержит цепочку законов сохранения для кинематических величин смешанного типа.
- Эволюция  $H^{n_1 \dots n_R}$ -функций Больцмана определяется источниками диссипаций  $Q_{n_1, \dots, n_R}^p$  смешанных кинематических величин.
- Вторая аппроксимация Власова для поля  $\langle \ddot{\vec{v}} \rangle$  позволяет разорвать цепочку уравнений Власова на третьем уравнении и рассматривать системы с излучением.

#### Теоретическая и практическая значимость работы

На основе цепочки уравнений Власова получена новая бесконечная дисперсионная цепочка уравнений для функций распределения смешанных кинематических величин высших порядков. В отличие от цепочки Власова дисперсионная цепочка содержит функции распределения с произвольным набором кинематических величин и имеет тензорную форму записи. Для дисперсионной цепочки получены новые уравнения для смешанных функций Больцмана и соответствующая цепочка законов сохранения гидродинамики. Доказано сохранение вероятности нахождения в фазовой области, в которой

квази-плотность вероятностей имеет отрицательные значения (функция Вигнера).

На простейшем, но фундаментальном примере – задаче о частице в бесконечно глубокой потенциальной яме, анализируется точное решение нестационарного уравнения Шрёдингера с позиции квантовой механики в фазовом пространстве. Именно фазовое пространство, которое так активно используется в последние годы в квантовых вычислениях, квантовой информатике и связи, является тем мостиком к классической физике, где еще возможно «понимание» физической реальности. В результате, получена наглядная с точки зрения классической физики интерпретация нестационарных процессов перераспределения энергии в квантовой системе, волнам вероятностей, температуре квантовой системы, переходу в стационарное «замороженное состояние». Описывается интерпретация свойств точного решения задачи с позиций механики сплошных сред, статистической физики и, конечно, квантовой механики в фазовом пространстве.

Получено новое уравнение для описания физических систем с излучением. Примеры таких систем существуют в физике плазмы, ускорительной физике (синхротронное излучение) и астрофизике (гравитационные волны). Новое уравнение записано на основе третьего уравнения Власова для функции плотности распределения вероятностей кинематических величин: координаты, скорости и ускорения. Построенное новое  $\Psi$ - уравнение Власова позволяет естественным образом описывать диссипативные системы вместо феноменологических модификаций второго уравнения Власова, а при численном моделировании строить консервативные разностные схемы.

#### Степень разработанности темы исследования

Поставленные в диссертационной работе цели и задачи полностью выполнены.



### Достоверность и обоснованность результатов

Достоверность выносимых на защиту диссертационной работы результатов обеспечивается использованием строгих математических методов, подкрепляемых численной проверкой полученных в работе формул.

### Структура и объем диссертации

Диссертация состоит из введения, трёх глав, заключения и списка литературы. Материал изложен на 187 страницах, включает 15 рисунков, содержит 87 библиографических ссылок.

Основные результаты диссертации опубликованы в 5 работах, из них 3 статьи в реферируемых журналах:

#### ***Статьи, опубликованные в журналах Scopus, WoS, RSCI***

1. *Perepelkin E.E., Sadovnikov B.I., Inozemtseva N.G., Aleksandrov I.I.* Dispersion chain of Vlasov equations // Journal of Statistical Mechanics: Theory and Experiment. – 2022. – №013205, с. 013205-1–013205-50 (impact factor: 2.215)
2. *Perepelkin E.E., Sadovnikov B.I., Inozemtseva N.G., Aleksandrov I.I.* Exact time-dependent solution of the Schrödinger equation, its generalization to the phase space and relation to the Gibbs distribution // Physica Scripta. – 2023. – vol. 98, № 015221, с. 015221-1–015221-26 (impact factor: 3.081)
3. *Perepelkin E.E., Sadovnikov B.I., Inozemtseva N.G., Aleksandrov I.I.*  $\Psi$ -Vlasov equation // European Physical Journal Plus. – 2022. –vol. 137 №1385, с. 1385-1–1385-7 (impact factor: 3.758)

#### ***Иные публикации (сборники тезисов)***

1. *Александров И.И.* Дисперсионная цепочка уравнений Власова // Научная конференция «Ломоносовские чтения». Секция физики. Апрель 2022.

Сборник тезисов и докладов «Ломоносов – 2022». Физический факультет МГУ. – 2022. – С. 448

2. Александров И.И., Полякова Р.В., Свойства  $PSI$ -уравнения Власова// МКО-2023, 23-27 января 2023. Сборник тезисов «Mathematics. Computing. Education XXX - International Conference». – 2023.

### Краткое содержание работы

Во **введении** дано обоснование актуальности темы диссертации, формулируется цель диссертационной работы, а также приводится ее краткое содержание.

**Глава 1** содержит описание цепочки уравнений Власова. В §1.1 рассматривается обобщенное фазовое пространство, понятие обобщенной фазовой траектории, обобщенного векторного поля скоростей, аналогов матриц Якоби отображения Тейлора. В §1.2 определяются функции плотности распределений, функции распределений вероятностей и средние кинематические величины. В §1.3 описывается построение цепочки уравнений Власова из первого принципа – закона сохранения вероятностей. В §1.4 рассмотрена аппроксимация эволюции функции  $f_n$  порядка  $n$  по функции распределения  $f_k$  порядка  $k > n$ , известной в некоторый фиксированный момент времени  $t_0$ . Описана процедура построения такой аппроксимации. Введено понятие средней обобщенной траектории  $\langle \vec{\xi} \rangle(t)$ , соответствующей центру «масс» физической системы в обобщенном фазовом пространстве. Доказана теорема о том, что функции плотности вероятностей, удовлетворяющие цепочке уравнений Власова, однозначно определяют среднюю обобщенную фазовую траекторию.

**Глава 2** посвящена построению дисперсионной цепочки уравнений Власова для функций распределения смешанного типа. В §2.1 описывается общий формализм представления функций распределения и кинематических величин смешанного типа. За основу взято понятие экстенсива, используемое

в тензорном анализе. Использование экстенсивов различных рангов для представления функций распределения, высших кинематических величин, дифференциальных операторов позволяет наглядно проводить анализ свойств этих объектов и существенно упрощает математические преобразования. В §2.2, используя формализм экстенсива, определяется дисперсионная цепочка уравнений Власова. Форма дисперсионной цепочки наглядно показывает изменение функции распределения вдоль фазовой траектории за счет источников диссипаций  $Q$ , определяемых высшими кинематическими величинами. В §2.3 получены уравнения законов сохранения для высших кинематических величин. В простейшем классическом случае (только координатного представления) эти законы соответствуют закону сохранения массы, импульса и энергии. Доказан ряд теорем о виде уравнений движения с высшими кинематическими величинами. В §2.4 доказывается теорема о свойствах средних производных и производных от средних кинематических величин. Показывается, что разница между производной от средней кинематической величины порядка  $n$  и средней кинематической величиной порядка  $n + 1$  определяется моментами  $P_{\mu\lambda}$  функций распределения. Приведены примеры использования полученных результатов на модельных классических и квантовых системах. В §2.5 вводится в рассмотрение понятие  $H^{n_1, \dots, n_R}$ -функции Больцмана, которая является обобщением известной  $H$ -функции Больцмана для обобщенного фазового пространства высших кинематических величин. В частном случае  $H^{1,2}$ -функция совпадает с  $H$ -функцией Больцмана для фазового пространства  $\{\vec{r}, m\vec{v}\}$ . Доказана теорема, что эволюция  $H^{n_1, \dots, n_R}$ -функции определяется знаками источников диссипации  $Q$ . Средние значения функций  $\langle Q \rangle$  являются источниками производства «энтропии» в обобщенном фазовом пространстве. Для квантовой механики в фазовом пространстве рассмотрен случай функции распределения, имеющей отрицательные значения вероятностей (функция Вигнера). Доказана теорема, что вероятность

нахождения в фазовой области с отрицательными значениями остается неизменной с течением времени.

В **Главе 3** рассматриваются примеры применения результатов главы 2 для классических и квантовых систем. В §3.1-§3.2 строятся различные типы аппроксимаций  $\langle \ddot{\vec{v}} \rangle_{1,2,3}$  на основе уравнения Лоренца-Абрахама-Дирака и из гидродинамического описания. В §3.3, используя второе уравнение Власова, предлагается модель расширения уравнений Максвелла на фазовое пространство. Полученная система уравнений «кинематических» полей позволяет построить аппроксимацию  $\langle \ddot{\vec{v}} \rangle_{1,2,3}$  для электромагнитного взаимодействия. В §3.4 подробно рассматриваются свойства решений третьего уравнения Власова с различными аппроксимациями  $\langle \ddot{\vec{v}} \rangle_{1,2,3}$ , полученными в §3.1-§3.3. Исследуются диссипативные свойства решений, анализируются микроскопические решения. В §3.4-§3.6 разобран простейший модельный пример, иллюстрирующий возможности описания системы цепочкой уравнений Власова как с позиции классической, так и квантовой физики. В §3.4 строится точное  $\Psi_{\mu,\beta}(x,t)$  нестационарное решение задачи о частице в бесконечно глубокой яме через эллиптическую  $\theta$ -функцию Якоби [64, 65], где  $\mu$  – номер квантового состояния, а  $\beta$  трактуется как термодинамический параметр «обратной температуры» квантовой системы. По волновой функции  $\Psi_{\mu,\beta}(x,t)$  получено явное выражение для плотности вероятностей  $f_{\mu,\beta}^1(x,t)$ , которая является периодической функцией по времени с периодом  $T_\mu$ , зависящим от номера состояния  $\mu$ . Найдено выражение для усредненной по периоду  $T_\mu$  функции  $f_{\mu,\beta}^1(x,t)$ , то есть для  $\bar{f}_{\mu,\beta}^1(x)$ . Доказаны теоремы, что известная стационарная плотность распределения является асимптотикой при  $\beta \rightarrow +\infty$  для распределений  $f_{\mu,\beta}^1(x,t)$  и  $\bar{f}_{\mu,\beta}^1(x)$ . Проведен динамический анализ структуры эволюции функции распределения  $f_{\mu,\beta}^1(x,t)$  при различных значениях

обратной температуры  $\beta$ . В §3.5 квантовая система рассматривается в фазовом пространстве. Строится явное выражение для функции Вигнера  $f_{\mu,\beta}^{1,2}(x, v, t) = \hbar W_{\mu,\beta}(x, p, t)$ , которая удовлетворяет эволюционному уравнению Моэля [48] (квантовый аналог уравнения Лиувилля). Описывается связь уравнения Моэля и второго уравнения Власова чрез аппроксимацию Власова-Моэля [49] для поля ускорений потока вероятностей  $\langle \dot{\vec{v}} \rangle$ . Используя первое уравнение Власова для функции  $f_{\mu,\beta}^1(x, t)$ , в явном виде найдено поле скоростей потока вероятностей  $\langle \vec{v} \rangle$ . Рассмотрены периодические волны вероятностей, возникающие внутри потенциальной ямы при малых значениях обратной температуры  $\beta$  и их затухание при понижении температуры («замораживание» квантовой системы). В §3.5 строится термодинамическая модель квантовой системы, описываемой распределением Гиббса. Усредненная по периоду функция плотности вероятностей  $\bar{f}_{\mu,\beta}^1(x)$  представляется в виде средней по Гиббсу от ансамбля волновых пакетов всех частот. Среднее по Гиббсу значение энергий квантовой системы  $\langle \mathcal{E}_\mu \rangle_{Gibbs}(\beta)$  имеет асимптотику при  $\beta \rightarrow +\infty$  в виде спектра собственных значений  $E_\mu$  стационарной системы. Детально рассмотрен динамический процесс перераспределения энергии внутри потенциальной ямы в зависимости от «температуры» квантовой системы. Получено явное выражение для термодинамической энтропии квантовой системы. Энтропия является строго монотонной функцией «температуры» квантовой системы. Доказана теорема о стремлении термодинамической энтропии к нулю при замораживании квантовой системы. С позиции механики сплошных сред показано выполнение законов сохранения «массы» (вероятности), импульса (плотность потока вероятности) и энергии.

**Заключение** содержит основные результаты работы.

# ГЛАВА 1 ЦЕПОЧКА УРАВНЕНИЙ ВЛАСОВА

## §1.1 Обобщенное фазовое пространство

Рассмотрение кинематики физической системы удобно производить с использованием фазового пространства  $(\vec{r}, \vec{p})$  или  $(\vec{r}, \vec{v})$ . Для физической системы вектора  $\vec{r}$  и  $\vec{v}$  представлены в одном и том же координатном базисе  $(\vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z)$ . Фазовое пространство является 6-ти мерным с координатами  $(x, y, z, v_x, v_y, v_z)$ . С физической точки зрения, фазовое пространство является «искусственным» математическим построением, так как обобщение физических векторов  $\vec{r} \mapsto \{x, y, z, 0, 0, 0\}^T$  и  $\vec{v} \mapsto \{0, 0, 0, v_x, v_y, v_z\}^T$  на 6-ти мерное пространство приводит к их ортогональности  $\vec{r} \cdot \vec{v} = 0$ . Понятно, что в общем случае условие  $\vec{r} \cdot \vec{v} = 0$  не выполнено.

Обобщенное фазовое пространство  $\Omega$  [6-9, 33] является бесконечномерным и содержит полный набор всех кинематических величин  $\vec{\xi} = \{\vec{r}, \vec{v}, \dot{\vec{v}}, \ddot{\vec{v}}, \dots\}^T \in \Omega$  или  $\vec{\xi} = \{x, y, z, v^x, v^y, v^z, \dot{v}^x, \dot{v}^y, \dot{v}^z, \dots\}^T \in \Omega$ . Если для точки  $\vec{\xi}_0 = \{\vec{r}_0, \vec{v}_0, \dot{\vec{v}}_0, \ddot{\vec{v}}_0, \dots\}^T \in \Omega$  существуют аналитические функции  $\vec{r}(t)$ ,  $\vec{v}(t)$ ,  $\dot{\vec{v}}(t)$ , ... переменной  $t$  ( $|t - t_0| < T$ ) вида:

$$\vec{\xi}(t) = \begin{pmatrix} \vec{r}(t) \\ \vec{v}(t) \\ \dot{\vec{v}}(t) \\ \dots \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \vec{r}_0 + \vec{v}_0(t-t_0) + \frac{\dot{\vec{v}}_0(t-t_0)^2}{2!} + \frac{\ddot{\vec{v}}_0(t-t_0)^3}{3!} + \dots \\ \vec{v}_0 + \dot{\vec{v}}_0(t-t_0) + \frac{\ddot{\vec{v}}_0(t-t_0)^2}{2!} + \frac{\dddot{\vec{v}}_0(t-t_0)^3}{3!} + \dots \\ \dot{\vec{v}}_0 + \ddot{\vec{v}}_0(t-t_0) + \frac{\dddot{\vec{v}}_0(t-t_0)^2}{2!} + \frac{\overset{(4)}{\vec{v}}_0(t-t_0)^3}{3!} + \dots \\ \dots \end{pmatrix}, \quad (1.1)$$

тогда выражение (1.1) задает обобщенную фазовую траекторию  $\vec{\xi}(t)$  в пространстве  $\Omega$ . Заметим, что не для любой точки  $\vec{\xi}_0 \in \Omega$  ряды (1.1) являются сходящимися, поэтому рассмотрим подпространство  $\Omega' \subset \Omega$ , каждой точке которого соответствует аналитическая вектор-функция  $\vec{\xi}(t)$  (1.1). Величина  $T$  соответствует радиусу сходимости рядов в выражении (1.1). Для подпространства  $\Omega'$  ряды, стоящие в выражении (1.1) являются рядами Тейлора. В силу единственности разложения в ряд Тейлора, через каждую точку  $\vec{\xi}_0 \in \Omega'$  проходит только одна обобщенная фазовая траектория. Таким образом, обобщенные фазовые траектории (1.1) не пересекаются.

Выражение (1.1) для  $|t - t_0| < T$  задает взаимно однозначное отображение точки  $\vec{\xi}_0 \in \Omega'$  в точку  $\vec{\xi}(t) \in \Omega'$ , которое называется отображением Тейлора [6]. Аналог матрицы Якоби отображения Тейлора равен единице [6, 7]:

$$J = \left| \frac{\partial(\vec{r}^{(2)}, \vec{v}^{(2)}, \dot{\vec{v}}^{(2)}, \ddot{\vec{v}}^{(2)}, \dots)}{\partial(\vec{r}^{(1)}, \vec{v}^{(1)}, \dot{\vec{v}}^{(1)}, \ddot{\vec{v}}^{(1)}, \dots)} \right| = 1, \quad (1.2)$$

где  $\vec{\xi}^{(1)} = \{\vec{r}^{(1)}, \vec{v}^{(1)}, \dot{\vec{v}}^{(1)}, \ddot{\vec{v}}^{(1)}, \dots\}^T \in \omega_1$ ,  $\vec{\xi}^{(2)} = \{\vec{r}^{(2)}, \vec{v}^{(2)}, \dot{\vec{v}}^{(2)}, \ddot{\vec{v}}^{(2)}, \dots\}^T \in \omega_2$ ,  $\omega_1, \omega_2 \subset \Omega'$ ,  
 $\vec{r}^{(2)} = \vec{r}^{(2)}(\vec{r}^{(1)}, \vec{v}^{(1)}, \dot{\vec{v}}^{(1)}, \ddot{\vec{v}}^{(1)}, \dots)$ ,  $\vec{v}^{(2)} = \vec{v}^{(2)}(\vec{v}^{(1)}, \dot{\vec{v}}^{(1)}, \ddot{\vec{v}}^{(1)}, \dots)$ , .... Помимо выражения (1.2) справедливы равенства [6, 7] для Якобианов:

$$J_1 = \left| \frac{\partial(\vec{v}^{(2)}, \dot{\vec{v}}^{(2)}, \ddot{\vec{v}}^{(2)}, \dots)}{\partial(\vec{v}^{(1)}, \dot{\vec{v}}^{(1)}, \ddot{\vec{v}}^{(1)}, \dots)} \right| = 1, J_2 = \left| \frac{\partial(\dot{\vec{v}}^{(2)}, \ddot{\vec{v}}^{(2)}, \dots)}{\partial(\dot{\vec{v}}^{(1)}, \ddot{\vec{v}}^{(1)}, \dots)} \right| = 1, \dots \quad (1.3)$$

Отметим, что отображение Тейлора (1.1) является взаимно однозначным при отображении области  $\omega = (\vec{r}, \vec{v}, \dot{\vec{v}}, \dots)$  на область

$\omega' = (\vec{r}', \dot{\vec{v}}', \ddot{\vec{v}}', \dots)$ , или при отображении области  $\omega_1 = (\vec{v}, \dot{\vec{v}}, \dots)$  на область  $\omega'_1 = (\vec{v}', \dot{\vec{v}}', \dots)$  и так далее. В этих случаях каждой точке  $\vec{\xi} \in \omega$  однозначно (1.1) ставится в соответствие точка  $\vec{\xi}' \in \omega'$  и наоборот.

При отображении области  $\tilde{\omega} = (\vec{r}, \vec{v})$  на область  $\tilde{\omega}' = (\vec{r}', \vec{v}')$  отображение (1.1) в общем случае не является однозначным, так как координаты  $\vec{r}'$  и  $\vec{v}'$  в общем случае зависят не только от координат  $\vec{r}$  и  $\vec{v}$ , но и от координат  $\dot{\vec{v}}, \ddot{\vec{v}}, \ddot{\ddot{\vec{v}}}, \dots$ . Таким образом, беря различные значения  $\dot{\vec{v}}, \ddot{\vec{v}}, \ddot{\ddot{\vec{v}}}, \dots$  будем получать для одной и той же точки  $\{\vec{r}, \vec{v}\}$  множество точек  $\{\vec{r}', \vec{v}'\}$ .

Во многих физических задачах, например, в ускорительной физике рассматривается не само фазовое пространство, а его проекции  $(x, v_x)$ ,  $(y, v_y)$ ,  $(z, v_z)$  – так называемые эмитансы пучка частиц. Таким образом, можно рассмотреть X-, Y- и Z- проекции обобщенного фазового пространства на подпространства  $\omega_x$ ,  $\omega_y$ ,  $\omega_z$  с элементами  $\eta^{(x)} = \{x, v^{(x)}, \dot{v}^{(x)}, \ddot{v}^{(x)}, \dots\}^T \in \omega_x$ ,  $\eta^{(y)} = \{y, v^{(y)}, \dot{v}^{(y)}, \ddot{v}^{(y)}, \dots\}^T \in \omega_y$ ,  $\eta^{(z)} = \{z, v^{(z)}, \dot{v}^{(z)}, \ddot{v}^{(z)}, \dots\}^T \in \omega_z$ . Отображение (1.1) в этом случае примет вид:

$$\eta^{(x^{(i)})}(t) = \begin{pmatrix} x^{(i)}(t) \\ v^{(x^{(i)})}(t) \\ \dot{v}^{(x^{(i)})}(t) \\ \dots \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_0^{(i)} + v_0^{(x^{(i)})}(t-t_0) + \frac{\dot{v}_0^{(x^{(i)})}(t-t_0)^2}{2!} + \frac{\ddot{v}_0^{(x^{(i)})}(t-t_0)^3}{3!} + \dots \\ v_0^{(x^{(i)})} + \dot{v}_0^{(x^{(i)})}(t-t_0) + \frac{\ddot{v}_0^{(x^{(i)})}(t-t_0)^2}{2!} + \frac{\ddot{\ddot{v}}_0^{(x^{(i)})}(t-t_0)^3}{3!} + \dots \\ \dot{v}_0^{(x^{(i)})} + \ddot{v}_0^{(x^{(i)})}(t-t_0) + \frac{\ddot{\ddot{v}}_0^{(x^{(i)})}(t-t_0)^2}{2!} + \frac{\ddot{\ddot{\ddot{v}}}_0^{(x^{(i)})}(t-t_0)^3}{3!} + \dots \\ \dots \end{pmatrix}, \quad (1.4)$$

где  $i = 1, 2, 3$ . Отображениям (1.4) соответствуют аналоги матриц Якоби [6, 7]:



$$\left| J^{(x^{(i)})} \right| = \left| \frac{\partial \left( x_2^{(i)}, v_2^{(x^{(i)})}, \dot{v}_2^{(x^{(i)})}, \ddot{v}_2^{(x^{(i)})}, \dots \right)}{\partial \left( x_1^{(i)}, v_1^{(x^{(i)})}, \dot{v}_1^{(x^{(i)})}, \ddot{v}_1^{(x^{(i)})}, \dots \right)} \right| = 1, \quad x^{(1)} = x, x^{(2)} = y, x^{(3)} = z, \quad (1.5)$$

где  $\eta_1^{(x^{(i)})} = \left\{ x_1^{(i)}, v_1^{(x^{(i)})}, \dot{v}_1^{(x^{(i)})}, \ddot{v}_1^{(x^{(i)})}, \dots \right\}^T$ ,  $\eta_2^{(x^{(i)})} = \left\{ x_2^{(i)}, v_2^{(x^{(i)})}, \dot{v}_2^{(x^{(i)})}, \ddot{v}_2^{(x^{(i)})}, \dots \right\}^T$ ,

$x_2^{(i)} = x_2^{(i)} \left( x_1^{(i)}, v_1^{(x^{(i)})}, \dot{v}_1^{(x^{(i)})}, \ddot{v}_1^{(x^{(i)})}, \dots \right)$ ,  $v_2^{(x^{(i)})} = v_2^{(x^{(i)})} \left( v_1^{(x^{(i)})}, \dot{v}_1^{(x^{(i)})}, \ddot{v}_1^{(x^{(i)})}, \dots \right)$ , .... Для X-, Y- и Z-

проекционных отображений (1.4) справедливы аналоги выражений (1.3):

$$\left| J_1^{(x^{(i)})} \right| = \left| \frac{\partial \left( v_2^{(x^{(i)})}, \dot{v}_2^{(x^{(i)})}, \ddot{v}_2^{(x^{(i)})}, \dots \right)}{\partial \left( v_1^{(x^{(i)})}, \dot{v}_1^{(x^{(i)})}, \ddot{v}_1^{(x^{(i)})}, \dots \right)} \right| = 1, \quad \left| J_2^{(x^{(i)})} \right| = \left| \frac{\partial \left( \dot{v}_2^{(x^{(i)})}, \ddot{v}_2^{(x^{(i)})}, \dots \right)}{\partial \left( \dot{v}_1^{(x^{(i)})}, \ddot{v}_1^{(x^{(i)})}, \dots \right)} \right| = 1, \dots \quad (1.6)$$

Если произвести перестановку элементов в столбце (1.1) вида:

$$\begin{aligned} \vec{\xi}^T(t) &= \left\{ \eta^{(x)}(t), \eta^{(y)}(t), \eta^{(z)}(t) \right\}^T = \\ &= \left\{ x(t), v^{(x)}(t), \dot{v}^{(x)}(t), \dots, y(t), v^{(y)}(t), \dot{v}^{(y)}(t), \dots, z(t), v^{(z)}(t), \dot{v}^{(z)}(t), \dots \right\}^T, \end{aligned}$$

тогда матрицу Якоби (1.2) можно представить через прямое произведение проекционных матриц (1.5):

$$|J| = \begin{vmatrix} J^{(x)} & 0 & 0 \\ 0 & J^{(y)} & 0 \\ 0 & 0 & J^{(z)} \end{vmatrix} = 1, \quad \text{то есть } J = J^{(x)} \oplus J^{(y)} \oplus J^{(z)}. \quad (1.7)$$

К обобщенной фазовой траектории (1.1) можно построить касательное векторное поле:

$$\vec{u}_{\xi}(t) = \frac{d\vec{\xi}(t)}{dt} = \begin{pmatrix} \frac{d\vec{r}(t)}{dt} \\ \frac{d\vec{v}(t)}{dt} \\ \frac{d\dot{\vec{v}}(t)}{dt} \\ \dots \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \vec{v}(t) \\ \dot{\vec{v}}(t) \\ \ddot{\vec{v}}(t) \\ \dots \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \vec{v}_0 + \dot{\vec{v}}_0(t-t_0) + \ddot{\vec{v}}_0 \frac{(t-t_0)^2}{2} + \dots \\ \dot{\vec{v}}_0 + \ddot{\vec{v}}_0(t-t_0) + \ddot{\vec{v}}_0 \frac{(t-t_0)^2}{2} + \dots \\ \ddot{\vec{v}}_0 + \ddot{\vec{v}}_0(t-t_0) + \ddot{\vec{v}}_0 \frac{(t-t_0)^2}{2} + \dots \\ \dots \end{pmatrix}. \quad (1.8)$$

Так как через каждую точку  $\vec{\xi} \in \Omega'$  проходит только одна обобщенная фазовая траектория, то поле  $\vec{u}_{\xi}(t)$  (1.8) можно представлять как функцию  $\vec{u}(\vec{\xi}) = \{\vec{v}, \dot{\vec{v}}, \ddot{\vec{v}}, \dots\}^T$ . Заметим, что в классическом фазовом пространстве  $(\vec{r}, \vec{v})$ , для построения поля  $\vec{u}$  необходимо привлечение уравнения движения. В обобщенном фазовом пространстве в силу представления (1.1) уравнение движения имеет тривиальный вид:

$$\begin{cases} \frac{d\vec{\xi}(t)}{dt} = \vec{u}(\vec{\xi}(t)), \\ \vec{\xi}(t_0) = \vec{\xi}_0. \end{cases} \quad (1.9)$$

## §1.2 Функции распределения и кинематические средние

Пусть кинематика физической системы определяется случайной величиной  $\vec{\xi}$ , которая в момент времени  $t$ , может принимать случайные значения  $\vec{\xi} = \{\vec{r}, \vec{v}, \dot{\vec{v}}, \ddot{\vec{v}}, \dots\}^T$ . Случайные величины координаты, скорости, ускорения и так далее в общем случае считаются независимыми. Поведение случайной величины  $\vec{\xi}$  будем описывать функцией плотности вероятностей  $f(\vec{\xi}, t)$ , которая определена в обобщенном фазовом пространстве-времени.

Формально будем считать, что величина  $f(\vec{\xi}, t) d^3 r d^3 v d^3 \dot{v} \dots$  определяет вероятность нахождения физической системы в момент времени  $t$  в состоянии  $\vec{\xi}$ , где элемент  $d^3 r d^3 v d^3 \dot{v} \dots$  имеет центр в точке  $\vec{\xi}$ . Соответствующая функция распределения вероятностей  $\Phi(\vec{\xi}, t)$  может быть определена как:

$$\Phi(\vec{\xi}, t) = P\{\eta < \xi, t\} = \int_{-\infty}^x \int_{-\infty}^y \int_{-\infty}^z \int_{-\infty}^{v_x} \int_{-\infty}^{v_y} \int_{-\infty}^{v_z} \dots f(\vec{\eta}, t) dx' dy' dz' dv'_x dv'_y dv'_z \dots, \quad (1.10)$$

где

$$\vec{\eta} = \{x', y', z', v'_x, v'_y, v'_z, \dot{v}'_x, \dot{v}'_y, \dot{v}'_z, \dots\}^T, \quad \vec{\xi} = \{x, y, z, v_x, v_y, v_z, \dot{v}_x, \dot{v}_y, \dot{v}_z, \dots\}^T$$

$$\eta < \xi \Rightarrow x' < x, y' < y, z' < z, v_x < v'_x, v_y < v'_y, v_z < v'_z, \dot{v}_x < \dot{v}'_x, \dot{v}_y < \dot{v}'_y, \dot{v}_z < \dot{v}'_z, \dots$$

Функция распределения (1.10) задает вероятность того, что система имеет состояние  $\vec{\xi}$ , которое может принимать значения  $\eta < \xi$  в момент времени  $t$ .

Вероятность нахождения системы в состоянии  $\vec{\xi}$ , которое принимает значения из некоторой области обобщенного фазового пространства:

$$\xi_1 < \eta < \xi_2 \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} x^{(1)} < x' < x^{(2)}, y^{(1)} < y' < y^{(2)}, z^{(1)} < z' < z^{(2)}, \\ v_x^{(1)} < v'_x < v_x^{(2)}, v_y^{(1)} < v'_y < v_y^{(2)}, v_z^{(1)} < v'_z < v_z^{(2)}, \\ \dots \end{array} \right\} \quad (1.11)$$

представим в виде:

$$\begin{aligned} P\{\xi_1 < \eta < \xi_2, t\} &= \int_{x^{(1)}}^{x^{(2)}} \int_{y^{(1)}}^{y^{(2)}} \int_{z^{(1)}}^{z^{(2)}} \int_{v_x^{(1)}}^{v_x^{(2)}} \int_{v_y^{(1)}}^{v_y^{(2)}} \int_{v_z^{(1)}}^{v_z^{(2)}} \dots f(\vec{\eta}, t) dx' dy' dz' dv'_x dv'_y dv'_z \dots = \\ &= \Phi(\vec{\xi}_2, t) - \Phi(\vec{\xi}_1, t) = P\{\eta < \xi_2, t\} - P\{\eta < \xi_1, t\}. \end{aligned} \quad (1.12)$$

При работе с конечномерными подпространствами обобщенного фазового пространства удобно использовать следующие функции плотности распределения вероятностей:

$$\begin{aligned}
 N(t) = f_0(t) &= \int_{(\infty)} \int_{(\infty)} \dots \int_{(\infty)} f(\vec{r}, \vec{v}, \dot{\vec{v}}, \dots, t) d^3v d^3\dot{v} \dots, \\
 f_1(\vec{r}, t) &= \int_{(\infty)} \int_{(\infty)} \dots \int_{(\infty)} f(\vec{r}, \vec{v}, \dot{\vec{v}}, \dots, t) d^3v d^3\dot{v} \dots, \\
 f_2(\vec{r}, \vec{v}, t) &= \int_{(\infty)} \int_{(\infty)} \dots \int_{(\infty)} f(\vec{r}, \vec{v}, \dot{\vec{v}}, \dots, t) d^3\dot{v} d^3\ddot{v} \dots, \\
 f_3(\vec{r}, \vec{v}, \dot{\vec{v}}, t) &= \int_{(\infty)} \int_{(\infty)} \dots \int_{(\infty)} f(\vec{r}, \vec{v}, \dot{\vec{v}}, \dots, t) d^3\ddot{v} d^3\ddot{\ddot{v}} \dots, \\
 &\dots
 \end{aligned} \tag{1.13}$$

где функцию  $N(t) = f_0(t)$  можно рассматривать как условие нормировки для полной вероятности, положив ее равной единице. При рассмотрении задач механики сплошных сред функции распределения (1.13) могут быть интерпретированы как функции плотности массы/заряда. В этом случае функция  $N(t) = f_0(t)$  принимает смысл полной массы/заряда или количества частиц физической системы. Отметим, что в работах А.А. Власова количество частиц  $N(t)$  необязательно является целой величиной [8, 9].

Функции распределения (1.10), соответствующие выражениям (1.13) примут вид:

$$\begin{aligned}
 F_1(\vec{r}, t) &= \int_{-\infty}^x \int_{-\infty}^y \int_{-\infty}^z f_1(\vec{r}', t) dx' dy' dz', \\
 F_2(\vec{r}, \vec{v}, t) &= \int_{-\infty}^x \int_{-\infty}^y \int_{-\infty}^z \int_{-\infty}^{v_x} \int_{-\infty}^{v_y} \int_{-\infty}^{v_z} f_2(\vec{r}', \vec{v}', t) dx' dy' dz' dv'_x dv'_y dv'_z, \\
 &\dots
 \end{aligned} \tag{1.14}$$

где

$$\frac{\partial^k F_k}{\partial x \partial y \partial z \dots} = f_k. \quad (1.15)$$

Заметим, что помимо связи (1.15) между функциями  $f_k$  и  $F_k$  существует связь между  $F_k$  и  $F_{k-1}$ . В качестве примера рассмотрим функции  $F_1(x, y, z, t)$  и  $F_2(x, y, z, v_x, v_y, v_z, t)$ . Справедливо следующее выражение:

$$\begin{aligned} \lim_{\substack{v_x \rightarrow +\infty \\ v_y \rightarrow +\infty \\ v_z \rightarrow +\infty}} F_2(x, y, z, v_x, v_y, v_z, t) = \\ = \int_{-\infty}^z \int_{-\infty}^y \int_{-\infty}^z \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} f_2(x', y', z', v'_x, v'_y, v'_z, t) dv'_x dv'_y dv'_z dx' dy' dz'. \end{aligned} \quad (1.16)$$

Учитывая, что (1.13)

$$f_1(x, y, z, t) = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} f_2(x, y, z, v_x, v_y, v_z, t) dv_x dv_y dv_z, \quad (1.17)$$

получим:

$$\lim_{\substack{v_x \rightarrow +\infty \\ v_y \rightarrow +\infty \\ v_z \rightarrow +\infty}} F_2(x, y, z, v_x, v_y, v_z, t) = \int_{-\infty}^z \int_{-\infty}^y \int_{-\infty}^z f_1(x', y', z', t) dx' dy' dz' = F_1(x, y, z, t) \quad (1.18)$$

Выражение типа (1.18) можно получить для любого номера  $k$ . Используя функции плотности вероятностей (1.13) можно определить средние кинематические величины [8, 9]:

$$\begin{aligned} f_1(\vec{r}, t) \langle \vec{v} \rangle(\vec{r}, t) &= \int_{(\infty)} f_2(\vec{r}, \vec{v}, t) \vec{v} d^3 v, \\ f_0(t) \langle \langle \vec{v} \rangle \rangle(t) &= \int_{(\infty)} \int_{(\infty)} f_2(\vec{r}, \vec{v}, t) \vec{v} d^3 r d^3 v, \end{aligned} \quad (1.19)$$

$$f_2(\vec{r}, \vec{v}, t) \langle \dot{\vec{v}} \rangle(\vec{r}, \vec{v}, t) = \int_{(\infty)} f_3(\vec{r}, \vec{v}, \dot{\vec{v}}, t) \dot{\vec{v}} d^3 \dot{\vec{v}},$$

$$f_1(\vec{r}, t) \langle \langle \dot{\vec{v}} \rangle \rangle(\vec{r}, t) = \int_{(\infty)} f_2(\vec{r}, \vec{v}, t) \langle \dot{\vec{v}} \rangle(\vec{r}, \vec{v}, t) d^3 v,$$

...

Относительно функций распределений (1.13) и средних кинематических величин (1.19) будем предполагать выполнение условия «достаточно» быстрого стремления к нулю на бесконечности [8, 9], например

$$\lim_{\xi \rightarrow \infty} \left[ \langle \vec{\xi} \rangle f(\vec{\xi}, t) \right] = 0. \quad (1.20)$$

### §1.3 Первый принцип – закон сохранения вероятностей

Построение само-зацепляющейся цепочки уравнений для функций распределения (1.13) А.А. Власов произвел на основе первого принципа – закона сохранения вероятностей, который был постулирован им в виде аналога уравнения непрерывности в обобщенном фазовом пространстве [6-9]:

$$\frac{\partial f(\vec{\xi}, t)}{\partial t} + \text{div}_{\xi} \left[ f(\vec{\xi}, t) \vec{u}(\vec{\xi}) \right] = 0, \quad (1.21)$$

где

$$\text{div}_{\xi} \left[ f(\vec{\xi}, t) \vec{u}(\vec{\xi}) \right] \stackrel{\text{det}}{=} \text{div}_r [\vec{v}f] + \text{div}_v [\dot{\vec{v}}f] + \text{div}_v [\ddot{\vec{v}}f] + \dots \quad (1.22)$$

Терминологический аспект уравнения непрерывности связан с механикой сплошных сред, в которой записывается закон сохранения массы или заряда. В обобщенном фазовом пространстве уравнение (1.21) может быть интерпретировано в терминах потока вероятностей через некоторую

гиперповерхность  $S$  обобщенной фазовой области  $\omega$ . В качестве плотности потока вероятностей через гиперповерхность  $S$  рассматривается вектор-функция:

$$\vec{J}(\vec{\xi}, t) = f(\vec{\xi}, t) \vec{u}(\vec{\xi}). \quad (1.23)$$

С физической точки зрения выражение (1.23) соответствует плотности потока обобщенных фазовых траекторий (1.1) в точке  $\vec{\xi}$ . Поток  $d\Phi_\xi$  через элементарную «площадку»  $dS_\xi$  гиперповерхности  $S$  формально представим как

$$d\Phi_\xi \stackrel{\text{det}}{=} \vec{J} \cdot d\vec{S}_\xi = f \vec{u} \cdot d\vec{S}_\xi \stackrel{\text{det}}{=} f \left[ \vec{v} \cdot d\vec{S}_r + \dot{\vec{v}} \cdot d\vec{S}_v + \ddot{\vec{v}} \cdot d\vec{S}_\ddot{v} + \dots \right], \quad (1.24)$$

где  $d\vec{S}_r, d\vec{S}_v, d\vec{S}_\ddot{v}, \dots$  – ориентированные элементарные площадки в подпространствах координат, скоростей, ускорений и так далее. Таким образом, формально закон сохранения вероятностей в обобщенном фазовом пространстве может быть записан в виде:

$$\frac{dN_\omega(t)}{dt} = \int_\omega \frac{\partial}{\partial t} f(\vec{\xi}, t) d\omega_\xi = - \int_S \vec{J}(\vec{\xi}, t) d\vec{S}_\xi, \quad (1.25)$$

который с учётом представлений (1.24), (1.23), (1.13) и теоремы Остроградского-Гаусса приводит к уравнению (1.21).

**Замечание.** Из уравнения (1.21) следует закон сохранения плотности вероятностей вдоль обобщенной фазовой траектории, то есть  $f(\vec{\xi}(t), t) = \text{Const}$ . Действительно, так как обобщенная скорость

$\vec{u}(\vec{\xi}) = \{\vec{v}, \dot{\vec{v}}, \ddot{\vec{v}}, \dots\}^T$  удовлетворяет условию  $\text{div}_{\xi} [\vec{u}(\vec{\xi})] = 0$ , то учитывая (1.9),

получаем:

$$\frac{\partial f(\vec{\xi}, t)}{\partial t} + \vec{u}(\vec{\xi}) \cdot \nabla_{\xi} f(\vec{\xi}, t) = 0,$$

или

$$\frac{df}{dt} = \frac{\partial f}{\partial t} + \vec{v} \cdot \nabla_r f + \dot{\vec{v}} \cdot \nabla_v f + \ddot{\vec{v}} \cdot \nabla_{\dot{v}} f + \dots = 0. \quad (1.26)$$

Уравнение (1.26) формально является аналогом уравнения Лиувилля для обобщенного фазового пространства.

Производя формальное интегрирование уравнения (1.21) по подпространствам  $\int_{(\infty)} \dots \int_{(\infty)} d^3 \ddot{v} d^3 \dot{v} \dots$ , учитывая теорему Остроградского-Гаусса и быстрый спад к нулю (1.20) функций (1.13), получим

$$\begin{aligned} & \frac{\partial f_3(\vec{r}, \vec{v}, \dot{\vec{v}}, t)}{\partial t} + \text{div}_r [f_3(\vec{r}, \vec{v}, \dot{\vec{v}}, t) \vec{v}] + \text{div}_v [f_3(\vec{r}, \vec{v}, \dot{\vec{v}}, t) \dot{\vec{v}}] + \\ & + \text{div}_{\dot{v}} \int_{(\infty)} \ddot{\vec{v}} f_4(\vec{r}, \vec{v}, \dot{\vec{v}}, \ddot{\vec{v}}, t) d^3 \ddot{v} = 0. \end{aligned} \quad (1.27)$$

Интегрирование уравнения (1.27) по пространству ускорений  $\int_{(\infty)} d^3 \dot{v}$  и далее по пространству скоростей даст уравнения:

$$\frac{\partial f_1(\vec{r}, t)}{\partial t} + \text{div}_r \int_{(\infty)} \vec{v} f_2(\vec{r}, \vec{v}, t) d^3 v = 0, \quad (1.28)$$

$$\frac{\partial f_2(\vec{r}, \vec{v}, t)}{\partial t} + \text{div}_r [f_2(\vec{r}, \vec{v}, t) \vec{v}] + \text{div}_v \int_{(\infty)} \dot{\vec{v}} f_3(\vec{r}, \vec{v}, \dot{\vec{v}}, t) d^3 \dot{v} = 0. \quad (1.29)$$



Учитывая независимость кинематических переменных  $\vec{r}, \vec{v}, \dot{\vec{v}}, \ddot{\vec{v}}, \dots$  и выражения (1.19) цепочка уравнений (1.27)-(1.29) примет вид:

$$\begin{aligned} \frac{\partial f_1(\vec{r}, t)}{\partial t} + \operatorname{div}_r [f_1(\vec{r}, t) \langle \vec{v} \rangle(\vec{r}, t)] &= 0, \\ \frac{\partial f_2(\vec{r}, \vec{v}, t)}{\partial t} + \vec{v} \cdot \nabla_r f_2(\vec{r}, \vec{v}, t) + \operatorname{div}_v [f_2(\vec{r}, \vec{v}, t) \langle \dot{\vec{v}} \rangle(\vec{r}, \vec{v}, t)] &= 0, \\ \frac{\partial f_3(\vec{r}, \vec{v}, \dot{\vec{v}}, t)}{\partial t} + \vec{v} \cdot \nabla_r f_3(\vec{r}, \vec{v}, \dot{\vec{v}}, t) + \dot{\vec{v}} \cdot \nabla_v f_3(\vec{r}, \vec{v}, \dot{\vec{v}}, t) + \\ + \operatorname{div}_v [f_3(\vec{r}, \vec{v}, \dot{\vec{v}}, t) \langle \ddot{\vec{v}} \rangle(\vec{r}, \vec{v}, \dot{\vec{v}}, t)] &= 0, \\ \dots \end{aligned} \quad (1.30)$$

Цепочка уравнений (1.30) является бесконечной и само-зацепляющейся. Действительно, для нахождения функции  $f_1(\vec{r}, t)$ , удовлетворяющей первому уравнению в цепочке (1.30), необходимо знать среднюю скорость  $\langle \vec{v} \rangle(\vec{r}, t)$ , которая в соответствии с выражением (1.19) определяется через функцию распределения  $f_2(\vec{r}, \vec{v}, t)$  из второго уравнения в цепочке (1.30) и так далее.

Нахождение функций распределения связано с задачей расцепления цепочки уравнений (1.30) путем введения динамической аппроксимации для кинематических средних величин (1.19). В прикладных задачах физики плазмы, ускорительной физики, астрофизики и статистической физики наиболее известна первая аппроксимация Власова для среднего потока ускорений [8, 9]:

$$\langle \dot{\vec{v}} \rangle(\vec{r}, \vec{v}, t) = \frac{1}{m} \vec{F}_{ext} = \frac{1}{m} \begin{cases} -\nabla_r U, & \text{статистическая физика,} \\ -q \nabla_r \chi + q \langle \vec{v} \rangle \times \vec{B}, & \text{физика плазмы,} \end{cases} \quad (1.31)$$

где  $U, \chi$  – скалярные потенциалы,  $\vec{B}$  – магнитная индукция, а  $q$  – заряд частицы. Подстановка аппроксимации (1.31) во второе уравнение цепочки (1.30) приводит к известному уравнению Власова для самосогласованного поля:

$$\frac{\partial f_2}{\partial t} + \vec{v} \cdot \nabla_r f_2 + \frac{q}{m} \left[ -\nabla_r \chi + \langle \vec{v} \rangle \times \vec{B} \right] \cdot \nabla_v f_2 = 0. \quad (1.32)$$

Недостатком первой аппроксимации Власова является отсутствие явной зависимости от скорости  $\vec{v}$  правой части выражения (1.31).

#### §1.4 Переход от временной зависимости к кинематической

Цепочка уравнений Власова (1.30) позволяет строить приближение для эволюции функций распределения. Пусть в некоторый момент времени  $t_0$  известна функция распределения  $f_n(\vec{r}, \vec{v}, \dot{\vec{v}}, \dots, t_0)$ ,  $n \geq 2$ , тогда для аналитической по времени функции  $f_1(\vec{r}, t)$  справедлива аппроксимация:

$$f_1(\vec{r}, t) \approx f_1(\vec{r}, t_0) + \frac{\partial f_1(\vec{r}, t_0)}{\partial t} (t - t_0) + \dots = \sum_{k=0}^n \frac{f_1^{(k)}(\vec{r}, t_0)}{k!} (t - t_0)^k, \quad (1.33)$$

где коэффициенты разложения (1.33) могут быть найдены следующим образом. Первый коэффициент  $f_1(\vec{r}, t_0)$  находится непосредственным интегрированием известной функции  $f_n(\vec{r}, \vec{v}, \dot{\vec{v}}, \dots, t_0)$ :

$$f_1(\vec{r}, t_0) = \int_{(\infty)} \dots \int_{(\infty)} f_n(\vec{r}, \vec{v}, \dot{\vec{v}}, \dots, \vec{v}^{(n-2)}, t_0) d^3 r d^3 v \dots d^3 v^{(n-2)}. \quad (1.34)$$

Интегрирование по формулам (1.13) позволяет найти все функции  $f_1(\vec{r}, t_0)$ ,  $f_2(\vec{r}, \vec{v}, t_0), \dots, f_{n-1}(\vec{r}, \vec{v}, \dots, t_0)$ . Для нахождения  $\frac{\partial}{\partial t} f_1(\vec{r}, t_0)$  воспользуемся первым уравнением из цепочки Власова (1.30):

$$\frac{\partial}{\partial t} f_1(\vec{r}, t_0) = -\frac{\partial}{\partial x_\beta} \left[ f_{1,0} \langle v_\beta \rangle_0 \right], \quad (1.35)$$

где  $f_{1,0} = f_1(\vec{r}, t_0)$ ,  $\langle v_\beta \rangle_0 = \langle v_\beta \rangle(\vec{r}, t_0)$  – определяются по формулам (1.19). Продифференцируем первое уравнение из (1.30)/(1.28) по времени и учтем второе уравнение Власова (1.29), получим:

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 f_1(\vec{r}, t)}{\partial t^2} &= -\frac{\partial}{\partial x_\beta} \int v_\beta \frac{\partial}{\partial t} f_2(\vec{r}, \vec{v}, t) d^3 v = \frac{\partial}{\partial x_\beta} \int v_\beta \frac{\partial}{\partial x_\alpha} [f_2 v_\alpha] d^3 v + \\ &+ \frac{\partial}{\partial x_\beta} \int v_\beta \frac{\partial}{\partial v_\alpha} [\langle \dot{v}_\alpha \rangle f_2] d^3 v = \frac{\partial^2}{\partial x_\beta \partial x_\alpha} \int f_2 v_\alpha v_\beta d^3 v - \frac{\partial}{\partial x_\beta} \int \langle \dot{v}_\alpha \rangle f_2 \frac{\partial v_\beta}{\partial v_\alpha} d^3 v, \\ \frac{\partial^2}{\partial t^2} f_1(\vec{r}, t_0) &= \frac{\partial^2 P_{\alpha\beta,0}}{\partial x_\alpha \partial x_\beta} + \frac{\partial^2}{\partial x_\alpha \partial x_\beta} \left[ f_{1,0} \langle v_\alpha \rangle_0 \langle v_\beta \rangle_0 \right] - \frac{\partial}{\partial x_\alpha} \left[ f_{1,0} \langle \langle \dot{v}_\alpha \rangle \rangle_0 \right], \quad (1.36) \end{aligned}$$

где

$$\begin{aligned} P_{\alpha\beta}(\vec{r}, \vec{v}, t) &= \int_{(\infty)}^{\det} (v_\alpha - \langle v_\alpha \rangle) (v_\beta - \langle v_\beta \rangle) f_2 d^3 v, \\ P_{\alpha\beta}(\vec{r}, \vec{v}, t) &= \int_{(\infty)} f_2 v_\alpha v_\beta d^3 v - f_1 \langle v_\alpha \rangle \langle v_\beta \rangle. \end{aligned}$$

Величина  $P_{\alpha\beta}(\vec{r}, \vec{v}, t)$  соответствует тензору давления и  $P_{\alpha\beta,0}^{\det} = P_{\alpha\beta}^{\det}(\vec{r}, t_0)$ ;  $\langle \langle \dot{v}_\alpha \rangle \rangle_0^{\det} = \langle \langle \dot{v}_\alpha \rangle \rangle(\vec{r}, t_0)$ . Процедуру (1.34)-(1.36) можно продолжить необходимое число раз, тем самым получить достаточное количество членов в разложении (1.33).

**Замечание.**

В соответствии с аппроксимацией (1.33) эволюция функции распределения определяется информацией только о высших кинематических величинах в момент времени  $t_0$ .

Чем больше кинематической информации о системе в момент времени  $t_0$ , то есть больше индекс  $n$  у функции  $f_n$ , тем точнее можно получить аппроксимацию эволюции функции распределения (1.33).

Аппроксимация (1.33) записана для функции  $f_1$ , но может быть по аналогии построена для любой аналитической функции Власова  $f_k$ .

**Определение 1.** Под средней обобщенной фазовой траекторией физической системы, описываемой функцией распределения  $f(\vec{\xi}, t)$ , будем понимать:

$$\langle \vec{\xi} \rangle(t) \stackrel{\text{det}}{=} \int_{(\infty)} \dots \int_{(\infty)} \vec{\xi} f(\vec{\xi}, t) d^3 r d^3 v \dots = \begin{pmatrix} \langle \vec{r} \rangle(t) \\ \langle \langle \vec{v} \rangle \rangle(t) \\ \langle \langle \langle \dot{\vec{v}} \rangle \rangle \rangle(t) \\ \dots \end{pmatrix}. \quad (1.37)$$

**Теорема 1.** Пусть функция  $f(\vec{\xi}, t)$  удовлетворяет цепочке уравнений Власова (1.30) и величина  $N(t) = \text{const}$ , тогда средняя обобщенная траектория  $\langle \vec{\xi} \rangle(t)$  имеет вид:

$$\langle \vec{\xi} \rangle(t) = \left( \begin{array}{l} \langle \vec{r} \rangle(t_0) + (t-t_0) \langle \langle \vec{v} \rangle \rangle(t_0) + \frac{(t-t_0)^2}{2!} \langle \langle \langle \dot{\vec{v}} \rangle \rangle \rangle(t_0) + \dots \\ \langle \langle \vec{v} \rangle \rangle(t_0) + (t-t_0) \langle \langle \langle \dot{\vec{v}} \rangle \rangle \rangle(t_0) + \frac{(t-t_0)^2}{2!} \langle \langle \langle \langle \ddot{\vec{v}} \rangle \rangle \rangle \rangle(t_0) + \dots \\ \langle \langle \langle \dot{\vec{v}} \rangle \rangle \rangle(t_0) + (t-t_0) \langle \langle \langle \langle \ddot{\vec{v}} \rangle \rangle \rangle \rangle(t_0) + \dots \\ \dots \end{array} \right). \quad (1.38)$$

Для доказательства теоремы 1 рассмотрим две леммы.

**Лемма 1.** Если функции распределения  $f_k(\vec{r}, \vec{v}, \dots, t)$ ,  $k \in \mathbb{N}$  удовлетворяют цепочке уравнений Власова (1.30), то справедливы следующие соотношения:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} [N(t) \langle \vec{r} \rangle(t)] &= N(t) \langle \langle \vec{v} \rangle \rangle(t), \\ \frac{d^2}{dt^2} [N(t) \langle \vec{r} \rangle(t)] &= N(t) \langle \langle \langle \dot{\vec{v}} \rangle \rangle \rangle(t), \\ \frac{d^3}{dt^3} [N(t) \langle \vec{r} \rangle(t)] &= N(t) \langle \langle \langle \langle \ddot{\vec{v}} \rangle \rangle \rangle \rangle(t), \\ &\dots \end{aligned} \quad (1.39)$$

Для доказательства леммы 1 потребуется лемма 2

**Лемма 2.** Пусть  $\vec{A}(\vec{r})$  непрерывно-дифференцируемая вектор-функция, для которой  $\lim_{r \rightarrow \infty} r |\vec{A}(\vec{r})| = 0$ , тогда справедлива формула:

$$\int_{(\infty)} \vec{r} \cdot \text{div}_r [\vec{A}(\vec{r})] d^3 r = - \int_{(\infty)} \vec{A}(\vec{r}) d^3 r. \quad (1.40)$$

Доказательство леммы 2 фактически было получено при выводе формулы (1.36) с использованием интегрирования по частям.

*Доказательство леммы 1.*

Проверим первое соотношение в (1.39). Из первого уравнения Власова (1.30), получим:

$$\begin{aligned}
 N(t)\langle\bar{r}\rangle(t) &= \int_{(\infty)} f_1(\bar{r}, t) \bar{r} d^3 r, \\
 \frac{d}{dt} [N(t)\langle\bar{r}\rangle(t)] &= \int_{(\infty)} \bar{r} \frac{\partial f_1(\bar{r}, t)}{\partial t} d^3 r = - \int_{(\infty)} \bar{r} \operatorname{div}_r \left[ \int_{(\infty)} \bar{v} f_2(\bar{r}, \bar{v}, t) d^3 v \right] d^3 r = \\
 &= - \int_{(\infty)} \bar{r} \operatorname{div}_r [\langle\bar{v}\rangle(\bar{r}, t) f_1(\bar{r}, t)] d^3 r = \int_{(\infty)} \langle\bar{v}\rangle(\bar{r}, t) f_1(\bar{r}, t) d^3 r = N(t)\langle\langle\bar{v}\rangle\rangle(t).
 \end{aligned} \tag{1.41}$$

Выражение (1.41) доказывает первое тождество в (1.39). Проверим второе тождество в (1.39). Заметим, что:

$$\frac{d^2}{dt^2} [N(t)\langle\bar{r}\rangle(t)] = \frac{d}{dt} \left( \frac{d}{dt} [N(t)\langle\bar{r}\rangle(t)] \right) = \frac{d}{dt} [N(t)\langle\langle\bar{v}\rangle\rangle(t)]. \tag{1.42}$$

Следовательно, достаточно показать, что

$$\frac{d}{dt} [N(t)\langle\langle\bar{v}\rangle\rangle(t)] = N(t)\langle\langle\langle\dot{\bar{v}}\rangle\rangle\rangle(t). \tag{1.43}$$

Учитывая второе уравнение в цепочке Власова для функции  $f_2(\bar{r}, \bar{v}, t)$  и формулу (1.19), выражение (1.43) примет вид:

$$N(t)\langle\langle\bar{v}\rangle\rangle(t) = \int_{(\infty)} \int_{(\infty)} f_2(\bar{r}, \bar{v}, t) \bar{v} d^3 v d^3 r,$$

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt} \left[ N(t) \langle \langle \vec{v} \rangle \rangle (t) \right] &= \int_{(\infty)(\infty)} \int \vec{v} \frac{\partial f_2(\vec{r}, \vec{v}, t)}{\partial t} d^3 v d^3 r = \\
&= - \int_{(\infty)(\infty)} \int \vec{v} \left\{ \operatorname{div}_r [f_2(\vec{r}, \vec{v}, t) \vec{v}] + \operatorname{div}_v \int_{(\infty)} \dot{v} f_3(\vec{r}, \vec{v}, \dot{v}, t) d^3 \dot{v} \right\} d^3 v d^3 r = \\
&= - \int_{(\infty)} \operatorname{div}_r [f_2(\vec{r}, \vec{v}, t) \vec{v}] d^3 r \int_{(\infty)} \vec{v} d^3 v - \int_{(\infty)(\infty)} \int \vec{v} \operatorname{div}_v [f_2(\vec{r}, \vec{v}, t) \langle \dot{v} \rangle (\vec{r}, \vec{v}, t)] d^3 v d^3 r = \\
&= - \int_{\Sigma_\infty} f_2(\vec{r}, \vec{v}, t) dS_r \int_{(\infty)} \vec{v} d^3 v - \int_{(\infty)} d^3 r \int_{(\infty)} \vec{v} \operatorname{div}_v [f_2(\vec{r}, \vec{v}, t) \langle \dot{v} \rangle (\vec{r}, \vec{v}, t)] d^3 v = \\
&= \int_{(\infty)} d^3 r \int_{(\infty)} f_2(\vec{r}, \vec{v}, t) \langle \dot{v} \rangle (\vec{r}, \vec{v}, t) d^3 v = N(t) \langle \langle \langle \dot{v} \rangle \rangle \rangle (t). \tag{1.44}
\end{aligned}$$

Из выражений (1.42)-(1.44) следует справедливость второго тождества в (1.39). Остальные тождества в (1.39) доказываются аналогичным образом с привлечением последующих уравнений из цепочки Власова. Таким образом, лемма 1 доказана.

### *Доказательство теоремы 1*

Покажем справедливость разложения (1.38). Разложим в ряд Тейлора по времени каждую компоненту вектора  $\langle \vec{\xi} \rangle (t)$ . Начнем с первой компоненты –  $\langle \vec{r} \rangle (t)$ :

$$\begin{aligned}
N(t) \langle \vec{r} \rangle (t) &= N(t_0) \langle \vec{r} \rangle (t_0) + (t - t_0) \frac{d}{dt} \left[ N(t) \langle \vec{r} \rangle (t) \right] \Big|_{t=t_0} + \\
&+ \frac{(t - t_0)^2}{2} \frac{d^2}{dt^2} \left[ N(t) \langle \vec{r} \rangle (t) \right] \Big|_{t=t_0} + \dots = \\
&= N(t_0) \langle \vec{r} \rangle (t_0) + (t - t_0) N(t_0) \langle \langle \vec{v} \rangle \rangle (t_0) + \frac{(t - t_0)^2}{2} N(t_0) \langle \langle \langle \dot{v} \rangle \rangle \rangle (t_0) + \dots \\
\langle \vec{r} \rangle (t) &= \frac{N(t_0)}{N(t)} \left\{ \langle \vec{r} \rangle (t_0) + (t - t_0) \langle \langle \vec{v} \rangle \rangle (t_0) + \frac{(t - t_0)^2}{2} \langle \langle \langle \dot{v} \rangle \rangle \rangle (t_0) + \dots \right\}, \tag{1.45}
\end{aligned}$$

где учтены выражения (1.39). Для второй компоненты  $\langle\langle\vec{v}\rangle\rangle(t)$ :

$$\begin{aligned}
N(t)\langle\langle\vec{v}\rangle\rangle(t) &= N(t_0)\langle\langle\vec{v}\rangle\rangle(t_0) + (t-t_0) \frac{d}{dt} \left[ N(t)\langle\langle\vec{v}\rangle\rangle(t) \right] \Big|_{t=t_0} + \\
&+ \frac{(t-t_0)^2}{2} \frac{d^2}{dt^2} \left[ N(t)\langle\langle\vec{v}\rangle\rangle(t) \right] \Big|_{t=t_0} + \dots = \\
&= N(t_0)\langle\langle\vec{v}\rangle\rangle(t_0) + (t-t_0)N(t_0)\langle\langle\langle\dot{\vec{v}}\rangle\rangle(t_0) + \frac{(t-t_0)^2}{2}N(t_0)\langle\langle\langle\ddot{\vec{v}}\rangle\rangle(t_0) + \dots \\
\langle\langle\vec{v}\rangle\rangle(t) &= \frac{N(t_0)}{N(t)} \left\{ \langle\langle\vec{v}\rangle\rangle(t_0) + (t-t_0)\langle\langle\langle\dot{\vec{v}}\rangle\rangle(t_0) + \frac{(t-t_0)^2}{2}\langle\langle\langle\ddot{\vec{v}}\rangle\rangle(t_0) + \dots \right\} \quad (1.46)
\end{aligned}$$

Аналогичные выражения получаются для остальных компонент вектора  $\langle\langle\vec{\xi}\rangle\rangle(t)$ . Так как число частиц остается постоянным  $N(t) = N(t_0) = N_0 = Const$ , то выражения типа (1.45), (1.46) дают компоненты вектора  $\langle\langle\vec{\xi}\rangle\rangle(t)$  из (1.38). Теорема 1 доказана.

**Теорема 2.** Пусть функции распределения  $f_k(\vec{r}, \vec{v}, \dots, t)$ ,  $k \in \mathbb{N}$  удовлетворяют цепочке Власова (1.30) и являются аналитическими по переменной  $t$ , а функция  $N(t) = Const$ , тогда средняя обобщенная траектория (1.37) имеет вид (1.38).

### Доказательство теоремы 2.

Произведем непосредственные вычисления:

$$\begin{aligned}
N(t)\langle\vec{r}\rangle(t) &= \int_{(\infty)} f_1(\vec{r}, t) \vec{r} d^3r = \int_{(\infty)} f_1(\vec{r}, t_0) \vec{r} d^3r + (t-t_0) \int_{(\infty)} \frac{\partial f_1(\vec{r}, t_0)}{\partial t} \vec{r} d^3r + \\
&+ \frac{(t-t_0)^2}{2} \int_{(\infty)} \frac{\partial^2 f_1(\vec{r}, t_0)}{\partial t^2} \vec{r} d^3r + \dots = N(t_0)\langle\vec{r}\rangle(t_0) +
\end{aligned}$$



$$\begin{aligned}
& + (t-t_0) \frac{\partial}{\partial t} \left[ \int_{(\infty)} f_1(\vec{r}, t) \vec{r} d^3 r \right] \Big|_{t=t_0} + \frac{(t-t_0)^2}{2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \left[ \int_{(\infty)} f_1(\vec{r}, t) \vec{r} d^3 r \right] \Big|_{t=t_0} + \dots = \\
& = N(t_0) \langle \vec{r} \rangle(t_0) + (t-t_0) \frac{d}{dt} [N(t) \langle \vec{r} \rangle(t)] \Big|_{t=t_0} + \\
& + \frac{(t-t_0)^2}{2} \frac{d^2}{dt^2} [N(t) \langle \vec{r} \rangle(t)] \Big|_{t=t_0} + \dots = \\
& = N(t_0) \langle \vec{r} \rangle(t_0) + (t-t_0) N(t_0) \langle \langle \vec{v} \rangle \rangle(t_0) + \frac{(t-t_0)^2}{2} N(t_0) \langle \langle \langle \dot{\vec{v}} \rangle \rangle \rangle(t_0) + \dots, \\
& \langle \vec{r} \rangle(t) = \frac{N(t_0)}{N(t)} \left\{ \langle \vec{r} \rangle(t_0) + (t-t_0) \langle \langle \vec{v} \rangle \rangle(t_0) + \frac{(t-t_0)^2}{2} \langle \langle \langle \dot{\vec{v}} \rangle \rangle \rangle(t_0) + \dots \right\} \quad (1.47)
\end{aligned}$$

Выражение (1.47) полностью совпадает с выражением (1.45). Аналогичные представления получаются и для остальных компонент вектора  $\langle \vec{\xi} \rangle(t)$ , что и требовалось доказать.

**Замечание.** Утверждения теоремы 1 и 2 совпадают при разных изначальных предположениях. Требование теоремы 2 чтобы функции  $f_k(\vec{r}, \vec{v}, \dots, t)$ ,  $k \in \mathbb{N}$  были аналитическими, является избыточными.

Если точка обобщенного фазового пространства  $\vec{\xi}_0 = \{ \langle \vec{r} \rangle(t_0), \langle \vec{v} \rangle(t_0), \dots \}^T \in \Omega'$ , то ряды, стоящие в (1.38) являются сходящимися и цепочка уравнений Власова определяет обобщенную фазовую траекторию в обобщенном фазовом пространстве.

## ГЛАВА 2 ДИСПЕРСИОННАЯ ЦЕПОЧКА

### §2.1 Смешанные функции распределения и кинематические средние

Анализируя возможное множество функций распределения (i.17), видно, что можно ввести их ранжирование. Наименьший нулевой ранг будет иметь функция  $f_0(t)$  (i.5). Интегрирование всех функций распределения по всему бесконечномерному обобщенному фазовому пространству  $\Omega$  [6-9] приведет к одной единственной функции  $f_0(t)$ , которую также будем обозначать  $f^0(t)$ . Рассмотрим упорядоченное бесконечное множество функций распределения 1-го ранга  $F^1$ :

$$F^1 \mapsto \{f^j\} = \left( f^1(\vec{r}, t) \quad f^2(\vec{v}, t) \quad f^3(\dot{\vec{v}}, t) \quad \dots \right), \quad (2.1)$$

где верхний индекс « $j$ » соответствует номеру кинематической величины:

$$\vec{r}, \vec{v}, \dot{\vec{v}}, \ddot{\vec{v}}, \dots$$

Функции распределения 2-го ранга образуют множество  $F^2$ , которое представим в виде бесконечной матрицы:

$$F^2 \mapsto \{f^{i,j}\} = \begin{pmatrix} \times & f^{1,2}(\vec{r}, \vec{v}, t) & f^{1,3}(\vec{r}, \dot{\vec{v}}, t) & f^{1,4}(\vec{r}, \ddot{\vec{v}}, t) & \dots \\ f^{1,2}(\vec{r}, \vec{v}, t) & \times & f^{2,3}(\vec{v}, \dot{\vec{v}}, t) & f^{2,4}(\vec{v}, \ddot{\vec{v}}, t) & \dots \\ f^{1,3}(\vec{r}, \dot{\vec{v}}, t) & f^{2,3}(\vec{v}, \dot{\vec{v}}, t) & \times & f^{3,4}(\dot{\vec{v}}, \ddot{\vec{v}}, t) & \dots \\ f^{1,4}(\vec{r}, \ddot{\vec{v}}, t) & f^{2,4}(\vec{v}, \ddot{\vec{v}}, t) & f^{3,4}(\dot{\vec{v}}, \ddot{\vec{v}}, t) & \times & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \end{pmatrix}, \quad (2.2)$$

где учтено условие симметрии  $f^{n_1, n_2} = f^{n_2, n_1}$ ,  $n_1, n_2 \in \mathbb{N}$ . Диагональ матрицы (2.2) пустая, так как соответствующие элементы

$f^{n,n} = \{f^{1,1}(\vec{r}, \vec{r}, t), f^{2,2}(\vec{v}, \vec{v}, t), \dots\}$  являются функциями одной кинематической величины (2.1). Вместо знака « $\times$ » в матрице (2.2) иногда будем использовать число ноль.

Аналогичное построение можно выполнить для множеств (экстенсивов)  $F^R$  функций распределения произвольного ранга  $R$ . Для компактности записи будем использовать формализм  $\Psi$  – алгебры [33], используя следующие обозначения:

$$\vec{\xi}^4 = \ddot{\vec{v}}, \quad \vec{\xi}^{3,6} = (\dot{\vec{v}}, \ddot{\vec{v}})^T, \quad \vec{\xi}^{1,2,3,4} = (\vec{r}, \vec{v}, \dot{\vec{v}}, \ddot{\vec{v}})^T, \dots \quad (2.3)$$

$$f^{1,2}(\vec{r}, \vec{v}, t) = f^{1,2}(\vec{\xi}^{1,2}, t) = f^{1,2}, \dots$$

$$f^{n_1, \dots, n_R} = f_n^{\det}, \quad n \in \mathbb{N}.$$

При записи функции распределения  $f^{n_1, \dots, n_R}$  ранга  $R$  будем считать, что последовательность индексов  $n_1, \dots, n_R$  является возрастающей и все индексы являются уникальными, то есть  $n_i \neq n_j$  при  $i \neq j$ . Функция распределения  $f^{n_1, \dots, n_R}$  определена в подпространстве  $\Omega^{n_1} \times \dots \times \Omega^{n_R}$  бесконечномерного обобщенного фазового пространства  $\Omega$  [33], содержащего полный набор кинематических величин всех порядков. Множество функций  $f^{n_1, \dots, n_R}$  образует экстенсив  $F^R$  ранга  $R$ .

Помимо ранга  $R$  будем использовать понятие набора  $S$  (set) аргументов функции распределения  $f^{n_1, \dots, n_R}$  экстенсива  $F^{R,S}$ . Набор  $S$  это множество кинематических величин вида:  $S = \{\ddot{\vec{v}}\}$ ,  $S = \{\dot{\vec{v}}, \ddot{\vec{v}}\}$ ,  $S = \{\vec{r}, \vec{v}, \dot{\vec{v}}, \ddot{\vec{v}}\}$  и так далее. Для компактности записи элементов множества  $S$  будем использовать также представление  $S = \{4\}$ ,  $S = \{3, 6\}$ ,  $S = \{1, 2, 3, 4\}$ .

Пусть есть некоторый произвольный фиксированный набор  $S = \{s_1, \dots, s_R\}$  кинематических величин. Набор  $S$  определяет функцию

распределения  $f^{s_1, \dots, s_R}$  ранга  $R = |S|$ . Соответствующий экстенсив  $F^{R,S}$  будет иметь только один элемент  $f^{s_1, \dots, s_R}$ . Экстенсивы рангов  $R-1, R-2, \dots, 1$  будут иметь  $C_{|S|}^{R-1}, C_{|S|}^{R-2}, \dots, C_{|S|}^1$  элементов соответственно. Например, для набора  $S = \{\vec{r}, \dot{\vec{v}}, \ddot{\vec{v}}\}$  и рангов  $R=1$  и  $R=2$  экстенсивы  $F^{1,S}$  и  $F^{2,S}$  имеют  $C_3^1 = C_3^2 = 3$  элемента, а экстенсив  $F^{3,S}$  всего один элемент:

$$F^{1,\{1,3,5\}} = \{f^1, \times, f^3, \times, f^5\}, F^{2,\{1,3,5\}} = \begin{pmatrix} \times & \times & f^{1,3} & \times & f^{1,5} \\ \times & \times & \times & \times & \times \\ f^{1,3} & \times & \times & \times & f^{3,5} \\ \times & \times & \times & \times & \times \\ f^{1,5} & \times & f^{3,5} & \times & \times \end{pmatrix}, \quad (2.4)$$

$$F^{3,\{1,3,5\}} = \{f^{1,3,5}\}.$$

Связь между функциями распределения различных рангов по аналогии с выражениями (i.14) определим следующим образом.

**Определение 1.** Пусть  $k = \{k_1, \dots, k_K\}$ ,  $k_i \neq k_j$  при  $i \neq j$  подмножество множества  $n = \{n_1, \dots, n_R\}$ ,  $n_i \neq n_j$ ,  $K \leq R$ , тогда определим функцию распределения ранга  $R - K$  как

$$f^{n \setminus k}(\vec{\xi}^{n \setminus k}, t) \stackrel{\det}{=} \int_{\Omega^{n_1}} \dots \int_{\Omega^{k_K}} f^n(\vec{\xi}^n, t) \prod_{s=1}^K d^3 \xi^{k_s}. \quad (2.5)$$

где  $n \setminus k$  разность множеств  $n$  и  $k$ .

**Замечание.** Для фиксированного множества  $n = \{n_1, n_2, \dots, n_R\}$  и различных наборов множеств  $k = \{k_1, k_2, \dots, k_K\}$  таких, что  $k \subset n$  можно получить  $C_R^K$  различных функций распределения  $R - K$  ранга. В качестве примера

рассмотрим функцию  $f^{1,3,4,6}$ , для которой  $R=4$ ,  $n=\{1,3,4,6\}$ . При  $K=1$  существует  $C_4^1=4$  набора множеств  $n \setminus k$ :

$$(n \setminus k)^1 = \{1,3,4\}, (n \setminus k)^2 = \{1,3,6\}, (n \setminus k)^3 = \{1,4,6\}, (n \setminus k)^4 = \{3,4,6\}. \quad (2.6)$$

Каждому множеству (2.6) соответствует функция распределения третьего ранга ( $R-K=3$ ):

$$\begin{aligned} f^{(n \setminus k)^1} &= f^{1,3,4}(\vec{\xi}^{1,3,4}, t) = f^{1,3,4}(\vec{r}, \dot{\vec{v}}, \ddot{\vec{v}}, t) = \int_{\Omega^6} f^{1,3,4,6} d^3 \ddot{\vec{v}}, \\ f^{(n \setminus k)^2} &= f^{1,3,6}(\vec{\xi}^{1,3,6}) = f^{1,3,6}(\vec{r}, \dot{\vec{v}}, \ddot{\vec{v}}, t) = \int_{\Omega^4} f^{1,3,4,6} d^3 \ddot{\vec{v}}, \\ f^{(n \setminus k)^3} &= f^{1,4,6}(\vec{\xi}^{1,4,6}) = f^{1,4,6}(\vec{r}, \dot{\vec{v}}, \ddot{\vec{v}}, t) = \int_{\Omega^3} f^{1,3,4,6} d^3 \dot{\vec{v}}, \\ f^{(n \setminus k)^4} &= f^{3,4,6}(\vec{\xi}^{3,4,6}) = f^{3,4,6}(\dot{\vec{v}}, \ddot{\vec{v}}, \ddot{\vec{v}}, t) = \int_{\Omega^1} f^{1,3,4,6} d^3 \dot{\vec{v}}. \end{aligned} \quad (2.7)$$

Функции (2.7) получаются из функции  $f^n = f^{1,3,4,6}(\vec{\xi}^{1,3,4,6}, t)$  путем интегрирования по подпространствам  $\Omega^6$ ,  $\Omega^4$ ,  $\Omega^3$ ,  $\Omega^1$  соответственно. Если произвести повторное интегрирование функций распределения (2.7), то получатся функции распределения 2-го и 1-го ранга. Действительно, для функций распределения 2-го ранга, получаем набор из  $C_3^1=3$  множеств  $m = \{m_1, m_2\}$  для каждого набора  $(n \setminus k)^j$ ,  $j=1..4$  (2.6):

$$\begin{aligned} (n \setminus k)^1 &\mapsto m^1 = \{1,3\}, m^2 = \{1,4\}, m^3 = \{3,4\}, \\ (n \setminus k)^2 &\mapsto m^1 = \{1,3\}, m^2 = \{1,6\}, m^3 = \{3,6\}, \\ (n \setminus k)^3 &\mapsto m^1 = \{1,4\}, m^2 = \{1,6\}, m^3 = \{4,6\}, \\ (n \setminus k)^4 &\mapsto m^1 = \{3,4\}, m^2 = \{3,6\}, m^3 = \{4,6\}. \end{aligned} \quad (2.8)$$

Исключая из выражений (2.8) повторяющиеся варианты, получим  $C_4^2 = 6$  вариантов функций распределений 2-го ранга ( $R - K = 2$ )

$$\begin{pmatrix} \times & \times & f^{1,3} & f^{1,4} & \times & f^{1,6} \\ \times & \times & \times & \times & \times & \times \\ f^{1,3} & \times & \times & f^{3,4} & \times & f^{3,6} \\ f^{1,4} & \times & f^{3,4} & \times & \times & f^{4,6} \\ \times & \times & \times & \times & \times & \times \\ f^{1,6} & \times & f^{3,6} & f^{4,6} & \times & \times \end{pmatrix} \quad (2.9)$$

Функций распределения 1-го ранга ( $N - K = 1$ ) будет  $C_4^3 = 4$  вида

$$f^1(\vec{r}, t), f^3(\dot{\vec{v}}, t), f^4(\ddot{\vec{v}}, t), f^6(\overset{\cdot\cdot\cdot}{\vec{v}}, t). \quad (2.10)$$

Из представлений (2.7), (2.9), (2.10) видно, что по функции  $f^{1,3,4,6}$  удастся найти не все возможные функции распределения 3-го, 2-го и 1-го ранга.

Рассмотрим множество средних кинематических величин (i.6), (i.18).

**Определение 2.** Пусть  $k = \{k_1, \dots, k_K\}$ ,  $k_i \neq k_j$  при  $i \neq j$  подмножество множества  $n = \{n_1, \dots, n_R\}$ ,  $n_i \neq n_j \neq \ell \in \mathbb{N}$ , тогда определим средние кинематические величины порядка  $\ell$  и ранга  $R - K$  как

$$\langle \vec{\xi}^\ell \rangle_{n \setminus k} = \frac{1}{f^{n \setminus k}} \int_{\Omega^{\hat{1}}} \dots \int_{\Omega^{\hat{K}}} \int_{\Omega^\ell} f^{n \cup \{\ell\}}(\vec{\xi}^{n \cup \{\ell\}}, t) \vec{\xi}^\ell d^3 \xi^\ell \prod_{s=1}^K d^3 \xi^{k_s}, \quad (2.11)$$

где  $n \cup \{\ell\}$  объединение множества  $n$  и элемента  $\ell$ , а  $n \setminus k$  разность множеств  $n$  и  $k$ . Функция распределения  $f^{n \cup \{\ell\}}$  имеет ранг  $R+1$ .

Для фиксированного набора  $S$  множество средних кинематических величин порядка  $\ell \notin S$  и ранга  $R$  образуют экстенсив  $\bar{\Xi}_{R,S}^\ell$ . Например, для набора  $S = \{1,3,4,6\}$  и ранга  $R = 2$ , получим

$$\bar{\Xi}_{2,\{1,3,4,6\}}^\ell = \begin{pmatrix} \times & \times & \langle \vec{\xi}^\ell \rangle_{1,3} & \langle \vec{\xi}^\ell \rangle_{1,4} & \times & \langle \vec{\xi}^\ell \rangle_{1,6} \\ \times & \times & \times & \times & \times & \times \\ \langle \vec{\xi}^\ell \rangle_{1,3} & \times & \times & \langle \vec{\xi}^\ell \rangle_{3,4} & \times & \langle \vec{\xi}^\ell \rangle_{3,6} \\ \langle \vec{\xi}^\ell \rangle_{1,4} & \times & \langle \vec{\xi}^\ell \rangle_{3,4} & \times & \times & \langle \vec{\xi}^\ell \rangle_{4,6} \\ \times & \times & \times & \times & \times & \times \\ \langle \vec{\xi}^\ell \rangle_{1,6} & \times & \langle \vec{\xi}^\ell \rangle_{3,6} & \langle \vec{\xi}^\ell \rangle_{4,6} & \times & \times \end{pmatrix}. \quad (2.12)$$

Экстенсив (2.12) по аналогии с выражением (2.9) может быть получен из средней кинематической величины  $\langle \vec{\xi}^\ell \rangle_{1,3,4,6}$  путем ее усреднения (2.11) по подпространствам  $\Omega^6, \Omega^4, \Omega^3, \Omega^1$ .

## §2.2 Группы уравнений дисперсионной цепочки

На основе цепочки уравнений Власова (i.4)/(1.30) получим уравнения, которым удовлетворяют смешанные функции распределения (2.5). Интегрирование второго уравнения в цепочке (1.30) по пространству скоростей даст первое уравнение для функции  $f^1$ . Произведем интегрирование второго уравнения по пространству координат и получим уравнение для функции  $f^2$

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} \int_{(\infty)} f^{1,2} d^3 r + \int_{(\infty)} \operatorname{div}_r [f^{1,2} \vec{v}] d^3 r + \operatorname{div}_v \int_{(\infty)} f^{1,2} \langle \dot{\vec{v}} \rangle_{1,2} d^3 r = 0, \\ \frac{\partial}{\partial t} f^2 + \operatorname{div}_v [f^2 \langle \dot{\vec{v}} \rangle_2] = 0, \end{aligned} \quad (2.13)$$

где при интегрировании используется теорема Остроградского-Гаусса и условие быстрого спада функции распределения на бесконечности [6-8].

Рассмотрим третье уравнение из цепочки (1.30) для функции  $f^{1,2,3}$ . Интегрирование третьего уравнения по пространству координат и ускорений даст уравнение (2.13). Уравнение для функции  $f^{1,2,3}$  получается при интегрировании по пространствам координат и скоростей

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} \int_{(\infty)} \int_{(\infty)} f^{1,2,3} d^3 r d^3 v + \int_{(\infty)} \int_{(\infty)} \operatorname{div}_r [f^{1,2,3} \vec{v}] d^3 r d^3 v + \int_{(\infty)} \int_{(\infty)} \operatorname{div}_v [f^{1,2,3} \dot{\vec{v}}] d^3 r d^3 v + \\ + \int_{(\infty)} \int_{(\infty)} \operatorname{div}_{\dot{v}} [f^{1,2,3} \langle \ddot{\vec{v}} \rangle_{1,2,3}] d^3 r d^3 v = 0, \\ \frac{\partial}{\partial t} f^3 + \operatorname{div}_{\dot{v}} [f^3 \langle \ddot{\vec{v}} \rangle_3] = 0. \end{aligned} \quad (2.14)$$

Получим уравнения для функций распределения  $f^{2,3}$  и  $f^{1,3}$ :

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} \int_{(\infty)} f^{1,2,3} d^3 r + \int_{(\infty)} \operatorname{div}_r [f^{1,2,3} \vec{v}] d^3 r + \operatorname{div}_v \left[ \int_{(\infty)} f^{1,2,3} \dot{\vec{v}} d^3 r \right] + \int_{(\infty)} \operatorname{div}_{\dot{v}} [f^{1,2,3} \langle \ddot{\vec{v}} \rangle_{1,2,3}] d^3 r = 0, \\ \frac{\partial}{\partial t} f^{2,3} + \operatorname{div}_v [f^{2,3} \dot{\vec{v}}] + \operatorname{div}_{\dot{v}} [f^{2,3} \langle \ddot{\vec{v}} \rangle_{2,3}] = 0, \end{aligned} \quad (2.15)$$

и

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} \int_{(\infty)} f^{1,2,3} d^3 v + \int_{(\infty)} \operatorname{div}_r [f^{1,2,3} \vec{v}] d^3 v + \int_{(\infty)} \operatorname{div}_v [f^{1,2,3} \dot{\vec{v}}] d^3 v + \int_{(\infty)} \operatorname{div}_{\dot{v}} [f^{1,2,3} \langle \ddot{\vec{v}} \rangle_{1,2,3}] d^3 v = 0, \\ \frac{\partial}{\partial t} f^{1,3} + \operatorname{div}_r [f^{1,3} \langle \vec{v} \rangle_{1,3}] + \operatorname{div}_{\dot{v}} [f^{1,3} \langle \ddot{\vec{v}} \rangle_{1,3}] = 0. \end{aligned} \quad (2.16)$$



Заметим, что уравнение (2.15) по форме схоже со вторым уравнением из цепочки (1.30), а уравнение (2.16) существенно отличается от всех уравнений цепочки.

Проанализируем четвертое уравнение цепочки (1.30). Как было отмечено в §2.1, функция распределения четвертого ранга  $f^{1,2,3,4}$  должна давать  $C_4^1 = 4$  функции первого ранга,  $C_4^2 = 6$  функций второго ранга и  $C_4^3 = 4$  функции третьего ранга. Уравнения для функции распределения первого ранга  $f^1, f^2, f^3$  были получены ранее (1.30), (2.13), (2.14). Функции второго ранга  $f^{1,2}, f^{2,3}, f^{1,3}$  удовлетворяют уравнениям (1.30), (2.15), (2.16) соответственно. Уравнение для функции третьего ранга  $f^{1,2,3}$  это третье уравнение в цепочке (1.30). Таким образом, производя интегрирование по всем оставшимся комбинациям кинематических подпространств, получим новые уравнения для смешанных функций:  $f^4, f^{1,4}, f^{2,4}, f^{3,4}, f^{1,2,4}, f^{2,3,4}, f^{1,3,4}$

$$\frac{\partial f^4}{\partial t} + \operatorname{div}_{\ddot{v}} \left[ f^4 \langle \ddot{v} \rangle_4 \right] = 0, \quad (2.17)$$

$$\frac{\partial f^{1,4}}{\partial t} + \operatorname{div}_r \left[ f^{1,4} \langle \dot{v} \rangle_{1,4} \right] + \operatorname{div}_{\ddot{v}} \left[ f^{1,4} \langle \ddot{v} \rangle_{1,4} \right] = 0, \quad (2.18)$$

$$\frac{\partial f^{2,4}}{\partial t} + \operatorname{div}_v \left[ f^{2,4} \langle \dot{v} \rangle_{2,4} \right] + \operatorname{div}_{\ddot{v}} \left[ f^{2,4} \langle \ddot{v} \rangle_{2,4} \right] = 0, \quad (2.19)$$

$$\frac{\partial f^{3,4}}{\partial t} + \operatorname{div}_{\dot{v}} \left[ f^{3,4} \ddot{v} \right] + \operatorname{div}_{\ddot{v}} \left[ f^{3,4} \langle \ddot{v} \rangle_{3,4} \right] = 0, \quad (2.20)$$

$$\frac{\partial f^{1,2,4}}{\partial t} + \operatorname{div}_r \left[ f^{1,2,4} \dot{v} \right] + \operatorname{div}_v \left[ f^{1,2,4} \langle \dot{v} \rangle_{1,2,4} \right] + \operatorname{div}_{\ddot{v}} \left[ f^{1,2,4} \langle \ddot{v} \rangle_{1,2,4} \right] = 0, \quad (2.21)$$

$$\frac{\partial f^{2,3,4}}{\partial t} + \operatorname{div}_v \left[ f^{2,3,4} \dot{v} \right] + \operatorname{div}_{\dot{v}} \left[ f^{2,3,4} \ddot{v} \right] + \operatorname{div}_{\ddot{v}} \left[ f^{2,3,4} \langle \ddot{v} \rangle_{2,3,4} \right] = 0, \quad (2.22)$$

$$\frac{\partial f^{1,3,4}}{\partial t} + \operatorname{div}_r \left[ f^{1,3,4} \langle \dot{v} \rangle_{1,3,4} \right] + \operatorname{div}_{\dot{v}} \left[ f^{1,3,4} \ddot{v} \right] + \operatorname{div}_{\ddot{v}} \left[ f^{1,3,4} \langle \ddot{v} \rangle_{1,3,4} \right] = 0. \quad (2.23)$$

Отметим общую закономерность получаемых уравнений. Множество уравнений условно можно разбить на два типа. Оба типа содержат новые уравнения. Первый тип содержит уравнения схожие с уравнениями из цепочки (1.30), в которых произведена перестановка кинематических переменных. К первому типу относятся уравнения (2.17), (2.14), (2.13), которые схожи с первым уравнением Власова из цепочки (1.30). Уравнения (2.20), (2.23) и (2.15) схожи со вторым уравнением из цепочки (1.30). Второй тип содержит уравнения не похожие ни на одно уравнение из цепочки (1.30). Например, уравнения (2.18), (2.19) и (2.16) или уравнения (2.21), (2.23).

Уравнения (2.21), (2.23) второго типа для функций распределения третьего ранга переходят в уравнения (2.18), (2.19) того же типа для функций второго ранга при интегрировании их по пространству скоростей и координат соответственно.

Для наглядности запишем экстенсив второго ранга  $F^{2,\{1,2,3,4,\dots\}}$ , в котором выделим функции, удовлетворяющие разным типам уравнений

$$F^{2,\{1,2,3,4,\dots\}} = \begin{pmatrix} \times & f^{1,2} & f^{1,3} & f^{1,4} & f^{1,5} & \dots \\ f^{1,2} & \times & f^{2,3} & f^{2,4} & f^{2,5} & \dots \\ f^{1,3} & f^{2,3} & \times & f^{3,4} & f^{3,5} & \dots \\ f^{1,4} & f^{2,4} & f^{3,4} & \times & f^{4,5} & \dots \\ f^{1,5} & f^{2,5} & f^{3,5} & f^{4,5} & \times & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \end{pmatrix}. \quad (2.24)$$

Зеленым цветом в представлении (2.24) показаны функции, удовлетворяющие уравнениям первого типа, а красным цветом – второго типа. Видно, что для экстенсива второго ранга  $F^{2,\{1,2,3,4,\dots\}}$  число уравнений второго типа с ростом мощности множества  $|S|$  будет на порядок больше, чем уравнений первого типа. Преобладание количества уравнений второго типа над уравнениями первого типа сохранится и для экстенсивов более высоких рангов. Заметим, что наличие уравнений первого типа является

наследованным признаком иерархической структуры цепочки уравнений Власова (1.30). Действительно, средние кинематические величины в них являются функциями от кинематических величин низшего порядка:  $\langle \dot{\vec{v}} \rangle_{1,2}$ ,  $\langle \ddot{\vec{v}} \rangle_{2,3}$ ,  $\langle \ddot{\vec{v}} \rangle_{3,4}$ , ... Уравнения второго типа содержат средние кинематические величины, зависящие не только от низших, но и от величин высших порядков:  $\langle \vec{v} \rangle_{1,3}$ ,  $\langle \vec{v} \rangle_{1,4}$ ,  $\langle \dot{\vec{v}} \rangle_{2,4}$ ,  $\langle \dot{\vec{v}} \rangle_{1,2,4}$ , ...

Обобщая полученные результаты, получим *дисперсионную цепочку уравнений Власова*. В отличие от цепочки (1.30) дисперсионная цепочка будет иметь два новых отличия. Первое отличие состоит в том, что каждое уравнение из цепочки (1.30) будет распадаться не бесконечное множество уравнений первого типа, получаемых перестановкой местами кинематических величин разных порядков. Второе отличие это появление бесконечного множества уравнений второго типа, содержащих дополнительные слагаемые со средними кинематическими величинами. Дисперсионную цепочку уравнений можно ранжировать:

**1-й ранг** (2.25)

$$\frac{\partial}{\partial t} f^1 + \text{div}_r [f^1 \langle \vec{v} \rangle_1] = 0, \quad \frac{\partial}{\partial t} f^2 + \text{div}_v [f^2 \langle \dot{\vec{v}} \rangle_2] = 0, \quad \frac{\partial}{\partial t} f^3 + \text{div}_v [f^3 \langle \ddot{\vec{v}} \rangle_3] = 0, \dots$$

**2-ой ранг** (2.26)

$$\begin{aligned} \frac{\partial f^{1,2}}{\partial t} + \text{div}_r [f^{1,2} \vec{v}] + \text{div}_v [f^{1,2} \langle \dot{\vec{v}} \rangle_{1,2}] &= 0, \\ \frac{\partial f^{1,3}}{\partial t} + \text{div}_r [f^{1,3} \langle \vec{v} \rangle_{1,3}] + \text{div}_v [f^{1,3} \langle \ddot{\vec{v}} \rangle_{1,3}] &= 0, \\ \frac{\partial f^{1,4}}{\partial t} + \text{div}_r [f^{1,4} \langle \vec{v} \rangle_{1,4}] + \text{div}_v [f^{1,4} \langle \ddot{\vec{v}} \rangle_{1,4}] &= 0, \\ \dots & \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \frac{\partial f^{2,3}}{\partial t} + \operatorname{div}_v [f^{2,3} \dot{\vec{v}}] + \operatorname{div}_{\dot{v}} [f^{2,3} \langle \ddot{\vec{v}} \rangle_{2,3}] = 0, \\
& \frac{\partial f^{2,4}}{\partial t} + \operatorname{div}_v [f^{2,4} \langle \dot{\vec{v}} \rangle_{2,4}] + \operatorname{div}_{\dot{v}} [f^{2,4} \langle \ddot{\vec{v}} \rangle_{2,4}] = 0, \\
& \dots \\
& \frac{\partial f^{3,4}}{\partial t} + \operatorname{div}_{\dot{v}} [f^{3,4} \ddot{\vec{v}}] + \operatorname{div}_{\ddot{v}} [f^{3,4} \langle \ddot{\vec{v}} \rangle_{3,4}] = 0, \\
& \dots
\end{aligned}$$

### 3-ий ранг (2.27)

$$\begin{aligned}
& \frac{\partial f^{1,2,3}}{\partial t} + \operatorname{div}_r [f^{1,2,3} \vec{v}] + \operatorname{div}_v [f^{1,2,3} \dot{\vec{v}}] + \operatorname{div}_{\dot{v}} [f^{1,2,3} \langle \ddot{\vec{v}} \rangle_{1,2,3}] = 0, \\
& \frac{\partial f^{1,2,4}}{\partial t} + \operatorname{div}_r [f^{1,2,4} \vec{v}] + \operatorname{div}_v [f^{1,2,4} \langle \dot{\vec{v}} \rangle_{1,2,4}] + \operatorname{div}_{\dot{v}} [f^{1,2,4} \langle \ddot{\vec{v}} \rangle_{1,2,4}] = 0, \\
& \dots \\
& \frac{\partial f^{1,3,4}}{\partial t} + \operatorname{div}_r [f^{1,3,4} \langle \vec{v} \rangle_{1,3,4}] + \operatorname{div}_{\dot{v}} [f^{1,3,4} \ddot{\vec{v}}] + \operatorname{div}_{\ddot{v}} [f^{1,3,4} \langle \ddot{\vec{v}} \rangle_{1,3,4}] = 0, \\
& \dots \\
& \frac{\partial f^{2,3,4}}{\partial t} + \operatorname{div}_v [f^{2,3,4} \dot{\vec{v}}] + \operatorname{div}_{\dot{v}} [f^{2,3,4} \ddot{\vec{v}}] + \operatorname{div}_{\ddot{v}} [f^{2,3,4} \langle \ddot{\vec{v}} \rangle_{2,3,4}] = 0, \\
& \dots
\end{aligned}$$

#### Замечание

Элементы  $\langle \vec{\xi}^\ell \rangle$  экстенсива  $\vec{\Xi}_{R,S}^\ell$  можно поделить на три группы. Первая группа это элементы  $\langle \vec{\xi}^\ell \rangle$ , присутствующие в дисперсионной цепочке и зависящие от кинематических величин низшего порядка. Вторая группа это элементы  $\langle \vec{\xi}^\ell \rangle$ , присутствующие в дисперсионной цепочке и зависящие от кинематических величин высшего и низшего порядка. Третья группа это элементы  $\langle \vec{\xi}^\ell \rangle$  не входящие в дисперсионную цепочку и зависящие от

кинематических величин высшего и низшего порядка. В качестве примера рассмотрим экстенсив  $\bar{\Xi}_{2,\{1,2,3,5,6\}}^4$ :

$$\bar{\Xi}_{2,\{1,2,3,5,6\}}^4 = \begin{pmatrix} \times & \langle \ddot{\bar{v}} \rangle_{1,2} & \langle \ddot{\bar{v}} \rangle_{1,3} & \times & \langle \ddot{\bar{v}} \rangle_{1,5} & \langle \ddot{\bar{v}} \rangle_{1,6} \\ \langle \ddot{\bar{v}} \rangle_{1,2} & \times & \langle \ddot{\bar{v}} \rangle_{2,3} & \times & \langle \ddot{\bar{v}} \rangle_{2,5} & \langle \ddot{\bar{v}} \rangle_{2,6} \\ \langle \ddot{\bar{v}} \rangle_{1,3} & \langle \ddot{\bar{v}} \rangle_{2,3} & \times & \times & \langle \ddot{\bar{v}} \rangle_{3,5} & \langle \ddot{\bar{v}} \rangle_{3,6} \\ \times & \times & \times & \times & \times & \times \\ \langle \ddot{\bar{v}} \rangle_{1,5} & \langle \ddot{\bar{v}} \rangle_{2,5} & \langle \ddot{\bar{v}} \rangle_{3,5} & \times & \times & \langle \ddot{\bar{v}} \rangle_{5,6} \\ \langle \ddot{\bar{v}} \rangle_{1,6} & \langle \ddot{\bar{v}} \rangle_{2,6} & \langle \ddot{\bar{v}} \rangle_{3,6} & \times & \langle \ddot{\bar{v}} \rangle_{5,6} & \times \end{pmatrix}.$$

Зеленым, красным и черным цветом показаны средние кинематические величины, принадлежащие первой, второй и третьей группе соответственно. Элементы третьей группы могут быть найдены по средствам усреднения кинематических величин высших рангов.

Уравнения дисперсионной цепочки (2.25)-(2.27) можно переписать через дифференциальные операторы  $\Pi$ , позволяющие выделить источники диссипаций  $Q$  [6].

**Определение 3.** Для ранга  $R$  рассмотрим множество  $n = \{n_1, \dots, n_R\} \subset \mathbb{N}$ ,  $n_i \neq n_j$  при  $i \neq j$ . Определим функции:

$$S^{n_1, \dots, n_R} = \overset{\det}{\text{Ln}} f^{n_1, \dots, n_R}, \quad Q_{n_1, \dots, n_R}^p = \overset{\det}{\text{div}}_{\xi^p} \left\langle \bar{\xi}^{p+1} \right\rangle_{n_1, \dots, n_R}, \quad (2.28)$$

где  $p \in n$ , а функции  $f^{n_1, \dots, n_R}$  не имеют нулевых значений. Функцию  $Q_{n_1, \dots, n_R}^p$  будем называть плотностью источников диссипаций средней кинематической величины  $\langle \vec{\xi}^{p+1} \rangle_{n_1, \dots, n_R}$ .

**Определение 4.** Определим экстенсив операторов  $\Pi^R = \{ \hat{\pi}_{n_1, \dots, n_R} \}$  ранга  $R$ , где

$$\hat{\pi}_{n_1, \dots, n_R} = \frac{\det d_{n_1, \dots, n_R}}{dt} :$$

$$\text{при } R=0: \hat{\pi}_0 = \frac{d}{dt},$$

$$\text{при } R=1: \hat{\pi}_n = \frac{\partial}{\partial t} + \langle \vec{\xi}^{n+1} \rangle_n \nabla_{\xi^n},$$

$$\text{при } R=2 \quad \hat{\pi}_{n, n+1} = \frac{\partial}{\partial t} + \vec{\xi}^{n+1} \nabla_{\xi^n} + \langle \vec{\xi}^{n+2} \rangle_{n, n+1} \nabla_{\xi^{n+1}},$$

$$\hat{\pi}_{n, n+k} = \frac{\partial}{\partial t} + \langle \vec{\xi}^{n+1} \rangle_{n, n+k} \nabla_{\xi^n} + \langle \vec{\xi}^{n+1+k} \rangle_{n, n+k} \nabla_{\xi^{n+k}}, \quad (2.29)$$

при  $R=3$

$$\hat{\pi}_{n, n+1, n+2} = \frac{\partial}{\partial t} + \vec{\xi}^{n+1} \nabla_{\xi^n} + \vec{\xi}^{n+2} \nabla_{\xi^{n+1}} + \langle \vec{\xi}^{n+3} \rangle_{n, n+1, n+2} \nabla_{\xi^{n+2}},$$

$$\hat{\pi}_{n, n+1, n+1+k} = \frac{\partial}{\partial t} + \vec{\xi}^{n+1} \nabla_{\xi^n} + \langle \vec{\xi}^{n+2} \rangle_{n, n+1, n+1+k} \nabla_{\xi^{n+1}} + \langle \vec{\xi}^{n+2+k} \rangle_{n, n+1, n+1+k} \nabla_{\xi^{n+1+k}},$$

$$\hat{\pi}_{n, n+s, n+s+1} = \frac{\partial}{\partial t} + \langle \vec{\xi}^{n+1} \rangle_{n, n+s, n+s+1} \nabla_{\xi^n} + \vec{\xi}^{n+s+1} \nabla_{\xi^{n+s}} + \langle \vec{\xi}^{n+s+2} \rangle_{n, n+s, n+s+1} \nabla_{\xi^{n+s+1}},$$

$$\hat{\pi}_{n, n+s, n+s+k} = \frac{\partial}{\partial t} + \langle \vec{\xi}^{n+1} \rangle_{n, n+s, n+s+k} \nabla_{\xi^n} + \langle \vec{\xi}^{n+1+s} \rangle_{n, n+s, n+s+k} \nabla_{\xi^{n+s}} + \langle \vec{\xi}^{n+1+s+k} \rangle_{n, n+s, n+s+k} \nabla_{\xi^{n+s+k}},$$

....

где  $k, s \in \{2, 3, \dots\}$ .

Используя определения (2.28) и (2.29) и учитывая независимость кинематических величин  $\vec{r}, \vec{v}, \dot{\vec{v}}, \ddot{\vec{v}}, \dots$ , дисперсионная цепочка (2.25)-(2.27) примет вид:

**1-й ранг** (2.30)

$$\hat{\pi}_n S^n = -Q_n^n.$$

**2-ой ранг** (2.31)

$$\hat{\pi}_{n,n+1} S^{n,n+1} = -Q_{n,n+1}^{n+1},$$

$$\hat{\pi}_{n,n+k} S^{n,n+k} = -(Q_{n,n+k}^n + Q_{n,n+k}^{n+k}).$$

**3-ий ранг** (2.32)

$$\hat{\pi}_{n,n+1,n+2} S^{n,n+1,n+2} = -Q_{n,n+1,n+2}^{n+2},$$

$$\hat{\pi}_{n,n+1,n+1+k} S^{n,n+1,n+1+k} = -(Q_{n,n+1,n+1+k}^{n+1} + Q_{n,n+1,n+1+k}^{n+1+k}),$$

$$\hat{\pi}_{n,n+s,n+s+1} S^{n,n+s,n+s+1} = -(Q_{n,n+s,n+s+1}^n + Q_{n,n+s,n+s+1}^{n+s+1}),$$

$$\hat{\pi}_{n,n+s,n+s+k} S^{n,n+s,n+s+k} = -(Q_{n,n+s,n+s+k}^n + Q_{n,n+s,n+s+k}^{n+s} + Q_{n,n+s,n+s+k}^{n+s+k}).$$

...

где  $k, s \in \{2, 3, \dots\}$ .

Заметим, что с увеличением ранга экстенсива  $\Pi^R$  увеличивается число средних кинематических величин  $\langle \vec{\xi}^n \rangle$  в операторах  $\hat{\pi}_{n_1, \dots, n_R}$ . Операторы  $\hat{\pi}_{n,n+1,n+2, \dots, n+R-1}$  соответствуют первой группе уравнений для функций распределений  $f_{n,n+1, \dots, n+R-1}$ . Рассмотрим экстенсив  $\Pi^2$ :

$$\Pi^2 = \begin{pmatrix} \times & \hat{\pi}_{1,2} & \hat{\pi}_{1,3} & \hat{\pi}_{1,4} & \hat{\pi}_{1,5} & \dots \\ \hat{\pi}_{1,2} & \times & \hat{\pi}_{2,3} & \hat{\pi}_{2,4} & \hat{\pi}_{2,5} & \dots \\ \hat{\pi}_{1,3} & \hat{\pi}_{2,3} & \times & \hat{\pi}_{3,4} & \hat{\pi}_{3,5} & \dots \\ \hat{\pi}_{1,4} & \hat{\pi}_{2,4} & \hat{\pi}_{3,4} & \times & \hat{\pi}_{4,5} & \dots \\ \hat{\pi}_{1,5} & \hat{\pi}_{2,5} & \hat{\pi}_{3,5} & \hat{\pi}_{4,5} & \times & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \end{pmatrix}. \quad (2.33)$$

Зелёным цветом в выражении (2.33) отмечены операторы, соответствующие первой группе уравнений, а красным цветом – второй группе. Отметим, что аналогичное распределение элементов имеет экстенсив  $F^2$  (2.24).

Дисперсионная цепочка, записанная в форме (2.30)-(2.32), наглядно показывает, что наличие источников диссипаций  $Q_{n_1, \dots, n_R}^p \neq 0$  приводит к не сохранению плотности вероятностей  $f^{n_1, \dots, n_R}$  вдоль фазовых траекторий. Действительно, операторы  $\hat{\pi}_{n_1, \dots, n_R}$  фактически задают «полный дифференциал» по времени от функции распределения  $f^{n_1, \dots, n_R}$ , который равен  $Q_{n_1, \dots, n_R}^p$ .

Из выражений (2.30)-(2.32) видно, что уравнения первой группы для функций  $S^n, S^{n, n+1}, S^{n, n+1, n+2}, \dots$  имеют источники диссипаций только по одной средней кинематической величине. При этом источники диссипаций  $Q_n^n, Q_{n, n+1}^{n+1}, Q_{n, n+1, n+2}^{n+2}, \dots$  являются функциями от кинематических величин низших порядков. Уравнения из второй группы  $S^{n, n+k}, S^{n, n+1, n+1+k}, S^{n, n+s, n+s+1}, S^{n, n+s, n+s+k}, \dots$  в зависимости от ранга имеют два, три и более источника диссипаций. Источники  $Q_{n, n+k}^n, Q_{n, n+k}^{n+k}, Q_{n, n+1, n+1+k}^{n+1}, Q_{n, n+1, n+1+k}^{n+1+k}, Q_{n, n+s, n+s+k}^n, Q_{n, n+s, n+s+k}^{n+s}, Q_{n, n+s, n+s+k}^{n+s+k}, \dots$  зависят не только от низших, но и от высших кинематических величин.



### Замечание

Как видно из дисперсионной цепочки (2.30)-(2.32) функции распределения одного и того же ранга могут определяться разным количеством источников диссипаций. Например, функции второго ранга  $f^{n,n+1}$  определяются одним источником диссипации  $Q_{n,n+1}^{n+1}$  (2.31), а функции второго ранга  $f^{n,n+k}$ ,  $k > 1$  определяются двумя источниками диссипаций  $Q_{n,n+k}^n$  и  $Q_{n,n+k}^{n+k}$ . Кинематические величины, от которых зависят функции  $f^{n,n+1}$  и  $f^{n,n+k}$ , являются независимыми, тогда почему есть такая «неоднородность»?

В исходной цепочке уравнений Власова (1.30) переход от уравнения для функции распределения с рангом  $R+1$  к уравнению для функции распределения с рангом  $R$  происходит путем интегрирования по соответствующему фазовому подпространству. При таком переходе информация о средних кинематических величинах теряется. Данный вопрос был рассмотрен во Введении на примере первых трёх уравнений из цепочки Власова (i.4). Действительно, такая картина наблюдается для функций распределения из первой группы, то есть для  $f^{n,n+1}$ . Источники диссипаций  $Q_{n,n+1}^{n+1}$  зависят только от кинематических величин низших порядков и такой источник один. Несмотря на то, что кинематические величины  $\vec{r}, \vec{v}, \dot{\vec{v}}, \ddot{\vec{v}}, \dots$  являются независимыми, они имеют строгую иерархию. В дисперсионной цепочке (2.18)-(2.20) присутствуют функции  $f^{n,n+k}$ , принадлежащие второй группе в которой кинематические величины нарушают иерархию. Нарушение иерархии приводит к влиянию источников диссипации ( $Q_{n,n+k}^n$ ,  $Q_{n,n+k}^{n+k}$ ) из разных фазовых подпространств на функцию распределения  $f^{n,n+k}$ . В соответствии с уравнениями (2.31) экстенсив второго ранга источников диссипаций можно представить в виде:

$$\left( \begin{array}{ccccc} \times & Q_{1,2}^2 & Q_{1,3}^1 + Q_{1,3}^3 & Q_{1,4}^1 + Q_{1,4}^4 & Q_{1,5}^1 + Q_{1,5}^5 \\ Q_{1,2}^2 & \times & Q_{2,3}^3 & Q_{2,4}^2 + Q_{2,4}^4 & Q_{2,5}^2 + Q_{2,5}^5 \\ Q_{1,3}^1 + Q_{1,3}^3 & Q_{2,3}^3 & \times & Q_{3,4}^4 & Q_{3,5}^3 + Q_{3,5}^5 \\ Q_{1,4}^1 + Q_{1,4}^4 & Q_{2,4}^2 + Q_{2,4}^4 & Q_{3,4}^4 & \times & Q_{4,5}^5 \\ Q_{1,5}^1 + Q_{1,5}^5 & Q_{2,5}^2 + Q_{2,5}^5 & Q_{3,5}^3 + Q_{3,5}^5 & Q_{4,5}^5 & \times \end{array} \right) \quad (2.34)$$

Зеленым цветом показаны единичные источники диссипации, входящие в уравнения из первой группы. Красный цвет соответствует смешанным функциям распределений из второй группы.

### §2.3 Законы сохранения кинематических величин

Покажем, что из дисперсионной цепочки (2.25)-(2.27) можно получить бесконечную цепочку законов сохранения «вещества», «импульса» и «энергии». Кавычки указывают на формальную схожесть с известными понятиями. Для координатного пространства дисперсионная цепочка дает известные законы сохранения [6, 7]. При рассмотрении высших кинематических величин математическая форма уравнений также сохраняется.

Рассмотрим уравнения первого ранга (2.25) для функций распределения  $f^n$ . Первое уравнение в (2.25) совпадает с уравнением непрерывности для плотности  $f^1(\vec{r}, t)$  массы/заряда. Остальные уравнения из (2.25) имеют математически похожую форму и записаны для плотностей  $f^2(\vec{v}, t), f^3(\dot{\vec{v}}, t), \dots$ . Как было отмечено ранее, уравнения первого ранга (2.25) получаются из уравнений второго ранга (2.26) путем интегрирования по соответствующим фазовым подпространствам. Уравнения (2.25) формально можно трактовать как уравнения, выражающие закон сохранения «вещества».

Уравнения второго ранга (2.26) состоят из двух групп  $f^{n,n+1}$  (первая группа) и  $f^{n,n+k}$ ,  $k > 1$  (вторая группа). Рассмотрим сначала уравнения первой группы, которые можно записать в виде:

$$\frac{\partial f^{n,n+1}}{\partial t} + \operatorname{div}_{\xi^n} \left[ f^{n,n+1} \vec{\xi}^{n+1} \right] + \operatorname{div}_{\xi^{n+1}} \left[ f^{n,n+1} \left\langle \vec{\xi}^{n+2} \right\rangle_{n,n+1} \right] = 0. \quad (2.35)$$

**Теорема 1.** Пусть функция распределения второго ранга  $f^{n,n+1}$ , принадлежащая к первой группе, удовлетворяет уравнению (2.35), тогда для средней кинематической величины  $\left\langle \vec{\xi}^{n+1} \right\rangle_n$  справедливы законы сохранения:

$$\hat{\pi}_n \left\langle \xi_\alpha^{n+1} \right\rangle_n = \left[ \frac{\partial}{\partial t} + \left\langle \xi_\beta^{n+1} \right\rangle_n \frac{\partial}{\partial \xi_\beta^n} \right] \left\langle \xi_\alpha^{n+1} \right\rangle_n = -\frac{1}{f^n} \frac{\partial P_{\alpha\beta}^{n+1}}{\partial \xi_\beta^n} + \left\langle \xi_\alpha^{n+2} \right\rangle_n, \quad (2.36)$$

$$\begin{aligned} & \frac{\partial}{\partial t} \left[ \frac{f^n}{2} \left\langle \xi^{n+1} \right\rangle_n^2 + \frac{1}{2} \operatorname{Tr} P_{\alpha\alpha}^{n+1} \right] + \\ & + \frac{\partial}{\partial \xi_\beta^n} \left[ \frac{f^n}{2} \left\langle \xi^{n+1} \right\rangle_n^2 \left\langle \xi_\beta^{n+1} \right\rangle_n + \frac{1}{2} \left\langle \xi_\beta^{n+1} \right\rangle_n \operatorname{Tr} P_{\alpha\alpha}^{n+1} + \left\langle \xi_\alpha^{n+1} \right\rangle_n P_{\alpha\beta}^{n+1} + \frac{1}{2} \operatorname{Tr} P_{\alpha\alpha\beta}^{n+1} \right] = \\ & = \int_{\Omega_{n+1}} f^{n,n+1} \left\langle \xi_\alpha^{n+2} \right\rangle_{n,n+1} \xi_\alpha^{n+1} d^3 \xi^{n+1}, \end{aligned} \quad (2.37)$$

где  $P_{\alpha\beta}^{n+1}$  и  $P_{\alpha\beta\mu}^{n+1}$  моменты второго и третьего порядка соответственно для кинематической величины  $\vec{\xi}^{n+1}$ :

$$P_{\alpha\beta}^{n+1} \stackrel{\det}{=} \int_{\Omega_{n+1}} \left( \xi_\alpha^{n+1} - \left\langle \xi_\alpha^{n+1} \right\rangle_n \right) \left( \xi_\beta^{n+1} - \left\langle \xi_\beta^{n+1} \right\rangle_n \right) f^{n,n+1} d^3 \xi^{n+1}, \quad (2.38)$$

$$P_{\alpha\beta\mu}^{n+1} \stackrel{\det}{=} \int_{\Omega_{n+1}} \left( \xi_\alpha^{n+1} - \left\langle \xi_\alpha^{n+1} \right\rangle_n \right) \left( \xi_\beta^{n+1} - \left\langle \xi_\beta^{n+1} \right\rangle_n \right) \left( \xi_\mu^{n+1} - \left\langle \xi_\mu^{n+1} \right\rangle_n \right) f^{n,n+1} d^3 \xi^{n+1}. \quad (2.39)$$

### Доказательство теоремы 1

Умножим уравнение (2.35) на  $\vec{\xi}^{n+1}$  и проинтегрируем его по фазовому подпространству  $\Omega_{n+1}$ , получим:

$$\begin{aligned} & \frac{\partial}{\partial t} \int_{\Omega_{n+1}} \xi_\alpha^{n+1} f^{n,n+1} d^3 \xi^{n+1} + \frac{\partial}{\partial \xi_\beta^n} \int_{\Omega_{n+1}} \xi_\alpha^{n+1} \xi_\beta^{n+1} f^{n,n+1} d^3 \xi^{n+1} + \\ & + \int_{\Omega_{n+1}} \xi_\alpha^{n+1} \frac{\partial}{\partial \xi_\beta^{n+1}} \left[ f^{n,n+1} \langle \xi_\beta^{n+2} \rangle_{n,n+1} \right] d^3 \xi^{n+1} = 0, \end{aligned} \quad (2.40)$$

где использована покомпонентная форма записи  $\vec{\xi}^n = \{\xi_1^n, \xi_2^n, \xi_3^n\}$ . Второй интеграл в уравнении (2.40) можно выразить через выражение  $P_{\alpha\beta}^{n+1}$  (2.38), получим

$$\begin{aligned} P_{\alpha\beta}^{n+1}(n) &= \int_{(\infty)}^{\det} (\xi_\alpha^{n+1} - \langle \xi_\alpha^{n+1} \rangle_n) (\xi_\beta^{n+1} - \langle \xi_\beta^{n+1} \rangle_n) f^{n,n+1} d^3 \xi^{n+1} = \int_{(\infty)} \xi_\alpha^{n+1} \xi_\beta^{n+1} f^{n,n+1} d^3 \xi^{n+1} + \\ & - \langle \xi_\beta^{n+1} \rangle_n \int_{(\infty)} \xi_\alpha^{n+1} f^{n,n+1} d^3 \xi^{n+1} - \langle \xi_\alpha^{n+1} \rangle_n \int_{(\infty)} \xi_\beta^{n+1} f^{n,n+1} d^3 \xi^{n+1} + \langle \xi_\alpha^{n+1} \rangle_n \langle \xi_\beta^{n+1} \rangle_n \int_{(\infty)} f^{n,n+1} d^3 \xi^{n+1}, \\ & \int_{\Omega_{n+1}} \xi_\alpha^{n+1} \xi_\beta^{n+1} f^{n,n+1} d^3 \xi^{n+1} = P_{\alpha\beta}^{n+1} + f^n \langle \xi_\beta^{n+1} \rangle_n \langle \xi_\alpha^{n+1} \rangle_n. \end{aligned} \quad (2.41)$$

где  $P_{\alpha\beta}^{n+1}(\vec{\xi}^n) = P_{\alpha\beta}^{n+1}(n)$ . Подставляя (2.41) в (2.40), интегрируя по частям и используя формулу (2.11), получим:

$$\begin{aligned} & \frac{\partial}{\partial t} \left[ f^n \langle \xi_\alpha^{n+1} \rangle_n \right] + \frac{\partial P_{\alpha\beta}^{n+1}}{\partial \xi_\beta^n} + \frac{\partial}{\partial \xi_\beta^n} \left[ f^n \langle \xi_\beta^{n+1} \rangle_n \langle \xi_\alpha^{n+1} \rangle_n \right] - \\ & - \int_{\Omega_{n+1}} f^{n,n+1} \langle \xi_\alpha^{n+2} \rangle_{n,n+1} d^3 \xi^{n+1} = 0, \end{aligned} \quad (2.42)$$

где при интегрировании был учтен быстрый спад функций распределения на бесконечности [6, 7] и условие  $\frac{\partial \xi_\alpha^{n+1}}{\partial \xi_\beta^{n+1}} = \delta_{\alpha\beta}$ . Так как функция первого ранга  $f^n$

удовлетворяет уравнению  $\frac{\partial f^n}{\partial t} = -\frac{\partial}{\partial \xi_\beta^n} \left[ f^n \langle \xi_\beta^{n+1} \rangle_n \right]$  (2.25), выражение (2.42)

примет вид:

$$\hat{\pi}_n \langle \xi_\alpha^{n+1} \rangle_n = \left[ \frac{\partial}{\partial t} + \langle \xi_\beta^{n+1} \rangle_n \frac{\partial}{\partial \xi_\beta^n} \right] \langle \xi_\alpha^{n+1} \rangle_n = -\frac{1}{f^n} \frac{\partial P_{\alpha\beta}^{n+1}}{\partial \xi_\beta^n} + \langle \xi_\alpha^{n+2} \rangle_n. \quad (2.43)$$

Умножим исходное уравнение (2.35) на  $\frac{1}{2}(\xi^{n+1})^2$  и проинтегрируем по пространству  $\Omega_{n+1}$ .

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial t} \int_{(\infty)} (\xi^{n+1})^2 f^{n,n+1} d^3 \xi^{n+1} + \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial \xi_\beta^n} \int_{(\infty)} (\xi^{n+1})^2 \xi_\beta^{n+1} f^{n,n+1} d^3 \xi^{n+1} + \\ & + \frac{1}{2} \int_{(\infty)} (\xi^{n+1})^2 \frac{\partial}{\partial \xi_\beta^{n+1}} \left[ f^{n,n+1} \langle \xi_\beta^{n+2} \rangle_{n,n+1} \right] d^3 \xi^{n+1} = 0, \end{aligned} \quad (2.44)$$

Интегрируя по частям и учитывая, что  $\frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial \xi_\beta^{n+1}} (\xi_\alpha^{n+1} \xi_\alpha^{n+1}) = \xi_\alpha^{n+1} \delta_{\alpha\beta}$

выражение (2.44) примет вид

$$\begin{aligned} & \frac{\partial}{\partial t} \left[ \frac{f^n}{2} \langle (\xi^{n+1})^2 \rangle_n \right] + \frac{\partial}{\partial \xi_\beta^n} \int_{\Omega_{n+1}} \frac{1}{2} (\xi^{n+1})^2 \xi_\beta^{n+1} f^{n,n+1} d^3 \xi^{n+1} - \\ & - \int_{\Omega_{n+1}} f^{n,n+1} \langle \xi_\alpha^{n+2} \rangle_{n,n+1} \xi_\alpha^{n+1} d^3 \xi^{n+1} = 0, \end{aligned} \quad (2.45)$$

где по повторяющимся индексам подразумевается суммирование. Выразим второй интеграл в уравнении (2.45) через тензор  $P_{\alpha\beta\mu}^{n+1}$  (2.39).

$$\begin{aligned}
P_{\alpha\beta\mu}^{n+1}(n) &= \int_{\Omega_{n+1}}^{\det} (\xi_{\alpha}^{n+1} - \langle \xi_{\alpha}^{n+1} \rangle_n) (\xi_{\beta}^{n+1} - \langle \xi_{\beta}^{n+1} \rangle_n) (\xi_{\mu}^{n+1} - \langle \xi_{\mu}^{n+1} \rangle_n) f^{n,n+1} d^3 \xi^{n+1} = \\
&= \int_{\Omega_{n+1}} \xi_{\alpha}^{n+1} \xi_{\beta}^{n+1} \xi_{\mu}^{n+1} f^{n,n+1} d^3 \xi^{n+1} - \langle \xi_{\beta}^{n+1} \rangle_n \int_{\Omega_{n+1}} \xi_{\alpha}^{n+1} \xi_{\mu}^{n+1} f^{n,n+1} d^3 \xi^{n+1} - \\
&- \langle \xi_{\alpha}^{n+1} \rangle_n \int_{\Omega_{n+1}} \xi_{\beta}^{n+1} \xi_{\mu}^{n+1} f^{n,n+1} d^3 \xi^{n+1} + \langle \xi_{\alpha}^{n+1} \rangle_n \langle \xi_{\beta}^{n+1} \rangle_n \int_{\Omega_{n+1}} \xi_{\mu}^{n+1} f^{n,n+1} d^3 \xi^{n+1} - \\
&- \langle \xi_{\mu}^{n+1} \rangle_n \int_{\Omega_{n+1}} \xi_{\alpha}^{n+1} \xi_{\beta}^{n+1} f^{n,n+1} d^3 \xi^{n+1} + \langle \xi_{\beta}^{n+1} \rangle_n \langle \xi_{\mu}^{n+1} \rangle_n \int_{\Omega_{n+1}} \xi_{\alpha}^{n+1} f^{n,n+1} d^3 \xi^{n+1} + \\
&+ \langle \xi_{\alpha}^{n+1} \rangle_n \langle \xi_{\mu}^{n+1} \rangle_n \int_{\Omega_{n+1}} \xi_{\beta}^{n+1} f^{n,n+1} d^3 \xi^{n+1} - \langle \xi_{\alpha}^{n+1} \rangle_n \langle \xi_{\beta}^{n+1} \rangle_n \langle \xi_{\mu}^{n+1} \rangle_n = \\
&= \int_{\Omega_{n+1}} \xi_{\alpha}^{n+1} \xi_{\beta}^{n+1} \xi_{\mu}^{n+1} f^{n,n+1} d^3 \xi^{n+1} - \langle \xi_{\beta}^{n+1} \rangle_n \int_{\Omega_{n+1}} \xi_{\alpha}^{n+1} \xi_{\mu}^{n+1} f^{n,n+1} d^3 \xi^{n+1} - \\
&- \langle \xi_{\alpha}^{n+1} \rangle_n \int_{\Omega_{n+1}} \xi_{\beta}^{n+1} \xi_{\mu}^{n+1} f^{n,n+1} d^3 \xi^{n+1} - \langle \xi_{\mu}^{n+1} \rangle_n \int_{\Omega_{n+1}} \xi_{\alpha}^{n+1} \xi_{\beta}^{n+1} f^{n,n+1} d^3 \xi^{n+1} + \\
&+ 2f^n \langle \xi_{\alpha}^{n+1} \rangle_n \langle \xi_{\beta}^{n+1} \rangle_n \langle \xi_{\mu}^{n+1} \rangle_n.
\end{aligned}$$

Учитывая выражение (2.41), получим

$$\begin{aligned}
P_{\alpha\beta\mu}^{n+1} &= \int_{\Omega_{n+1}} \xi_{\alpha}^{n+1} \xi_{\beta}^{n+1} \xi_{\mu}^{n+1} f^{n,n+1} d^3 \xi^{n+1} - \langle \xi_{\beta}^{n+1} \rangle_n P_{\alpha\mu}^{n+1} - f^n \langle \xi_{\mu}^{n+1} \rangle_n \langle \xi_{\alpha}^{n+1} \rangle_n \langle \xi_{\beta}^{n+1} \rangle_n - \\
&- \langle \xi_{\alpha}^{n+1} \rangle_n P_{\beta\mu}^{n+1} - f^n \langle \xi_{\alpha}^{n+1} \rangle_n \langle \xi_{\beta}^{n+1} \rangle_n \langle \xi_{\mu}^{n+1} \rangle_n - \langle \xi_{\mu}^{n+1} \rangle_n P_{\alpha\beta}^{n+1} - \\
&- f^n \langle \xi_{\beta}^{n+1} \rangle_n \langle \xi_{\alpha}^{n+1} \rangle_n \langle \xi_{\mu}^{n+1} \rangle_n + 2f^n \langle \xi_{\alpha}^{n+1} \rangle_n \langle \xi_{\beta}^{n+1} \rangle_n \langle \xi_{\mu}^{n+1} \rangle_n = \\
&= \int_{\Omega_{n+1}} \xi_{\alpha}^{n+1} \xi_{\beta}^{n+1} \xi_{\mu}^{n+1} f^{n,n+1} d^3 \xi^{n+1} - \langle \xi_{\beta}^{n+1} \rangle_n P_{\alpha\mu}^{n+1} - \langle \xi_{\alpha}^{n+1} \rangle_n P_{\beta\mu}^{n+1} - \langle \xi_{\mu}^{n+1} \rangle_n P_{\alpha\beta}^{n+1} - \\
&- f^n \langle \xi_{\mu}^{n+1} \rangle_n \langle \xi_{\alpha}^{n+1} \rangle_n \langle \xi_{\beta}^{n+1} \rangle_n, \\
&\int_{\Omega_{n+1}} \xi_{\alpha}^{n+1} \xi_{\beta}^{n+1} \xi_{\mu}^{n+1} f^{n,n+1} d^3 \xi^{n+1} = \\
&= P_{\alpha\beta\mu}^{n+1} + \langle \xi_{\beta}^{n+1} \rangle_n P_{\alpha\mu}^{n+1} + \langle \xi_{\alpha}^{n+1} \rangle_n P_{\beta\mu}^{n+1} + \langle \xi_{\mu}^{n+1} \rangle_n P_{\alpha\beta}^{n+1} + f^n \langle \xi_{\mu}^{n+1} \rangle_n \langle \xi_{\alpha}^{n+1} \rangle_n \langle \xi_{\beta}^{n+1} \rangle_n.
\end{aligned} \tag{2.46}$$

Следовательно,

$$\begin{aligned}
\int_{\Omega_{n+1}} (\xi_{\mu}^{n+1})^2 \xi_{\alpha}^{n+1} f^{n,n+1} d^3 \xi^{n+1} &= \text{Tr} P_{\alpha\mu}^{n+1} + 2 \langle \xi_{\alpha}^{n+1} \rangle_n P_{\alpha\mu}^{n+1} + \langle \xi_{\mu}^{n+1} \rangle_n \text{Tr} P_{\alpha\alpha}^{n+1} + \\
&+ f^n \langle \xi_{\mu}^{n+1} \rangle_n \langle \xi_{\alpha}^{n+1} \rangle_n^2.
\end{aligned} \tag{2.47}$$

Первое слагаемое в уравнении (2.45) с учетом выражения (2.41) примет вид:

$$f^n \left\langle (\xi^{n+1})^2 \right\rangle_n = \int_{\Omega_{n+1}} (\xi^{n+1})^2 f^{n,n+1} d^3 \xi^{n+1} = \text{Tr} P_{\alpha\alpha}^{n+1} + f^n \left\langle \xi^{n+1} \right\rangle_n^2. \quad (2.48)$$

Подставляя (2.48) и (2.47) в уравнение (2.45), получим

$$\begin{aligned} & \frac{\partial}{\partial t} \left[ \frac{f^n}{2} \left\langle \xi^{n+1} \right\rangle_n^2 + \frac{1}{2} \text{Tr} P_{\alpha\alpha}^{n+1} \right] + \\ & + \frac{\partial}{\partial \xi_\beta^n} \left[ \frac{f^n}{2} \left\langle \xi^{n+1} \right\rangle_n^2 \left\langle \xi_\beta^{n+1} \right\rangle_n + \frac{1}{2} \left\langle \xi_\beta^{n+1} \right\rangle_n \text{Tr} P_{\alpha\alpha}^{n+1} + \left\langle \xi_\alpha^{n+1} \right\rangle_n P_{\alpha\beta}^{n+1} + \frac{1}{2} \text{Tr} P_{\alpha\alpha\beta}^{n+1} \right] = \\ & = \int_{\Omega_{n+1}} f^{n,n+1} \left\langle \xi_\alpha^{n+2} \right\rangle_{n,n+1} \xi_\alpha^{n+1} d^3 \xi^{n+1}. \end{aligned} \quad (2.49)$$

Теорема 1 доказана.

Выражение (2.36) при  $n=1$  переходит в известное уравнение гидродинамики (i.12), которое можно формально назвать законом сохранения «импульса». Второе уравнение (2.37) при  $n=1$  совпадает с законом сохранения энергии в гидродинамике [6, 7]:

$$\begin{aligned} & \frac{\partial}{\partial t} \left[ \frac{f^1}{2} \left\langle |\vec{v}| \right\rangle^2 + \frac{1}{2} \text{Tr} P_{\alpha\alpha}^2 \right] + \frac{\partial}{\partial x_\beta} \left[ \frac{f^1}{2} \left\langle |\vec{v}| \right\rangle^2 \left\langle v_\beta \right\rangle + \frac{1}{2} \left\langle v_\beta \right\rangle \text{Tr} P_{\alpha\alpha}^2 + \left\langle v_\alpha \right\rangle P_{\alpha\beta}^2 + \frac{1}{2} \text{Tr} P_{\alpha\alpha\beta}^2 \right] = \\ & = \int_{(\infty)} f^{1,2} \left\langle \dot{v}_\alpha \right\rangle v_\alpha d^3 v, \end{aligned} \quad (2.50)$$

где слагаемое  $\frac{f^1}{2}|\langle \vec{v} \rangle|^2$  определяет плотность кинетической энергии;  $\frac{1}{2}\text{Tr} P_{\alpha\alpha}^2$  соответствует плотности внутренней энергии;  $\frac{f^1}{2}|\langle \vec{v} \rangle|^2 \langle v_\beta \rangle$  задает поток кинетической энергии;  $\frac{1}{2}\langle v_\beta \rangle \text{Tr} P_{\alpha\alpha}^2$  – поток внутренней энергии;  $\langle v_\alpha \rangle P_{\alpha\beta}^2$  – характеризует работу сил тяжести;  $\frac{1}{2}\text{Tr} P_{\alpha\beta}^2$  – тепловой поток. Правая часть уравнения (2.50)  $m \int_{(\infty)} f^{1,2} \langle \dot{v}_\alpha \rangle v_\alpha d^3v$  является средним значением работы внешних сил. Таким образом, уравнение (2.37) можно формально назвать законом сохранения «энергии».

Рассмотрим вторую группу уравнений для функций распределения второго ранга  $f^{n,n+k}$ ,  $k > 1$ . В соответствии с (2.26) и (2.31) такие уравнения имеют вид:

$$\frac{\partial f^{n,n+k}}{\partial t} + \text{div}_{\xi^n} \left[ f^{n,n+k} \langle \vec{\xi}^{n+1} \rangle_{n,n+k} \right] + \text{div}_{\xi^{n+k}} \left[ f^{n,n+k} \langle \vec{\xi}^{n+k+1} \rangle_{n,n+k} \right] = 0. \quad (2.51)$$

**Теорема 2.** Пусть функция распределения второго ранга  $f^{n,n+k}$ ,  $k > 1$ , принадлежащая ко второй группе, удовлетворяет уравнению (2.51), тогда для средней кинематической величины  $\langle \vec{\xi}^{n+k} \rangle_n$  справедливы законы сохранения:

$$\hat{\pi}_n \langle \xi_\alpha^{n+k} \rangle_n = \left[ \frac{\partial}{\partial t} + \langle \xi_\beta^{n+1} \rangle_n \frac{\partial}{\partial \xi_\beta^n} \right] \langle \xi_\alpha^{n+k} \rangle_n = -\frac{1}{f^n} \frac{\partial P_{\beta\alpha}^{n+1,n+k}}{\partial \xi_\beta^n} + \langle \xi_\alpha^{n+k+1} \rangle_n, \quad (2.52)$$



$$\begin{aligned}
& \frac{\partial}{\partial t} \left[ \frac{f^n}{2} \langle \xi^{n+k} \rangle_n^2 + \frac{1}{2} \text{Tr} P_{\alpha\alpha}^{n+k} \right] + \\
& + \frac{\partial}{\partial \xi_\beta^n} \left[ \frac{f^n}{2} \langle \xi^{n+k} \rangle_n^2 \langle \xi^{n+1} \rangle_n + \frac{1}{2} \langle \xi_\beta^{n+1} \rangle_n \text{Tr} P_{\alpha\alpha}^{n+k} + P_{\beta\alpha}^{n+1, n+k} \langle \xi_\alpha^{n+k} \rangle_n + \frac{1}{2} \text{Tr} P_{\beta\alpha\alpha}^{n+1, n+k, n+k} \right] = \\
& = \int_{\Omega_{n+k}} f^{n, n+k} \langle \xi_\alpha^{n+k+1} \rangle_{n, n+k} \xi_\alpha^{n+k} d^3 \xi^{n+k}, \tag{2.53}
\end{aligned}$$

где  $P_{\alpha\beta}^{n+1, n+k}$  и  $P_{\beta\alpha\alpha}^{n+1, n+k, n+k}$  моменты второго и третьего порядка соответственно для кинематических величин  $(\bar{\xi}^{n+1}, \bar{\xi}^{n+k})$ :

$$P_{\alpha\beta}^{n+1, n+k} \stackrel{\text{det}}{=} \int_{\Omega_{n+1}} \int_{\Omega_{n+k}} (\xi_\alpha^{n+1} - \langle \xi_\alpha^{n+1} \rangle_n) (\xi_\beta^{n+k} - \langle \xi_\beta^{n+k} \rangle_n) f^{n, n+1, n+k} d^3 \xi^{n+1} d^3 \xi^{n+k}, \tag{2.54}$$

$$P_{\beta\alpha\alpha}^{n+1, n+k, n+k} \stackrel{\text{det}}{=} \int_{\Omega_{n+1}} \int_{\Omega_{n+k}} (\xi_\beta^{n+1} - \langle \xi_\beta^{n+1} \rangle_n) (\xi_\alpha^{n+k} - \langle \xi_\alpha^{n+k} \rangle_n)^2 f^{n, n+1, n+k} d^3 \xi^{n+1} d^3 \xi^{n+k}. \tag{2.55}$$

## Доказательство теоремы 2.

Умножим уравнение (2.51) на  $\bar{\xi}^{n+k}$  и проинтегрируем его по фазовому подпространству  $\Omega_{n+k}$ , получим:

$$\begin{aligned}
& \frac{\partial}{\partial t} \int_{\Omega_{n+k}} \xi_\alpha^{n+k} f^{n, n+k} d^3 \xi^{n+k} + \frac{\partial}{\partial \xi_\beta^n} \int_{\Omega_{n+k}} \xi_\alpha^{n+k} \langle \xi_\beta^{n+1} \rangle_{n, n+k} f^{n, n+k} d^3 \xi^{n+k} + \\
& + \int_{\Omega_{n+k}} \xi_\alpha^{n+k} \frac{\partial}{\partial \xi_\beta^{n+k}} \left[ f^{n, n+k} \langle \xi_\beta^{n+k+1} \rangle_{n, n+k} \right] d^3 \xi^{n+k} = 0, \\
& \langle \xi_\alpha^{n+k} \rangle_n \frac{\partial f^n}{\partial t} + f^n \frac{\partial \langle \xi_\alpha^{n+k} \rangle_n}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial \xi_\beta^n} \int_{\Omega_{n+k}} \xi_\alpha^{n+k} \langle \xi_\beta^{n+1} \rangle_{n, n+k} f^{n, n+k} d^3 \xi^{n+k} - \\
& - \int_{\Omega_{n+k}} f^{n, n+k} \langle \xi_\alpha^{n+k+1} \rangle_{n, n+k} d^3 \xi^{n+k} = 0, \tag{2.56}
\end{aligned}$$

Применяя интегрирование по частям в четвертом слагаемом (2.56) и используя уравнение (2.25), получим

$$f^n \frac{\partial \langle \xi_\alpha^{n+k} \rangle_n}{\partial t} - \langle \xi_\alpha^{n+k} \rangle_n \frac{\partial}{\partial \xi_\beta^n} [f^n \langle \xi_\beta^{n+1} \rangle_n] + \frac{\partial}{\partial \xi_\beta^n} \int_{\Omega_{n+k}} \xi_\alpha^{n+k} \langle \xi_\beta^{n+1} \rangle_{n,n+k} f^{n,n+k} d^3 \xi^{n+k} = f^n \langle \xi_\alpha^{n+k+1} \rangle_n. \quad (2.57)$$

Выразим третье слагаемое в уравнении (2.57) через момент второго порядка  $P_{\alpha\beta}^{n+1,n+k}$  (2.54), определяемый кинематическими величинами разного порядка.

$$\begin{aligned} P_{\alpha\beta}^{n+1,n+k}(n) &= \int_{\Omega_{n+1}} \int_{\Omega_{n+k}} (\xi_\alpha^{n+1} - \langle \xi_\alpha^{n+1} \rangle_n) (\xi_\beta^{n+k} - \langle \xi_\beta^{n+k} \rangle_n) f^{n,n+1,n+k} d^3 \xi^{n+1} d^3 \xi^{n+k} = \\ &= \int_{\Omega_{n+1}} \int_{\Omega_{n+k}} \xi_\alpha^{n+1} \xi_\beta^{n+k} f^{n,n+1,n+k} d^3 \xi^{n+1} d^3 \xi^{n+k} - \langle \xi_\alpha^{n+1} \rangle_n \int_{\Omega_{n+k}} \xi_\beta^{n+k} f^{n,n+k} d^3 \xi^{n+k} - \\ &- \langle \xi_\beta^{n+k} \rangle_n \int_{\Omega_{n+1}} \xi_\alpha^{n+1} f^{n,n+1} d^3 \xi^{n+1} + f^n \langle \xi_\alpha^{n+1} \rangle_n \langle \xi_\beta^{n+k} \rangle_n = \int_{\Omega_{n+1}} \int_{\Omega_{n+k}} \xi_\alpha^{n+1} \xi_\beta^{n+k} f^{n,n+1,n+k} d^3 \xi^{n+1} d^3 \xi^{n+k} - \\ &- f^n \langle \xi_\alpha^{n+1} \rangle_n \langle \xi_\beta^{n+k} \rangle_n, \\ &\int_{\Omega_{n+1}} \int_{\Omega_{n+k}} \xi_\alpha^{n+1} \xi_\beta^{n+k} f^{n,n+1,n+k} d^3 \xi^{n+1} d^3 \xi^{n+k} = P_{\alpha\beta}^{n+1,n+k} + f^n \langle \xi_\alpha^{n+1} \rangle_n \langle \xi_\beta^{n+k} \rangle_n. \end{aligned} \quad (2.58)$$

отсюда

$$\begin{aligned} \int_{\Omega_{n+k}} \xi_\alpha^{n+k} \langle \xi_\beta^{n+1} \rangle_{n,n+k} f^{n,n+k} d^3 \xi^{n+k} &= \int_{\Omega_{n+1}} \int_{\Omega_{n+k}} \xi_\alpha^{n+k} \xi_\beta^{n+1} f^{n,n+1,n+k} d^3 \xi^{n+1} d^3 \xi^{n+k} = \\ &= P_{\beta\alpha}^{n+1,n+k} + f^n \langle \xi_\alpha^{n+k} \rangle_n \langle \xi_\beta^{n+1} \rangle_n. \end{aligned} \quad (2.59)$$

Подставляя (2.59) в уравнение (2.57), получим

$$\begin{aligned} f^n \frac{\partial \langle \xi_\alpha^{n+k} \rangle_n}{\partial t} - \langle \xi_\alpha^{n+k} \rangle_n \frac{\partial}{\partial \xi_\beta^n} [f^n \langle \xi_\beta^{n+1} \rangle_n] + \frac{\partial P_{\beta\alpha}^{n+1,n+k}}{\partial \xi_\beta^n} + \\ + \frac{\partial}{\partial \xi_\beta^n} [f^n \langle \xi_\alpha^{n+k} \rangle_n \langle \xi_\beta^{n+1} \rangle_n] = f^n \langle \xi_\alpha^{n+k+1} \rangle_n, \end{aligned}$$

$$\hat{\pi}_n \langle \xi_\alpha^{n+k} \rangle_n = \left[ \frac{\partial}{\partial t} + \langle \xi_\beta^{n+1} \rangle_n \frac{\partial}{\partial \xi_\beta^n} \right] \langle \xi_\alpha^{n+k} \rangle_n = -\frac{1}{f^n} \frac{\partial P_{\beta\alpha}^{n+1, n+k}}{\partial \xi_\beta^n} + \langle \xi_\alpha^{n+k+1} \rangle_n. \quad (2.60)$$

Построим уравнение закона сохранения «энергии» для второй группы уравнений. Умножим исходное уравнение (2.51) на  $\frac{1}{2}(\xi^{n+k})^2$  и проинтегрируем по пространству  $\Omega_{n+k}$

$$\begin{aligned} & \frac{\partial}{\partial t} \int_{\Omega_{n+k}} \frac{f^{n, n+k}}{2} (\xi^{n+k})^2 d^3 \xi^{n+k} + \frac{\partial}{\partial \xi_\beta^n} \int_{\Omega_{n+k}} (\xi^{n+k})^2 \frac{f^{n, n+k}}{2} \langle \xi_\beta^{n+1} \rangle_{n, n+k} d^3 \xi^{n+k} + \\ & + \int_{\Omega_{n+k}} \frac{(\xi^{n+k})^2}{2} \frac{\partial}{\partial \xi_\beta^{n+k}} \left[ f^{n, n+k} \langle \xi_\beta^{n+k+1} \rangle_{n, n+k} \right] d^3 \xi^{n+k} = 0. \\ & \frac{\partial}{\partial t} \left[ \frac{f^n}{2} \langle (\xi^{n+k})^2 \rangle_n \right] + \frac{\partial}{\partial \xi_\beta^n} \int_{\Omega_{n+k}} (\xi^{n+k})^2 \frac{f^{n, n+k}}{2} \langle \xi_\beta^{n+1} \rangle_{n, n+k} d^3 \xi^{n+k} = \\ & = \int_{\Omega_{n+k}} f^{n, n+k} \langle \xi_\alpha^{n+k+1} \rangle_{n, n+k} \xi_\alpha^{n+k} d^3 \xi^{n+k}. \end{aligned} \quad (2.61)$$

Преобразуем второй интеграл в уравнении (2.61), используя момент третьего порядка  $P_{\beta\alpha}^{n+1, n+k, n+k}$  (2.55) смешанных кинематических величин.

$$\begin{aligned} P_{\beta\alpha}^{n+1, n+k, n+k}(n) &= \int_{\Omega_{n+k}} \int_{\Omega_{n+1}} (\xi_\alpha^{n+k} - \langle \xi_\alpha^{n+k} \rangle_n)^2 (\xi_\beta^{n+1} - \langle \xi_\beta^{n+1} \rangle_n) f^{n, n+1, n+k} d^3 \xi^{n+1} d^3 \xi^{n+k} = \\ &= \int_{\Omega_{n+k}} \int_{\Omega_{n+1}} \xi_\alpha^{n+k} \xi_\alpha^{n+k} \xi_\beta^{n+1} f^{n, n+1, n+k} d^3 \xi^{n+1} d^3 \xi^{n+k} - 2 \langle \xi_\alpha^{n+k} \rangle_n \int_{\Omega_{n+k}} \int_{\Omega_{n+1}} \xi_\alpha^{n+k} \xi_\beta^{n+1} f^{n, n+1, n+k} d^3 \xi^{n+1} d^3 \xi^{n+k} + \\ &+ \langle \xi_\alpha^{n+k} \rangle_n^2 \int_{\Omega_{n+1}} \xi_\beta^{n+1} f^{n, n+1} d^3 \xi^{n+1} - \langle \xi_\beta^{n+1} \rangle_n \int_{\Omega_{n+k}} \int_{\Omega_{n+1}} \xi_\alpha^{n+k} \xi_\alpha^{n+k} f^{n, n+1, n+k} d^3 \xi^{n+1} d^3 \xi^{n+k} \\ &+ 2 \langle \xi_\beta^{n+1} \rangle_n \langle \xi_\alpha^{n+k} \rangle_n \int_{\Omega_{n+k}} \xi_\alpha^{n+k} f^{n, n+k} d^3 \xi^{n+k} - f^n \langle \xi_\beta^{n+1} \rangle_n \langle \xi_\alpha^{n+k} \rangle_n^2. \end{aligned}$$

Из выражений (2.41) и (2.58) следует, что

$$\int_{\Omega_{n+k}} \int_{\Omega_{n+1}} \xi_\alpha^{n+k} \xi_\alpha^{n+k} f^{n,n+1,n+k} d^3 \xi^{n+1} d^3 \xi^{n+k} = P_{\alpha\alpha}^{n+k}, + f^n \langle \xi_\alpha^{n+k} \rangle_n^2,$$

$$\int_{\Omega_{n+k}} \int_{\Omega_{n+1}} \xi_\beta^{n+1} \xi_\alpha^{n+k} f^{n,n+1,n+k} d^3 \xi^{n+1} d^3 \xi^{n+k} = P_{\beta\alpha}^{n+1,n+k} + f^n \langle \xi_\alpha^{n+k} \rangle_n \langle \xi_\beta^{n+1} \rangle_n,$$

отсюда,

$$\begin{aligned} P_{\beta\alpha\alpha}^{n+1,n+k,n+k} &= \int_{\Omega_{n+k}} \int_{\Omega_{n+1}} \xi_\alpha^{n+k} \xi_\alpha^{n+k} \xi_\beta^{n+1} f^{n,n+1,n+k} d^3 \xi^{n+1} d^3 \xi^{n+k} - 2 \langle \xi_\alpha^{n+k} \rangle_n P_{\beta\alpha}^{n+1,n+k} - \\ &- 2 f^n \langle \xi_\alpha^{n+k} \rangle_n^2 \langle \xi_\beta^{n+1} \rangle_n - \langle \xi_\beta^{n+1} \rangle_n P_{\alpha\alpha}^{n+k}, - f^n \langle \xi_\beta^{n+1} \rangle_n \langle \xi_\alpha^{n+k} \rangle_n^2 + 2 f^n \langle \xi_\beta^{n+1} \rangle_n \langle \xi_\alpha^{n+k} \rangle_n^2 = \\ &= \int_{\Omega_{n+k}} \int_{\Omega_{n+1}} \xi_\alpha^{n+k} \xi_\alpha^{n+k} \xi_\beta^{n+1} f^{n,n+1,n+k} d^3 \xi^{n+1} d^3 \xi^{n+k} - 2 \langle \xi_\alpha^{n+k} \rangle_n P_{\beta\alpha}^{n+1,n+k} - \langle \xi_\beta^{n+1} \rangle_n P_{\alpha\alpha}^{n+k} - \\ &- f^n \langle \xi_\beta^{n+1} \rangle_n \langle \xi_\alpha^{n+k} \rangle_n^2, \\ &\int_{\Omega_{n+k}} \int_{\Omega_{n+1}} \xi_\alpha^{n+k} \xi_\alpha^{n+k} \xi_\beta^{n+1} f^{n,n+1,n+k} d^3 \xi^{n+1} d^3 \xi^{n+k} = \\ &= P_{\beta\alpha\alpha}^{n+1,n+k,n+k} + 2 \langle \xi_\alpha^{n+k} \rangle_n P_{\beta\alpha}^{n+1,n+k} + \langle \xi_\beta^{n+1} \rangle_n P_{\alpha\alpha}^{n+k} + f^n \langle \xi_\beta^{n+1} \rangle_n \langle \xi_\alpha^{n+k} \rangle_n^2. \end{aligned} \quad (2.62)$$

Используя (2.62) второе слагаемое в уравнении (2.61) примет вид:

$$\begin{aligned} \int_{\Omega_{n+k}} (\xi^{n+k})^2 f^{n,n+k} \langle \xi_\beta^{n+1} \rangle_{n,n+k} d^3 \xi^{n+k} &= \int_{\Omega_{n+1}} \int_{\Omega_{n+k}} (\xi^{n+k})^2 \xi_\beta^{n+1} f^{n,n+1,n+k} d^3 \xi^{n+k} d^3 \xi^{n+1} = \\ &= \text{Tr} P_{\beta\alpha\alpha}^{n+1,n+k,n+k} + \langle \xi_\beta^{n+1} \rangle_n \text{Tr} P_{\alpha\alpha}^{n+k}, + 2 P_{\beta\alpha}^{n+1,n+k} \langle \xi_\alpha^{n+k} \rangle_n + f^n \langle \xi_\beta^{n+1} \rangle_n \langle \xi_\alpha^{n+k} \rangle_n^2. \end{aligned} \quad (2.63)$$

Первое слагаемое в уравнении (2.61) можно выразить через момент второго порядка (2.41)

$$f^n \langle (\xi^{n+k})^2 \rangle_n = \sum_\alpha \int_{\Omega_{n+k}} \xi_\alpha^{n+k} \xi_\alpha^{n+k} f^{n,n+k} d^3 \xi^{n+k} = \text{Tr} P_{\alpha\alpha}^{n+k} + f^n \langle \xi_\alpha^{n+k} \rangle_n^2. \quad (2.64)$$

Подставляя (2.63), (2.64) в уравнение (2.61), получим

$$\begin{aligned}
& \frac{\partial}{\partial t} \left[ \frac{f^n}{2} \langle \xi^{n+k} \rangle_n^2 + \frac{1}{2} \text{Tr} P_{\alpha\alpha}^{n+k} \right] + \\
& + \frac{\partial}{\partial \xi_\beta^n} \left[ \frac{f^n}{2} \langle \xi^{n+k} \rangle_n^2 \langle \xi^{n+1} \rangle_n + \frac{1}{2} \langle \xi_\beta^{n+1} \rangle_n \text{Tr} P_{\alpha\alpha}^{n+k} + P_{\beta\alpha}^{n+1, n+k} \langle \xi_\alpha^{n+k} \rangle_n + \frac{1}{2} \text{Tr} P_{\beta\alpha\alpha}^{n+1, n+k, n+k} \right] = \\
& = \int_{\Omega_{n+k}} f^{n, n+k} \langle \xi_\alpha^{n+k+1} \rangle_{n, n+k} \xi_\alpha^{n+k} d^3 \xi^{n+k}. \tag{2.65}
\end{aligned}$$

Теорема 2 доказана.

Уравнение (2.53) выражает закон сохранения «энергии» для второй группы кинематических величин. Из сравнения выражений (2.37) и (2.53) видно, что закон сохранения «энергии» для первой и второй группы имеет схожий вид. При  $k=1$  уравнение (2.53) формально переходит в уравнение (2.37). Уравнения (2.52) и (2.53) содержат величины  $P_{\beta\alpha}^{n+1, n+k}$  и  $P_{\beta\alpha\alpha}^{n+1, n+k, n+k}$ , характеризующие их принадлежность ко второй группе. В отличие от моментов  $P_{\alpha\beta}^{n+1}$  и  $P_{\alpha\alpha\beta}^{n+1}$ , входящих в уравнения первой группы (2.36) и (2.37), моменты  $P_{\beta\alpha}^{n+1, n+k}$  и  $P_{\beta\alpha\alpha}^{n+1, n+k, n+k}$  записаны для кинематических величин разного порядка (вторая группа). Полученное уравнение (2.52) и уравнение (2.36) имеют схожую форму. При  $k=1$  тензор  $P_{\beta\alpha}^{n+1, n+k}$  вырождается в тензор  $P_{\alpha\beta}^{n+1}$  и уравнение (2.52) (для второй группы) переходит в уравнение (2.36) (для первой группы).

Для функций распределения третьего и высшего ранга можно проделать аналогичные выкладки и получить уравнения законов «сохранения» типа (2.36)/(2.52) и (2.37)/(2.53). Рассмотренные выше функции распределения второго ранга  $f^{n_1, n_2}$ , зависели от двух кинематических величин  $\vec{\xi}^{n_1}$  и  $\vec{\xi}^{n_2}$ , поэтому интегрирование в выражениях (2.40), (2.44), (2.56), (2.61) производилось только по одной переменной. В результате получались законы сохранения (2.36), (2.37), (2.52), (2.53) для функций одной

кинематической переменной. Функции распределения третьего ранга  $f^{n_1, n_2, n_3}$  зависят от трех кинематических величин  $\vec{\xi}^{n_1}$ ,  $\vec{\xi}^{n_2}$ ,  $\vec{\xi}^{n_3}$ . Следовательно, интегрирование можно производить по одной или по двум кинематическим величинам. При интегрировании по двум переменным получатся законы сохранения, зависящие от одной кинематической величины. Такие законы сохранения совпадут с полученными уравнениями (2.36), (2.37), (2.52) и (2.53). Новые уравнения законов сохранения можно получить, если интегрировать уравнения третьего ранга только по одной кинематической переменной.

Рассмотрим функции распределения третьего ранга  $f^{n, n+1, n+2}$ , принадлежащие первой группе (один источник диссипаций  $Q_{n, n+1, n+2}^{n+2}$ ) (2.27), (2.32).

$$\frac{\partial f^{n, n+1, n+2}}{\partial t} + \xi_\beta^{n+1} \frac{\partial f^{n, n+1, n+2}}{\partial \xi_\beta^n} + \xi_\beta^{n+2} \frac{\partial f^{n, n+1, n+2}}{\partial \xi_\beta^{n+1}} + \frac{\partial}{\partial \xi_\beta^{n+2}} \left[ f^{n, n+1, n+2} \langle \xi_\beta^{n+3} \rangle_{n, n+1, n+2} \right] = 0. \quad (2.66)$$

**Теорема 3.** Пусть функция распределения третьего ранга  $f^{n, n+1, n+2}$ , принадлежащая первой группе, удовлетворяет уравнению (2.66), тогда для средних кинематических величин  $\langle \vec{\xi}^n \rangle_{n+1, n+2}$ ,  $\langle \vec{\xi}^{n+1} \rangle_{n, n+2}$  и  $\langle \vec{\xi}^{n+2} \rangle_{n, n+1}$  справедливы уравнения движения:

$$\hat{\pi}_{n+1, n+2} \langle \xi_\alpha^n \rangle_{n+1, n+2} = -\frac{1}{f^{n+1, n+2}} \frac{\partial P_{\alpha\beta}^{n, n+3}}{\partial \xi_\beta^{n+2}} + \xi_\alpha^{n+1}, \quad (2.67)$$

$$\hat{\pi}_{n, n+2} \langle \xi_\alpha^{n+1} \rangle_{n, n+2} = -\frac{1}{f^{n, n+2}} \left( \frac{\partial P_{\alpha\beta}^{n+1}}{\partial \xi_\beta^n} + \frac{\partial P_{\alpha\beta}^{n+1, n+3}}{\partial \xi_\beta^{n+2}} \right) + \xi_\alpha^{n+2}, \quad (2.68)$$

$$\hat{\pi}_{n, n+1} \langle \xi_\alpha^{n+2} \rangle_{n, n+1} = -\frac{1}{f^{n, n+1}} \frac{\partial P_{\alpha\beta}^{n+2}}{\partial \xi_\beta^{n+1}} + \langle \xi_\alpha^{n+3} \rangle_{n, n+1}, \quad (2.69)$$

где  $P_{\alpha\beta}^{n+2}$ ,  $P_{\alpha\beta}^{n,n+3}$ ,  $P_{\alpha\beta}^{n+1}$ ,  $P_{\alpha\beta}^{n+1,n+3}$  моменты второго порядка, определенные как

$$P_{\alpha\beta}^{n+2} = P_{\alpha\beta}^{n+2}(\vec{\xi}^n, \vec{\xi}^{n+1}) = P_{\alpha\beta}^{\det}(n, n+1). \text{ Аналогично } P_{\alpha\beta}^{n,n+3}(n+1, n+2), P_{\alpha\beta}^{n+1}(n, n+2) \text{ и } P_{\alpha\beta}^{n+1,n+3}(n, n+2).$$

### Доказательство теоремы 3.

Умножим уравнение (3.12) на  $\vec{\xi}^{n+2}$  и проинтегрируем его по пространству  $\Omega_{n+2}$ :

$$\begin{aligned} & \frac{\partial}{\partial t} \left[ f^{n,n+1} \langle \xi_\alpha^{n+2} \rangle_{n,n+1} \right] + \frac{\partial}{\partial \xi_\beta^n} \int_{\Omega_{n+2}} f^{n,n+1,n+2} \xi_\alpha^{n+2} \xi_\beta^{n+1} d^3 \xi^{n+2} + \\ & + \frac{\partial}{\partial \xi_\beta^{n+1}} \int_{\Omega_{n+2}} f^{n,n+1,n+2} \xi_\alpha^{n+2} \xi_\beta^{n+2} d^3 \xi^{n+2} = f^{n,n+1} \langle \xi_\alpha^{n+3} \rangle_{n,n+1}. \end{aligned} \quad (2.70)$$

Первый интеграл в уравнении (2.70) равен  $\langle \xi_\alpha^{n+2} \rangle_{n,n+1} \xi_\beta^{n+1} f^{n,n+1}$ . Значение второго интеграла выразим через момент второго порядка для кинематических величин одного порядка. Если функция распределения третьего ранга  $f^{n,n+1,n+2}$ , тогда по аналогии с (2.41) тензор  $P_{\alpha\beta}^{n+2}(n, n+1)$  для кинематических величин порядка  $n+2$  будет иметь вид:

$$\begin{aligned} P_{\alpha\beta}^{n+2}(n, n+1) &= \int_{\Omega_{n+2}} \left( \xi_\alpha^{n+2} - \langle \xi_\alpha^{n+2} \rangle_{n,n+1} \right) \left( \xi_\beta^{n+2} - \langle \xi_\beta^{n+2} \rangle_{n,n+1} \right) f^{n,n+1,n+2} d^3 \xi^{n+2} = \\ &= \int_{\Omega_{n+2}} \xi_\alpha^{n+2} \xi_\beta^{n+2} f^{n,n+1,n+2} d^3 \xi^{n+2} - f^{n,n+1} \langle \xi_\beta^{n+2} \rangle_{n,n+1} \langle \xi_\alpha^{n+2} \rangle_{n,n+1}, \end{aligned} \quad (2.71)$$

где  $P_{\alpha\beta}^{n+2}(\vec{\xi}^n, \vec{\xi}^{n+1}) = P_{\alpha\beta}^{\det}(n, n+1)$ . Частную производную  $\frac{\partial}{\partial t} f^{n,n+1}$  выразим из уравнения (2.35)

$$\frac{\partial f^{n,n+1}}{\partial t} = -\xi_\beta^{n+1} \frac{\partial f^{n,n+1}}{\partial \xi_\beta^n} - \frac{\partial}{\partial \xi_\beta^{n+1}} \left[ f^{n,n+1} \langle \xi_\beta^{n+2} \rangle_{n,n+1} \right]. \quad (2.72)$$

Подставляя (2.71) и (2.72) в уравнение (2.70), получим:

$$\hat{\pi}_{n,n+1} \langle \xi_\alpha^{n+2} \rangle_{n,n+1} = \left[ \frac{\partial}{\partial t} + \xi_\beta^{n+1} \frac{\partial}{\partial \xi_\beta^n} + \langle \xi_\beta^{n+2} \rangle_{n,n+1} \frac{\partial}{\partial \xi_\beta^{n+1}} \right] \langle \xi_\alpha^{n+2} \rangle_{n,n+1} = -\frac{1}{f^{n,n+1}} \frac{\partial P_{\alpha\beta}^{n+2}}{\partial \xi_\beta^{n+1}} + \langle \xi_\alpha^{n+3} \rangle_{n,n+1}. \quad (2.73)$$

Умножим уравнение (2.66) на величину  $\bar{\xi}^n$  и проинтегрируем по  $\Omega_n$ , получим

$$\begin{aligned} & \frac{\partial}{\partial t} \left[ f^{n+1,n+2} \langle \xi_\alpha^n \rangle_{n+1,n+2} \right] + \frac{\partial}{\partial \xi_\beta^{n+1}} \left[ \langle \xi_\alpha^n \rangle_{n+1,n+2} \xi_\beta^{n+2} f^{n+1,n+2} \right] + \\ & + \frac{\partial}{\partial \xi_\beta^{n+2}} \int_{\Omega_n} \xi_\alpha^n \langle \xi_\beta^{n+3} \rangle_{n,n+1,n+2} f^{n,n+1,n+2} d^3 \xi^n = \xi_\alpha^{n+1} f^{n+1,n+2}. \end{aligned} \quad (2.74)$$

Учитывая, что

$$\int_{\Omega_n} \xi_\alpha^n \langle \xi_\beta^{n+3} \rangle_{n,n+1,n+2} f^{n,n+1,n+2} d^3 \xi^n = \int_{\Omega_{n+3}} \int_{\Omega_n} \xi_\alpha^n \xi_\beta^{n+3} f^{n,n+1,n+2,n+3} d^3 \xi^n d^3 \xi^{n+3} = \quad (2.75)$$

$$= P_{\alpha\beta}^{n,n+3} (n+1, n+2) + f^{n+1,n+2} \langle \xi_\alpha^n \rangle_{n+1,n+2} \langle \xi_\beta^{n+3} \rangle_{n+1,n+2},$$

$$\frac{\partial f^{n+1,n+2}}{\partial t} = -\xi_\beta^{n+2} \frac{\partial f^{n+1,n+2}}{\partial \xi_\beta^{n+1}} - \frac{\partial}{\partial \xi_\beta^{n+2}} \left[ f^{n+1,n+2} \langle \xi_\beta^{n+3} \rangle_{n+1,n+2} \right],$$

уравнение (2.74) принимает вид:



$$\begin{aligned}
& f^{n+1,n+2} \frac{\partial \langle \xi_\alpha^n \rangle_{n+1,n+2}}{\partial t} + f^{n+1,n+2} \xi_\beta^{n+2} \frac{\partial}{\partial \xi_\beta^{n+1}} \langle \xi_\alpha^n \rangle_{n+1,n+2} + f^{n+1,n+2} \langle \xi_\beta^{n+3} \rangle_{n+1,n+2} \frac{\partial}{\partial \xi_\beta^{n+2}} \langle \xi_\alpha^n \rangle_{n+1,n+2} = \\
& = \xi_\alpha^{n+1} f^{n+1,n+2} - \frac{\partial P_{\alpha\beta}^{n,n+3}}{\partial \xi_\beta^{n+2}}, \\
& \left[ \frac{\partial}{\partial t} + \xi_\beta^{n+2} \frac{\partial}{\partial \xi_\beta^{n+1}} + \langle \xi_\beta^{n+3} \rangle_{n+1,n+2} \frac{\partial}{\partial \xi_\beta^{n+2}} \right] \langle \xi_\alpha^n \rangle_{n+1,n+2} = -\frac{1}{f^{n+1,n+2}} \frac{\partial P_{\alpha\beta}^{n,n+3}}{\partial \xi_\beta^{n+2}} + \xi_\alpha^{n+1}. \quad (2.76)
\end{aligned}$$

Умножим уравнение (2.66) на величину  $\bar{\xi}^{n+1}$  и проинтегрируем по  $\Omega_{n+1}$ ,  
получим

$$\begin{aligned}
& \frac{\partial}{\partial t} \left[ \langle \xi_\alpha^{n+1} \rangle_{n,n+2} f^{n,n+2} \right] + \frac{\partial}{\partial \xi_\beta^n} \int_{\Omega_{n+1}} \xi_\alpha^{n+1} \xi_\beta^{n+1} f^{n,n+1,n+2} d^3 \xi^{n+1} + \\
& + \frac{\partial}{\partial \xi_\beta^{n+2}} \int_{\Omega_{n+1}} \xi_\alpha^{n+1} \langle \xi_\beta^{n+3} \rangle_{n,n+1,n+2} f^{n,n+1,n+2} d^3 \xi^{n+1} = \\
& = \xi_\alpha^{n+2} f^{n,n+2}. \quad (2.77)
\end{aligned}$$

Учитывая, что

$$\begin{aligned}
& \int_{\Omega_{n+1}} \xi_\alpha^{n+1} \xi_\beta^{n+1} f^{n,n+1,n+2} d^3 \xi^{n+1} = P_{\alpha\beta}^{n+1}(n,n+2) + f^{n,n+2} \langle \xi_\alpha^{n+1} \rangle_{n,n+2} \langle \xi_\beta^{n+1} \rangle_{n,n+2}, \quad (2.78) \\
& \int_{\Omega_{n+1}} \xi_\alpha^{n+1} \langle \xi_\beta^{n+3} \rangle_{n,n+1,n+2} f^{n,n+1,n+2} d^3 \xi^{n+1} = \int_{\Omega_{n+3}} \int_{\Omega_{n+1}} \xi_\alpha^{n+1} \xi_\beta^{n+3} f^{n,n+1,n+2,n+3} d^3 \xi^{n+1} d^3 \xi^{n+3}, \\
& \int_{\Omega_{n+3}} \int_{\Omega_{n+1}} \xi_\alpha^{n+1} \xi_\beta^{n+3} f^{n,n+1,n+2,n+3} d^3 \xi^{n+1} d^3 \xi^{n+3} = P_{\alpha\beta}^{n+1,n+3}(n,n+2) + f^{n,n+2} \langle \xi_\alpha^{n+1} \rangle_{n,n+2} \langle \xi_\beta^{n+3} \rangle_{n,n+2}, \\
& \frac{\partial f^{n,n+2}}{\partial t} = -\frac{\partial}{\partial \xi_\beta^n} \left[ \langle \xi_\beta^{n+1} \rangle_{n,n+2} f^{n,n+2} \right] - \frac{\partial}{\partial \xi_\beta^{n+2}} \left[ f^{n,n+2} \langle \xi_\beta^{n+3} \rangle_{n,n+2} \right],
\end{aligned}$$

получим

$$\begin{aligned}
& f^{n,n+2} \frac{\partial}{\partial t} \langle \xi_\alpha^{n+1} \rangle_{n,n+2} + f^{n,n+2} \langle \xi_\beta^{n+1} \rangle_{n,n+2} \frac{\partial}{\partial \xi_\beta^n} \langle \xi_\alpha^{n+1} \rangle_{n,n+2} + f^{n,n+2} \langle \xi_\beta^{n+3} \rangle_{n,n+2} \frac{\partial}{\partial \xi_\beta^{n+2}} \langle \xi_\alpha^{n+1} \rangle_{n,n+2} = \\
& = -\frac{\partial P_{\alpha\beta}^{n+1}}{\partial \xi_\beta^n} - \frac{\partial P_{\alpha\beta}^{n+1,n+3}}{\partial \xi_\beta^{n+2}} + \xi_\alpha^{n+2} f^{n,n+2}, \\
& \left[ \frac{\partial}{\partial t} + \langle \xi_\beta^{n+1} \rangle_{n,n+2} \frac{\partial}{\partial \xi_\beta^n} + \langle \xi_\beta^{n+3} \rangle_{n,n+2} \frac{\partial}{\partial \xi_\beta^{n+2}} \right] \langle \xi_\alpha^{n+1} \rangle_{n,n+2} = -\frac{1}{f^{n,n+2}} \left( \frac{\partial P_{\alpha\beta}^{n+1}}{\partial \xi_\beta^n} + \frac{\partial P_{\alpha\beta}^{n+1,n+3}}{\partial \xi_\beta^{n+2}} \right) + \xi_\alpha^{n+2}.
\end{aligned} \tag{2.79}$$

Теорема 3 доказана.

Уравнения движения (2.67) и (2.69) зависят от функций распределения второго ранга, принадлежащих к первой группе. Функции  $f^{n,n+1}$  и  $f^{n+1,n+2}$  удовлетворяют дисперсионным уравнениям (2.31):

$$\hat{\pi}_{n,n+1} \mathcal{S}^{n,n+1} = -Q_{n,n+1}^{n+1}, \quad \hat{\pi}_{n+1,n+2} \mathcal{S}^{n+1,n+2} = -Q_{n+1,n+2}^{n+2},$$

которые содержат только один источник диссипаций. Величина  $Q_{n,n+1}^{n+1}$  соответствует плотности источников поля  $\langle \vec{\xi}^{n+2} \rangle_{n,n+1}$ , от которого зависит тензор  $P_{\alpha\beta}^{n+2}$  (2.69). Аналогично величина  $Q_{n+1,n+2}^{n+2}$  определяет плотность источников поля  $\langle \vec{\xi}^{n+3} \rangle_{n+1,n+2}$ , которое входит в тензор  $P_{\alpha\beta}^{n,n+3}$ . В отличие от уравнения (2.69), уравнения (2.67) записано для средней кинематической величины  $\langle \xi_\alpha^n \rangle_{n+1,n+2}$ , зависящей от кинематических величин высшего порядка (вторая группа). В результате тензор  $P_{\alpha\beta}^{n,n+3}$  в уравнении (2.67) зависит от кинематических величин разного порядка.

Уравнение движения (2.68) содержит функцию распределения  $f^{n,n+2}$ , принадлежащую второй группе и удовлетворяющую дисперсионному уравнению (2.31)

$$\hat{\pi}_{n,n+2} S^{n,n+2} = -(Q_{n,n+2}^n + Q_{n,n+2}^{n+2}),$$

которое содержит два источника диссипаций. Величины  $Q_{n,n+2}^n$  и  $Q_{n,n+2}^{n+2}$  определяются векторными полями  $\langle \vec{\xi}^{n+1} \rangle_{n,n+2}$  и  $\langle \vec{\xi}^{n+3} \rangle_{n,n+2}$  соответственно, от которых зависят тензоры  $P_{\alpha\beta}^{n+1}$  и  $P_{\alpha\beta}^{n+1,n+3}$  (2.68). Уравнения (2.67) и (2.68) записаны для кинематических величин  $\langle \xi_\alpha^n \rangle_{n+1,n+2}$  и  $\langle \xi_\alpha^{n+1} \rangle_{n,n+2}$  принадлежащих второй группе, но с разным количеством источников диссипаций. Уравнения (2.69) и (2.36) похожи, так как принадлежат первой группе с одним источником диссипаций.

Во второй группе имеется несколько типов функций распределений третьего ранга:  $f^{n,n+1,n+1+k}$ ,  $f^{n,n+s,n+s+1}$ ,  $f^{n,n+s,n+s+k}$ , где  $k, s \in [2, +\infty)$ . Не ограничивая общности, рассмотрим только уравнение для функций распределения третьего ранга  $f^{n,n+1,n+1+k}$

$$\begin{aligned} & \frac{\partial f^{n,n+1,n+1+k}}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial \xi_\beta^n} \left[ \xi_\beta^{n+1} f^{n,n+1,n+1+k} \right] + \frac{\partial}{\partial \xi_\beta^{n+1}} \left[ f^{n,n+1,n+1+k} \langle \xi_\beta^{n+2} \rangle_{n,n+1,n+1+k} \right] + \\ & + \frac{\partial}{\partial \xi_\beta^{n+1+k}} \left[ f^{n,n+1,n+1+k} \langle \xi_\beta^{n+2+k} \rangle_{n,n+1,n+1+k} \right] = 0. \end{aligned} \quad (2.80)$$

**Теорема 4.** Пусть функция распределения третьего ранга  $f^{n,n+1,n+1+k}$ ,  $k > 1$ , принадлежащая второй группе, удовлетворяет уравнению (2.80), тогда для средних кинематических величин  $\langle \vec{\xi}^n \rangle_{n+1,n+1+k}$ ,  $\langle \vec{\xi}^{n+1} \rangle_{n,n+1+k}$  и  $\langle \vec{\xi}^{n+1+k} \rangle_{n,n+1}$  справедливы уравнения движения:

$$\hat{\pi}_{n+1,n+1+k} \langle \xi_\alpha^n \rangle_{n+1,n+1+k} = -\frac{1}{f^{n+1,n+1+k}} \left( \frac{\partial P_{\alpha\beta}^{n,n+2}}{\partial \xi_\beta^{n+1}} + \frac{\partial P_{\alpha\beta}^{n,n+2+k}}{\partial \xi_\beta^{n+1+k}} \right) + \xi_\alpha^{n+1}, \quad (2.81)$$

$$\hat{\pi}_{n,n+1+k} \langle \xi_\alpha^{n+1} \rangle_{n,n+1+k} = -\frac{1}{f^{n,n+1+k}} \left( \frac{\partial P_{\alpha\beta}^{n+1}}{\partial \xi_\beta^n} + \frac{\partial P_{\alpha\beta}^{n+1,n+2+k}}{\partial \xi_\beta^{n+1+k}} \right) + \langle \xi_\alpha^{n+2} \rangle_{n,n+1+k}, \quad (2.82)$$

$$\hat{\pi}_{n,n+1} \langle \xi_\alpha^{n+1+k} \rangle_{n,n+1} = -\frac{1}{f^{n,n+1}} \frac{\partial P_{\beta\alpha}^{n+2,n+1+k}}{\partial \xi_\beta^{n+1}} + \langle \xi_\alpha^{n+2+k} \rangle_{n,n+1}, \quad (2.83)$$

где  $P_{\alpha\beta}^{n,n+2}$ ,  $P_{\alpha\beta}^{n,n+2+k}$ ,  $P_{\alpha\beta}^{n+1}$ ,  $P_{\alpha\beta}^{n+1,n+2+k}$  и  $P_{\alpha\beta}^{n+2,n+1+k}$  моменты второго порядка, определенные как  $P_{\alpha\beta}^{n,n+2}(n+1, n+1+k)$ ,  $P_{\alpha\beta}^{n,n+2+k}(n+1, n+1+k)$ ,  $P_{\alpha\beta}^{n+1}(n, n+1+k)$ ,  $P_{\alpha\beta}^{n+2,n+1+k}(n, n+1+k)$  и  $P_{\alpha\beta}^{n+2,n+1+k}(n, n+1)$ .

#### Доказательство теоремы 4.

Умножая выражение (2.80) на  $\vec{\xi}^{n+1+k}$  и производя интегрирование по подпространству  $\Omega_{n+1+k}$ , получим:

$$\begin{aligned} & \frac{\partial}{\partial t} \left[ \langle \xi_\alpha^{n+1+k} \rangle_{n,n+1} f^{n,n+1} \right] + \xi_\beta^{n+1} \frac{\partial}{\partial \xi_\beta^n} \left[ \langle \xi_\alpha^{n+1+k} \rangle_{n,n+1} f^{n,n+1} \right] + \\ & + \frac{\partial}{\partial \xi_\beta^{n+1}} \int_{\Omega_{n+1+k}} f^{n,n+1,n+1+k} \xi_\alpha^{n+1+k} \langle \xi_\beta^{n+2} \rangle_{n,n+1,n+1+k} d^3 \xi^{n+1+k} = f^{n,n+1} \langle \xi_\alpha^{n+2+k} \rangle_{n,n+1}. \end{aligned} \quad (2.84)$$

Учитывая, что

$$\begin{aligned} & \int_{\Omega_{n+1+k}} f^{n,n+1,n+1+k} \xi_\alpha^{n+1+k} \langle \xi_\beta^{n+2} \rangle_{n,n+1,n+1+k} d^3 \xi^{n+1+k} = \int_{\Omega_{n+2}} \int_{\Omega_{n+1+k}} f^{n,n+1,n+2,n+1+k} \xi_\alpha^{n+1+k} \xi_\beta^{n+2} d^3 \xi^{n+1+k} d^3 \xi^{n+2} \\ & = P_{\alpha\beta}^{n+2,n+1+k}(n, n+1) + f^{n,n+1} \langle \xi_\beta^{n+k+1} \rangle_{n,n+1} \langle \xi_\alpha^{n+2} \rangle_{n,n+1}, \end{aligned}$$

уравнение (2.84) примет вид:

$$\begin{aligned}
& f^{n,n+1} \frac{\partial \langle \xi_\alpha^{n+1+k} \rangle_{n,n+1}}{\partial t} + \langle \xi_\alpha^{n+1+k} \rangle_{n,n+1} \frac{\partial f^{n,n+1}}{\partial t} + \xi_\beta^{n+1} \frac{\partial}{\partial \xi_\beta^n} \left[ \langle \xi_\alpha^{n+1+k} \rangle_{n,n+1} f^{n,n+1} \right] + \\
& + \frac{\partial}{\partial \xi_\beta^{n+1}} \left[ f^{n,n+1} \langle \xi_\alpha^{n+k+1} \rangle_{n,n+1} \langle \xi_\beta^{n+2} \rangle_{n,n+1} \right] = - \frac{\partial P_{\beta\alpha}^{n+2,n+1+k}}{\partial \xi_\beta^{n+1}} + f^{n,n+1} \langle \xi_\alpha^{n+2+k} \rangle_{n,n+1}, \\
& \left[ \frac{\partial}{\partial t} + \xi_\beta^{n+1} \frac{\partial}{\partial \xi_\beta^n} + \langle \xi_\beta^{n+2} \rangle_{n,n+1} \frac{\partial}{\partial \xi_\beta^{n+1}} \right] \langle \xi_\alpha^{n+k+1} \rangle_{n,n+1} = - \frac{1}{f^{n,n+1}} \frac{\partial P_{\beta\alpha}^{n+2,n+1+k}}{\partial \xi_\beta^{n+1}} + \langle \xi_\alpha^{n+2+k} \rangle_{n,n+1}. \quad (2.85)
\end{aligned}$$

Умножая уравнение (2.80) на  $\bar{\xi}^{n+1}$  и производя интегрирование по подпространству  $\Omega_{n+1}$ , получим:

$$\begin{aligned}
& \frac{\partial}{\partial t} \left[ \langle \xi_\alpha^{n+1} \rangle_{n,n+1+k} f^{n,n+1+k} \right] + \frac{\partial}{\partial \xi_\beta^n} \int_{\Omega_{n+1}} \xi_\alpha^{n+1} \xi_\beta^{n+1} f^{n,n+1,n+1+k} d^3 \xi^{n+1} + \\
& + \frac{\partial}{\partial \xi_\beta^{n+1+k}} \int_{\Omega_{n+1}} f^{n,n+1,n+1+k} \xi_\alpha^{n+1} \langle \xi_\beta^{n+2+k} \rangle_{n,n+1,n+1+k} d^3 \xi^{n+1} = f^{n,n+1+k} \langle \xi_\alpha^{n+2} \rangle_{n,n+1+k}. \quad (2.86)
\end{aligned}$$

Учитывая, что

$$\begin{aligned}
& \int_{\Omega_{n+1}} f^{n,n+1,n+1+k} \xi_\alpha^{n+1} \langle \xi_\beta^{n+2+k} \rangle_{n,n+1,n+1+k} d^3 \xi^{n+1} = \int_{\Omega_{n+2+k}} \int_{\Omega_{n+1}} f^{n,n+1,n+1+k,n+2+k} \xi_\alpha^{n+1} \xi_\beta^{n+2+k} d^3 \xi^{n+1} d^3 \xi^{n+2+k} = \\
& = P_{\alpha\beta}^{n+1,n+2+k}(n,n+1+k) + f^{n,n+1+k} \langle \xi_\alpha^{n+1} \rangle_{n,n+1+k} \langle \xi_\beta^{n+2+k} \rangle_{n,n+1+k}, \quad (2.87)
\end{aligned}$$

$$\int_{\Omega_{n+1}} \xi_\alpha^{n+1} \xi_\beta^{n+1} f^{n,n+1,n+1+k} d^3 \xi^{n+1} = P_{\alpha\beta}^{n+1}(n+1+k) + f^{n,n+1+k} \langle \xi_\alpha^{n+1} \rangle_{n,n+1+k} \langle \xi_\beta^{n+1} \rangle_{n,n+1+k},$$

$$\frac{\partial f^{n,n+1+k}}{\partial t} = - \frac{\partial}{\partial \xi_\beta^n} \left[ \langle \xi_\beta^{n+1} \rangle_{n,n+1+k} f^{n,n+1+k} \right] - \frac{\partial}{\partial \xi_\beta^{n+1+k}} \left[ f^{n,n+1+k} \langle \xi_\beta^{n+2+k} \rangle_{n,n+1+k} \right],$$

уравнение (2.86) примет вид:

$$\begin{aligned}
& f^{n,n+1+k} \frac{\partial \langle \xi_\alpha^{n+1} \rangle_{n,n+1+k}}{\partial t} + \langle \xi_\alpha^{n+1} \rangle_{n,n+1+k} \frac{\partial f^{n,n+1+k}}{\partial t} + \frac{\partial P_{\alpha\beta}^{n+1}}{\partial \xi_\beta^n} + \frac{\partial}{\partial \xi_\beta^n} \left[ f^{n,n+1+k} \langle \xi_\alpha^{n+1} \rangle_{n,n+1+k} \langle \xi_\beta^{n+1} \rangle_{n,n+1+k} \right] + \\
& + \frac{\partial P_{\alpha\beta}^{n+1,n+2+k}}{\partial \xi_\beta^{n+1+k}} + \frac{\partial}{\partial \xi_\beta^{n+1+k}} \left[ f^{n,n+1+k} \langle \xi_\alpha^{n+1} \rangle_{n,n+1+k} \langle \xi_\beta^{n+2+k} \rangle_{n,n+1+k} \right] = f^{n,n+1+k} \langle \xi_\alpha^{n+2} \rangle_{n,n+1+k} . \\
& \left[ \frac{\partial}{\partial t} + \langle \xi_\beta^{n+1} \rangle_{n,n+1+k} \frac{\partial}{\partial \xi_\beta^n} + \langle \xi_\beta^{n+2+k} \rangle_{n,n+1+k} \frac{\partial}{\partial \xi_\beta^{n+1+k}} \right] \langle \xi_\alpha^{n+1} \rangle_{n,n+1+k} = \\
& = -\frac{1}{f^{n,n+1+k}} \left( \frac{\partial P_{\alpha\beta}^{n+1}}{\partial \xi_\beta^n} + \frac{\partial P_{\alpha\beta}^{n+1,n+2+k}}{\partial \xi_\beta^{n+1+k}} \right) + \langle \xi_\alpha^{n+2} \rangle_{n,n+1+k} .
\end{aligned} \tag{2.88}$$

Умножая выражение (2.80) на  $\vec{\xi}^n$  и производя интегрирование по подпространству  $\Omega_n$ , получим:

$$\begin{aligned}
& f^{n+1,n+1+k} \frac{\partial \langle \xi_\alpha^n \rangle_{n+1,n+1+k}}{\partial t} - \langle \xi_\alpha^n \rangle_{n+1,n+1+k} \frac{\partial}{\partial \xi_\beta^{n+1}} \left[ f^{n+1,n+1+k} \langle \xi_\beta^{n+2} \rangle_{n+1,n+1+k} \right] - \\
& - \langle \xi_\alpha^n \rangle_{n+1,n+1+k} \frac{\partial}{\partial \xi_\beta^{n+1+k}} \left[ f^{n+1,n+1+k} \langle \xi_\beta^{n+2+k} \rangle_{n+1,n+1+k} \right] + \frac{\partial}{\partial \xi_\beta^{n+1}} \left[ f^{n+1,n+1+k} \langle \xi_\alpha^n \rangle_{n+1,n+1+k} \langle \xi_\beta^{n+2} \rangle_{n+1,n+1+k} \right] + \\
& + \frac{\partial}{\partial \xi_\beta^{n+1+k}} \left[ f^{n+1,n+1+k} \langle \xi_\alpha^n \rangle_{n+1,n+1+k} \langle \xi_\beta^{n+2+k} \rangle_{n+1,n+1+k} \right] = -\frac{\partial P_{\alpha\beta}^{n,n+2}}{\partial \xi_\beta^{n+1}} - \frac{\partial P_{\alpha\beta}^{n,n+2+k}}{\partial \xi_\beta^{n+1+k}} + f^{n+1,n+1+k} \xi_\alpha^{n+1} ,
\end{aligned} \tag{2.89}$$

где учтено

$$\begin{aligned}
& \int_{\Omega_n} \xi_\alpha^n \langle \xi_\beta^{n+2} \rangle_{n,n+1,n+1+k} f^{n,n+1,n+1+k} d^3 \xi^n = \int_{\Omega_{n+2}} \int_{\Omega_n} \xi_\alpha^n \xi_\beta^{n+2} f^{n,n+1,n+2,n+1+k} d^3 \xi^n d^3 \xi^{n+2} = \\
& = P_{\alpha\beta}^{n,n+2} (n+1, n+1+k) + f^{n+1,n+1+k} \langle \xi_\alpha^n \rangle_{n+1,n+1+k} \langle \xi_\beta^{n+2} \rangle_{n+1,n+1+k} , \\
& \int_{\Omega_n} f^{n,n+1,n+1+k} \langle \xi_\beta^{n+2+k} \rangle_{n,n+1,n+1+k} d^3 \xi^n = \int_{\Omega_{n+2+k}} \int_{\Omega_n} \xi_\alpha^n \xi_\beta^{n+2+k} f^{n,n+1,n+1+k,n+2+k} d^3 \xi^n d^3 \xi^{n+2+k} = \\
& = P_{\alpha\beta}^{n,n+2+k} (n+1, n+1+k) + f^{n+1,n+1+k} \langle \xi_\alpha^n \rangle_{n+1,n+1+k} \langle \xi_\beta^{n+2+k} \rangle_{n+1,n+1+k} , \\
& \frac{\partial f^{n+1,n+1+k}}{\partial t} = -\frac{\partial}{\partial \xi_\beta^{n+1}} \left[ f^{n+1,n+1+k} \langle \xi_\beta^{n+2} \rangle_{n+1,n+1+k} \right] - \frac{\partial}{\partial \xi_\beta^{n+1+k}} \left[ f^{n+1,n+1+k} \langle \xi_\beta^{n+2+k} \rangle_{n+1,n+1+k} \right] .
\end{aligned}$$

Окончательно выражение (2.89) примет вид:

$$\begin{aligned} & \left[ \frac{\partial}{\partial t} + \langle \xi_\beta^{n+2} \rangle_{n+1, n+1+k} \frac{\partial}{\partial \xi_\beta^{n+1}} + \langle \xi_\beta^{n+2+k} \rangle_{n+1, n+1+k} \frac{\partial}{\partial \xi_\beta^{n+1+k}} \right] \langle \xi_\alpha^n \rangle_{n+1, n+1+k} = \\ & = -\frac{1}{f^{n+1, n+1+k}} \left( \frac{\partial P_{\alpha\beta}^{n, n+2}}{\partial \xi_\beta^{n+1}} + \frac{\partial P_{\alpha\beta}^{n, n+2+k}}{\partial \xi_\beta^{n+1+k}} \right) + \xi_\alpha^{n+1}. \end{aligned}$$

Теорема 4 доказана.

Заметим, что уравнение (2.82) и (2.83) при  $k=1$  формально вырождаются в уравнения (2.68) и (2.69) соответственно. Уравнение (2.81) при  $k=1$  не вырождается в уравнение (2.67), так как дисперсионное уравнение для функции  $f^{n+1, n+1+k}$  имеет два источника диссипаций:

$$\hat{\pi}_{n+1, n+1+k} S^{n+1, n+1+k} = -\left( Q_{n+1, n+1+k}^{n+1} + Q_{n+1, n+1+k}^{n+1+k} \right).$$

## §2.4 Свойства средних производных

Полученные уравнения движения дают интересную трактовку тензоров  $P_{\alpha\beta}^\lambda$ . Например, из уравнений вида (2.36), (2.69) следует, что:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial \xi_\beta^n} P_{\alpha\beta}^{n+1}(n) &= f^n \left[ \langle \xi_\alpha^{n+2} \rangle_n - \hat{\pi}_n \langle \xi_\alpha^{n+1} \rangle_n \right], \\ \frac{\partial}{\partial \xi_\beta^{n+1}} P_{\alpha\beta}^{n+2}(n, n+1) &= f^{n, n+1} \left[ \langle \xi_\alpha^{n+3} \rangle_{n, n+1} - \hat{\pi}_{n, n+1} \langle \xi_\alpha^{n+2} \rangle_{n, n+1} \right], \\ \frac{\partial}{\partial \xi_\beta^{n+\lambda}} P_{\alpha\beta}^{n+1+\lambda}(n, \dots, n+\lambda) &= f^{n, \dots, n+\lambda} \left[ \langle \xi_\alpha^{n+2+\lambda} \rangle_{n, \dots, n+\lambda} - \hat{\pi}_{n, \dots, n+\lambda} \langle \xi_\alpha^{n+1+\lambda} \rangle_{n, \dots, n+\lambda} \right], \\ &\dots \end{aligned} \tag{2.90}$$

где  $\lambda = 0, 1, \dots$ . Таким образом, величина  $\frac{\partial}{\partial \xi_\beta^{n+\lambda}} P_{\alpha\beta}^{n+1+\lambda}$  определяет отличие между средней кинематической величиной  $\langle \xi_\alpha^{n+2+\lambda} \rangle$  порядка  $n+2+\lambda$  и полной производной по времени  $\hat{\pi}$  от средней кинематической величины  $\langle \xi_\alpha^{n+1+\lambda} \rangle$  порядка  $n+1+\lambda$ .

**Теорема 5** Если функция распределения  $f^{n, \dots, n+\lambda, n+1+\lambda}$ ,  $\lambda = 0, 1, \dots$  является чётной по переменной  $\vec{\xi}^{n+\lambda}$ , то есть

$$f^{n, \dots, n+\lambda}(\vec{\xi}^n, \dots, -\vec{\xi}^{n+\lambda}, \vec{\xi}^{n+1+\lambda}) = f^{n, \dots, n+\lambda}(\vec{\xi}^n, \dots, \vec{\xi}^{n+\lambda}, \vec{\xi}^{n+1+\lambda}), \quad (2.91)$$

или  $P_{\alpha\beta}^{n+1+\lambda} = const$ , тогда

$$\hat{\pi}_{n, \dots, n+\lambda-1} \langle \xi_\alpha^{n+1+\lambda} \rangle_{n, \dots, n+\lambda-1} = \frac{1}{f^{n, \dots, n+\lambda-1}} \frac{\partial}{\partial \xi_\beta^{n+\lambda-1}} \left[ f^{n, \dots, n+\lambda-1} \langle \xi_\alpha^{n+1+\lambda} \rangle_{n, \dots, n+\lambda-1} \langle \xi_\beta^{n+\lambda} \rangle_{n, \dots, n+\lambda-1} \right] + \langle \xi_\alpha^{n+2+\lambda} \rangle_{n, \dots, n+\lambda-1}, \quad (2.92)$$

### Доказательство теоремы 5.

По определению (2.38) тензор  $P_{\alpha\beta}^{n+1+\lambda}(\vec{\xi}^n, \dots, \vec{\xi}^{n+\lambda})$  имеет вид:

$$\begin{aligned} P_{\alpha\beta}^{n+1+\lambda}(\vec{\xi}^n, \dots, \vec{\xi}^{n+\lambda}) &= \\ &= \int_{\Omega_{n+1+\lambda}} \left( \xi_\alpha^{n+1+\lambda} - \langle \xi_\alpha^{n+1+\lambda} \rangle_{n, \dots, n+\lambda} \right) \left( \xi_\beta^{n+1+\lambda} - \langle \xi_\beta^{n+1+\lambda} \rangle_{n, \dots, n+\lambda} \right) f^{n, \dots, n+1+\lambda} d^3 \xi^{n+1+\lambda}, \end{aligned} \quad (2.93)$$

где

$$f^{n, \dots, n+\lambda} \langle \xi_\alpha^{n+1+\lambda} \rangle_{n, \dots, n+\lambda} = \int_{\Omega_{n+1+\lambda}} \xi_\alpha^{n+1+\lambda} f^{n, \dots, n+1+\lambda} d^3 \xi^{n+1+\lambda}. \quad (2.94)$$



Покажем, что  $\langle \xi_\alpha^{n+1+\lambda} \rangle_{n, \dots, n+\lambda}$  четная функция по переменной  $\vec{\xi}^{n+\lambda}$ .

Действительно, из определения (2.94) и четности функции распределения  $f^{n, \dots, n+1+\lambda}$  (2.91) следует, что

$$\begin{aligned} f^{n, \dots, -(n+\lambda)} \langle \xi_\alpha^{n+1+\lambda} \rangle_{n, \dots, -(n+\lambda)} &= \int_{\Omega_{n+1+\lambda}} \xi_\alpha^{n+1+\lambda} f^{n, \dots, -(n+\lambda), n+1+\lambda} d^3 \xi^{n+1+\lambda} = \int_{\Omega_{n+1+\lambda}} \xi_\alpha^{n+1+\lambda} f^{n, \dots, n+\lambda, n+1+\lambda} d^3 \xi^{n+1+\lambda}, \\ \langle \xi_\alpha^{n+1+\lambda} \rangle_{n, \dots, -(n+\lambda)} &= \langle \xi_\alpha^{n+1+\lambda} \rangle_{n, \dots, n+\lambda}, \end{aligned} \quad (2.95)$$

где для краткости записи индекс « $-(n+\lambda)$ » соответствует аргументу  $-\vec{\xi}^{n+\lambda}$ .

Учтем условие (2.95) при вычислении выражения (2.93), получим

$$\begin{aligned} P_{\alpha\beta}^{n+1+\lambda} (\vec{\xi}^n, \dots, -\vec{\xi}^{n+\lambda}) &= \\ &= \int_{\Omega_{n+1+\lambda}} \left( \xi_\alpha^{n+1+\lambda} - \langle \xi_\alpha^{n+1+\lambda} \rangle_{n, \dots, -(n+\lambda)} \right) \left( \xi_\beta^{n+1+\lambda} - \langle \xi_\beta^{n+1+\lambda} \rangle_{n, \dots, -(n+\lambda)} \right) f^{n, \dots, -(n+\lambda), n+1+\lambda} d^3 \xi^{n+1+\lambda} = \\ &= \int_{\Omega_{n+1+\lambda}} \left( \xi_\alpha^{n+1+\lambda} - \langle \xi_\alpha^{n+1+\lambda} \rangle_{n, \dots, n+\lambda} \right) \left( \xi_\beta^{n+1+\lambda} - \langle \xi_\beta^{n+1+\lambda} \rangle_{n, \dots, n+\lambda} \right) f^{n, \dots, n+\lambda, n+1+\lambda} d^3 \xi^{n+1+\lambda} = P_{\alpha\beta}^{n+1+\lambda} (\vec{\xi}^n, \dots, \vec{\xi}^{n+\lambda}). \end{aligned} \quad (2.96)$$

Следовательно,  $P_{\alpha\beta}^{n+1+\lambda}$  является чётной функцией по переменной  $\vec{\xi}^{n+\lambda}$ .

Проинтегрируем уравнение (2.90) по подпространству  $\Omega_{n+\lambda}$  и учтем условие чётности (2.96), получим

$$\begin{aligned} \int_{\Omega_{n+\lambda}} \frac{\partial P_{\alpha\beta}^{n+1+\lambda}}{\partial \xi_\beta^{n+\lambda}} (\vec{\xi}^n, \dots, \vec{\xi}^{n+\lambda}) d^3 \xi^{n+\lambda} &= 0 = f^{n, \dots, n+\lambda-1} \langle \xi_\alpha^{n+2+\lambda} \rangle_{n, \dots, n+\lambda-1} - \\ &- \int_{\Omega_{n+\lambda}} f^{n, \dots, n+\lambda} \hat{\pi}_{n, \dots, n+\lambda} \langle \xi_\alpha^{n+1+\lambda} \rangle_{n, \dots, n+\lambda} d^3 \xi^{n+\lambda}. \end{aligned} \quad (2.97)$$

Вычислим интеграл, стоящий в правой части выражения (2.97), получим:

$$\begin{aligned}
& \int_{\Omega_{n+\lambda}} f^{n,\dots,n+\lambda} \hat{\pi}_{n,\dots,n+\lambda} \langle \xi_\alpha^{n+1+\lambda} \rangle_{n,\dots,n+\lambda} d^3 \xi^{n+\lambda} = \\
& = \int_{\Omega_{n+\lambda}} f^{n,\dots,n+\lambda} \left( \frac{\partial}{\partial t} + \bar{\xi}^{n+1} \nabla_{\xi^n} + \bar{\xi}^{n+2} \nabla_{\xi^{n+1}} + \dots + \bar{\xi}^{n+\lambda} \nabla_{\xi^{n+\lambda-1}} \right) \langle \xi_\alpha^{n+1+\lambda} \rangle_{n,\dots,n+\lambda} d^3 \xi^{n+\lambda} + \\
& + \int_{\Omega_{n+\lambda}} f^{n,\dots,n+\lambda} \langle \xi_\beta^{n+\lambda+1} \rangle_{n,\dots,n+\lambda} \frac{\partial}{\partial \xi_\beta^{n+\lambda}} \langle \xi_\alpha^{n+1+\lambda} \rangle_{n,\dots,n+\lambda} d^3 \xi^{n+\lambda},
\end{aligned} \tag{2.98}$$

где учтено определение оператора  $\hat{\pi}_{n,\dots,n+\lambda}$ . Преобразуем функцию, стоящую в первом интеграле (2.98):

$$\begin{aligned}
& f^{n,\dots,n+\lambda} \left( \frac{\partial}{\partial t} + \bar{\xi}^{n+1} \nabla_{\xi^n} + \bar{\xi}^{n+2} \nabla_{\xi^{n+1}} + \dots + \bar{\xi}^{n+\lambda} \nabla_{\xi^{n+\lambda-1}} \right) \langle \xi_\alpha^{n+1+\lambda} \rangle_{n,\dots,n+\lambda} = \\
& = \left( \frac{\partial}{\partial t} + \bar{\xi}^{n+1} \nabla_{\xi^n} + \bar{\xi}^{n+2} \nabla_{\xi^{n+1}} + \dots + \bar{\xi}^{n+\lambda} \nabla_{\xi^{n+\lambda-1}} \right) \left[ f^{n,\dots,n+\lambda} \langle \xi_\alpha^{n+1+\lambda} \rangle_{n,\dots,n+\lambda} \right] + \\
& + \langle \xi_\alpha^{n+1+\lambda} \rangle_{n,\dots,n+\lambda} \operatorname{div}_{\bar{\xi}^{n+\lambda}} \left[ f^{n,\dots,n+\lambda} \langle \bar{\xi}^{n+1+\lambda} \rangle_{n,\dots,n+\lambda} \right],
\end{aligned} \tag{2.99}$$

где функция  $f^{n,\dots,n+\lambda}$  удовлетворяет дисперсионной цепочке. Подставим выражение (2.99) в первый интеграл (2.98), получим:

$$\begin{aligned}
& \int_{\Omega_{n+\lambda}} f^{n,\dots,n+\lambda} \hat{\pi}_{n,\dots,n+\lambda} \langle \xi_\alpha^{n+1+\lambda} \rangle_{n,\dots,n+\lambda} d^3 \xi^{n+\lambda} = \\
& = \int_{\Omega_{n+\lambda}} \left( \frac{\partial}{\partial t} + \bar{\xi}^{n+1} \nabla_{\xi^n} + \bar{\xi}^{n+2} \nabla_{\xi^{n+1}} + \dots + \bar{\xi}^{n+\lambda} \nabla_{\xi^{n+\lambda-1}} \right) \left[ f^{n,\dots,n+\lambda} \langle \xi_\alpha^{n+1+\lambda} \rangle_{n,\dots,n+\lambda} \right] d^3 \xi^{n+\lambda} + \\
& + \int_{\Omega_{n+\lambda}} \langle \xi_\alpha^{n+1+\lambda} \rangle_{n,\dots,n+\lambda} \frac{\partial}{\partial \xi_\beta^{n+\lambda}} \left[ f^{n,\dots,n+\lambda} \langle \xi_\beta^{n+1+\lambda} \rangle_{n,\dots,n+\lambda} \right] d^3 \xi^{n+\lambda} + \\
& + \int_{\Omega_{n+\lambda}} f^{n,\dots,n+\lambda} \langle \xi_\beta^{n+\lambda+1} \rangle_{n,\dots,n+\lambda} \frac{\partial}{\partial \xi_\beta^{n+\lambda}} \langle \xi_\alpha^{n+1+\lambda} \rangle_{n,\dots,n+\lambda} d^3 \xi^{n+\lambda}, \\
& \int_{\Omega_{n+\lambda}} f^{n,\dots,n+\lambda} \hat{\pi}_{n,\dots,n+\lambda} \langle \xi_\alpha^{n+1+\lambda} \rangle_{n,\dots,n+\lambda} d^3 \xi^{n+\lambda} = \\
& = \left( \frac{\partial}{\partial t} + \bar{\xi}^{n+1} \nabla_{\xi^n} + \bar{\xi}^{n+2} \nabla_{\xi^{n+1}} + \dots + \bar{\xi}^{n+\lambda-1} \nabla_{\xi^{n+\lambda-2}} \right) \left[ f^{n,\dots,n+\lambda-1} \langle \xi_\alpha^{n+1+\lambda} \rangle_{n,\dots,n+\lambda-1} \right] +
\end{aligned} \tag{2.100}$$

$$+ \int_{\Omega_{n+\lambda}} \frac{\partial}{\partial \xi_\beta^{n+\lambda}} \left[ f^{n, \dots, n+\lambda} \langle \xi_\alpha^{n+1+\lambda} \rangle_{n, \dots, n+\lambda} \langle \xi_\beta^{n+1+\lambda} \rangle_{n, \dots, n+\lambda} \right] d^3 \xi^{n+\lambda}.$$

При получении выражения (2.100) было учтено, что

$$\frac{\partial}{\partial \xi_\beta^{n+\lambda-1}} \int_{\Omega_{n+\lambda}} \xi_\beta^{n+\lambda} f^{n, \dots, n+\lambda} \langle \xi_\alpha^{n+1+\lambda} \rangle_{n, \dots, n+\lambda} d^3 \xi^{n+\lambda} = 0,$$

где под интегралом стоит нечётная по переменной  $\bar{\xi}^{n+\lambda}$  функция.

Подынтегральная функция  $\frac{\partial}{\partial \xi_\beta^{n+\lambda}} \left[ f^{n, \dots, n+\lambda} \langle \xi_\alpha^{n+1+\lambda} \rangle_{n, \dots, n+\lambda} \langle \xi_\beta^{n+1+\lambda} \rangle_{n, \dots, n+\lambda} \right]$  в выражении (2.100) также является нечётной по переменной  $\bar{\xi}^{n+\lambda}$ , следовательно, интеграл в (2.100) равен нулю. В результате, выражение (2.100) примет вид

$$\begin{aligned} & \int_{\Omega_{n+\lambda}} f^{n, \dots, n+\lambda} \hat{\pi}_{n, \dots, n+\lambda} \langle \xi_\alpha^{n+1+\lambda} \rangle_{n, \dots, n+\lambda} d^3 \xi^{n+\lambda} = - \langle \xi_\alpha^{n+1+\lambda} \rangle_{n, \dots, n+\lambda-1} \operatorname{div}_{\xi^{n+\lambda-1}} \left[ f^{n, \dots, n+\lambda-1} \langle \bar{\xi}^{n+\lambda} \rangle_{n, \dots, n+\lambda-1} \right] + \\ & + f^{n, \dots, n+\lambda-1} \left( \frac{\partial}{\partial t} + \bar{\xi}^{n+1} \nabla_{\xi^n} + \bar{\xi}^{n+2} \nabla_{\xi^{n+1}} + \dots + \bar{\xi}^{n+\lambda-1} \nabla_{\xi^{n+\lambda-2}} \right) \langle \xi_\alpha^{n+1+\lambda} \rangle_{n, \dots, n+\lambda-1} = \\ & = - \langle \xi_\alpha^{n+1+\lambda} \rangle_{n, \dots, n+\lambda-1} \operatorname{div}_{\xi^{n+\lambda-1}} \left[ f^{n, \dots, n+\lambda-1} \langle \bar{\xi}^{n+\lambda} \rangle_{n, \dots, n+\lambda-1} \right] + \\ & + f^{n, \dots, n+\lambda-1} \left( \frac{\partial}{\partial t} + \bar{\xi}^{n+1} \nabla_{\xi^n} + \bar{\xi}^{n+2} \nabla_{\xi^{n+1}} + \dots + \langle \bar{\xi}^{n+\lambda} \rangle_{n, \dots, n+\lambda-1} \nabla_{\xi^{n+\lambda-1}} \right) \langle \xi_\alpha^{n+1+\lambda} \rangle_{n, \dots, n+\lambda-1} - \\ & - f^{n, \dots, n+\lambda-1} \langle \bar{\xi}^{n+\lambda} \rangle_{n, \dots, n+\lambda-1} \nabla_{\xi^{n+\lambda-1}} \langle \xi_\alpha^{n+1+\lambda} \rangle_{n, \dots, n+\lambda-1} = \\ & = f^{n, \dots, n+\lambda-1} \hat{\pi}_{n, \dots, n+\lambda-1} \langle \xi_\alpha^{n+1+\lambda} \rangle_{n, \dots, n+\lambda-1} - \langle \xi_\alpha^{n+1+\lambda} \rangle_{n, \dots, n+\lambda-1} \operatorname{div}_{\xi^{n+\lambda-1}} \left[ f^{n, \dots, n+\lambda-1} \langle \bar{\xi}^{n+\lambda} \rangle_{n, \dots, n+\lambda-1} \right] - \\ & - f^{n, \dots, n+\lambda-1} \langle \bar{\xi}^{n+\lambda} \rangle_{n, \dots, n+\lambda-1} \nabla_{\xi^{n+\lambda-1}} \langle \xi_\alpha^{n+1+\lambda} \rangle_{n, \dots, n+\lambda-1}, \\ & \int_{\Omega_{n+\lambda}} f^{n, \dots, n+\lambda} \hat{\pi}_{n, \dots, n+\lambda} \langle \xi_\alpha^{n+1+\lambda} \rangle_{n, \dots, n+\lambda} d^3 \xi^{n+\lambda} = f^{n, \dots, n+\lambda-1} \hat{\pi}_{n, \dots, n+\lambda-1} \langle \xi_\alpha^{n+1+\lambda} \rangle_{n, \dots, n+\lambda-1} - \quad (2.101) \\ & - \frac{\partial}{\partial \xi_\beta^{n+\lambda-1}} \left[ f^{n, \dots, n+\lambda-1} \langle \xi_\alpha^{n+1+\lambda} \rangle_{n, \dots, n+\lambda-1} \langle \xi_\beta^{n+\lambda} \rangle_{n, \dots, n+\lambda-1} \right]. \end{aligned}$$

Подставляя (2.101) в уравнение (2.97) приходим к справедливости выражения (2.92). Теорема 5 доказана.

*Следствие 1.* При выполнении условий теоремы 5 справедливы соотношения:

$$\langle \xi_\alpha^{n+2+\lambda} \rangle_{n, \dots, n+\lambda-1} = \frac{1}{f^{n, \dots, n+\lambda-1}} \int_{\Omega_{n+\lambda}} f^{n, \dots, n+\lambda} \hat{\pi}_{n, \dots, n+\lambda} \langle \xi_\alpha^{n+1+\lambda} \rangle_{n, \dots, n+\lambda} d^3 \xi^{n+\lambda}, \quad (2.102)$$

$$\partial_{n, \dots, n+\lambda-2} \langle \vec{J}^{n+\lambda} \rangle_{n, \dots, n+\lambda-1} = \langle \vec{J}^{n+\lambda+1} \rangle_{n, \dots, n+\lambda-1}, \quad \lambda > 1, \quad (2.103)$$

$$\partial_0 \langle \vec{J}^{n+1} \rangle_n = \langle \vec{J}^{n+2} \rangle_n, \quad \lambda = 1,$$

где

$$\partial_{n, \dots, n+\lambda-2} \stackrel{\det}{=} \frac{\partial}{\partial t} + \vec{\xi}^{n+1} \nabla_{\xi^n} + \vec{\xi}^{n+2} \nabla_{\xi^{n+1}} + \dots + \vec{\xi}^{n+\lambda-1} \nabla_{\xi^{n+\lambda-2}}, \quad \lambda > 1,$$

$$\partial_0 \stackrel{\det}{=} \frac{\partial}{\partial t}, \quad \lambda = 1, \quad \langle \vec{J}^\ell \rangle_{n_1 \dots n_R} \stackrel{\det}{=} f^{n_1 \dots n_R} \langle \vec{\xi}^{\ell+1} \rangle_{n_1 \dots n_R}, \quad \ell \in \mathbb{N}.$$

Напомним, что оператор  $\hat{\pi}_{n_1, \dots, n_R}$  соответствует полной производной по времени вдоль обобщенной фазовой траектории. Введенный оператор  $\partial_{n_1, \dots, n_R}$  фактически является аналогом частной производной по времени в обобщенном фазовом пространстве, например,  $\hat{\pi}_n = \partial_0 + \langle \vec{\xi}^{n+1} \rangle_n \nabla_{\xi^n}$  или  $\hat{\pi}_{n, n+1, n+2} = \partial_{n, n+1} + \langle \vec{\xi}^{n+3} \rangle_{n, n+1, n+2} \nabla_{\xi^{n+2}}$ . Векторное поле  $\langle \vec{J}^\ell \rangle_{n_1 \dots n_R}$  определяет плотность потока вероятностей средней кинематической величины  $\langle \vec{\xi}^{\ell+1} \rangle_{n_1 \dots n_R}$ .

### Доказательство следствия 1

Выражение (2.102) непосредственно следует из уравнения (2.97). Справедливость представления (2.103) следует из уравнения (2.92), действительно

$$\begin{aligned} & \left( \frac{\partial}{\partial t} + \bar{\xi}^{n+1} \nabla_{\xi^n} + \bar{\xi}^{n+2} \nabla_{\xi^{n+1}} + \dots + \bar{\xi}^{n+\lambda-1} \nabla_{\xi^{n+\lambda-2}} + \langle \bar{\xi}^{n+\lambda} \rangle_{n, \dots, n+\lambda-1} \nabla_{\xi^{n+\lambda-1}} \right) \langle \xi_\alpha^{n+1+\lambda} \rangle_{n, \dots, n+\lambda-1} = \\ & = \langle \xi_\beta^{n+\lambda} \rangle_{n, \dots, n+\lambda-1} \frac{\partial}{\partial \xi_\beta^{n+\lambda-1}} \langle \xi_\alpha^{n+1+\lambda} \rangle_{n, \dots, n+\lambda-1} + \langle \xi_\alpha^{n+2+\lambda} \rangle_{n, \dots, n+\lambda-1} + \\ & + \frac{1}{f^{n, \dots, n+\lambda-1}} \langle \xi_\alpha^{n+1+\lambda} \rangle_{n, \dots, n+\lambda-1} \frac{\partial}{\partial \xi_\beta^{n+\lambda-1}} \left[ f^{n, \dots, n+\lambda-1} \langle \xi_\beta^{n+\lambda} \rangle_{n, \dots, n+\lambda-1} \right], \end{aligned}$$

отсюда

$$\begin{aligned} & f^{n, \dots, n+\lambda-1} \left( \frac{\partial}{\partial t} + \bar{\xi}^{n+1} \nabla_{\xi^n} + \bar{\xi}^{n+2} \nabla_{\xi^{n+1}} + \dots + \bar{\xi}^{n+\lambda-1} \nabla_{\xi^{n+\lambda-2}} \right) \langle \xi_\alpha^{n+1+\lambda} \rangle_{n, \dots, n+\lambda-1} = f^{n, \dots, n+\lambda-1} \langle \xi_\alpha^{n+2+\lambda} \rangle_{n, \dots, n+\lambda-1} - \\ & - \langle \xi_\alpha^{n+1+\lambda} \rangle_{n, \dots, n+\lambda-1} \left( \frac{\partial}{\partial t} + \bar{\xi}^{n+1} \nabla_{\xi^n} + \bar{\xi}^{n+2} \nabla_{\xi^{n+1}} + \dots + \bar{\xi}^{n+\lambda-1} \nabla_{\xi^{n+\lambda-2}} \right) f^{n, \dots, n+\lambda-1}, \end{aligned}$$

или

$$f^{n, \dots, n+\lambda-1} \partial_{n, \dots, n+\lambda-2} \langle \xi_\alpha^{n+1+\lambda} \rangle_{n, \dots, n+\lambda-1} = f^{n, \dots, n+\lambda-1} \langle \xi_\alpha^{n+2+\lambda} \rangle_{n, \dots, n+\lambda-1} - \langle \xi_\alpha^{n+1+\lambda} \rangle_{n, \dots, n+\lambda-1} \partial_{n, \dots, n+\lambda-2} f^{n, \dots, n+\lambda-1}, \quad (2.104)$$

где учтено, что  $f^{n, \dots, n+\lambda-1}$  удовлетворяет дисперсионной цепочке уравнений. Производя группировку членов в уравнении (2.104) и, учитывая обозначение для плотности потока вероятностей  $\vec{J}_{n_1 \dots n_R}^\ell$ , приходим к справедливости представления (2.103). Следствие доказано.

### Пример

В качестве примера, иллюстрирующего формулировку теоремы 5, рассмотрим односкоростную функцию распределения второго ранга  $f^{1,2}$  вида

$$f^{1,2} = f_2(\vec{r}, \vec{v}, t) = \rho(\vec{r}, t) \delta(\vec{v} - \langle \vec{v} \rangle(\vec{r}, t)). \quad (2.105)$$

Функция (2.105) соответствует системе из частиц, имеющих координатную плотность массы  $\rho(\vec{r}, t) = f^1(\vec{r}, t)$  и векторное поле скоростей  $\langle \vec{v} \rangle(\vec{r}, t)$ . Вычислим тензор  $P_{\alpha\beta}^2$ , получим:

$$P_{\alpha\beta}^2(\vec{r}, t) = \rho(\vec{r}, t) \int_{\Omega_2} (v_\alpha - \langle v_\alpha \rangle_1)(v_\beta - \langle v_\beta \rangle_1) \delta(\vec{v} - \langle \vec{v} \rangle(\vec{r}, t)) d^3v = 0. \quad (2.106)$$

Выражение (2.106) удовлетворяет условию теоремы 5, следовательно,

$$\langle \dot{\vec{v}} \rangle_1 = \hat{\pi}_1 \langle \vec{v} \rangle_1 = \left[ \frac{\partial}{\partial t} + \langle \vec{v} \rangle_1 \nabla_r \right] \langle \vec{v} \rangle_1. \quad (2.107)$$

Представление (2.107) является аналогом уравнения гидродинамики (i.12) ((2.36),  $n = 1$ ) при постоянном давлении.

В качестве другого примера функции  $f^{1,2}$  рассмотрим функцию Вигнера [9], используемую в при описании квантовых систем в фазовом пространстве. Для средней кинематической величины  $\langle \dot{\vec{v}} \rangle_{1,2}$  можно использовать аппроксимацию Власова-Моэля (i.15). Из второго уравнения (2.90), получим

$$\frac{1}{f^{1,2}} \frac{\partial P_{\alpha\beta}^3}{\partial v_\beta} = \langle \ddot{v}_\alpha \rangle_{1,2} - \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^{k+1} (\hbar/2)^{2k}}{m^{2k+1} (2k+1)!} \hat{\pi}_{1,2} \left[ \frac{\partial^{2k+1} U}{\partial x_\alpha^{2k+1}} \frac{1}{f^{1,2}} \frac{\partial^{2k} f^{1,2}}{\partial v_\alpha^{2k}} \right]. \quad (2.108)$$

Для квантового гармонического осциллятора с потенциалом  $U = \frac{m\omega^2 x^2}{2}$  функция Вигнера  $f^{1,2}$  известна в явном виде

$$f_n^{1,2}(x, v) = \frac{(-1)^n m}{\pi \hbar} e^{-\frac{m}{\hbar \omega}(v^2 + \omega^2 x^2)} L_n \left( \frac{2m}{\hbar \omega} (v^2 + \omega^2 x^2) \right), \quad (2.109)$$

где  $n$  – номер квантового состояния, а  $L_n$  – полиномы Лагерра. В качестве функции  $f^{1,2,3}$  возьмем [33]

$$f_n^{1,2,3}(x, v, \dot{v}) = \frac{(-1)^n}{2\pi \sigma_x \sigma_v} e^{-\frac{\dot{v}^2}{2\sigma_v^2} - \frac{v^2}{2\sigma_v^2}} L_n \left( 2 \left( \frac{\dot{v}^2}{2\sigma_v^2} + \frac{v^2}{2\sigma_v^2} \right) \right) \delta(\dot{v} + \omega^2 x), \quad (2.110)$$

где  $\omega = \frac{\sigma_v}{\sigma_x} = \frac{\sigma_{\dot{v}}}{\sigma_v}$ ,  $\sigma_x \sigma_v = \frac{\hbar}{2m}$ . Из выражения (2.110) следует, что функция

$f_n^{1,2,3}(x, v, \dot{v})$  является чётной по аргументе  $v$ . Следовательно, по теореме 5

$$\hat{\pi}_1 \langle \dot{v} \rangle_1 = \frac{1}{f^1} \frac{\partial}{\partial x} [f^1 \langle \dot{v} \rangle_1 \langle v \rangle_1] + \langle \ddot{v} \rangle_1. \quad (2.111)$$

Из выражений (2.11), (2.109) следует, что  $\langle v \rangle_1 = 0$ , поэтому уравнение (2.111)

примет вид:

$$\langle \ddot{v} \rangle_1 = \hat{\pi}_1 \langle \dot{v} \rangle_1 = -\omega^2 \hat{\pi}_1 x = -\omega^2 \langle v \rangle_1 = 0, \quad (2.112)$$

где учтена аппроксимация Власова-Моэля (i.16) для гармонического осциллятора

$$\langle \dot{v} \rangle_{1,2} = \langle \dot{v} \rangle_1 = -\omega^2 x. \quad (2.113)$$

Из второго уравнения (2.90) следует

$$\frac{1}{f^{1,2}} \frac{\partial P_{11}^3}{\partial v} = \langle \ddot{v} \rangle_{1,2} + \omega^2 \hat{\pi}_{1,2} x = \langle \ddot{v} \rangle_{1,2} + \omega^2 v. \quad (2.114)$$

Используя выражение (2.110) вычислим  $P_{11}^3(x, v)$ , получим

$$\begin{aligned} P_{11}^3(x, v) &= \int_{-\infty}^{+\infty} \left( \dot{v} - \langle \dot{v} \rangle_{1,2} \right)^2 f^{1,2,3} d\dot{v} = \\ &= \frac{(-1)^n}{2\pi\sigma_x\sigma_v} \left( \omega^2 x + \langle \dot{v} \rangle_{1,2} \right)^2 e^{-\frac{\omega^2 x^2}{2\sigma_x^2} - \frac{v^2}{2\sigma_v^2}} L_n \left( 2 \left( \frac{\omega^2 x^2}{2\sigma_x^2} + \frac{v^2}{2\sigma_v^2} \right) \right) = 0, \end{aligned} \quad (2.115)$$

где учтена аппроксимация (2.113). Из выражений (2.114) и (2.115) следует, что

$$\langle \ddot{v} \rangle_{1,2} = -\omega^2 v. \quad (2.116)$$

Заметим, что при усреднении выражения (2.116) по пространству скоростей получится выражение (2.112), которое обращается в ноль в силу чётности функции Вигнера (2.109). Представление (2.103) также выполнено, так как

$$\partial_0 \langle J^2 \rangle_1 = \frac{\partial}{\partial t} [f^1 \langle \dot{v} \rangle_1] = \langle J^3 \rangle_1 = f^1 \langle \ddot{v} \rangle_1 = 0,$$

где учтено (2.112) и отсутствие явной зависимости от времени у плотности потока  $\langle J^3 \rangle_1$ .



## §2.5 $H_n$ – функции Больцмана

По аналогии с работой [55] построим  $H_n$ -функции Больцмана для дисперсионной цепочки уравнений Власова (2.30)-(2.32).

**Определение 5.** Пусть функция  $S^{n_1, \dots, n_R}$  (2.28) удовлетворяет дисперсионной цепочке (2.30)-(2.32), тогда определим  $H^{n_1, \dots, n_R}$ -функцию Больцмана как

$$H^{n_1, \dots, n_R}(t) = \frac{\det 1}{f^0} \int_{\Omega^{n_1}} \dots \int_{\Omega^{n_R}} f^{n_1, \dots, n_R}(\vec{\xi}^{n_1, \dots, n_R}, t) S^{n_1, \dots, n_R} \prod_{s=1}^R d^3 \xi^{k_s} = \langle S^{n_1, \dots, n_R} \rangle_0(t), \quad (2.117)$$

где функции  $S^{n_1, \dots, n_R}$  и  $f^{n_1, \dots, n_R}$  связаны соотношением (2.28),  $f^0 = N(t)$ .

В частном случае для функций распределения, принадлежащих первой группе:  $f^1, f^{1,2}, f^{1,2,3}, \dots$  соответствующие  $H^{n_1, \dots, n_R}$ -функции Больцмана переходят в  $H_1, H_2, H_3, \dots$ -функции Больцмана [55]. Функция  $H_2$  совпадает с известной  $H$ -функцией Больцмана, пропорциональной энтропии. Фактически,  $H^{n_1, \dots, n_R}$ -функции Больцмана являются расширением понятия энтропии с классического фазового пространства  $\{\vec{r}, m\vec{v}\}$  на обобщенное фазовое пространство, содержащее бесконечный набор кинематических величин всех порядков  $\{\vec{r}, \vec{v}, \dot{\vec{v}}, \ddot{\vec{v}}, \dots\}$ .

**Теорема 6** Пусть функции распределения вида  $f^{n_1, \dots, n_R}$  являются положительными и удовлетворяют дисперсионной цепочке Власова (2.30)-(2.32), тогда соответствующие им  $H^{n_1, \dots, n_R}$ -функции Больцмана (2.117) удовлетворяют уравнениям:

**1-й ранг**

$$\hat{\pi}_0[f^0 H^n] = -f^0 \langle Q_n^n \rangle_0. \quad (2.118)$$

### 2-ой ранг

$$\hat{\pi}_0[f^0 H^{n,n+1}] = -f^0 \langle Q_{n,n+1}^{n+1} \rangle_0, \quad (2.119)$$

$$\hat{\pi}_0[f^0 H^{n,n+k}] = -f^0 \left[ \langle Q_{n,n+k}^n \rangle_0 + \langle Q_{n,n+k}^{n+k} \rangle_0 \right].$$

### 3-ий ранг

$$\hat{\pi}_0[f^0 H^{n,n+1,n+2}] = -f^0 \langle Q_{n,n+1,n+2}^{n+2} \rangle_0, \quad (2.120)$$

$$\hat{\pi}_0[f^0 H^{n,n+1,n+1+k}] = -f^0 \left( \langle Q_{n,n+1,n+1+k}^{n+1} \rangle_0 + \langle Q_{n,n+1,n+1+k}^{n+1+k} \rangle_0 \right),$$

$$\hat{\pi}_0[f^0 H^{n,n+s,n+s+1}] = -f^0 \left( \langle Q_{n,n+s,n+s+1}^n \rangle_0 + \langle Q_{n,n+s,n+s+1}^{n+s+1} \rangle_0 \right),$$

$$\hat{\pi}_0[f^0 H^{n,n+s,n+s+k}] = -f^0 \left( \langle Q_{n,n+s,n+s+k}^n \rangle_0 + \langle Q_{n,n+s,n+s+k}^{n+s} \rangle_0 + \langle Q_{n,n+s,n+s+k}^{n+s+k} \rangle_0 \right).$$

### Доказательство теоремы 6.

Рассмотрим функции распределения первого ранга  $f^n$ ,  $S^n = \text{Ln } f^n$ , удовлетворяющую уравнению (2.30). Умножим уравнение (2.30) на  $(1 + S^n)$  и произведем интегрирование по подпространству  $\Omega_n$ , получим

$$\int_{\Omega_n} (1 + \ln f^n) \frac{\partial f^n}{\partial t} d^3 \xi^n + \int_{\Omega_n} (1 + \ln f^n) \nabla_{\xi^n} \left[ f^n \langle \bar{\xi}^{n+1} \rangle_n \right] d^3 \xi^n = 0, \quad (2.121)$$

Преобразуем первый интеграл в выражении (2.121):

$$\int_{\Omega_n} (1 + \ln f^n) \frac{\partial f^n}{\partial t} d^3 \xi^n = \int_{\Omega_n} \frac{\partial}{\partial t} (f^n \ln f^n) d^3 \xi^n = \frac{\partial}{\partial t} \int_{\Omega_n} f^n S^n d^3 \xi^n = \frac{d}{dt} \left[ f^0(t) \langle S^n \rangle_0(t) \right]. \quad (2.122)$$

Второй интеграл в уравнении (2.121) имеет вид:

$$\int_{\Omega_n} (1 + S^n) \frac{\partial}{\partial \xi_\beta^n} \left[ f^n \langle \xi_\beta^{n+1} \rangle_n \right] d^3 \xi^n =$$

$$\begin{aligned}
&= \int_{\Omega_n} \left[ f^n \frac{\partial \langle \xi_\beta^{n+1} \rangle_n}{\partial \xi_\beta^n} + S^n f^n \frac{\partial \langle \xi_\beta^{n+1} \rangle_n}{\partial \xi_\beta^n} + \langle \xi_\beta^{n+1} \rangle_n \frac{\partial (f^n S^n)}{\partial \xi_\beta^n} \right] d^3 \xi^n = \\
&= f^0 \langle Q_n^n \rangle_0 + \int_{\Omega_n} \frac{\partial}{\partial \xi_\beta^n} \left[ S^n f^n \langle \xi_\beta^{n+1} \rangle_n \right] d^3 \xi^n = f^0 \langle Q_n^n \rangle_0, \tag{2.123}
\end{aligned}$$

Подставляя выражения (2.122) и (2.123) в уравнение (2.121), получим

$$\frac{d}{dt} \left[ f^0 \langle S^n \rangle_0 \right] = -f^0 \langle Q_n^n \rangle_0. \tag{2.124}$$

Функции распределения второго ранга  $f^{n,n+1}$ , принадлежащие первой группе, удовлетворяют уравнению (2.35). Умножим уравнение (2.35) на  $(1 + S^{n,n+1})$  и проинтегрируем по подпространствам  $\Omega_n$  и  $\Omega_{n+1}$ , получим:

$$\begin{aligned}
&\int_{\Omega_{n+1}} \int_{\Omega_n} (1 + S^{n,n+1}) \frac{\partial f^{n,n+1}}{\partial t} d^3 \xi^n d^3 \xi^{n+1} + \int_{\Omega_{n+1}} \int_{\Omega_n} (1 + S^{n,n+1}) \frac{\partial}{\partial \xi_\beta^n} \left[ f^{n,n+1} \xi_\beta^{n+1} \right] d^3 \xi^n d^3 \xi^{n+1} + \\
&+ \int_{\Omega_{n+1}} \int_{\Omega_n} (1 + S^{n,n+1}) \frac{\partial}{\partial \xi_\beta^{n+1}} \left[ f^{n,n+1} \langle \xi_\beta^{n+2} \rangle_{n,n+1} \right] d^3 \xi^n d^3 \xi^{n+1} = 0. \tag{2.125}
\end{aligned}$$

Первый интеграл в уравнении (2.125) имеет вид:

$$\begin{aligned}
&\int_{\Omega_n} \int_{\Omega_{n+1}} (1 + S^{n,n+1}) \frac{\partial f^{n,n+1}}{\partial t} d^3 \xi^n d^3 \xi^{n+1} = \frac{d}{dt} \int_{\Omega_n} \int_{\Omega_{n+1}} f^{n,n+1} S^{n,n+1} d^3 \xi^n d^3 \xi^{n+1} = \frac{d}{dt} \left[ f^0 \langle S^{n,n+1} \rangle_0 \right]. \\
&+ \int_{\Omega_{n+1}} \int_{\Omega_n} (1 + S^{n,n+1}) \frac{\partial}{\partial \xi_\beta^{n+1}} \left[ f^{n,n+1} \langle \xi_\beta^{n+2} \rangle_{n,n+1} \right] d^3 \xi^n d^3 \xi^{n+1} = 0. \tag{2.126}
\end{aligned}$$

Преобразуем подынтегральные выражения, стоящие во втором и третьем интеграле. Учтем соотношения

$$\frac{\partial}{\partial \xi_\beta^n} [S^{n,n+1} f^{n,n+1} \xi_\beta^{n+1}] = \xi_\beta^{n+1} \left( S^{n,n+1} \frac{\partial f^{n,n+1}}{\partial \xi_\beta^n} + f^{n,n+1} \frac{\partial S^{n,n+1}}{\partial \xi_\beta^n} \right) = (1 + S^{n,n+1}) \frac{\partial}{\partial \xi_\beta^n} [f^{n,n+1} \xi_\beta^{n+1}], \quad (2.127)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial \xi_\beta^{n+1}} [S^{n,n+1} f^{n,n+1} \langle \xi_\beta^{n+2} \rangle_{n,n+1}] &= \langle \xi_\beta^{n+2} \rangle_{n,n+1} f^{n,n+1} \frac{\partial S^{n,n+1}}{\partial \xi_\beta^{n+1}} + \langle \xi_\beta^{n+2} \rangle_{n,n+1} S^{n,n+1} \frac{\partial f^{n,n+1}}{\partial \xi_\beta^{n+1}} + \\ &+ S^{n,n+1} f^{n,n+1} \frac{\partial \langle \xi_\beta^{n+2} \rangle_{n,n+1}}{\partial \xi_\beta^{n+1}} = \langle \xi_\beta^{n+2} \rangle_{n,n+1} \frac{\partial f^{n,n+1}}{\partial \xi_\beta^{n+1}} + f^{n,n+1} \frac{\partial \langle \xi_\beta^{n+2} \rangle_{n,n+1}}{\partial \xi_\beta^{n+1}} - f^{n,n+1} \frac{\partial \langle \xi_\beta^{n+2} \rangle_{n,n+1}}{\partial \xi_\beta^{n+1}} + \\ &+ S^{n,n+1} \frac{\partial}{\partial \xi_\beta^{n+1}} [\langle \xi_\beta^{n+2} \rangle_{n,n+1} f^{n,n+1}], \\ \frac{\partial}{\partial \xi_\beta^{n+1}} [S^{n,n+1} f^{n,n+1} \langle \xi_\beta^{n+2} \rangle_{n,n+1}] + f^{n,n+1} Q_{n,n+1}^{n+1} &= (1 + S^{n,n+1}) \frac{\partial}{\partial \xi_\beta^{n+1}} [f^{n,n+1} \langle \xi_\beta^{n+2} \rangle_{n,n+1}]. \quad (2.128) \end{aligned}$$

Подставляя выражения (2.126)-(2.128) в уравнение (2.125), получим

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} [f^0 \langle S^{n,n+1} \rangle_0] + \int_{\Omega_{n+1}} \int_{\Omega_n} \frac{\partial}{\partial \xi_\beta^n} [S^{n,n+1} f^{n,n+1} \xi_\beta^{n+1}] d^3 \xi^n d^3 \xi^{n+1} + \\ + \int_{\Omega_{n+1}} \int_{\Omega_n} \frac{\partial}{\partial \xi_\beta^{n+1}} [S^{n,n+1} f^{n,n+1} \langle \xi_\beta^{n+2} \rangle_{n,n+1}] d^3 \xi^n d^3 \xi^{n+1} + \int_{\Omega_{n+1}} \int_{\Omega_n} f^{n,n+1} Q_{n,n+1}^{n+1} d^3 \xi^n d^3 \xi^{n+1} = 0, \\ \frac{d}{dt} [f^0 \langle S^{n,n+1} \rangle_0] = -f^0 \langle Q_{n,n+1}^{n+1} \rangle_0. \quad (2.129) \end{aligned}$$

Рассмотрим функции распределения второго ранга  $f^{n,n+k}$ ,  $k > 1$ , принадлежащие второй группе и удовлетворяющие уравнению (2.51). Умножим уравнение (2.51) на  $(1 + S^{n,n+k})$  и проинтегрируем по подпространствам  $\Omega_n$  и  $\Omega_{n+k}$ , получим:

$$\begin{aligned} \int_{\Omega_{n+k}} \int_{\Omega_n} (1 + S^{n,n+k}) \frac{\partial f^{n,n+k}}{\partial t} d^3 \xi^n d^3 \xi^{n+k} + \int_{\Omega_{n+k}} \int_{\Omega_n} (1 + S^{n,n+k}) \frac{\partial}{\partial \xi_\beta^n} [f^{n,n+k} \langle \xi_\beta^{n+1} \rangle_{n,n+k}] d^3 \xi^n d^3 \xi^{n+k} + \\ + \int_{\Omega_{n+1}} \int_{\Omega_n} (1 + S^{n,n+k}) \frac{\partial}{\partial \xi_\beta^{n+k}} [f^{n,n+k} \langle \xi_\beta^{n+k+1} \rangle_{n,n+k}] d^3 \xi^n d^3 \xi^{n+k} = 0. \quad (2.130) \end{aligned}$$

Первый интеграл вычисляется аналогично выражению (2.126).  
Выражения, стоящие во втором и третьем интеграле можно представить в виде

$$(1 + S^{n,n+k}) \frac{\partial}{\partial \xi_\beta^n} \left[ f^{n,n+k} \langle \xi_\beta^{n+1} \rangle_{n,n+k} \right] = \frac{\partial}{\partial \xi_\beta^n} \left[ S^{n,n+k} f^{n,n+k} \langle \xi_\beta^{n+1} \rangle_{n,n+k} \right] + f^{n,n+k} Q_{n,n+k}^n, \quad (2.131)$$

$$(1 + S^{n,n+k}) \frac{\partial}{\partial \xi_\beta^{n+k}} \left[ f^{n,n+k} \langle \xi_\beta^{n+2} \rangle_{n,n+k} \right] = \frac{\partial}{\partial \xi_\beta^{n+k}} \left[ S^{n,n+k} f^{n,n+k} \langle \xi_\beta^{n+2} \rangle_{n,n+k} \right] + f^{n,n+k} Q_{n,n+k}^{n+k}.$$

Подставляя выражения (2.131) в уравнение (2.130), получим

$$\frac{d}{dt} \left[ f^0 \langle S^{n,n+k} \rangle_0 \right] = -f^0 \left[ \langle Q_{n,n+k}^n \rangle_0 + \langle Q_{n,n+k}^{n+k} \rangle_0 \right]. \quad (2.132)$$

Для функций распределения третьего ранга  $f^{n,n+1,n+2}$ , принадлежащих первой группе выполнено уравнение (2.66). Умножим уравнение (2.66) на  $(1 + S^{n,n+1,n+2})$  и проинтегрируем по подпространствам  $\Omega_n$ ,  $\Omega_{n+1}$  и  $\Omega_{n+2}$

$$\begin{aligned} & \frac{d}{dt} \left[ f^0 \langle S^{n,n+1,n+2} \rangle_0 \right] + \int_{\Omega_{n+2}} \int_{\Omega_{n+1}} \int_{\Omega_n} (1 + S^{n,n+1,n+2}) \xi_\beta^{n+1} \frac{\partial f^{n,n+1,n+2}}{\partial \xi_\beta^n} d^3 \xi^n d^3 \xi^{n+1} d^3 \xi^{n+2} + \\ & + \int_{\Omega_{n+2}} \int_{\Omega_{n+1}} \int_{\Omega_n} (1 + S^{n,n+1,n+2}) \xi_\beta^{n+2} \frac{\partial f^{n,n+1,n+2}}{\partial \xi_\beta^{n+1}} d^3 \xi^n d^3 \xi^{n+1} d^3 \xi^{n+2} + \\ & + \int_{\Omega_{n+2}} \int_{\Omega_{n+1}} \int_{\Omega_n} (1 + S^{n,n+1,n+2}) \frac{\partial}{\partial \xi_\beta^{n+2}} \left[ f^{n,n+1,n+2} \langle \xi_\beta^{n+3} \rangle_{n,n+1,n+2} \right] d^3 \xi^n d^3 \xi^{n+1} d^3 \xi^{n+2} = 0. \end{aligned} \quad (2.133)$$

По аналогии с выражениями (2.127) и (2.128) можно получить соотношения

$$\begin{aligned}
(1 + S^{n,n+1,n+2}) \xi_\beta^{n+2} \frac{\partial f^{n,n+1,n+2}}{\partial \xi_\beta^{n+1}} &= \frac{\partial}{\partial \xi_\beta^{n+1}} [S^{n,n+1,n+2} f^{n,n+1,n+2} \xi_\beta^{n+2}], \\
(1 + S^{n,n+1,n+2}) \xi_\beta^{n+1} \frac{\partial f^{n,n+1,n+2}}{\partial \xi_\beta^n} &= \frac{\partial}{\partial \xi_\beta^n} [S^{n,n+1,n+2} f^{n,n+1,n+2} \xi_\beta^{n+1}], \\
(1 + S^{n,n+1,n+2}) \frac{\partial}{\partial \xi_\beta^{n+2}} [f^{n,n+1,n+2} \langle \xi_\beta^{n+3} \rangle_{n,n+1,n+2}] &= \frac{\partial}{\partial \xi_\beta^{n+2}} [S^{n,n+1,n+2} f^{n,n+1,n+2} \langle \xi_\beta^{n+3} \rangle_{n,n+1,n+2}] + \\
&+ f^{n,n+1,n+2} Q_{n,n+1,n+2}^{n+2}
\end{aligned} \tag{2.134}$$

Используя представления (2.134) уравнение (2.133) примет вид:

$$\frac{d}{dt} [f^0 \langle S^{n,n+1,n+2} \rangle_0] = -f^0 \langle Q_{n,n+1,n+2}^{n+2} \rangle_0. \tag{2.135}$$

Рассмотрим функции третьего ранга  $f^{n,n+1,n+1+k}$ ,  $f^{n,n+s,n+s+1}$  и  $f^{n,n+s,n+s+k}$ , принадлежащие ко второй группе. Прделаем выкладки для функций  $f^{n,n+1,n+1+k}$  и  $f^{n,n+s,n+s+1}$  аналогичные (2.130), (2.131).

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt} [f^0 \langle S^{n,n+1,n+1+k} \rangle_0] &+ \int_{\Omega_{n+1+k}} \int_{\Omega_{n+1}} \int_{\Omega_n} (1 + S^{n,n+1,n+1+k}) \frac{\partial}{\partial \xi_\beta^{n+1}} [\xi_\beta^{n+1} f^{n,n+1,n+1+k}] d^3 \xi^n d^3 \xi^{n+1} d^3 \xi^{n+1+k} + \\
&+ \int_{\Omega_{n+1+k}} \int_{\Omega_{n+1}} \int_{\Omega_n} (1 + S^{n,n+1,n+1+k}) \frac{\partial}{\partial \xi_\beta^{n+1}} [f^{n,n+1,n+1+k} \langle \xi_\beta^{n+2} \rangle_{n,n+1,n+1+k}] d^3 \xi^n d^3 \xi^{n+1} d^3 \xi^{n+1+k} + \\
&+ \int_{\Omega_{n+1+k}} \int_{\Omega_{n+1}} \int_{\Omega_n} (1 + S^{n,n+1,n+1+k}) \frac{\partial}{\partial \xi_\beta^{n+1+k}} [f^{n,n+1,n+1+k} \langle \xi_\beta^{n+2+k} \rangle_{n,n+1,n+1+k}] d^3 \xi^n d^3 \xi^{n+1} d^3 \xi^{n+1+k} = 0.
\end{aligned} \tag{2.136}$$

Сделаем промежуточные преобразования:

$$\begin{aligned}
(1 + S^{n,n+1,n+1+k}) \frac{\partial}{\partial \xi_\beta^{n+1}} [\xi_\beta^{n+1} f^{n,n+1,n+1+k}] &= \frac{\partial}{\partial \xi_\beta^n} [S^{n,n+1,n+1+k} f^{n,n+1,n+1+k} \xi_\beta^{n+1}], \\
(1 + S^{n,n+1,n+1+k}) \frac{\partial}{\partial \xi_\beta^{n+1}} [f^{n,n+1,n+1+k} \langle \xi_\beta^{n+2} \rangle_{n,n+1,n+1+k}] &=
\end{aligned}$$

$$= \frac{\partial}{\partial \xi_\beta^{n+1}} \left[ S^{n,n+1,n+1+k} f^{n,n+1,n+1+k} \langle \xi_\beta^{n+2} \rangle_{n,n+1,n+1+k} \right] + f^{n,n+1,n+1+k} Q_{n,n+1,n+1+k}^{n+1}, \quad (2.137)$$

$$\begin{aligned} & (1 + S^{n,n+1,n+1+k}) \frac{\partial}{\partial \xi_\beta^{n+1+k}} \left[ f^{n,n+1,n+1+k} \langle \xi_\beta^{n+2+k} \rangle_{n,n+1,n+1+k} \right] = \\ & = \frac{\partial}{\partial \xi_\beta^{n+1+k}} \left[ S^{n,n+1,n+1+k} f^{n,n+1,n+1+k} \langle \xi_\beta^{n+2+k} \rangle_{n,n+1,n+1+k} \right] + f^{n,n+1,n+1+k} Q_{n,n+1,n+1+k}^{n+1+k}. \end{aligned}$$

Подставляя (2.137) в уравнение (2.136), получим

$$\frac{d}{dt} \left[ f^0 \langle S^{n,n+1,n+1+k} \rangle_0 \right] = -f^0 \left( \langle Q_{n,n+1,n+1+k}^{n+1} \rangle_0 + \langle Q_{n,n+1,n+1+k}^{n+1+k} \rangle_0 \right). \quad (2.138)$$

Функция  $f^{n,n+s,n+s+1}$  удовлетворяет уравнению

$$\begin{aligned} & \frac{\partial f^{n,n+s,n+s+1}}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial \xi_\beta^n} \left[ f^{n,n+s,n+s+1} \langle \xi_\beta^{n+1} \rangle_{n,n+s,n+s+1} \right] + \frac{\partial}{\partial \xi_\beta^{n+s}} \left[ \xi_\beta^{n+s+1} f^{n,n+s,n+s+1} \right] + \\ & + \frac{\partial}{\partial \xi_\beta^{n+s+1}} \left[ f^{n,n+s,n+s+1} \langle \xi_\beta^{n+s+2} \rangle_{n,n+s,n+s+1} \right] = 0, \end{aligned} \quad (2.139)$$

которое схоже с уравнением для функции  $f^{n,n+1,n+1+k}$ , поэтому

$$\frac{d}{dt} \left[ f^0 \langle S^{n,n+s,n+s+1} \rangle_0 \right] = -f^0 \left( \langle Q_{n,n+s,n+s+1}^n \rangle_0 + \langle Q_{n,n+s,n+s+1}^{n+s+1} \rangle_0 \right). \quad (2.140)$$

Уравнение (2.32) для функции  $f^{n,n+s,n+s+k}$  имеет три источника диссипации

$$\hat{\pi}_{n,n+s,n+s+k} S^{n,n+s,n+s+k} = - \left( Q_{n,n+s,n+s+k}^n + Q_{n,n+s,n+s+k}^{n+s} + Q_{n,n+s,n+s+k}^{n+s+k} \right),$$

поэтому выполняя выкладки, аналогичные (2.136) и (2.137), получим

$$\frac{d}{dt} \left[ f^0 \langle S^{n,n+s,n+s+k} \rangle_0 \right] = -f^0 \left( \langle Q_{n,n+s,n+s+k}^n \rangle_0 + \langle Q_{n,n+s,n+s+k}^{n+s} \rangle_0 + \langle Q_{n,n+s,n+s+k}^{n+s+k} \rangle_0 \right). \quad (2.141)$$

Теорема 6 доказана.

Уравнения (2.118)-(2.120) имеют схожую структуру с уравнениями дисперсионной цепочки (2.30)-(2.32). При постоянном числе частиц  $f^0 = N(t) = const$  изменение со временем  $H^{n_1, \dots, n_R}$  – функций Больцмана полностью определяется усредненными источниками диссипаций  $\langle Q \rangle$ . Если правая часть уравнений (2.118)-(2.120) является положительной, тогда функция  $H^{n_1, \dots, n_R}$  – функций Больцмана убывает, а если отрицательной, тогда  $H^{n_1, \dots, n_R}$  – функция Больцмана возрастает. В отсутствии источников диссипаций  $H^{n_1, \dots, n_R}$  – функция Больцмана является стационарной.

*Таким образом, уравнения (2.118)-(2.120) можно рассматривать как аналог  $H$  – теоремы Больцмана для дисперсионной цепочки уравнений Власова в обобщенном фазовом пространстве.* Источники диссипаций  $\langle Q \rangle$  являются источниками производства «обобщенной энтропии», знак которых определяется векторным полем  $\left\langle \vec{\xi}^{p+1} \right\rangle_{n_1, \dots, n_R}$  высших кинематических величин. Согласно определению (2.28)  $Q_{n_1, \dots, n_R}^p = \operatorname{div}_{\xi^p} \left\langle \vec{\xi}^{p+1} \right\rangle_{n_1, \dots, n_R}$ , следовательно, исток векторного поля  $\left\langle \vec{\xi}^{p+1} \right\rangle_{n_1, \dots, n_R}$  будет давать  $Q_{n_1, \dots, n_R}^p > 0$ , а сток векторного поля  $\left\langle \vec{\xi}^{p+1} \right\rangle_{n_1, \dots, n_R}$  будет давать  $Q_{n_1, \dots, n_R}^p < 0$ . Так как при усреднении  $\langle Q_{n_1, \dots, n_R}^p \rangle_0$  используется положительная функция плотности вероятностей  $f^{n_1, \dots, n_R}$ , то знак  $\langle Q_{n_1, \dots, n_R}^p \rangle_0$  полностью определяется знаком источников диссипаций  $Q_{n_1, \dots, n_R}^p$ .



## Замечание

Сделаем важное замечание. Цепочка уравнений Власова содержит кинематические уравнения, в которых отсутствует информация о динамике. Знак источников диссипаций  $Q_{n_1, \dots, n_R}^p$  невозможно определить из уравнений Власова. Для определения знака величин  $Q_{n_1, \dots, n_R}^p$  необходимо разорвать цепочку и произвести динамическую аппроксимацию средней кинематической величины  $\left\langle \vec{\xi}^{p+1} \right\rangle_{n_1, \dots, n_R}$  вида (i.9), (i.16)/(i.7), (i.1). Аналогичная ситуация возникает в уравнении Больцмана при динамической аппроксимации интеграла столкновений.

Отметим, что в процессе построения цепочки уравнений Власова [1] нигде не накладывалось условие положительности функций распределения. Теорема 6 сформулирована для положительных функций распределения. Конечно, с позиции классической физики плотность вероятностей является положительной функцией и требование теоремы 6 является естественным.

При описании квантовых систем в фазовом пространстве используется функция Вигнера, определяющая квази-плотность вероятностей. Термин квази-плотность обусловлен наличием отрицательных значений у функции Вигнера. С позиции квантовой механики в фазовом пространстве требуется расширение условий теоремы 6 на случай  $f^{n_1, \dots, n_R} \in \mathbb{R}$ . Отметим, что функция Вигнера удовлетворяет уравнению Моэля [17], которое совпадает с уравнением для функции  $f^{1,2}$  при обрыве цепочки с динамической аппроксимацией Власова-Моэля (i.16) для кинематической величины  $\left\langle \dot{\vec{v}} \right\rangle_{1,2}$ .

Не ограничивая общности рассмотрим расширение теоремы 6 для функций распределения второго ранга  $f^{n, n+1} \in \mathbb{R}$ .

**Теорема 7.** Пусть функция распределения второго ранга  $f^{n,n+1} \in \mathbb{R}$  удовлетворяет дисперсионной цепочки уравнений Власова и может быть представлена в виде:

$$f^{n,n+1} = \begin{cases} f^{n,n+1}, & (n, n+1) \in \Omega_n^+ \times \Omega_{n+1}^+, \\ -|f^{n,n+1}|, & (n, n+1) \in \Omega_n^- \times \Omega_{n+1}^-, \\ 0, & (n, n+1) \in \Sigma_{n,n+1}, \end{cases} \quad (2.142)$$

где  $\Omega_n^+ \times \Omega_{n+1}^+$  и  $\Omega_n^- \times \Omega_{n+1}^-$  области, в которых  $f^{n,n+1}$  принимает положительные и отрицательные значения соответственно. Поверхность  $\Sigma_{n,n+1}$  соответствует границе между областями  $\Omega_n^+ \times \Omega_{n+1}^+$  и  $\Omega_n^- \times \Omega_{n+1}^-$ .

Тогда уравнение (2.119)  $\hat{\pi}_0 [f^0 H^{n,n+1}] = -f^0 \langle Q_{n,n+1}^{n+1} \rangle_0$  для функции  $f^{n,n+1}$  необходимо заменить на систему уравнений:

$$\begin{cases} \hat{\pi}_0 [f^0 \langle \ln |f^{n,n+1}| \rangle_0] = -f^0 \langle Q_{n,n+1}^{n+1} \rangle_0, \\ f_-^0 = const, \end{cases} \quad (2.143)$$

где  $f_-^0$  соответствует числу частиц или вероятности нахождения системы в области  $\Omega_n^- \times \Omega_{n+1}^-$ .

### **Доказательство теоремы 7.**

Из выражения (2.143) следует, что функция  $S^{n,n+1}$  (2.28) будет иметь комплексные значения

$$S^{n,n+1} = \text{Ln } f^{n,n+1} =$$

$$= \ln |f^{n,n+1}| + i \arg f^{n,n+1} = \begin{cases} \ln f^{n,n+1}, & (n, n+1) \in \Omega_n^+ \times \Omega_{n+1}^+, \\ \ln |f^{n,n+1}| + i\pi, & (n, n+1) \in \Omega_n^- \times \Omega_{n+1}^-, \\ \infty, & (n, n+1) \in \Sigma_{n,n+1}. \end{cases} \quad (2.144)$$

Продельвая выкладки аналогичные при выводе уравнения (2.119) для функции  $f^{n,n+1} \in \mathbb{R}$  с учетом (2.143) и (2.144), получим

$$\begin{aligned} & \int_{\Omega_{n+1}} \int_{\Omega_n} (1 + S^{n,n+1}) \frac{\partial f^{n,n+1}}{\partial t} d^3 \xi^n d^3 \xi^{n+1} + \int_{\Omega_{n+1}} \int_{\Omega_n} (1 + S^{n,n+1}) \frac{\partial}{\partial \xi_\beta^n} [f^{n,n+1} \xi_\beta^{n+1}] d^3 \xi^n d^3 \xi^{n+1} + \\ & + \int_{\Omega_{n+1}} \int_{\Omega_n} (1 + S^{n,n+1}) \frac{\partial}{\partial \xi_\beta^{n+1}} [f^{n,n+1} \langle \xi_\beta^{n+2} \rangle_{n,n+1}] d^3 \xi^n d^3 \xi^{n+1} = 0. \end{aligned} \quad (2.145)$$

Первый интеграл в уравнении (2.145) имеет вид:

$$\begin{aligned} & \int_{\Omega_n \times \Omega_{n+1}} (1 + S^{n,n+1}) \frac{\partial f^{n,n+1}}{\partial t} d^3 \xi^n d^3 \xi^{n+1} = \frac{d}{dt} \int_{\Omega_n \times \Omega_{n+1}} f^{n,n+1} S^{n,n+1} d^3 \xi^n d^3 \xi^{n+1} = \\ & = \frac{d}{dt} \int_{\Omega_n^+ \times \Omega_{n+1}^+} f^{n,n+1} S^{n,n+1} d^3 \xi^n d^3 \xi^{n+1} + \frac{d}{dt} \int_{\Omega_n^- \times \Omega_{n+1}^-} f^{n,n+1} (\ln |f^{n,n+1}| + i\pi) d^3 \xi^n d^3 \xi^{n+1} = \\ & = \frac{d}{dt} \int_{\Omega_n^+ \times \Omega_{n+1}^+} f^{n,n+1} \ln |f^{n,n+1}| d^3 \xi^n d^3 \xi^{n+1} + \frac{d}{dt} \int_{\Omega_n^- \times \Omega_{n+1}^-} f^{n,n+1} \ln |f^{n,n+1}| d^3 \xi^n d^3 \xi^{n+1} + \\ & + i\pi \frac{d}{dt} \int_{\Omega_n^- \times \Omega_{n+1}^-} f^{n,n+1} d^3 \xi^n d^3 \xi^{n+1} = \frac{d}{dt} \int_{\Omega_n \times \Omega_{n+1}} f^{n,n+1} \ln |f^{n,n+1}| d^3 \xi^n d^3 \xi^{n+1} + i\pi \frac{d}{dt} f_-^0 = \\ & \int_{\Omega_n \times \Omega_{n+1}} (1 + S^{n,n+1}) \frac{\partial f^{n,n+1}}{\partial t} d^3 \xi^n d^3 \xi^{n+1} = \frac{d}{dt} f^0 \langle \ln |f^{n,n+1}| \rangle_0 + i\pi \frac{d}{dt} f_-^0, \end{aligned} \quad (2.146)$$

где  $f_-^0$  — число частиц или вероятность нахождения частицы в фазовой области  $\Omega_n^- \times \Omega_{n+1}^-$ .

Преобразуем подынтегральные выражения, стоящие во втором и третьем интеграле. Учтем соотношения (2.127) и (2.128). Проинтегрируем каждый член выражения (2.128) по подпространству  $\Omega_n \times \Omega_{n+1}$ , получим

$$\begin{aligned}
& \int_{\Omega_n \times \Omega_{n+1}} \frac{\partial}{\partial \xi_\beta^n} \left[ S^{n,n+1} f^{n,n+1} \xi_\beta^{n+1} \right] d^3 \xi^n d^3 \xi^{n+1} = \int_{\Omega_n^+ \times \Omega_{n+1}^+} \frac{\partial}{\partial \xi_\beta^n} \left[ \xi_\beta^{n+1} f^{n,n+1} \ln |f^{n,n+1}| \right] d^3 \xi^n d^3 \xi^{n+1} + \\
& + \int_{\Omega_n^- \times \Omega_{n+1}^-} \frac{\partial}{\partial \xi_\beta^n} \left[ \xi_\beta^{n+1} f^{n,n+1} \ln |f^{n,n+1}| \right] d^3 \xi^n d^3 \xi^{n+1} + i\pi \int_{\Omega_n^- \times \Omega_{n+1}^-} \frac{\partial}{\partial \xi_\beta^n} \left[ \xi_\beta^{n+1} f^{n,n+1} \right] d^3 \xi^n d^3 \xi^{n+1} = \\
& = \int_{\Omega_n \times \Omega_{n+1}} \frac{\partial}{\partial \xi_\beta^n} \left[ \xi_\beta^{n+1} f^{n,n+1} \ln |f^{n,n+1}| \right] d^3 \xi^n d^3 \xi^{n+1} + i\pi \int_{\Omega_n^- \times \Omega_{n+1}^-} \frac{\partial}{\partial \xi_\beta^n} \left[ \xi_\beta^{n+1} f^{n,n+1} \right] d^3 \xi^n d^3 \xi^{n+1} = \\
& = i\pi \int_{\Omega_n^- \times \Omega_{n+1}^-} \frac{\partial}{\partial \xi_\beta^n} \left[ \xi_\beta^{n+1} f^{n,n+1} \right] d^3 \xi^n d^3 \xi^{n+1} = i\pi \int_{\Omega_{n+1}^-} \int_{\Sigma_{n,n+1}^-} \xi_\beta^{n+1} f^{n,n+1} d\sigma_\beta^n d^3 \xi^{n+1} = 0, \quad (2.147)
\end{aligned}$$

где согласно (2.143)  $f^{n,n+1} \Big|_{\Sigma_{n,n+1}} = 0$ . Второй интеграл от выражения (2.128)

$$\int_{\Omega_n \times \Omega_{n+1}} f^{n,n+1} Q_{n,n+1}^{n+1} d^3 \xi^n d^3 \xi^{n+1} = f^0 \langle Q_{n,n+1}^{n+1} \rangle_0. \quad (2.148)$$

Интеграл от выражения (2.127) по аналогии с (2.147) примет вид:

$$\int_{\Omega_n \times \Omega_{n+1}} \frac{\partial}{\partial \xi_\beta^{n+1}} \left[ S^{n,n+1} f^{n,n+1} \langle \xi_\beta^{n+2} \rangle_{n,n+1} \right] d^3 \xi^n d^3 \xi^{n+1} = i\pi \int_{\Omega_n^-} \int_{\Sigma_{n,n+1}^-} \xi_\beta^{n+2} f^{n,n+1} d\sigma_\beta^{n+1} d^3 \xi^n = 0. \quad (2.149)$$

Подставляя (2.146)- (2.149) в уравнение (2.145), получим

$$\frac{d}{dt} f^0 \langle \ln |f^{n,n+1}| \rangle_0 + i\pi \frac{d}{dt} f_-^0 + f^0 \langle Q_{n,n+1}^{n+1} \rangle_0 = 0, \quad (2.150)$$

то есть

$$\begin{cases} \frac{d}{dt} f^0 \langle \ln |f^{n,n+1}| \rangle_0 = -f^0 \langle Q_{n,n+1}^{n+1} \rangle_0, \\ \frac{d}{dt} f_-^0 = 0. \end{cases}$$

Теорема 7 доказана.

Теорема 7 имеет важное следствие: вероятность  $f_-^0$  нахождения (или число частиц) в области  $\Omega_n^- \times \Omega_{n+1}^-$  является постоянной величиной. С течением времени величина  $f_-^0$  не меняется, то есть отсутствует поток вероятностей между областями  $\Omega_n^+ \times \Omega_{n+1}^+$  и  $\Omega_n^- \times \Omega_{n+1}^-$ .

В качестве примера  $f^{n,n+1}$  рассмотрим функцию Вигнера  $f_s^{1,2} = W_s$ , где  $s$  – номер квантового состояния. По теореме Хадсона [66] только гауссово распределение функции Вигнера является положительным. Из теоремы 7 следует, что такое состояние будет неизменным с течением времени. Состояния квантовой системы с функциями Вигнера, имеющими отрицательные значения, с течением времени будут иметь те же фазовые площади отрицательных областей. Простейший пример такой системы это функция Вигнера гармонического осциллятора (2.109).

В частном случае при  $f^{n,n+1} \geq 0$  система уравнений (2.143) переходит в уравнение (2.119) из теоремы 6.

В заключение главы рассмотрим предельный случай для  $H_\infty$  - функции Больцмана

$$H_\infty(t) = \frac{\det}{f^0} \int_{\Omega^{n_1}} \dots \int_{\Omega^{n_R}} \dots f_\infty(\vec{\xi}, t) S_\infty d^3 \xi^1 d^3 \xi^2 \dots = \langle S_\infty \rangle_0(t),$$

$$Q_\infty = \operatorname{div}_\xi^{\det} \vec{u},$$

где  $S_\infty = \operatorname{Ln} f_\infty$ ,  $f_\infty = f_\infty(\vec{r}, \vec{v}, \dot{\vec{v}}, \dots, t)$  – функция плотности вероятностей бесконечного набора кинематических величин всех порядков.

**Теорема 8.** Пусть  $f_\infty(\vec{\xi}, t)$  удовлетворяет цепочке уравнений Власова (1.21) и  $f^0 = const$ , тогда для  $H_\infty$  - функции Больцмана справедливо уравнение

$$\frac{dH_\infty}{dt} = 0. \quad (2.151)$$

**Доказательство теоремы 8.**

Умножим уравнение (1.21) на  $(1 + \ln f_\infty)$  и проинтегрируем по всему обобщенному фазовому пространству, получим

$$(1 + \ln f_\infty) \frac{\partial f_\infty}{\partial t} + (1 + \ln f_\infty) \operatorname{div}_\xi [\bar{u} f_\infty] = 0,$$

$$\int_{(\infty)} \frac{\partial}{\partial t} (f_\infty \ln f_\infty) d^3 \omega + \int_{(\infty)} (1 + \ln f_\infty) \operatorname{div}_\xi [\bar{u} f_\infty] d^3 \omega = 0. \quad (2.152)$$

Первый интеграл в (2.152) преобразуется в выражение:

$$\int_{(\infty)} \frac{\partial}{\partial t} (f_\infty \ln f_\infty) d^3 \omega = - \frac{\partial}{\partial t} \int_{(\infty)} f_\infty S_\infty d^3 \omega = - \frac{d}{dt} [f^0(t) \langle S_\infty \rangle_0(t)]. \quad (2.153)$$

Второй интеграл в (2.152) примет вид:

$$\begin{aligned} & \int_{(\infty)} (1 + \ln f_\infty) \operatorname{div}_\xi [f_\infty \bar{u}] d^3 \omega = \int_{(\infty)} (1 + \ln f_\infty) \bar{u} \cdot \nabla_\xi f_\infty d^3 \omega + \int_{(\infty)} (1 + \ln f_\infty) f_\infty \operatorname{div}_\xi \bar{u} d^3 \omega = \\ & = \int_{(\infty)} \bar{u} \cdot \nabla_\xi (f_\infty \ln f_\infty) d^3 \omega + \int_{(\infty)} f_\infty \operatorname{div}_\xi \bar{u} d^3 \omega + \int_{(\infty)} f_\infty \ln f_\infty \operatorname{div}_\xi \bar{u} d^3 \omega = \\ & = - \int_{(\infty)} \bar{u} \cdot \nabla_\xi (f_\infty S_\infty) d^3 \omega - \int_{(\infty)} f_\infty S_\infty \operatorname{div}_\xi \bar{u} d^3 \omega + \int_{(\infty)} f_\infty \operatorname{div}_\xi \bar{u} d^3 \omega = \\ & = - \int_{(\infty)} \operatorname{div}_\xi [f_\infty S_\infty \bar{u}] d^3 \omega + \int_{(\infty)} f_\infty \operatorname{div}_\xi \bar{u} d^3 \omega = \int_{(\infty)} f_\infty Q_\infty d^3 \omega = f^0 \langle Q_\infty \rangle_0, \end{aligned} \quad (2.154)$$

Подставляя (2.153) и (2.154) в уравнение (2.152), получим

$$\frac{d}{dt} [f^0 H_\infty] = f^0 \langle Q_\infty \rangle_0. \quad (2.155)$$

Учитывая, что  $Q_\infty = \operatorname{div}_\xi \vec{u} = 0$  из уравнения (2.155) следует справедливость теоремы.

**Замечание.** Из уравнения (2.151) следует, что обобщенная «энтропия»  $H_\infty$  является постоянной величиной, то есть  $H_\infty = \text{const}$ . Как видно из доказательства теоремы 8 постоянство  $H_\infty$  вызвано отсутствием источников диссипаций  $Q_\infty = 0$  в бесконечномерном обобщенном фазовом пространстве. В конечномерных фазовых подпространствах в общем случае присутствуют источники диссипаций (теорема 6).

Таким образом, процедура усреднения по кинематическим величинам, приводящая к потере информации и переходу на конечномерные фазовые подпространства приводит к появлению источников диссипаций. Геометрически возможна следующая интерпретация. В бесконечномерном обобщенном фазовом пространстве фазовые траектории не пересекаются (см. главу 1), поэтому источники поля обобщенной скорости равны нулю  $Q_\infty = \operatorname{div}_\xi \vec{u} = 0$ . Усреднение по кинематическим величинам приводит к полю скоростей, содержащему средние значения  $\langle \vec{\xi}^p \rangle$ , которые в общем случае имеют отличную от нуля дивергенцию. В результате в конечномерном фазовом пространстве появляются точки, из которых выходит / входит множество фазовых траекторий.

## Заключение

Изложенный в главе 2 подход, позволяет по новому взглянуть на физические процессы с позиции обобщенного фазового пространства

высших кинематических величин. С одной стороны, фундаментальность цепочки уравнений Власова дает возможность единого рассмотрения различных областей физики: классической механики, статистической физики, механики сплошных сред, квантовой механики. Каждая из этих областей является частным случаем цепочки и определяется тем, что понимается под функцией распределения и средними кинематическими величинами. Например, в механике сплошных сред под функцией распределения можно понимать плотность вещества, в квантовой механике — плотность вероятностей, в теории поля — плотность заряда (вероятность обнаружения заряд) или даже функцию магнитной проницаемости [67].

С другой стороны, фундаментальность цепочки проявляется в уровне реалистичности описания физической системы. Обрыв цепочки на определенном уравнении определяет степень информации о системе. Рассмотрение уравнений движения не выше второго порядка исчерпывается при рассмотрении электромагнитного излучения (уравнения Лоренца (i.1)). Квантовая механика в фазовом пространстве использует аппарат функции Вигнера, которая удовлетворяет второму уравнению Власова (уравнение Моэля [48]) и содержит диссипации высших порядков.

Полученные уравнения (2.36), (2.37), (2.52), (2.53), (2.67)-(2.69), (2.81)-(2.83) могут напрямую использоваться при построении консервативных конечно-разностных алгоритмов при численном решении ряда практических задач гидродинамики, механики сплошных сред и физики плазмы с учетом электромагнитного излучения [68-71, 72, 73].



## ГЛАВА 3 КЛАССИЧЕСКИЕ И КВАНТОВЫЕ СИСТЕМЫ

### §3.1 Гидро-газодинамическое приближение

В главе 2 рассмотрена дисперсионная цепочка уравнений Власова и получены соотношения для связи средних кинематических величин разного порядка. Для средних кинематических величин  $\langle \dot{\vec{v}} \rangle_{1,2}$ ,  $\langle \ddot{\vec{v}} \rangle_{1,2,3}$  и  $\langle \dddot{\vec{v}} \rangle_{1,2,3}$  справедливы соотношения:

$$\frac{\partial}{\partial v_\lambda} P_{\mu\lambda}^2(1) = f^1 \left[ \langle \dot{v}_\mu \rangle_1 - \hat{\pi}_1 \langle v_\mu \rangle_1 \right], \quad (3.1)$$

$$\frac{\partial}{\partial v_\lambda} P_{\mu\lambda}^3(1,2) = f^{1,2} \left[ \langle \ddot{v}_\mu \rangle_{1,2} - \hat{\pi}_{1,2} \langle \dot{v}_\mu \rangle_{1,2} \right], \quad (3.2)$$

$$\frac{\partial}{\partial \dot{v}_\lambda} P_{\mu\lambda}^4(1,2,3) = f^{1,2,3} \left[ \langle \ddot{v}_\mu \rangle_{1,2,3} - \hat{\pi}_{1,2,3} \langle \dot{v}_\mu \rangle_{1,2,3} \right], \quad (3.3)$$

где  $P_{\mu\lambda}^2$ ,  $P_{\mu\lambda}^3$  и  $P_{\mu\lambda}^4$  являются кинематическими моментами 2-го порядка от функций распределения  $f^{1,2}$ ,  $f^{1,2,3}$  и  $f^{1,2,3,4}$  соответственно:

$$P_{\mu\lambda}^2(1,2) \stackrel{\det}{=} \int_{(\infty)} f^{1,2} (v_\mu - \langle v_\mu \rangle_1) (v_\lambda - \langle v_\lambda \rangle_1) d^3 v, \quad (3.4)$$

$$P_{\mu\lambda}^3(1,2) \stackrel{\det}{=} \int_{(\infty)} f^{1,2,3} (\dot{v}_\mu - \langle \dot{v}_\mu \rangle_{1,2}) (\dot{v}_\lambda - \langle \dot{v}_\lambda \rangle_{1,2}) d^3 \dot{v}, \quad (3.5)$$

$$P_{\mu\lambda}^4(1,2,3) \stackrel{\det}{=} \int_{(\infty)} f^{1,2,3,4} (\ddot{v}_\mu - \langle \ddot{v}_\mu \rangle_{1,2,3}) (\ddot{v}_\lambda - \langle \ddot{v}_\lambda \rangle_{1,2,3}) d^3 \ddot{v}, \quad (3.6)$$

а  $\hat{\pi}_1$ ,  $\hat{\pi}_{1,2}$  и  $\hat{\pi}_{1,2,3}$  дифференциальные операторы 1-го, 2-го и 3-го ранга:

$$\hat{\pi}_1 \stackrel{\det}{=} \frac{\partial}{\partial t} + \langle \vec{v} \rangle_1 \nabla_r, \quad (3.7)$$

$$\hat{\pi}_{1,2}^{\det} = \frac{\partial}{\partial t} + \vec{v} \nabla_r + \langle \dot{\vec{v}} \rangle_{1,2} \nabla_v, \quad (3.8)$$

$$\hat{\pi}_{1,2,3}^{\det} = \frac{\partial}{\partial t} + \vec{v} \nabla_r + \dot{\vec{v}} \nabla_v + \langle \ddot{\vec{v}} \rangle_{1,2,3} \nabla_{\dot{v}}. \quad (3.9)$$

Выражения (3.1)-(3.3) представляют уравнения движения, полученные из второго, третьего и четвертого уравнения Власова. Действительно, из выражения (3.1), (3.7) следует уравнение движения (i.12) в гидродинамическом приближении:

$$\frac{d}{dt} \langle v_\mu \rangle_1 = \left( \frac{\partial}{\partial t} + \langle v_\lambda \rangle_1 \frac{\partial}{\partial x_\lambda} \right) \langle v_\mu \rangle_1 = -\frac{1}{f^1} \frac{\partial P_{\mu\lambda}^2}{\partial x_\lambda} + \langle \dot{v}_\mu \rangle_1, \quad (3.10)$$

где величина  $P_{\mu\lambda}^2$  (3.4) соответствует тензору давления, а  $\langle \dot{v}_\mu \rangle_1$  – определяется внешней силой  $\frac{1}{m} F_\mu$ .

Выражения (3.1)-(3.3) показывают, что разница между производной от средней кинематической величины порядка  $n$  и средней кинематической величиной порядка  $n+1$  определяется моментами  $P_{\mu\lambda}$ . Заметим, что моменты  $P_{\mu\lambda}^2$ ,  $P_{\mu\lambda}^3$  и  $P_{\mu\lambda}^4$  фактически являются ковариационными матрицами для случайных кинематических величин, принимающих значения  $\vec{v}$ ,  $\dot{\vec{v}}$  и  $\ddot{\vec{v}}$  соответственно. Если случайные кинематические величины  $v_\mu$  и  $v_\lambda$  являются независимыми, тогда  $P_{\mu\lambda}^2 = 0$  и из уравнения (3.1)/(3.10) следует, что  $\langle \dot{v}_\mu \rangle_1 = \hat{\pi}_1 \langle v_\mu \rangle_1$ . Аналогично при  $P_{\mu\lambda}^3 = 0$  следует, что  $\langle \ddot{v}_\mu \rangle_{1,2} = \hat{\pi}_{1,2} \langle \dot{v}_\mu \rangle_{1,2}$ . Отсутствие «давления» характерно для системы точечных частиц, с микроскопической функцией распределения:

$$f^{1,2,3}(\vec{r}, \vec{v}, \dot{\vec{v}}, t) = \sum_{k=1}^N \delta(\vec{r} - \vec{r}_k(t)) \delta(\vec{v} - \vec{v}_k(t)) \delta(\dot{\vec{v}} - \dot{\vec{v}}_k(t)), \quad (3.11)$$

$$f^{1,2}(\vec{r}, \vec{v}, t) = \sum_{k=1}^N \delta(\vec{r} - \vec{r}_k(t)) \delta(\vec{v} - \vec{v}_k(t)),$$

где  $N$  – число частиц;  $\delta$  – дельта-функция Дирака;  $\vec{r}_k(t)$ ,  $\vec{v}_k(t)$ ,  $\dot{\vec{v}}_k(t)$  – координата, скорость и ускорение соответственно для  $k$ -ой частицы в момент времени  $t$ . Действительно, подставляя представление (3.11) для функции  $f^{1,2}$  в определение тензора  $P_{\mu\lambda}^2$  (3.4), получим

$$\begin{aligned} P_{\mu\lambda}^2 &= \int_{(\infty)} f^{1,2}(\mathbf{v}_\mu - \langle \mathbf{v}_\mu \rangle_1)(\mathbf{v}_\lambda - \langle \mathbf{v}_\lambda \rangle_1) d^3\mathbf{v} = \sum_{j=1}^N \delta(\vec{r} - \vec{r}_j) (\mathbf{v}_\mu^j - \langle \mathbf{v}_\mu \rangle_1) (\mathbf{v}_\lambda^j - \langle \mathbf{v}_\lambda \rangle_1) = \\ &= \sum_{j=1}^N \delta(\vec{r} - \vec{r}_j) \left( \mathbf{v}_\mu^j - \frac{1}{f^1} \sum_{k=1}^N \mathbf{v}_\mu^k \delta(\vec{r} - \vec{r}_k) \right) \left( \mathbf{v}_\lambda^j - \frac{1}{f^1} \sum_{s=1}^N \mathbf{v}_\lambda^s \delta(\vec{r} - \vec{r}_s) \right) = \\ &= \frac{1}{f^1} \sum_{j=1}^N \delta(\vec{r} - \vec{r}_j) \left( \sum_{k=1}^N \mathbf{v}_\mu^j \delta(\vec{r} - \vec{r}_k) - \sum_{k=1}^N \mathbf{v}_\mu^k \delta(\vec{r} - \vec{r}_k) \right) \left( \sum_{s=1}^N \mathbf{v}_\lambda^j \delta(\vec{r} - \vec{r}_s) - \sum_{s=1}^N \mathbf{v}_\lambda^s \delta(\vec{r} - \vec{r}_s) \right), \\ P_{\mu\lambda}^2 &= \frac{1}{f^1} \sum_{j=1}^N \delta(\vec{r} - \vec{r}_j) \sum_{k=1}^N (\mathbf{v}_\mu^j - \mathbf{v}_\mu^k) \delta(\vec{r} - \vec{r}_k) \sum_{s=1}^N (\mathbf{v}_\lambda^j - \mathbf{v}_\lambda^s) \delta(\vec{r} - \vec{r}_s). \end{aligned} \quad (3.12)$$

Если в выражении (3.12)  $\vec{r} = \vec{r}_j$ , тогда  $k = s = j$ , следовательно,  $(\mathbf{v}_\mu^j - \mathbf{v}_\mu^k) = (\mathbf{v}_\lambda^j - \mathbf{v}_\lambda^s) = 0$ . Таким образом, из (3.12) следует, что  $P_{\mu\lambda}^2 = 0$ . Аналогичное утверждение справедливо и для тензора  $P_{\mu\lambda}^3 = 0$  с микроскопическим распределением (3.11).

Проведем сравнительный анализ уравнений движения (3.10) и (i.13). Для простоты рассмотрения будем считать, что система описывается одно-частичной функцией плотности распределения вероятностей  $f^{1,2}$ . Таким образом, собственное электрическое и магнитное поле не действуют на саму частицу, то есть частица находится во внешних полях. Левые части уравнений (3.10) и (i.13) совпадают, следовательно, должны совпадать и правые части. Величина  $\langle \dot{\mathbf{v}}_\mu \rangle_1$  в правой части уравнения (3.10) ответственна

за внешнее воздействие на систему. Слагаемое  $-\frac{1}{f^1} \frac{\partial P_{\mu\lambda}^2}{\partial x_\lambda}$  определяет плотность силы давления, которая согласно (3.4) связана с собственным распределением системы  $f^{1,2}$ . Рассмотрим правую часть уравнения (i.13). Сила Лоренца  $q\langle\vec{v}\rangle_1 \times \vec{B}_1$  и вклад векторного потенциала  $\partial_i \vec{A}_1$  можно отнести к внешней силе, соответствующей  $\langle\dot{v}_\mu\rangle_1$ . Потенциал  $U^1$  также относится к внешнему воздействию. Следовательно, согласно выражениям (i.10), (i.13) справедливо соотношение:

$$-\frac{1}{m} \frac{\partial Q^1}{\partial x_\mu} = \frac{\hbar^2}{2m^2} \frac{\partial}{\partial x_\mu} \frac{1}{\sqrt{f^1}} \frac{\partial^2}{\partial x_\nu \partial x_\nu} \sqrt{f^1} = -\frac{1}{f^1} \frac{\partial P_{\mu\lambda}^2}{\partial x_\lambda}, \quad (3.13)$$

то есть квантовое давление  $Q^1$  связано со статистическим тензором давления  $P_{\mu\lambda}^2$ . Оценим возможную величину квантового давления на примере квантовой системы, описываемой стационарным уравнением Шрёдингера (i.8). В этом случае фаза волновой функции  $\varphi^1 = -\frac{E}{\hbar}t$  (величина  $E$  соответствует энергии квантовой системы) и согласно (i.9) средний поток вероятностей  $\langle\vec{v}\rangle_1 = 0$ . Из уравнения Гамильтона-Якоби (i.10) следует, что

$$E = U^1 + Q^1. \quad \text{Отсюда с учетом (3.13), получаем } -\frac{\partial U^1}{\partial x_\mu} = \frac{m}{f^1} \frac{\partial P_{\mu\lambda}^2}{\partial x_\lambda}.$$

Сила квантового давления уравновешивается силой внешнего потенциала, которая удерживает эту частицу. В классическом пределе ( $\hbar \ll 1$ ) частица является точечной с однозначно определенной координатой  $\vec{r}(t)$  и скоростью  $\vec{v}(t)$ . Точечной частице соответствует микроскопическая функция распределения типа (3.11), для которой согласно (3.12) тензор давления  $P_{\mu\lambda}^2 = 0$ .

Таким образом, на классических масштабах давление (квантовое) в уравнении (3.10) пренебрежимо мало, что согласно уравнению (3.1) приводит к аппроксимации Власова (i.7)

$$\langle \dot{\vec{v}} \rangle_1 = \hat{\pi}_1 \langle \vec{v} \rangle_1 = \frac{q}{m} (\vec{E}_1 + \langle \vec{v} \rangle_1 \times \vec{B}_1), \quad (3.14)$$

где потенциал  $V^1 = U^1$  (i.10), (i.13).

Рассмотрим построение аппроксимации для векторного поля ускорений второго порядка  $\langle \ddot{v}_\mu \rangle_{1,2,3}$ . Воспользуемся уравнением Лоренца-Абрахама-Дирака (i.1). Уравнение (i.1) записано для точечной частицы, поэтому по аналогии с аппроксимацией Власова (i.7) рассмотрим два возможных варианта:

$$\tau_0 \langle \ddot{v}_\mu \rangle_{1,2,3} = \tau_0 \langle \ddot{v}_\mu \rangle_{1,2} = \langle \dot{v}_\mu \rangle_{1,2} - \frac{q}{m} (E_1^\mu + \varepsilon_{\mu\lambda\nu} v_\lambda B_1^\nu), \quad (3.15)$$

$$\tau_0 \langle \ddot{v}_\mu \rangle_{1,2,3} = \dot{v}_\mu - \frac{q}{m} (E_1^\mu + \varepsilon_{\mu\lambda\nu} v_\lambda B_1^\nu). \quad (3.16)$$

где  $\varepsilon_{\mu\lambda\nu}$  – символы Леви-Чивиты. Усреднение по пространству ускорений аппроксимации (3.16) дает аппроксимацию (3.15). Заметим, что аппроксимация (3.16) в отличие от (3.15) содержит источники диссипаций (2.28)  $Q_3^{1,2,3} = 3/\tau_0$  вдоль фазовой траектории для функции распределения  $f^{1,2,3}$ . Учитывая (3.15) уравнение (3.2) примет вид:

$$m\tau_0 \hat{\pi}_{1,2} \langle \dot{v}_\mu \rangle_{1,2} = m \langle \dot{v}_\mu \rangle_{1,2} - q (E_1^\mu + \varepsilon_{\mu\lambda\nu} v_\lambda B_1^\nu) - \frac{m}{f^{1,2}} \frac{\partial P_{\mu\lambda}^3}{\partial v_\lambda}. \quad (3.17)$$

В частном случае для микроскопического распределения (3.11)  $P_{\mu\lambda}^3 = 0$  и уравнение (3.17) переходит в уравнение для точечной частицы (i.1). При отсутствии излучения ( $\tau_0 = 0$ ) уравнение (3.17) после интегрирования по пространству скоростей перейдет в аппроксимацию Власова (3.14).

В общем случае оценка величины тензора  $P_{\mu\lambda}^3$  в уравнении (3.17) требует отдельного исследования. Для использования подхода, изложенного при оценке тензора  $P_{\mu\lambda}^2$  необходимо построить электродинамический аналог уравнения (3.2). Построение такого аналога будет произведено в следующем параграфе.

### §3.2 Электромагнитное представление

Уравнению движения в гидро-газодинамическом приближении (3.1) соответствует электродинамический аналог уравнения движения (i.13). Логичным видится найти соответствующую пару для уравнения (3.2). Построение такого уравнения выполним в рамках подхода, изложенного в работах [3, 35].

Пусть функция распределения  $f^{1,2}$  является положительной  $f^{1,2} = |\Psi^{1,2}|^2 \geq 0$ ,  $\Psi^{1,2} \in \mathbb{C}$  и справедливо представление:

$$\langle \dot{\hat{v}} \rangle_{1,2} = -\alpha_2 \nabla_v \Phi^{1,2} + \gamma_2 \vec{A}_{1,2}, \quad (3.18)$$

где  $-\alpha_2 \nabla_v \Phi^{1,2}$  потенциальная, а  $\gamma_2 \vec{A}_{1,2}$  – вихревая компонента векторного поля  $\langle \dot{\hat{v}} \rangle_{1,2}$ ;  $\alpha_2, \gamma_2$  – некоторые постоянные величины. Подставим представление (3.18) во второе уравнение Власова (2.31) для функции  $S^{1,2}$ , получим:

$$\begin{aligned} & \bar{\Psi}^{1,2} \left[ \frac{\partial}{\partial t} + \vec{v} \nabla_r + i\alpha_2 \Delta_v + \gamma_2 \vec{A}_{1,2} \nabla_v - \frac{i}{4\alpha_2} |\gamma_2 \vec{A}_{1,2}|^2 \right] \Psi^{1,2} + \\ & + \Psi^{1,2} \left[ \frac{\partial}{\partial t} + \vec{v} \nabla_r - i\alpha_2 \Delta_v + \gamma_2 \vec{A}_{1,2} \nabla_v + \frac{i}{4\alpha_2} |\gamma_2 \vec{A}_{1,2}|^2 \right] \bar{\Psi}^{1,2} = 0, \end{aligned} \quad (3.19)$$

где в силу (3.18) учтено, что  $\langle \dot{\vec{v}} \rangle_{1,2} = i\alpha_2 \nabla_v \text{Ln} \frac{\Psi^{1,2}}{\bar{\Psi}^{1,2}} + \gamma_2 \vec{A}_{1,2}$ . Заметим, что фаза  $\varphi^{1,2}$  комплексной функции  $\Psi^{1,2} = \sqrt{f^{1,2}} \exp(i\varphi^{1,2})$  является свободным параметром, который в рамках данного подхода, полагается равным скалярному потенциалу, то есть  $2\varphi^{1,2} \stackrel{\text{det}}{=} \Phi^{1,2} + 2\pi k, k \in \mathbb{Z}$ .

Перепишем выражение (3.19) через операторы  $\Lambda_{1,2}$  и  $L_{1,2}$ :

$$\begin{aligned} \Lambda_{1,2} + \bar{\Lambda}_{1,2} &= 2\text{Re} \Lambda_{1,2} = 0, \quad \Lambda_{1,2} \stackrel{\text{det}}{=} \bar{\Psi}^{1,2} L_{1,2} \Psi^{1,2}, \\ L_{1,2} \stackrel{\text{det}}{=} \frac{\partial}{\partial t} + \vec{v} \nabla_r + i\alpha_2 \Delta_v + \gamma_2 \vec{A}_{1,2} \nabla_v - \frac{i}{4\alpha_2} |\gamma_2 \vec{A}_{1,2}|^2. \end{aligned} \quad (3.20)$$

Из выражения (3.20) следует, что величина  $\Lambda_{1,2} = iu_{1,2}$ , где  $u_{1,2} \in \mathbb{R}$ , то есть

$$\bar{\Psi}^{1,2} L_{1,2} \Psi^{1,2} = iu_{1,2} \Rightarrow L_{1,2} \Psi^{1,2} = -i\beta_2 U^{1,2} \Psi^{1,2}, \quad (3.21)$$

где  $-\beta_2 U^{1,2} \stackrel{\text{det}}{=} u_{1,2} / |\Psi^{1,2}|^2$  — действительная величина. Учитывая выражение (3.20) уравнение (3.21) примет вид:

$$\frac{i}{\beta_2} \frac{\partial \Psi^{1,2}}{\partial t} = -\alpha_2 \beta_2 \left[ \hat{p}_2^2 - \frac{\gamma_2}{\alpha_2 \beta_2} \vec{A}_{1,2} \hat{p}_2 \right] \Psi^{1,2} - \frac{1}{4\alpha_2 \beta_2} |\gamma_2 \vec{A}_{1,2}|^2 \Psi^{1,2} + \frac{\beta_1}{\beta_2} \vec{v} \hat{p}_1 \Psi^{1,2} + U^{1,2} \Psi^{1,2}, \quad (3.22)$$

где  $\hat{p}_2 = -\frac{i}{\beta_2} \nabla_v$ . Учитывая, что  $\left( \hat{p}^2 - \lambda \vec{A} \hat{p} + \frac{\lambda^2}{4} |\vec{A}|^2 \right) \Psi = \left( \hat{p} - \frac{\lambda}{2} \vec{A} \right)^2 \Psi$

уравнение (3.22) примет вид:

$$\frac{i}{\beta_2} \partial_t \Psi^{1,2} = -\alpha_2 \beta_2 \left( \hat{p}_2 - \frac{\gamma_2}{2\alpha_2 \beta_2} \vec{A}_{1,2} \right)^2 \Psi^{1,2} + U^{1,2} \Psi^{1,2}. \quad (3.23)$$

Полученное уравнение (3.23) является в некотором смысле аналогом для уравнения Шрёдингера (i.8). Построим аналог к уравнению Гамильтона-Якоби (i.10). Умножим уравнение (3.33) на  $\bar{\Psi}^{1,2}$ , получим

$$\begin{aligned} \beta_2 U^{1,2} |\Psi^{1,2}|^2 &= i \bar{\Psi}^{1,2} \frac{\partial \Psi^{1,2}}{\partial t} - \alpha_2 \bar{\Psi}^{1,2} \Delta_v \Psi^{1,2} + i \vec{v} \bar{\Psi}^{1,2} \nabla_r \Psi^{1,2} + \\ &+ i \gamma_2 \bar{\Psi}^{1,2} \vec{A}_{1,2} \nabla_v \Psi^{1,2} + \frac{1}{4\alpha_2} |\gamma_2 \vec{A}_{1,2}|^2 |\Psi^{1,2}|^2. \end{aligned} \quad (3.24)$$

Справедливы соотношения:

$$\begin{aligned} \nabla_r \Psi^{1,2} &= e^{i\phi^{1,2}} \left( \nabla_r |\Psi^{1,2}| + i |\Psi^{1,2}| \nabla_r \phi^{1,2} \right), \quad \nabla_v \Psi^{1,2} = e^{i\phi^{1,2}} \left( \nabla_v |\Psi^{1,2}| + i |\Psi^{1,2}| \nabla_v \phi^{1,2} \right), \\ e^{-i\phi^{1,2}} \Delta_v \Psi^{1,2} &= 2i \nabla_v \phi^{1,2} \nabla_v |\Psi^{1,2}| + \Delta_v |\Psi^{1,2}| - |\Psi^{1,2}| |\nabla_v \phi^{1,2}|^2 + i |\Psi^{1,2}| \Delta_v \phi^{1,2}. \end{aligned} \quad (3.25)$$

Подставим (3.25) в (3.24), получим

$$\begin{aligned} \beta_2 U^{1,2} |\Psi^{1,2}|^2 &= \\ &= \frac{i}{2} \left[ \frac{\partial |\Psi^{1,2}|^2}{\partial t} + \left( -\alpha_2 \nabla_v \phi^{1,2} + \gamma_2 \vec{A}_{1,2} \nabla_v |\Psi^{1,2}|^2 \right) + \vec{v} \nabla_r |\Psi^{1,2}|^2 - \alpha_2 |\Psi^{1,2}|^2 \Delta_v \phi^{1,2} \right] + \end{aligned} \quad (3.26)$$



$$+|\Psi^{1,2}|^2 \left[ -\frac{1}{2} \frac{\partial \Phi^{1,2}}{\partial t} - \alpha_2 \frac{\Delta_v |\Psi^{1,2}|}{|\Psi^{1,2}|} + \frac{\alpha_2}{4} |\nabla_v \Phi^{1,2}|^2 - \frac{1}{2} \bar{v} \nabla_r \Phi^{1,2} - \frac{1}{2} \gamma_2 \bar{A}_{1,2} \nabla_v \Phi^{1,2} + \frac{1}{4\alpha_2} |\gamma_2 \bar{A}_{1,2}|^2 \right].$$

Покажем, что мнимая часть выражения (3.26) равна нулю. Действительно,

$$\begin{aligned} \text{Im} \left( \beta_2 U^{1,2} |\Psi^{1,2}|^2 \right) &= \frac{\partial f^{1,2}}{\partial t} + \left\langle \dot{\bar{v}} \right\rangle_{1,2} \nabla_v f^{1,2} + \bar{v} \nabla_r f^{1,2} + f^{1,2} \left( \nabla_v, -\alpha_2 \nabla_v \Phi^{1,2} + \gamma_2 \bar{A}_{1,2} \right) = \\ &= \frac{\partial f^{1,2}}{\partial t} + \bar{v} \nabla_r f^{1,2} + \text{div}_v \left[ f^{1,2} \left\langle \dot{\bar{v}} \right\rangle_{1,2} \right] = 0. \end{aligned}$$

В результате выражение (3.26) примет вид:

$$\begin{aligned} -\frac{1}{2\beta_2} \frac{\partial \Phi^{1,2}}{\partial t} &= -\frac{1}{4\alpha_2 \beta_2} \left( |\alpha_2 \nabla_v \Phi^{1,2}|^2 - 2\gamma_2 \bar{A}_{1,2} \alpha_2 \nabla_v \Phi^{1,2} + |\gamma_2 \bar{A}_{1,2}|^2 \right) + \frac{1}{2\alpha_2 \beta_2} \bar{v} \alpha_2 \nabla_r \Phi^{1,2} + \\ &+ \frac{\alpha_2}{\beta_2} \frac{\Delta_v |\Psi^{1,2}|}{|\Psi^{1,2}|} + U^{1,2} - \frac{1}{2\beta_2} \left( \frac{\partial}{\partial t} + \bar{v} \nabla_r \right) \Phi^{1,2}, \end{aligned}$$

$$-\frac{1}{2\beta_2} \frac{\partial \Phi^{1,2}}{\partial t} - \frac{1}{2\beta_2} \bar{v} \nabla_r \Phi^{1,2} = -\frac{1}{4\alpha_2 \beta_2} \left| -\alpha_2 \nabla_v \Phi^{1,2} + \gamma_2 \bar{A}_{1,2} \right|^2 + \frac{\alpha_2}{\beta_2} \frac{\Delta_v |\Psi^{1,2}|}{|\Psi^{1,2}|} + U^{1,2},$$

$$-\frac{1}{2\beta_2} \partial_1 \Phi^{1,2} = -\frac{1}{4\alpha_2 \beta_2} \left| \left\langle \dot{\bar{v}} \right\rangle_{1,2} \right|^2 + V^{1,2} = H^{1,2}, \quad (3.27)$$

$$V^{1,2} = U^{1,2} + Q^{1,2}, \quad Q^{1,2} = \frac{\alpha_2}{\beta_2} \frac{\Delta_v |\Psi^{1,2}|}{|\Psi^{1,2}|}. \quad (3.28)$$

Уравнение (3.27) и выражения (3.28) имеют схожую структуру с уравнением Гамильтона-Якоби (i.10). На основании уравнения (3.27) получим уравнение движения:

$$-2\alpha_2 \nabla_v \partial_1 \Phi^{1,2} = -\alpha_2 \partial_1 \nabla_v \Phi^{1,2} - \alpha_2 \nabla_r \Phi^{1,2} = 2\alpha_2 \beta_2 \nabla_v H^{1,2}, \quad (3.29)$$

где учтено, что

$$\begin{aligned}
-\alpha_2 \frac{\partial}{\partial v_\lambda} \partial_1 \Phi^{1,2} &= -\alpha_2 \frac{\partial}{\partial t} \frac{\partial \Phi^{1,2}}{\partial v_\lambda} - \alpha_2 \frac{\partial}{\partial v_\lambda} \left( v_\mu \frac{\partial}{\partial x_\mu} \Phi^{1,2} \right) = -\alpha_2 \frac{\partial}{\partial t} \frac{\partial \Phi^{1,2}}{\partial v_\lambda} - \alpha_2 \frac{\partial v_\mu}{\partial v_\lambda} \frac{\partial}{\partial x_\mu} \Phi^{1,2} - \\
-\alpha_2 \left( v_\mu \frac{\partial}{\partial v_\lambda} \frac{\partial}{\partial x_\mu} \Phi^{1,2} \right) &= -\alpha_2 \left( \frac{\partial}{\partial t} + v_\mu \frac{\partial}{\partial x_\mu} \right) \frac{\partial \Phi^{1,2}}{\partial v_\lambda} - \alpha_2 \frac{\partial}{\partial x_\lambda} \Phi^{1,2}. \tag{3.30}
\end{aligned}$$

Из выражения (3.30) следует, что

$$\partial_1 \left( \langle \dot{\vec{v}} \rangle_{1,2} - \gamma_2 \vec{A}_{1,2} \right) = \alpha_2 \nabla_r \Phi^{1,2} + 2\alpha_2 \beta_2 \nabla_v \mathbf{H}^{1,2}, \tag{3.31}$$

где

$$\begin{aligned}
2\alpha_2 \beta_2 \nabla_v \mathbf{H}^{1,2} &= -\langle \dot{\vec{v}} \rangle_{1,2} \nabla_v \langle \dot{\vec{v}} \rangle_{1,2} - \gamma_2 \langle \dot{\vec{v}} \rangle_{1,2} \times \vec{B}_{1,2} + 2\alpha_2 \beta_2 \nabla_v \mathbf{V}^{1,2}, \\
\vec{B}_{1,2} &= \text{rot}_v \vec{A}_{1,2},
\end{aligned}$$

в результате

$$\begin{aligned}
\left( \partial_1 + \langle \dot{\vec{v}} \rangle_{1,2} \nabla_v \right) \langle \dot{\vec{v}} \rangle_{1,2} &= \gamma_2 \partial_1 \vec{A}_{1,2} + \alpha_2 \nabla_r \Phi^{1,2} + 2\alpha_2 \beta_2 \nabla_v \mathbf{V}^{1,2} - \gamma_2 \langle \dot{\vec{v}} \rangle_{1,2} \times \vec{B}_{1,2}, \\
\hat{\pi}_{1,2} \langle \dot{\vec{v}} \rangle_{1,2} &= -\gamma_2 \left( \vec{E}_{1,2} + \langle \dot{\vec{v}} \rangle_{1,2} \times \vec{B}_{1,2} \right), \tag{3.32}
\end{aligned}$$

$$\vec{E}_{1,2} \stackrel{\text{det}}{=} -\partial_1 \vec{A}_{1,2} - \frac{\alpha_2}{\gamma_2} \left( \nabla_r \Phi^{1,2} + 2\beta_2 \nabla_v \mathbf{V}^{1,2} \right), \quad \text{div}_v \vec{B}_{1,2} = 0. \tag{3.33}$$

Уравнение движения (3.32) является искомым парным уравнением для уравнения (3.2). Определим, какими уравнениями связаны поля  $\vec{E}_{1,2}$  и  $\vec{B}_{1,2}$ .

Вычислим  $\text{rot}_v \vec{E}_{1,2}$ , используя выражение (3.33):

$$\operatorname{rot}_v \vec{E}_{1,2} = -\operatorname{rot}_v \partial_1 \vec{A}_{1,2} - \frac{\alpha_2}{\gamma_2} \operatorname{rot}_v \nabla_r \Phi^{1,2}, \quad (3.34)$$

где правая часть (3.34) требует дополнительных преобразований. Преобразуем по отдельности каждое слагаемое в правой части (3.34). Используя определение производной  $\partial_1$  для  $\operatorname{rot}_v \partial_1 \vec{A}_{1,2}$ , получим

$$\operatorname{rot}_v \partial_1 \vec{A}_{1,2} = \partial_0 \vec{B}_{1,2} + \operatorname{rot}_v (\vec{v} \nabla_r \vec{A}_{1,2}), \quad (3.35)$$

где величина  $\operatorname{rot}_v (\vec{v} \nabla_r \vec{A}_{1,2})$  может быть представлена как:

$$\begin{aligned} \operatorname{rot}_v (\vec{v} \nabla_r \vec{A}_{1,2}) &= [\nabla_v, (\vec{v}, \nabla_r) \vec{A}_{1,2}] = [\nabla_v, \underline{(\vec{v}, \nabla_r)}] \vec{A}_{1,2} + (\vec{v}, \nabla_r) [\nabla_v, \underline{\vec{A}_{1,2}}] = \\ &= [\nabla_r, \vec{A}_{1,2}] + (\vec{v}, \nabla_r) \vec{B}_{1,2}, \\ \operatorname{rot}_v (\vec{v} \nabla_r \vec{A}_{1,2}) &= \operatorname{rot}_r \vec{A}_{1,2} + (\vec{v}, \nabla_r) \vec{B}_{1,2}, \end{aligned} \quad (3.36)$$

где

$$\nabla_v (\vec{v}, \nabla_r) = \nabla_r. \quad (3.37)$$

Используя результат (3.36), выражение (3.35) примет вид:

$$\operatorname{rot}_v \partial_1 \vec{A}_{1,2} = \partial_0 \vec{B}_{1,2} + (\vec{v}, \nabla_r) \vec{B}_{1,2} + \operatorname{rot}_r \vec{A}_{1,2} = \partial_1 \vec{B}_{1,2} + \operatorname{rot}_r \vec{A}_{1,2}. \quad (3.38)$$

Преобразуем второе слагаемое, стоящее в правой части выражения (3.34):

$$\operatorname{rot}_v \nabla_r \Phi^{1,2} = [\nabla_v, \nabla_r \underline{\Phi^{1,2}}] = -[\nabla_r, \nabla_v \Phi^{1,2}] = -\operatorname{rot}_r \nabla_v \Phi^{1,2}. \quad (3.39)$$

Подставим выражения (3.38) и (3.39) в уравнение (3.34), получим

$$\operatorname{rot}_v \vec{E}_{1,2} = -\partial_1 \vec{B}_{1,2} - \frac{1}{\gamma_2} \operatorname{rot}_r \left( -\alpha_2 \nabla_v \Phi^{1,2} + \gamma_2 \vec{A}_{1,2} \right) = -\partial_1 \vec{B}_{1,2} - \frac{1}{\gamma_2} \operatorname{rot}_r \langle \dot{\vec{v}} \rangle_{1,2}, \quad (3.40)$$

которое в частном случае при  $\operatorname{rot}_r \langle \dot{\vec{v}} \rangle_{1,2} = 0$  переходит в уравнение

$$\operatorname{rot}_v \vec{E}_{1,2} = -\partial_1 \vec{B}_{1,2}. \quad (3.41)$$

Преобразуем второе уравнение Власова. Представим функцию плотности вероятностей  $f^{1,2}$  в виде:

$$f^{1,2} \stackrel{\det}{=} \operatorname{div}_r \vec{D}_{1,2}^1 + \operatorname{div}_v \vec{D}_{1,2}^2, \quad (3.42)$$

где  $\vec{D}_{1,2}^1, \vec{D}_{1,2}^2$  – некоторые поля. Подставим представление (3.42) во второе уравнение Власова, получим

$$\begin{aligned} \partial_0 f^{1,2} + \vec{v} \nabla_r f^{1,2} + \operatorname{div}_v \left[ f^{1,2} \langle \dot{\vec{v}} \rangle_{1,2} \right] &= 0 \Rightarrow \partial_1 f^{1,2} + \operatorname{div}_v \vec{J}_{1,2} = 0, \\ \partial_1 \operatorname{div}_v \vec{D}_{1,2}^2 + \partial_1 \operatorname{div}_r \vec{D}_{1,2}^1 + \operatorname{div}_v \vec{J}_{1,2} &= 0, \end{aligned} \quad (3.43)$$

где  $\vec{J}_{1,2} \stackrel{\det}{=} f^{1,2} \langle \dot{\vec{v}} \rangle_{1,2}$ . Преобразуем выражение  $\partial_1 \operatorname{div}_v \vec{D}_{1,2}^2$ :

$$\partial_1 \operatorname{div}_v \vec{D}_{1,2}^2 = \operatorname{div}_v \partial_0 \vec{D}_{1,2}^2 + \vec{v} \nabla_r \operatorname{div}_v \vec{D}_{1,2}^2. \quad (3.44)$$

Вычислим слагаемое  $\vec{v} \nabla_r \operatorname{div}_v \vec{D}_{1,2}^2$  в правой части уравнения (3.44):

$$\frac{\partial}{\partial v_\lambda} \left( v_\mu \frac{\partial}{\partial x_\mu} D_\lambda \right) = \left( \frac{\partial}{\partial v_\lambda} v_\mu \right) \frac{\partial}{\partial x_\mu} D_\lambda + v_\mu \frac{\partial}{\partial x_\mu} \frac{\partial}{\partial v_\lambda} D_\lambda = \frac{\partial}{\partial x_\lambda} D_\lambda + v_\mu \frac{\partial}{\partial x_\mu} \frac{\partial}{\partial v_\lambda} D_\lambda,$$

отсюда

$$v_\mu \frac{\partial}{\partial x_\mu} \frac{\partial}{\partial v_\lambda} D_\lambda = \frac{\partial}{\partial v_\lambda} \left( v_\mu \frac{\partial}{\partial x_\mu} D_\lambda \right) - \frac{\partial}{\partial x_\lambda} D_\lambda, \quad (3.45)$$

Следовательно,

$$(\vec{v}, \nabla_r)(\nabla_v, \vec{D}_{1,2}^2) = (\nabla_v, (\vec{v}, \nabla_r) \vec{D}_{1,2}^2) - (\nabla_r, \vec{D}_{1,2}^2). \quad (3.46)$$

Подставим выражение (3.46) в (3.44), получим

$$\begin{aligned} \partial_1 \operatorname{div}_v \vec{D}_{1,2}^2 &= \operatorname{div}_v \partial_0 \vec{D}_{1,2}^2 + \operatorname{div}_v [(\vec{v}, \nabla_r) \vec{D}_{1,2}^2] - \operatorname{div}_r \vec{D}_{1,2}^2 = \\ &= \operatorname{div}_v [\partial_0 \vec{D}_{1,2}^2 + (\vec{v}, \nabla_r) \vec{D}_{1,2}^2] - \operatorname{div}_r \vec{D}_{1,2}^2, \\ \partial_1 \operatorname{div}_v \vec{D}_{1,2}^2 &= \operatorname{div}_v \partial_1 \vec{D}_{1,2}^2 - \operatorname{div}_r \vec{D}_{1,2}^2. \end{aligned} \quad (3.47)$$

Найдем выражение  $\partial_1 \operatorname{div}_r \vec{D}_{1,2}^1$

$$\begin{aligned} \partial_1 \operatorname{div}_r \vec{D}_{1,2}^1 &= \operatorname{div}_r \partial_0 \vec{D}_{1,2}^1 + (\vec{v}, \nabla_r) \operatorname{div}_r \vec{D}_{1,2}^1 = \operatorname{div}_r \partial_0 \vec{D}_{1,2}^1 + \operatorname{div}_r (\vec{v}, \nabla_r) \vec{D}_{1,2}^1, \\ \partial_1 \operatorname{div}_r \vec{D}_{1,2}^1 &= \operatorname{div}_r \partial_1 \vec{D}_{1,2}^1. \end{aligned} \quad (3.48)$$

В результате уравнение (3.43) с учетом (3.47) и (3.48) примет вид:

$$\operatorname{div}_v (\partial_1 \vec{D}_{1,2}^2 + \vec{J}_{1,2}) + \operatorname{div}_r (\partial_1 \vec{D}_{1,2}^1 - \vec{D}_{1,2}^2) = 0. \quad (3.49)$$

В определении (3.42) есть свобода в выборе полей  $\vec{D}_{1,2}^1$  и  $\vec{D}_{1,2}^2$ , поэтому определим поле  $\vec{D}_{1,2}^1$  через  $\vec{D}_{1,2}^2$ :

$$\partial_1 \bar{D}_{1,2}^1 \stackrel{\det}{=} \bar{D}_{1,2}^2. \quad (3.50)$$

Учитывая (3.50) выражение (3.49) примет вид:

$$\partial_1 \bar{D}_{1,2}^2 + \bar{J}_{1,2} = \text{rot}_v \bar{H}_{1,2}, \quad (3.51)$$

где  $\bar{H}_{1,2}$  – некоторое поле. Таким образом, на основании уравнений (3.33), (3.40), (3.42), (3.50) и (3.51) получена следующая система уравнений:

$$\begin{cases} \text{div}_v \bar{B}_{1,2} = 0, \\ \text{div}_r \bar{D}_{1,2}^1 + \text{div}_v \bar{D}_{1,2}^2 = f^{1,2}, \quad \partial_1 \bar{D}_{1,2}^1 \stackrel{\det}{=} \bar{D}_{1,2}^2, \\ \partial_1 \bar{D}_{1,2}^2 + \bar{J}_{1,2} = \text{rot}_v \bar{H}_{1,2}, \\ \text{rot}_v \bar{E}_{1,2} = -\partial_1 \bar{B}_{1,2} - \frac{1}{\gamma_2} \text{rot}_r \langle \dot{\hat{v}} \rangle_{1,2}. \end{cases} \quad (3.52)$$

Система (3.52) получена для второго уравнения Власова и является аналогом уравнений Максвелла для первого уравнения Власова (i.13). Система уравнений (3.52) связана с уравнениями движения (3.27) и (3.32) и аналогом уравнения Шрёдингера (3.23):

$$\begin{cases} -\frac{1}{2\beta_2} \partial_1 \Phi^{1,2} = -\frac{1}{4\alpha_2 \beta_2} \left| \langle \dot{\hat{v}} \rangle_{1,2} \right|^2 + V^{1,2} = H^{1,2}, \\ \hat{\pi}_{1,2} \langle \dot{\hat{v}} \rangle_{1,2} = -\gamma_2 \left( \bar{E}_{1,2} + \langle \dot{\hat{v}} \rangle_{1,2} \times \bar{B}_{1,2} \right), \\ \frac{i}{\beta_2} \partial_1 \Psi^{1,2} = -\alpha_2 \beta_2 \left( \hat{p}_2 - \frac{\gamma_2}{2\alpha_2 \beta_2} \bar{A}_{1,2} \right)^2 \Psi^{1,2} + U^{1,2} \Psi^{1,2}, \end{cases} \quad (3.53)$$

где

$$\vec{E}_{1,2}^{\det} = -\partial_1 \vec{A}_{1,2} - \frac{\alpha_2}{\gamma_2} (\nabla_r \Phi^{1,2} + 2\beta_2 \nabla_v V^{1,2}), \quad \vec{B}_{1,2} = \text{rot}_v \vec{A}_{1,2}, \quad (3.54)$$

$$V^{1,2} = U^{1,2} + Q^{1,2}, \quad Q^{1,2} = \frac{\alpha_2}{\beta_2} \frac{\Delta_v |\Psi^{1,2}|}{|\Psi^{1,2}|}.$$

Рассмотрим аппроксимацию Власова (i.7) для систем уравнений (3.52)-(3.53). Из сравнения выражений (i.7) и (3.18) следует, что

$$\Phi^{1,2}(\vec{r}, \vec{v}, t) = \frac{\gamma_1}{\alpha_2} (\vec{E}_1, \vec{v}), \quad \vec{A}_{1,2}(\vec{r}, \vec{v}, t) = -\frac{\gamma_1}{\gamma_2} [\vec{v}, \vec{B}_1]. \quad (3.55)$$

отсюда

$$\begin{aligned} \vec{B}_{1,2} &= -\frac{\gamma_1}{\gamma_2} \text{rot}_v [\vec{v}, \vec{B}_1] = -\frac{\gamma_1}{\gamma_2} (\vec{B}_1, \nabla_v) \vec{v} + \frac{\gamma_1}{\gamma_2} \vec{B}_1 (\nabla_v, \vec{v}) = -\frac{\gamma_1}{\gamma_2} \vec{B}_1 + 3 \frac{\gamma_1}{\gamma_2} \vec{B}_1, \\ \vec{B}_{1,2} &= 2 \frac{\gamma_1}{\gamma_2} \vec{B}_1. \end{aligned} \quad (3.56)$$

$$\begin{aligned} \text{rot}_r \langle \dot{\vec{v}} \rangle_{1,2} &= -\gamma_1 \text{rot}_r \vec{E}_1 - \gamma_1 \text{rot}_r [\vec{v}, \vec{B}_1] = \gamma_1 \frac{\partial \vec{B}_1}{\partial t} - \gamma_1 \vec{v} (\nabla_r, \vec{B}_1) + \gamma_1 (\vec{v}, \nabla_r) \vec{B}_1, \\ \text{rot}_r \langle \dot{\vec{v}} \rangle_{1,2} &= \gamma_1 \partial_1 \vec{B}_1. \end{aligned} \quad (3.57)$$

Подставим выражения (3.56) и (3.57) в четвертое уравнение (3.52) или в (3.40), получим

$$\text{rot}_v \vec{E}_{1,2} = -3 \frac{\gamma_1}{\gamma_2} \partial_1 \vec{B}_1. \quad (3.58)$$

Заметим, что аналогичный результат (3.58) получается, если вычислить величину  $\vec{E}_{1,2}$  по формуле (3.54) с учетом выражений (3.55). При этом величина потенциала  $V^{1,2}$  находится из уравнения Гамильтона-Якоби (3.27)

(или первое уравнение в системе (3.53)). Найдем выражение для поля  $\vec{E}_{1,2}$  и потенциала  $V^{1,2}$ :

$$V^{1,2} = -\frac{\gamma_1}{2\alpha_2\beta_2}(\partial_1\vec{E}_1, \vec{v}) + \frac{\gamma_1^2}{4\alpha_2\beta_2}|\vec{E}_1 + \vec{v} \times \vec{B}_1|^2, \quad (3.59)$$

где учтено

$$\partial_1\Phi^{1,2} = \frac{\gamma_1}{\alpha_2}(\partial_0\vec{E}_1, \vec{v}) + \frac{\gamma_1}{\alpha_2}v_\mu v_\lambda \frac{\partial E_1^\mu}{\partial x_\lambda} = \frac{\gamma_1}{\alpha_2}(\partial_0\vec{E}_1 + (\vec{v}, \nabla_r)\vec{E}_1, \vec{v}) = \frac{\gamma_1}{\alpha_2}(\partial_1\vec{E}_1, \vec{v}).$$

Для нахождения поля  $\vec{E}_{1,2}$  произведем промежуточные выкладки.

Обозначим  $\vec{P} = \vec{v} \times \vec{B}_1$ , тогда

$$\begin{aligned} \text{rot}_v \vec{P} &= [\nabla_v, [\vec{v}, \vec{B}_1]] = (\vec{B}_1, \nabla_v)\vec{v} - \vec{B}_1(\nabla_v, \vec{v}) = \vec{B}_1 - 3\vec{B}_1 = -2\vec{B}_1, \\ \nabla_v |\vec{P}|^2 &= 2[\vec{P}, [\nabla_v, \vec{P}]] + 2(\vec{P}, \nabla_v)\vec{P} = 4[\vec{B}_1, [\vec{v}, \vec{B}_1]] + 2(\vec{P}, \nabla_v)\vec{P}, \\ \nabla_v |\vec{P}|^2 &= 4\vec{v}B_1^2 - 4\vec{B}_1(\vec{v}, \vec{B}_1) + 2(\vec{P}, \nabla_v)\vec{P}. \end{aligned} \quad (3.60)$$

Учтем, что  $(\vec{P}, \nabla_v)P_\mu = \varepsilon_{\mu\lambda\nu}B_\nu P_s \frac{\partial}{\partial v_s}v_\lambda = \varepsilon_{\mu\lambda\nu}B_\nu P_\lambda$ , то есть  $(\vec{P}, \nabla_v)\vec{P} = [\vec{P}, \vec{B}_1]$

, следовательно

$$\begin{aligned} \nabla_v |\vec{E}_1 + \vec{P}|^2 &= \nabla_v (E_1^2 + 2\vec{E}_1\vec{P} + |\vec{P}|^2) = 2\nabla_v (\vec{v}, \vec{B}_1 \times \vec{E}_1) + 4\vec{v}B_1^2 - 4\vec{B}_1(\vec{v}, \vec{B}_1) + 2(\vec{P}, \nabla_v)\vec{P} = \\ &= 2[\vec{B}_1, \vec{E}_1] + 4\vec{v}B_1^2 - 4\vec{B}_1(\vec{v}, \vec{B}_1) - 2[\vec{B}_1, [\vec{v}, \vec{B}_1]] = 2[\vec{B}_1, \vec{E}_1] + 4\vec{v}B_1^2 - 4\vec{B}_1(\vec{v}, \vec{B}_1) - \\ &- 2\vec{v}B_1^2 + 2\vec{B}_1(\vec{v}, \vec{B}_1), \\ \nabla_v |\vec{E}_1 + \vec{P}|^2 &= 2[\vec{B}_1, \vec{E}_1 + [\vec{v}, \vec{B}_1]] = \frac{2}{\gamma_1}[\langle \dot{v} \rangle_{1,2}, \vec{B}_1], \end{aligned} \quad (3.61)$$



где учтено (3.60). Вычислим  $\nabla_v V^{1,2}$  с учетом выражения (3.61), получим

$$\begin{aligned}\nabla_v V^{1,2} &= -\frac{\gamma_1}{2\alpha_2\beta_2} \nabla_v (\partial_1 \vec{E}_1, \vec{v}) + \frac{\gamma_1^2}{4\alpha_2\beta_2} \nabla_v \left| \vec{E}_1 + [\vec{v}, \vec{B}_1] \right|^2, \\ \frac{2\alpha_2\beta_2}{\gamma_1} \nabla_v V^{1,2} &= -\partial_1 \vec{E}_1 - \nabla_r (\vec{E}_1, \vec{v}) + \left[ \langle \dot{\vec{v}} \rangle_{1,2}, \vec{B}_1 \right],\end{aligned}\quad (3.62)$$

где учтено

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial v_\mu} (\partial_1 \vec{E}_1, \vec{v}) &= \frac{\partial}{\partial v_\mu} (\partial_0 \vec{E}_1 + (\vec{v}, \nabla_r) \vec{E}_1, \vec{v}) = \partial_0 E_1^\mu + \frac{\partial E_1^\lambda}{\partial x_\nu} \frac{\partial}{\partial v_\mu} (v_\nu v_\lambda) = \\ &= \partial_0 E_1^\mu + \frac{\partial E_1^\lambda}{\partial x_\nu} \left( v_\lambda \frac{\partial v_\nu}{\partial v_\mu} + v_\nu \frac{\partial v_\lambda}{\partial v_\mu} \right) = \partial_0 E_1^\mu + v_\lambda \frac{\partial E_1^\lambda}{\partial x_\mu} + v_\nu \frac{\partial E_1^\mu}{\partial x_\nu} = \\ &= \partial_0 E_1^\mu + \frac{\partial}{\partial x_\mu} (\vec{E}_1, \vec{v}) + (\vec{v}, \nabla_r) E_1^\mu,\end{aligned}$$

то есть

$$\nabla_v (\partial_1 \vec{E}_1, \vec{v}) = \partial_1 \vec{E}_1 + \nabla_r (\vec{E}_1, \vec{v}).$$

Учитывая выражения (3.62), (3.55) выражение (3.54) для поля  $\vec{E}_{1,2}$

примет вид:

$$\begin{aligned}\vec{E}_{1,2} &= \frac{\gamma_1}{\gamma_2} \partial_1 [\vec{v}, \vec{B}_1] - \frac{\gamma_1}{\gamma_2} \nabla_r (\vec{E}_1, \vec{v}) - \frac{2\alpha_2\beta_2}{\gamma_2} \nabla_v V^{1,2}, \\ \frac{\gamma_2}{\gamma_1} \vec{E}_{1,2} &= \partial_1 [\vec{v}, \vec{B}_1] + \partial_1 \vec{E}_1 - \left[ \langle \dot{\vec{v}} \rangle_{1,2}, \vec{B}_1 \right],\end{aligned}\quad (3.63)$$

или учитывая аппроксимацию Власова

$$-\gamma_2 \vec{E}_{1,2} = \partial_1 \langle \dot{\vec{v}} \rangle_{1,2} + \gamma_1 \left[ \langle \dot{\vec{v}} \rangle_{1,2}, \vec{B}_1 \right].\quad (3.64)$$

Заметим, что выражение (3.64) фактически является уравнением движения (3.32) или вторым уравнением в системе (3.53). Действительно, воспользовавшись определением оператора  $\hat{\pi}_{1,2}$  и соотношением (3.56), получаем

$$-\gamma_2 \left( \vec{E}_{1,2} + \left[ \langle \dot{\vec{v}} \rangle_{1,2}, \vec{B}_{1,2} \right] \right) = \partial_1 \langle \dot{\vec{v}} \rangle_{1,2} - \gamma_1 \left[ \langle \dot{\vec{v}} \rangle_{1,2}, \vec{B}_1 \right] = \hat{\pi}_{1,2} \langle \dot{\vec{v}} \rangle_{1,2}.$$

Уравнения движения (3.32) и (3.2) получены из одного и того же второго уравнения Власова. Сравнение этих уравнений дает равенство:

$$\gamma_2 \left( \vec{E}_{1,2} + \langle \dot{\vec{v}} \rangle_{1,2} \times \vec{B}_{1,2} \right) = \frac{1}{f^{1,2}} \frac{\partial P_{\mu\lambda}^3}{\partial v_\lambda} + \langle \ddot{\vec{v}}_\mu \rangle_{1,2}. \quad (3.65)$$

В случае микроскопического распределения (3.11) для функции  $f^{1,2,3}$  тензор  $P_{\mu\lambda}^3 = 0$  и в правой части выражения (3.65) остается только слагаемое  $\langle \ddot{\vec{v}}_\mu \rangle_{1,2}$ . В левой части выражения (3.65) слагаемое  $\vec{E}_{1,2}$  (3.54) содержит «силу квантового давления»  $\nabla_v Q^{1,2}$ , которая определяется функцией распределения  $f^{1,2,3}$ . По аналогии с первым уравнением Власова, допустимо рассмотрение малости «квантового давления»  $\nabla_v Q^{1,2}$  для микроскопической функции распределения. В этом случае на основании выражения (3.65) можно построить аппроксимацию без источников диссипаций:

$$\langle \ddot{\vec{v}} \rangle_{1,2,3} = -\gamma_2 \left( \vec{E}_{1,2} + \dot{\vec{v}} \times \vec{B}_{1,2} \right), \quad Q_3^{1,2,3} = 0. \quad (3.66)$$

Заметим, что после усреднения по пространству ускорений аппроксимация (3.66) будет содержать слагаемое  $\langle \dot{\vec{v}} \rangle_{1,2} \times \vec{B}_{1,2}$ . В общем случае

векторное поле  $\langle \dot{\vec{v}} \rangle_{1,2}$  не обязано совпадать с аппроксимацией Власова (i.7). Вид поля  $\langle \dot{\vec{v}} \rangle_{1,2}$  определяется (2.11) функцией распределения  $f^{1,2,3}$ , которая является решением третьего уравнения Власова (2.32).

### §3.3 $\Psi$ - уравнение Власова

Применим рассмотренные в §3.1-§3.2 аппроксимации (3.15), (3.16) и (3.66) для третьего уравнения Власова (2.32) относительно функции  $S^{1,2,3}$ . При решении второго уравнения Власова используется аппроксимация (i.7) для среднего ускорения  $\langle \dot{\vec{v}} \rangle_{1,2}$ , в которой электромагнитные поля  $\vec{E}_1$  и  $\vec{B}_1$  находятся из решений уравнений Максвелла. Поля  $\vec{E}_1$ ,  $\vec{B}_1$  являются функциями только от одной кинематической переменной  $\vec{r}$ . Уравнения Максвелла фактически строятся из первого уравнения Власова [3], которое записано для функции  $f^1$  одной кинематической переменной  $\vec{r}$ . Таким образом, уравнения Максвелла, соответствующие первому уравнению Власова используются в аппроксимации  $\langle \dot{\vec{v}} \rangle_{1,2}$  (i.7). Если придерживаться такой логики построения метода решений второго уравнения Власова, то для третьего уравнения Власова в аппроксимации  $\langle \ddot{\vec{v}} \rangle_{1,2,3}$  (3.66) необходимо использовать поля  $\vec{E}_{1,2}$  и  $\vec{B}_{1,2}$  – двух кинематических переменных  $(\vec{r}, \vec{v})$ , удовлетворяющие уравнениям поля (3.52), которые получены из второго уравнения Власова. Таким образом, третье уравнение Власова (2.32) с аппроксимацией (3.66) примет вид:

$$\left\{ \frac{\partial}{\partial t} + \vec{v} \nabla_r + \dot{\vec{v}} \nabla_v - \gamma_2 (\vec{E}_{1,2} + \dot{\vec{v}} \times \vec{B}_{1,2}) \nabla_v \right\} f^{1,2,3} = 0, \quad (3.67)$$

где учтено отсутствие источников диссипаций у аппроксимации (3.66).

Поиск решения уравнения (3.67) является сложной самосогласованной задачей, решение которой в общем случае требует использования численных методов. Численное решение уравнения (3.67) может быть найдено по следующему алгоритму. Пусть есть начальное ( $t=0$ ) распределение для функции  $f^{1,2,3}(\vec{r}, \vec{v}, \dot{\vec{v}}, 0) = f_0^{1,2,3}$ . Функция распределения  $f_0^{1,2,3}$  может быть аппроксимирована набором «крупных частиц» (метод PIC: Particle-In-Cell [36-38]) или задана в явном виде на эйлеровой сетке. Зная функцию  $f_0^{1,2,3}$  по формуле (2.11) находим  $\langle \dot{\vec{v}} \rangle_{1,2}$  в начальный момент времени. Если поле  $\langle \dot{\vec{v}} \rangle_{1,2}$  является «достаточно» гладким, то его можно представить в виде разложения (3.18). Из выражения (3.18) будет получена информация о скалярном  $\Phi^{1,2}$  и векторном  $\vec{A}_{1,2}$  потенциале. Подставляя  $\Phi^{1,2}$ ,  $\vec{A}_{1,2}$ ,  $\langle \dot{\vec{v}} \rangle_{1,2}$  в качестве начальных условий в систему уравнений поля (3.52), (3.54) можно получить поля  $\vec{E}_{1,2}$  и  $\vec{B}_{1,2}$ . Зная поля  $\vec{E}_{1,2}$  и  $\vec{B}_{1,2}$ , по уравнениям движения (3.53) или непосредственно по уравнению (3.67) находится функция распределения  $f^{1,2,3}$  на следующем временном шаге.

Заметим, что аппроксимация (3.66) не содержит в явном виде информации об излучении, которая присутствует в уравнении Лоренца-Абрахама-Дирака (i.1). В §3.1 уравнению (i.1) были поставлены в соответствие две аппроксимации (3.15) и (3.16). Рассмотрим третье уравнение Власова с аппроксимациями (3.15) и (3.16). Начнем с аппроксимации (3.16). Как было сказано в §3.1 аппроксимация (3.16) содержит источники диссипаций  $Q_3^{1,2,3} = 3/\tau_0$ , следовательно, третье уравнение Власова (2.32) примет вид:

$$\left\{ \frac{\partial}{\partial t} + v_\lambda \frac{\partial}{\partial x_\lambda} + \dot{v}_\lambda \frac{\partial}{\partial v_\lambda} + \frac{1}{\tau_0} \left[ \dot{v}_\mu - \frac{q}{m} (E_1^\mu + \varepsilon_{\mu\lambda\nu} v_\lambda B_1^\nu) \right] \frac{\partial}{\partial \dot{v}_\mu} \right\} S^{1,2,3} = -\frac{3}{\tau_0}. \quad (3.68)$$

Исследуем поведение решений уравнения (3.68). Уравнение (3.68) является неоднородным, поэтому его решение можно представить в виде суммы  $S^{1,2,3} = S_{g,h}^{1,2,3} + S_{p,i}^{1,2,3}$ , где  $S_{g,h}^{1,2,3}$  – общее решение однородного, а  $S_{p,i}^{1,2,3}$  – частное решение неоднородного уравнения (3.68). Частное решение можно представить в виде  $S_{p,i}^{1,2,3} = -3\frac{t}{\tau_0}$ . Решение  $S_{g,h}^{1,2,3}$  можно получить методом характеристик

$$\frac{d\vec{r}}{dt} = \vec{v}, \quad \frac{d\vec{v}}{dt} = \dot{\vec{v}}, \quad m\tau_0 \frac{d\dot{\vec{v}}}{dt} = m\dot{\vec{v}} - q(\vec{E}_1 + \vec{v} \times \vec{B}_1). \quad (3.69)$$

Функция  $S_{g,h}^{1,2,3}$  является постоянной вдоль характеристик (3.69). В результате решение уравнения (3.68) примет вид:

$$f^{1,2,3}(\vec{r}, \vec{v}, \dot{\vec{v}}, t) = f_{g,h}^{1,2,3}(\vec{r}, \vec{v}, \dot{\vec{v}}, t) e^{-3\frac{t}{\tau_0}}, \quad (3.70)$$

где  $f_{g,h}^{1,2,3} = \exp(S_{g,h}^{1,2,3})$ . Из представления решения (3.70) уравнения (3.68) следует, что функция  $f^{1,2,3}$  быстро стремится к нулю уже на малых временах, так как  $\tau_0 \ll 1$ . Таким образом, вдоль фазовых траекторий, определяемых характеристиками (3.69) функция  $f^{1,2,3}$  быстро убывает, что обусловлено наличием ненулевой ( $Q_3^{1,2,3} = 3/\tau_0$ ) диссипативной правой частью уравнения  $\hat{\pi}_{1,2,3} S^{1,2,3} = -Q_3^{1,2,3}$ .

Аппроксимация (3.15) не имеет источников диссипаций, поэтому третье уравнение Власова для нее примет вид:

$$\left\{ \frac{\partial}{\partial t} + \vec{v} \nabla_r + \dot{\vec{v}} \nabla_v + \frac{1}{\tau_0} \left[ \langle \dot{\vec{v}} \rangle_{1,2} - \frac{q}{m} (\vec{E}_1 + \vec{v} \times \vec{B}_1) \right] \nabla_{\dot{\vec{v}}} \right\} f^{1,2,3} = 0. \quad (3.71)$$

Уравнению (3.71) соответствуют характеристики

$$\frac{d\vec{r}}{dt} = \vec{v}, \quad \frac{d\vec{v}}{dt} = \dot{\vec{v}}, \quad m\tau_0 \frac{d\dot{\vec{v}}}{dt} = m \langle \dot{\vec{v}} \rangle_{1,2} - q(\vec{E}_1 + \vec{v} \times \vec{B}_1), \quad (3.72)$$

где поля  $\vec{E}_1, \vec{B}_1$  удовлетворяют уравнениям Максвелла. Среднее поле  $\langle \dot{\vec{v}} \rangle_{1,2}$  в уравнении (3.72) определяется по функции  $f^{1,2,3}$  в соответствии с уравнением (2.11). Численный метод решения уравнения (3.71) схож с методом, изложенным для уравнения (3.67), за исключением особенностей, связанных с решением уравнения (3.72). Как известно [31-34] уравнение Лоренца-Абрахама-Дирака (i.1) допускает представление в виде:

$$m\dot{\vec{v}}(t) = \frac{1}{\tau_0} \int_t^{+\infty} \vec{F}_{ext}(t') e^{-\frac{t'-t}{\tau_0}} dt', \quad (3.73)$$

где  $\vec{F}_{ext} = q(\vec{E}_1 + \vec{v} \times \vec{B}_1)$ . Одной из особенностей представления (3.73) является интегрирование по временной области «будущего» для определения силы  $m\dot{\vec{v}}$  настоящего. Другая особенность уравнения (3.73)/(i.1) проявляется в наличии бесконечно растущих со временем решений (разбегающихся решений/runaway solution) [31]. Наличие таких особенностей приводит к необходимости специального выбора временного шага при численном интегрировании уравнения (i.1) и использования метода отбора физически реалистичных решений [33, 34]. Рассматриваемое уравнение характеристик (3.72) в случае одной точечной частицы переходит в уравнение (i.1), поэтому при численной реализации (3.72) могут возникнуть схожие проблемы.

Основное внимание при рассмотрении третьего уравнения Власова было сфокусировано на электродинамических системах, которые имеют

применение в физике плазмы. Описание таких систем часто использует функцию микроскопического распределения (3.11). В §3.1 рассматривались уравнения движения в гидро-газодинамическом приближении (3.1) и (3.2). Как было отмечено в §3.1 квантовые системы характеризуются наличием квантового потенциал  $Q$ , который связан (3.13) с тензором давления  $P_{\mu\lambda}$  в уравнениях движения (3.1), (3.2). В качестве простейшего примера с тензором давления рассмотрим модельную систему – квантовый гармонический осциллятор с потенциалом  $U^1 = \frac{m\omega^2 x^2}{2}$ .

Запишем уравнение движения (3.2) с учетом аппроксимации Власова-Моэля (i.16), получим

$$\hat{\pi}_{1,2} \langle \dot{v}_\mu \rangle_{1,2} = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^{k+1} (\hbar/2)^{2k}}{m^{2k+1} (2k+1)!} \hat{\pi}_{1,2} \left[ \frac{\partial^{2k+1} U^1}{\partial x_\mu^{2k+1}} \frac{1}{f^{1,2}} \frac{\partial^{2k} f^{1,2}}{\partial v_\mu^{2k}} \right] = -\frac{1}{f^{1,2}} \frac{\partial P_{\mu\lambda}^3}{\partial v_\lambda} + \langle \ddot{v}_\mu \rangle_{1,2},$$

$$\langle \ddot{v} \rangle_{1,2} = \frac{1}{f^{1,2}} \frac{\partial P_{11}^3}{\partial v} - \frac{1}{m} \hat{\pi}_{1,2} \left[ \frac{\partial U^1}{\partial x} \right] = \frac{1}{f^{1,2}} \frac{\partial P_{11}^3}{\partial v} - \omega^2 v. \quad (3.74)$$

В качестве функции распределения  $f^{1,2,3}$  возьмем [35]

$$f_n^{1,2,3}(x, v, \dot{v}) = \frac{(-1)^n}{2\pi\sigma_x\sigma_v} e^{-\frac{\dot{v}^2}{2\sigma_v^2} - \frac{v^2}{2\sigma_x^2}} L_n \left( 2 \left( \frac{\dot{v}^2}{2\sigma_v^2} + \frac{v^2}{2\sigma_x^2} \right) \right) \delta(\dot{v} + \omega^2 x), \quad (3.75)$$

где  $n$  – номер квантового состояния;  $L_n$  – полиномы Лагерра;  $\sigma_x$  и  $\sigma_v$  – дисперсии, удовлетворяющие соотношениям  $\omega = \frac{\sigma_v}{\sigma_x} = \frac{\sigma_{\dot{v}}}{\sigma_v}$ ,  $\sigma_x \sigma_v = \frac{\hbar}{2m}$ .

Используя функцию (3.75) вычислим тензор давления  $P_{11}^3$  (3.5). Сначала определим среднее значение  $\langle \dot{v} \rangle_{1,2}$  по формуле (2.11), получим

$$\begin{aligned}
f_n^{1,2} \langle \dot{v} \rangle_{1,2|n} &= \frac{(-1)^n}{2\pi\sigma_x\sigma_v} e^{-\frac{v^2}{2\sigma_v^2}} \int_{-\infty}^{+\infty} \dot{v} e^{-\frac{\dot{v}^2}{2\sigma_v^2}} L_n \left( 2 \left( \frac{\dot{v}^2}{2\sigma_v^2} + \frac{v^2}{2\sigma_v^2} \right) \right) \delta(\dot{v} + \omega^2 x) d\dot{v} = \\
&= -\omega^2 x \frac{(-1)^n}{2\pi\sigma_x\sigma_v} e^{-\frac{\omega^2 x^2}{2\sigma_v^2} - \frac{v^2}{2\sigma_v^2}} L_n \left( 2 \left( \frac{\omega^2 x^2}{2\sigma_v^2} + \frac{v^2}{2\sigma_v^2} \right) \right), \\
\langle \dot{v} \rangle_{1,2|n} &= -\omega^2 x,
\end{aligned} \tag{3.76}$$

где учтено, что  $f_n^{1,2}(x, v) = mW(x, p)$  является функцией Вигнера гармонического осциллятора

$$f_n^{1,2}(x, v) = \int_{-\infty}^{+\infty} f_n^{1,2,3}(x, v, \dot{v}) d\dot{v} = \frac{(-1)^n m}{\pi\hbar} e^{-\frac{m}{\hbar\omega}(v^2 + \omega^2 x^2)} L_n \left( \frac{2m}{\hbar\omega}(v^2 + \omega^2 x^2) \right). \tag{3.77}$$

Учитывая выражения (3.75) и (3.76) тензор давления  $P_{11}^3$  примет вид:

$$\begin{aligned}
P_{11|n}^3(x, v) &= \int_{-\infty}^{+\infty} (\dot{v} - \langle \dot{v} \rangle_{1,2|n})^2 f_n^{1,2,3} d\dot{v} = \\
&= \frac{(-1)^n}{2\pi\sigma_x\sigma_v} (\omega^2 x + \langle \dot{v} \rangle_{1,2|n})^2 e^{-\frac{\omega^2 x^2}{2\sigma_v^2} - \frac{v^2}{2\sigma_v^2}} L_n \left( 2 \left( \frac{\omega^2 x^2}{2\sigma_v^2} + \frac{v^2}{2\sigma_v^2} \right) \right) = 0.
\end{aligned} \tag{3.78}$$

Результат (3.78) является ожидаемым, так как по пространству ускорений  $\dot{v}$  функция распределения (3.75) имеет нулевую дисперсию. Уравнение движения (3.74) с учетом (3.78) запишется в виде

$$\langle \dot{v} \rangle_{1,2|n} = -\omega^2 v. \tag{3.79}$$

Используя выражение (3.79) запишем третье уравнение Власова:

$$\frac{\partial}{\partial t} f^{1,2,3} + v \frac{\partial}{\partial x} f^{1,2,3} + \dot{v} \frac{\partial}{\partial v} f^{1,2,3} - \omega^2 v \frac{\partial}{\partial v} f^{1,2,3} = 0. \tag{3.80}$$



Уравнению (3.80) соответствуют характеристики:

$$\begin{aligned}\frac{dx}{dt} &= v, \quad \frac{dv}{dt} = \dot{v}, \quad \frac{d\dot{v}}{dt} = -\omega^2 x, \\ \omega^2 v dv &= -\dot{v} d\dot{v} \Rightarrow \zeta(v, \dot{v}) = \omega^2 v^2 + \dot{v}^2, \\ \omega^2 dx &= -d\dot{v} \Rightarrow \eta(x, \dot{v}) = \omega^2 x + \dot{v}.\end{aligned}\tag{3.81}$$

Таким образом, решение уравнения (3.80) можно представить в виде:

$$f^{1,2,3}(x, v, \dot{v}) = G(\omega^2 v^2 + \dot{v}^2, \omega^2 x + \dot{v}),\tag{3.82}$$

где  $G = G(\zeta, \eta)$  – некоторая функция, определяемая из краевых условий. Сравнивая выражение (3.82) и (3.75) видно, что функция (3.75) является решением третьего уравнения Власова. Интегрирование третьего уравнения Власова по пространству скоростей переведет его во второе уравнение Власова, решением которого будет функция Вигнера (3.77) с аппроксимацией (3.76):

$$\frac{\partial}{\partial t} f^{1,2} + v \frac{\partial}{\partial x} f^{1,2} - \omega^2 x \frac{\partial}{\partial v} f^{1,2} = 0.\tag{3.83}$$

Второму уравнению Власова (3.83) будет соответствовать уравнение движения (3.1) с тензором  $P_{11}^2$ , отличным от нуля. Действительно, вычислим  $\langle v \rangle$  по формуле (2.11)

$$f_n^1 \langle v \rangle_{|n} = \frac{(-1)^n m}{\pi \hbar} \int_{-\infty}^{+\infty} v e^{-\frac{m}{\hbar \omega} (v^2 + \omega^2 x^2)} L_n \left( \frac{2m}{\hbar \omega} (v^2 + \omega^2 x^2) \right) dv = 0,\tag{3.84}$$

где учтено, что под интегралом стоит нечётная функция по переменной скорости  $v$ . Функция  $f_n^1$  имеет вид

$$f_n^1(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f_n^{1,2}(x, v) dv = \frac{1}{2^n n!} \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma_x}} e^{-\frac{x^2}{2\sigma_x^2}} H_n^2\left(\frac{x}{\sqrt{2}\sigma_x}\right), \quad (3.85)$$

где  $H_n$  – полиномы Эрмита. Используя выражения (3.84), (3.77) и (3.4) для тензора  $P_{1|n}^2$ , получим

$$P_{1|n}^2 = \int_{-\infty}^{+\infty} v^2 f_n^{1,2} dv = f^1 \langle v^2 \rangle_{1|n}, \quad (3.86)$$

Средняя величина  $\langle v^2 \rangle_{1|n}$  была вычислена ранее в работах [39, 40] и представляется в виде

$$\langle v^2 \rangle_{1|n}(x) = \sigma_v^2 \frac{\sum_{k=0}^n C_k L_{n-k}\left(\frac{x^2}{\sigma_x^2}\right)}{\sum_{k=0}^n \bar{C}_k L_{n-k}\left(\frac{x^2}{\sigma_x^2}\right)}, \quad (3.87)$$

$$C_k = (-1)^k \sum_{j=0}^k \frac{1 + \eta(j)}{2} \frac{H_{k-j}^2(0) + 2(k-j)H_{k-j-1}^2(0)}{2^{k-j}(k-j)!}, \quad (3.88)$$

$$\bar{C}_k = (-1)^k \sum_{j=0}^k \frac{1 + \eta(j)}{2} \frac{H_{k-j}^2(0) - 2(k-j)H_{k-j-1}^2(0)}{2^{k-j}(k-j)!},$$

где  $\eta(j)$  – функция Хэвисайда. Значение полиномов Эрмита в начале координат (3.88) могут быть вычислены по формулам  $H_{2k}^2(0) = \frac{(2k)!(2k)!}{k!k!}$  и

$H_{2k+1}^2(0) = 0$ . Таким образом, тензор давления  $P_{1|n}^2$  отличен от нуля и уравнение движения (3.1) с учетом (3.76), (3.84) и (3.86) примет вид:

$$\frac{\partial P_{1|n}^2}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x} \left[ f_n^1 \langle v^2 \rangle_{1|n} \right] = f_n^1 \langle \dot{v} \rangle_{1|n} = -f_n^1 \omega^2 x, \quad (3.89)$$

здесь учтено, что  $\langle \dot{v} \rangle_{1|n} = -\omega^2 x$ .

Таким образом, сделан обзор основных кинематических свойств третьего уравнения Власова и связанных с ним уравнений движения, как в случае электромагнитного взаимодействия, так и при гидрогазодинамическом приближении. Рассмотрена связь между классической физикой (уравнение Гамильтона-Якоби) и квантовой (уравнение Шрёдингера, квантовый потенциал) с обобщением на фазовое пространство.

Для систем с электромагнитным излучением на основании уравнения Лоренца-Абрахама-Дирака описана возможная процедура построения аппроксимации для среднего потока ускорений второго порядка. Произведено обсуждение диссипативных (по вероятности) свойств таких систем. На основе квантовой механики высших кинематических величин, рассмотрен вариант построения расширенного аналога уравнений Максвелла в фазовом пространстве, который позволяет построить аппроксимацию для третьего уравнения Власова.

Предложенные в §3.1-§3.2 аппроксимации можно условно разбить на два класса. Первый класс это аппроксимации (3.15) и (3.16), которые строятся на основе уравнения Лоренца-Абрахама-Дирака и содержат в каком-то смысле феноменологический подход. Сила радиационного трения искусственным образом вставляется в классическое уравнение Ньютона, нарушая его порядок и приводя к возможности существования физически нереалистичных решений. Тем не менее, такой подход имеет практическое применение при его корректном использовании. Второй класс аппроксимаций (i.7), (3.66) получен непосредственно из цепочки уравнений Власова при условии выполнения разложения Гельмгольца, в котором

скалярный потенциал связан с фазой волновой функции. Такое допущение часто используется в принципе наименьшего действия для квантовой механики. Здесь это допущение было расширено на случай фазового пространства. Аппроксимации из второго класса в явном виде не содержат радиационных поправок, но в них присутствуют новые кинематические поля, которые взаимодействуют с системой через высшие производные. Такие аппроксимации могут быть полезны при численном решении задач физики плазмы с повышенной точностью, так как содержат большее число законов сохранения.

### §3.4 Точное решение нестационарного уравнения Шрёдингера

Уравнение Шрёдингера является фундаментальным уравнением квантовой механики. Наличие точного решения уравнения Шрёдингера существенно упрощает анализ квантовой системы и имеет широкий методологический аспект. В работе [10] была показана связь между первым уравнением Власова (1.30) и уравнением Шрёдингера (i.8). В главе 2 была получена дисперсионная цепочка уравнений Власова (2.30)-(2.32). С математической точки зрения первое уравнение Власова (1.30) схоже с уравнениями 1-го ранга (2.30). Отличие состоит только в типах кинематических величин. Следовательно, для всех уравнений 1-го ранга дисперсионной цепочки (2.30) будет справедлив переход к уравнению вида (i.8), который был сделан в работах [10, 33]. Поэтому для простоты математических выкладок рассмотрим только первое уравнение из цепочки (1.30).

Существует узкий круг потенциалов  $U$ , для которых известны точные решения уравнения Шрёдингера. Простейшей задачей квантовой механики является задача о нахождении плотности вероятностей частицы в бесконечно глубокой потенциальной яме:

$$U(x) = \begin{cases} 0, & \text{при } 0 < x < l, \\ +\infty, & \text{иначе,} \end{cases} \quad (3.90)$$

где  $l$  – ширина ямы.

Несмотря на кажущуюся простоту задачи, указанная модель имеет широкий спектр применения в физике твердого тела и квантовой оптике. Модель частицы в потенциале (3.90) используется при поиске приближенных решений более сложных физических систем, в которых частица находится в узкой области с низким электрическим потенциалом между двумя барьерами с высоким потенциалом. Системы с квантовыми ямами [79-81] важны в оптоэлектронике и используются в таких устройствах, как лазер с квантовыми ямами, инфракрасный фотодетектор с квантовыми ямами и модулятор квантово-ограниченного эффекта Штарка [82, 83]. Данный подход применим при рассмотрении решетки в модели Кронига-Пенни и для конечного металла в приближении свободных электронов. Модель частицы в бесконечно глубокой потенциальной яме может быть использована при рассмотрении квантовых точек [84-86]. Квантовые точки – это очень маленькие полупроводники (в масштабе нанометров). Таким образом, возникает квантовое ограничение в том смысле, что электроны не могут покинуть «точку», что позволяет использовать приближение «частица в коробке». Поведение таких систем можно описать трехмерными уравнениями квантования энергии типа «частица в коробке».

Решение уравнения Шрёдингера для потенциала (3.90):

$$\begin{cases} i\hbar \frac{\partial \Psi}{\partial t} = -\frac{\hbar^2}{2m} \frac{\partial^2 \Psi}{\partial x^2}, & 0 < x < l, \\ \Psi(0, t) = \Psi(l, t) = 0, \end{cases} \quad (3.91)$$

имеет вид

$$\Psi_{\mu}(x,t) = \sqrt{\frac{2}{l}} \sin\left(\frac{\sqrt{2mE_{\mu}}}{\hbar}x\right) e^{-i\frac{E_{\mu}}{\hbar}t}, \quad E_{\mu} = \frac{\pi^2 \hbar^2 \mu^2}{2ml^2}, \quad \mu \in \mathbb{N}, \quad (3.92)$$

где  $\mu$  – номер квантового состояния. Для волновой функции (3.92) плотность вероятностей  $f_{\mu}^1$  является стационарной функцией:

$$f_{\mu}^1(x) = |\Psi_{\mu}(x,t)|^2 = \frac{2}{l} \sin^2\left(\frac{\sqrt{2mE_{\mu}}}{\hbar}x\right). \quad (3.93)$$

С математической точки зрения уравнение (3.91) как уравнение в частных производных для своего однозначного решения требует задания не только краевых условий (3.90)  $\Psi(0,t) = \Psi(l,t) = 0$ , но и начальных  $\Psi(x,0) = \Psi_0(x)$  или  $\Psi_t(x,0) = \Psi_1(x)$ . Как видно из постановки задачи (3.90) начальное условие не задано. Отсутствие начального условия в постановке (3.90) компенсируется выбором вида решения. Действительно, решение (3.92) получено для частного случая, когда волновая функция допускает факторизованное представление  $\Psi(x,t) \sim F(x)T(t)$ . Таким образом, решение (3.92) принадлежит к узкому классу возможных решений задачи (3.91).

Целью дальнейшего рассмотрения будет нахождение нестационарных решений задачи (3.91), построение для них функции Вигнера в фазовом пространстве и векторного поля потока вероятностей, анализ динамических свойств таких квантовых систем с позиции статистической физики (в терминах распределения Гиббса), механики сплошных сред и квантовой механики в фазовом пространстве.

Построим нестационарное точное решение уравнение Шрёдингера для краевой задачи (3.91) отличное от решения (3.92).

**Теорема 1.** Волновая функция  $\Psi_{\mu,\beta}(x,t)$  является нестационарным решением краевой задачи (3.91)

$$\Psi_{\mu,\beta}(x,t) = \frac{1}{\sqrt{N(\beta)}} \theta_1 \left( \mu \frac{x}{l}, -\mu^2 \frac{2\pi\hbar}{ml^2} t + i\beta \right), \quad (3.94)$$

$$N(\beta) = l \sum_{k=-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{\pi\beta}{2}(2k+1)^2}, \quad (3.95)$$

$$\Psi_{\mu,\beta}(0,t) = \Psi_{\mu,\beta}(l,t) = 0, \quad \int_0^l |\Psi_{\mu,\beta}(x,t)|^2 dx = 1.$$

где  $\mu$  – номер квантового состояния; параметр  $\beta > 0$ ;  $\theta_1$  – тэта функция Якоби

$$\theta_1(z,\tau) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} e^{i\frac{\pi\tau}{4}(2k+1)^2 + i\frac{\pi}{2}(2z+1)(2k+1)}, \quad z \in \mathbb{C}, \quad \tau = \alpha + i\beta, \quad \alpha, \beta \in \mathbb{R}. \quad (3.96)$$

### Доказательство теоремы 1.

Рассмотрим одномерную  $\theta$ -функцию с характеристиками  $a$  и  $b$ :

$$\theta[a,b](z,\tau) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} e^{\pi i \tau (k+a)^2 + 2\pi i (z+b)(k+a)}, \quad (3.97)$$

где  $z \in \mathbb{C}$ ,  $\tau = \alpha + i\beta$ ,  $\beta > 0$ . Условие  $\beta > 0$  необходимо для сходимости ряда (3.97). Дифференцируя  $\theta$ -функцию (3.97) по переменным  $z$  и  $\tau$  можно показать справедливость уравнения теплопроводности:

$$\frac{\partial^2 \theta[a,b](z,\tau)}{\partial z^2} = 4\pi i \frac{\partial \theta[a,b](z,\tau)}{\partial \tau}, \quad (3.98)$$

которое при замене переменных

$$z = \frac{\sqrt{2m\varepsilon}}{\hbar}x, \quad \tau = -\frac{4\pi\varepsilon}{\hbar}t + i\beta, \quad (3.99)$$

принимает вид

$$i\hbar \frac{\partial \Theta(x,t)}{\partial t} = -\frac{\hbar^2}{2m} \frac{\partial^2 \Theta(x,t)}{\partial x^2}, \quad (3.100)$$

$$\Theta(x,t) \stackrel{\text{det}}{=} \theta[a,b] \left( \frac{\sqrt{2m\varepsilon}}{\hbar}x, -\frac{4\pi\varepsilon}{\hbar}t + i\beta \right), \quad (3.101)$$

где  $\varepsilon$  – постоянная величина. Уравнение (3.100) совпадает с уравнением Шрёдингера (3.91). Граничные условия (3.91) могут быть выполнены при рассмотрении частного случая  $\theta$ -функции (3.101) с характеристиками  $a = b = \frac{1}{2}$ , которые соответствуют  $\theta_1$  – функции:

$$\theta_1(z, \tau) \stackrel{\text{det}}{=} -\theta \left[ \frac{1}{2}, \frac{1}{2} \right] (z, \tau) = 0 \Leftrightarrow z = \mu + \nu\tau, \quad \mu, \nu \in \mathbb{Z}, \quad (3.102)$$

выбирая  $\nu = 0$ , получим

$$\mu = \frac{\sqrt{2m\varepsilon_\mu}}{\hbar}l \Rightarrow \varepsilon_\mu = \frac{\hbar^2 \mu^2}{2ml^2}, \quad \tau = -\frac{4\pi\varepsilon_\mu}{\hbar}t + i\beta = -\frac{2\pi\hbar\mu^2}{ml^2}t + i\beta, \quad (3.103)$$

где  $E_\mu = \pi^2 \varepsilon_\mu$ . В результате решение (3.101) примет вид:

$$\Theta_{\mu,\beta}(x,t) = \theta_1 \left( \frac{\sqrt{2m\varepsilon_\mu}}{\hbar}x, -\frac{4\pi\varepsilon_\mu}{\hbar}t + i\beta \right) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} e^{\pi i \left( -\frac{4\pi\varepsilon_\mu}{\hbar}t + i\beta \right) \left( k + \frac{1}{2} \right)^2 + 2\pi i \left( \frac{\sqrt{2m\varepsilon_\mu}}{\hbar}x + \frac{1}{2} \right) \left( k + \frac{1}{2} \right)},$$

$$\Theta_{\mu,\beta}(0,t) = \Theta_{\mu,\beta}(l,t) = 0, \quad (3.104)$$



где параметр  $\beta > 0$  может варьироваться. Выполним условие нормировки для функции (3.104).

$$N = \int_0^l |\Theta_{\mu,\beta}(x,t)|^2 dx. \quad (3.105)$$

Вычислим величину  $|\Theta_{\mu,\beta}|^2 = \Theta_{\mu,\beta} \Theta_{\mu,\beta}^*$ , получим

$$\begin{aligned} |\Theta_{\mu,\beta}^\beta|^2 &= \sum_{n,k=-\infty}^{+\infty} e^{-i\frac{4\pi^2\varepsilon_\mu}{\hbar}t\left(k+\frac{1}{2}\right)^2 - \pi\beta\left(k+\frac{1}{2}\right)^2 + 2\pi i\left(\frac{\sqrt{2m\varepsilon_\mu}}{\hbar}x+\frac{1}{2}\right)\left(k+\frac{1}{2}\right) + i\frac{4\pi^2\varepsilon_\mu}{\hbar}t\left(n+\frac{1}{2}\right)^2 - \pi\beta\left(n+\frac{1}{2}\right)^2 - 2\pi i\left(\frac{\sqrt{2m\varepsilon_\mu}}{\hbar}x+\frac{1}{2}\right)\left(n+\frac{1}{2}\right)} = \\ &= \sum_{n,k=-\infty}^{+\infty} e^{-\pi\beta\left[\left(k+\frac{1}{2}\right)^2 + \left(n+\frac{1}{2}\right)^2\right]} e^{i\frac{4\pi^2\varepsilon_\mu}{\hbar}\left[\left(n+\frac{1}{2}\right)^2 - \left(k+\frac{1}{2}\right)^2\right]t + 2\pi i\left(\frac{\sqrt{2m\varepsilon_\mu}}{\hbar}x+\frac{1}{2}\right)(k-n)}, \\ |\Theta_{\mu,\beta}|^2 &= \sum_{n,k=-\infty}^{+\infty} e^{-\pi\beta\left[\left(k+\frac{1}{2}\right)^2 + \left(n+\frac{1}{2}\right)^2\right]} e^{i2\pi\left[\frac{2\pi\varepsilon_\mu}{\hbar}(n+k+1)t + \frac{\sqrt{2m\varepsilon_\mu}}{\hbar}x+\frac{1}{2}\right](k-n)}. \end{aligned} \quad (3.106)$$

Подставим выражение (3.106) в интеграл (3.105) и сделаем замену переменных

$$\bar{x} = -\frac{2\pi\varepsilon_\mu}{\hbar}(n+k+1)t + \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{2m\varepsilon_\mu}}{\hbar}x, \quad d\bar{x} = \frac{\sqrt{2m\varepsilon_\mu}}{\hbar}dx, \quad (3.107)$$

$$\bar{x}_1 = -\frac{2\pi\varepsilon_\mu}{\hbar}(n+k+1)t + \frac{1}{2},$$

$$\bar{x}_2 = -\frac{2\pi\varepsilon_\mu}{\hbar}(n+k+1)t + \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{2m\varepsilon_\mu}}{\hbar}l = -\frac{2\pi\varepsilon_\mu}{\hbar}(n+k+1)t + \frac{3}{2} = \bar{x}_1 + 1,$$

$$N = \int_0^l |\Theta_{\mu,\beta}(x,t)|^2 dx = \sum_{n,k=-\infty}^{+\infty} e^{-\pi\beta\left[\left(k+\frac{1}{2}\right)^2 + \left(n+\frac{1}{2}\right)^2\right]} I_{n,k}, \quad (3.108)$$

$$I_{n,k} = \int_0^l e^{i2\pi\left[\frac{2\pi\varepsilon_\mu}{\hbar}(n+k+1)t + \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{2m\varepsilon_\mu}}{\hbar}x\right](k-n)} dx = l \int_{\bar{x}_1}^{\bar{x}_2} e^{i2\pi(k-n)\bar{x}} d\bar{x}.$$

Если  $n = k$ , тогда  $I_{n,n} = l(\bar{x}_2 - \bar{x}_1) = l$ . При  $n \neq k$

$$\begin{aligned} I_{n,k} &= \frac{le^{i2\pi(k-n)\bar{x}}}{i2\pi(k-n)} \Big|_{\bar{x}_1}^{\bar{x}_1+1} = \frac{l}{i2\pi(k-n)} \left[ e^{i2\pi(k-n)\bar{x}_1+i2\pi(k-n)} - e^{i2\pi(k-n)\bar{x}_1} \right] = \\ &= \frac{l}{i2\pi(k-n)} \left[ e^{i2\pi(k-n)\bar{x}_1} - e^{i2\pi(k-n)\bar{x}_1} \right] = 0. \end{aligned}$$

Таким образом,

$$\int_0^l |\Theta_{\mu,\beta}(x,t)|^2 dx = l \sum_{k=-\infty}^{+\infty} e^{-2\pi\beta\left(k+\frac{1}{2}\right)^2} = N(\beta), \quad (3.109)$$

то есть нормировка  $N(\beta)$  не зависит от времени  $t$ . Следовательно, решение уравнения Шрёдингера можно представить в виде

$$\begin{aligned} \Psi_{\mu,\beta}(x,t) &= \frac{1}{\sqrt{N(\beta)}} \theta_1 \left( \mu \frac{x}{l}, -\mu^2 \frac{2\pi\hbar}{ml^2} t + i\beta \right), \\ \Psi_{\mu,\beta}(0,t) &= \Psi_{\mu,\beta}(l,t) = 0, \quad \int_0^l |\Psi_{\mu,\beta}(x,t)|^2 dx = 1. \end{aligned}$$

Теорема 1 доказана.

**Замечание.** Решение  $\Psi_{\mu,\beta}(x,t)$  можно представить в виде

$$\Psi_{\mu,\beta}(x,t) = \frac{1}{\sqrt{N(\beta)}} \theta_1 \left( \frac{\sqrt{2m\varepsilon_\mu}}{\hbar} x, -\frac{4\pi\varepsilon_\mu}{\hbar} t + i\beta \right), \quad (3.110)$$

где

$$\varepsilon_\mu = \frac{\hbar^2 \mu^2}{2ml^2}, \quad E_\mu = \pi^2 \varepsilon_\mu. \quad (3.111)$$

Волновая функция  $\Psi_{\mu,\beta}(x,t)$  существенно отличается от известной волновой функции (3.92). В отличие от функции  $f_\mu^1(x)$ , функция плотности вероятностей  $f_{\mu,\beta}^1(x,t)$  для волновой функции (3.94) будет нестационарной.

**Теорема 2.** Функция плотности вероятностей  $f_{\mu,\beta}^1(x,t)$  для волновой функции  $\Psi_{\mu,\beta}(x,t)$  является периодической и имеет вид

$$f_{\mu,\beta}^1(x,t) = |\Psi_{\mu,\beta}(x,t)|^2 = \frac{1}{N(\beta)} \sum_{n,k=-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{\pi\beta}{4}[(2k+1)^2+(2n+1)^2]} T_{|k-n|}(\cos[\mathcal{G}_{n,k}^\mu(x,t)]), \quad (3.112)$$

$$\mathcal{G}_{n,k}^\mu(x,t) \stackrel{\text{det}}{=} \pi \left( 2\mu \frac{x}{l} + 1 \right) - \frac{\pi t}{T_\mu} (n+k+1), \quad (3.113)$$

$$T_\mu = \frac{\pi \hbar}{4E_\mu} = \frac{ml^2}{2\pi \hbar \mu^2}, \quad (3.114)$$

где  $T_\mu$  – период  $f_{\mu,\beta}^1(x,0) = f_{\mu,\beta}^1(x, T_\mu)$ ;  $T_{|k-n|}$  – полиномы Чебышёва.

**Доказательство теоремы 2.**

Найдем выражение  $f_{\mu,\beta}^1(x,t)$ .

$$\begin{aligned} f_{\mu,\beta}^1(x,t) &= |\Psi_{\mu,\beta}(x,t)|^2 = \\ &= \frac{1}{N(\beta)} \sum_{n,k=-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{\pi\beta}{4}[(2k+1)^2+(2n+1)^2]} e^{i \left[ \pi \left( 2\mu \frac{x}{l} + 1 \right) - \frac{E_\mu}{\hbar} 4(n+k+1)t \right] (k-n)}. \end{aligned} \quad (3.115)$$

Учитывая, что действительная часть в сумме (3.115) симметрична по индексам  $n$  и  $k$ , а мнимая антисимметрична, получаем

$$f_{\mu,\beta}^1(x,t) = \frac{1}{N(\beta)} \sum_{n,k=-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{\pi\beta}{4}[(2k+1)^2+(2n+1)^2]} \cos \left\{ \left[ \pi \left( 2\mu \frac{x}{l} + 1 \right) - \frac{4E_\mu}{\hbar} (n+k+1)t \right] (k-n) \right\}. \quad (3.116)$$

Функция плотности вероятностей (3.116) является периодической функцией, поэтому найдем ее период  $T$

$$f_{\mu,\beta}^1(x,0) = f_{\mu,\beta}^1(x,T),$$

отсюда

$$\begin{aligned} \cos \left\{ \left[ \pi \left( 2\mu \frac{x}{l} + 1 \right) - \frac{4E_\mu}{\hbar} (n+k+1)T \right] (k-n) \right\} - \cos \left\{ \pi \left( 2\mu \frac{x}{l} + 1 \right) (k-n) \right\} &= 0 \\ \sin \left\{ \left[ \pi \left( 2\mu \frac{x}{l} + 1 \right) - \frac{4E_\mu}{\hbar} (n+k+1)T \right] (k-n) \right\} \sin \left\{ \frac{2E_\mu}{\hbar} (n+k+1)(k-n)T \right\} &= 0 \\ \frac{2E_\mu}{\hbar} (n+k+1)(k-n)T = \pi j \Rightarrow \frac{2E_\mu}{\hbar} \lambda T = \pi j, \quad j, \lambda \in \mathbb{Z}, \\ T_\mu = \frac{\pi \hbar}{4E_\mu} = \frac{ml^2}{2\pi \hbar \mu^2}, \end{aligned} \quad (3.117)$$

здесь учтено, что минимальное значение  $\lambda$ , дающее ненулевой период  $T$  это  $\lambda = 2$ , например, при  $k=1, n=0$ .

Выражение для плотности  $f_{\mu,\beta}^1(x,t)$  можно представить через полиномы Чебышёва  $T_{|k-n|}$ , действительно

$$\cos \left\{ \pi \left[ \left( 2\mu \frac{x}{l} + 1 \right) - \frac{t}{T_\mu} (n+k+1) \right] (k-n) \right\} = \cos \left[ \mathcal{G}_{n,k}^\mu (x,t) |k-n| \right] =$$

$$= T_{|k-n|} \left( \cos \left[ \mathcal{G}_{n,k}^\mu (x,t) \right] \right),$$

$$\mathcal{G}_{n,k}^\mu (x,t) \stackrel{\text{det}}{=} \pi \left( 2\mu \frac{x}{l} + 1 \right) - \frac{\pi t}{T_\mu} (n+k+1), \quad (3.118)$$

$$f_{\mu,\beta}^1 (x,t) = \frac{1}{N(\beta)} \sum_{n,k=-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{\pi\beta}{4} [(2k+1)^2 + (2n+1)^2]} T_{|k-n|} \left( \cos \left[ \mathcal{G}_{n,k}^\mu (x,t) \right] \right). \quad (3.119)$$

Теорема 2 доказана.

**Замечание.** Функцию  $\mathcal{G}_{n,k}^\mu (x,t)$  можно рассматривать как характеристику  $\mathcal{G}_{n,k}^\mu (x,t) = \text{const}$ , вдоль которой соответствующий член функционального ряда (3.112) является постоянным. Характеристиками (3.113) являются прямые линии

$$\frac{x}{l} = \frac{n+k+1}{2\mu} \frac{t}{T_\mu} + \text{const} \Rightarrow \text{tg } \gamma = \frac{n+k+1}{2\mu}, \quad (3.120)$$

где  $\gamma$  – угол наклона характеристики. Согласно выражению (3.120) члены ряда, для которых  $n+k = \text{const}$  имеют характеристики с одинаковым углом наклона  $\gamma$ . Конечно, характеристики различных членов ряда пересекаются, но основной вклад вносят члены ряда (3.112), имеющие наибольший весовой коэффициент  $e^{-\frac{\pi\beta}{4} [(2k+1)^2 + (2n+1)^2]}$ .

На рис. 1 показана эволюция плотности распределения  $f_{\mu,\beta}^1 (x,t)$  для квантового состояния  $\mu = 5$  и параметра  $\beta = 0.01$ . Время  $t$  на рис. 1 меняется в пределах одного периода  $0 \leq t \leq T_5$  (3.117). Координата  $x: 0 \leq x \leq l$ . Слева на рис. 1 приведена изометрическая проекция распределения  $f_{5,0.01}^1 (x,t)$ , а

справа линии уровня функции  $f_{5,0.01}^1(x,t)$  при виде сверху на плоскость  $(x,t)$ . На рис. 1 (справа) голубым цветом изображены характеристические прямые (3.120) под номерами «1», «2» и «3» с параметрами  $n+k=0$ ,  $n+k=1$  и  $n+k=2$  соответственно.

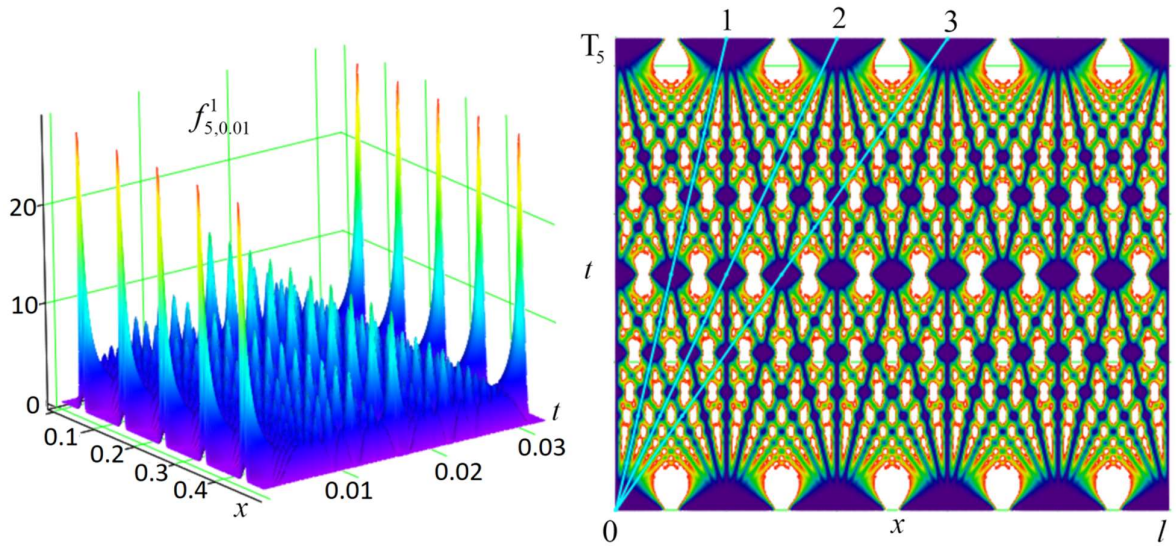


Рис. 1 Эволюция распределения плотности вероятностей  $f_{5,0.01}^1$ .

На рис. 1 показана эволюция плотности распределения  $f_{\mu,\beta}^1(x,t)$  для квантового состояния  $\mu=5$  и параметра  $\beta=0.01$ . Время  $t$  на рис. 1 меняется в пределах одного периода  $0 \leq t \leq T_5$  (3.117). Координата  $x: 0 \leq x \leq l$ . Слева на рис. 1 приведена изометрическая проекция распределения  $f_{5,0.01}^1(x,t)$ , а справа линии уровня функции  $f_{5,0.01}^1(x,t)$  при виде сверху на плоскость  $(x,t)$ . На рис. 1 (справа) голубым цветом изображены характеристические прямые (3.120) под номерами «1», «2» и «3» с параметрами  $n+k=0$ ,  $n+k=1$  и  $n+k=2$  соответственно.

Видно, что характеристики (3.120) задают основную структуру эволюции плотности распределения вероятностей при малых  $\beta$ . При увеличении  $\beta$  основной вклад в ряд (3.112) вносят слагаемые, соответствующие значениям индексов  $n+k+1=0$ . В этом случае период

(3.114) стремится к бесконечности, а характеристики (3.120) переходят в вертикальные линии вдоль оси времени. Сформулируем следующую теорему.

**Теорема 3.** Стационарная функция плотности вероятностей  $f_\mu^1(x)$  (3.93) является асимптотикой для нестационарной функции  $f_{\mu,\beta}^1(x,t)$  (3.112) при больших значениях параметра  $\beta$ , то есть

$$\lim_{\beta \rightarrow +\infty} f_{\mu,\beta}^1(x,t) = f_\mu^1(x). \quad (3.122)$$

### Доказательство теоремы 3.

В показателе экспоненты (3.112) стоит функция  $\eta(n,k) = (2n+1)^2 + (2k+1)^2$ , которая задает параболоид вращения с центром (минимумом) в точке  $n = k = -1/2$ . Так как  $n, k \in \mathbb{Z}$ , то существует только две взаимно ортогональные прямые, проходящие через точку  $n = k = -1/2$ , на которых лежат целочисленные минимумы функции  $\eta(n,k)$  (см. рис. 2)  $n - k = 0$  или  $n + k + 1 = 0$ . Слагаемые ряда (3.112) с индексами  $n = k$  не

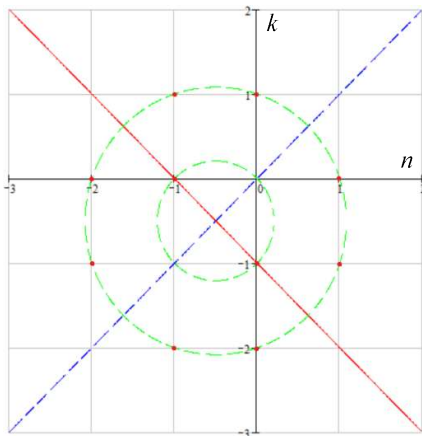


Рис. 2 Распределение минимумов функции  $\eta(n,k)$

имеют зависимости от переменных  $(x,t)$  и

дают вклад  $\frac{2}{N(\beta)} e^{-\frac{\pi\beta}{2}}$  ( $k = 0, k = -1$ , см.

рис.2). Зависимость  $n + k + 1 = 0$  дает основной

вклад  $\frac{2}{N(\beta)} e^{-\frac{\pi\beta}{2}} \cos\left[\pi\left(2\mu\frac{x}{l} + 1\right)\right]$  при

$n = -1, k = 0$  и  $n = 0, k = -1$ . Знаменатель

выражения (3.112) содержит нормировку

$N(\beta)$ , которая может быть оценена (3.95)

величиной (см. рис. 2)  $N(\beta) \approx 2le^{-\frac{\pi\beta}{2}}$  при  $k=0$  и  $k=-1$ . В результате, для выражения (3.112) при больших  $\beta \gg 1$  справедлива оценка

$$f_{\mu,\beta}^1(x,t) \approx \frac{2}{N(\beta)} e^{-\frac{\pi\beta}{2}} \left[ 1 - \cos\left(2\pi\mu\frac{x}{l}\right) \right] \approx \frac{2}{l} \sin^2\left(\frac{\pi\mu x}{l}\right) = f_{\mu}^1(x). \quad (3.122)$$

Теорема 3 доказана.

На рис. 3 приведены эволюции функций распределения  $f_{5,\beta}^1(x,t)$  для больших значений  $\beta$ . На рис. 3 видно, что с увеличением параметра  $\beta$  неоднородная временная структура распределения вероятностей начинает размываться и функция  $f_{5,\beta}^1(x,t)$  стремится к стационарному распределению  $f_{5,\beta}^1(x,t) \rightarrow f_5^1(x)$  (i.4).

Произведем усреднение по времени (по периоду  $T_{\mu}$ ) функции распределения (3.112).

$$\bar{f}_{\mu,\beta}^1(x) \stackrel{\text{det}}{=} \frac{1}{T_{\mu}} \int_0^{T_{\mu}} f_{\mu,\beta}^1(x,t) dt. \quad (3.123)$$

**Теорема 4.** Для функции  $\bar{f}_{\mu,\beta}^1$  справедливо представление

$$\bar{f}_{\mu,\beta}^1(x) = \frac{2}{N(\beta)} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{\pi\beta}{2}(2k+1)^2} \sin^2\left[(2k+1)\frac{\pi\mu}{l}x\right], \quad (3.124)$$

$$\text{где } \frac{\pi\mu}{l} = \frac{\sqrt{2mE_{\mu}}}{\hbar}.$$



#### Доказательство теоремы 4.

Произведем непосредственные вычисления

$$\begin{aligned} \bar{f}_{\mu,\beta}^1 &= \frac{1}{N(\beta)\Gamma_\mu} \sum_{n,k=-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{\pi\beta}{4}[(2k+1)^2+(2n+1)^2]} \times \\ &\times \int_0^{\Gamma_\mu} \cos \left\{ \pi \left[ \left( 2\mu \frac{x}{l} + 1 \right) - \frac{t}{\Gamma_\mu} (n+k+1) \right] (k-n) \right\} dt. \end{aligned} \quad (3.125)$$

Подынтегральная функция в выражении (3.125) представима в виде:

$$\begin{aligned} &\cos \left\{ \pi \left[ \left( 2\mu \frac{x}{l} + 1 \right) - \frac{t}{\Gamma_\mu} (n+k+1) \right] (k-n) \right\} = \\ &\cos \left\{ \pi \left( 2\mu \frac{x}{l} + 1 \right) (k-n) \right\} \cos \left\{ \frac{\pi t}{\Gamma_\mu} (n+k+1)(k-n) \right\} + \\ &+ \sin \left\{ \pi \left( 2\mu \frac{x}{l} + 1 \right) (k-n) \right\} \sin \left\{ \frac{\pi t}{\Gamma_\mu} (n+k+1)(k-n) \right\}. \end{aligned} \quad (3.126)$$

Интеграл от периодической функции (3.126) по ее периоду равен нулю, при условии, что аргумент функции не обращается в ноль, то есть  $(n+k+1)(k-n) \neq 0$ . Следовательно, для выражения (3.126) необходимо рассмотреть случай  $(n+k+1)(k-n) = 0$ . Для функции  $\sin$  в выражении (3.126) нулевое значение аргумента приведет к нулевому значению от нее интеграла, поэтому выражение (3.125) примет вид:

$$\bar{f}_{\mu,\beta}^1 = \frac{1}{N(\beta)} \sum_{n,k=-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{\pi\beta}{4}[(2k+1)^2+(2n+1)^2]} J_{n,k}^\mu(x), \quad (3.127)$$

$$J_{n,k}^\mu(x) = \frac{1}{\Gamma_\mu} \cos \left[ \pi \left( 2\mu \frac{x}{l} + 1 \right) (k-n) \right] \int_0^{\Gamma_\mu} \cos \left[ \frac{\pi t}{\Gamma_\mu} (n+k+1)(k-n) \right] dt, \quad (3.128)$$

где

$$J_{n,k}^{\mu}(x) = \begin{cases} 1, & \text{if } k = n, \\ \cos \left[ \pi \left( 2\mu \frac{x}{l} + 1 \right) (2k+1) \right], & \text{if } k \neq n, n+k+1=0, \\ 0, & \text{if } (k-n)(n+k+1) \neq 0. \end{cases}$$

Подставляя значения интеграла (3.128) в выражение (3.127) и учитывая (3.95), получим

$$\begin{aligned} \bar{f}_{\mu,\beta}^1 &= \frac{1}{N(\beta)} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{\pi\beta}{2}(2k+1)^2} + \frac{1}{N(\beta)} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{\pi\beta}{2}(2k+1)^2} \cos \left[ \pi \left( 2\mu \frac{x}{l} + 1 \right) (2k+1) \right] = \\ &= \frac{1}{l} - \frac{1}{N(\beta)} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{\pi\beta}{2}(2k+1)^2} \cos \left[ 2\pi\mu \frac{x}{l} (2k+1) \right] = \frac{1}{l} - \frac{1}{N(\beta)} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{\pi\beta}{2}(2k+1)^2} + \\ &+ \frac{2}{N(\beta)} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{\pi\beta}{2}(2k+1)^2} \sin^2 \left[ \pi\mu \frac{x}{l} (2k+1) \right], \\ \bar{f}_{\mu,\beta}^1 &= \frac{2}{N(\beta)} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{\pi\beta}{2}(2k+1)^2} \sin^2 \left[ (2k+1) \frac{\pi\mu}{l} x \right], \end{aligned}$$

что и требовалось доказать.

Посмотрим, как соотносятся распределения (3.93) и (3.124). На рис. 4 приведено сравнение распределений  $\bar{f}_{5,\beta}^1(x)$  и  $f_{5,\beta}^1(x,0)$  с распределением  $f_5^1$  для различных значений параметра  $\beta$ . На верхней части рис. 4 показано сравнение распределения  $f_{5,\beta}^1(x,0)$  с распределением  $f_5^1$ , а на нижней части сравнение  $\bar{f}_{5,\beta}^1$  с  $f_5^1$ .

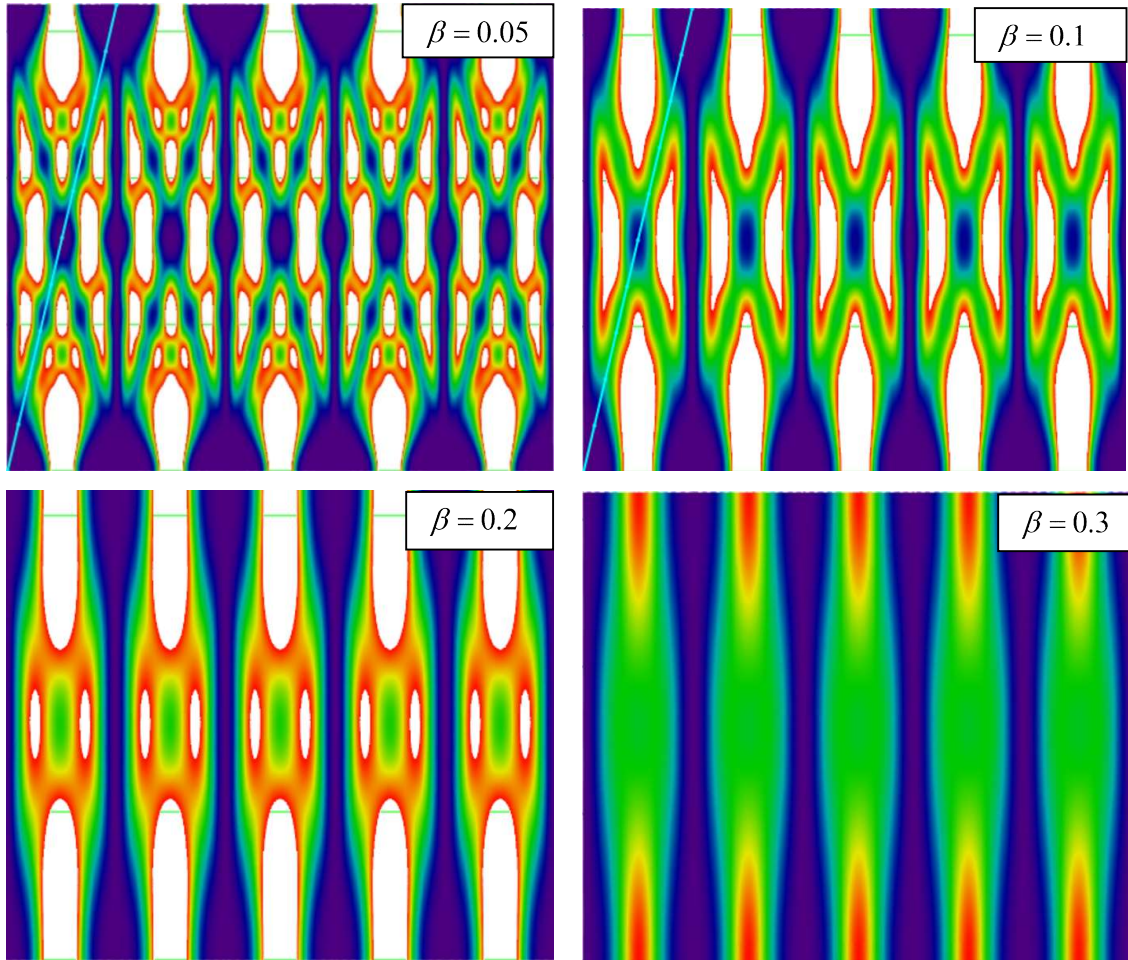


Рис. 3 Размывание временной неоднородности  $f_{5,\beta}^1$  с ростом  $\beta$ .

По аналогии с рис. 1, 3 на рис. 4 видно, что при маленьких значениях  $\beta$  новая плотность распределения  $f_{5,\beta}^1(x,0)$  существенно отличается от известной плотности распределения  $f_5^1$ , но при увеличении  $\beta$  разница уменьшается. Усредненная функция  $\bar{f}_{5,\beta}^1(x)$  при  $\beta \rightarrow 0$  вырождается в  $\delta$ -функцию Дирака, что приводит к так называемому «Гребню Дирака», но при увеличении  $\beta$  усредненная функция  $\bar{f}_{5,\beta}^1$  сходится к  $f_5^1$ .

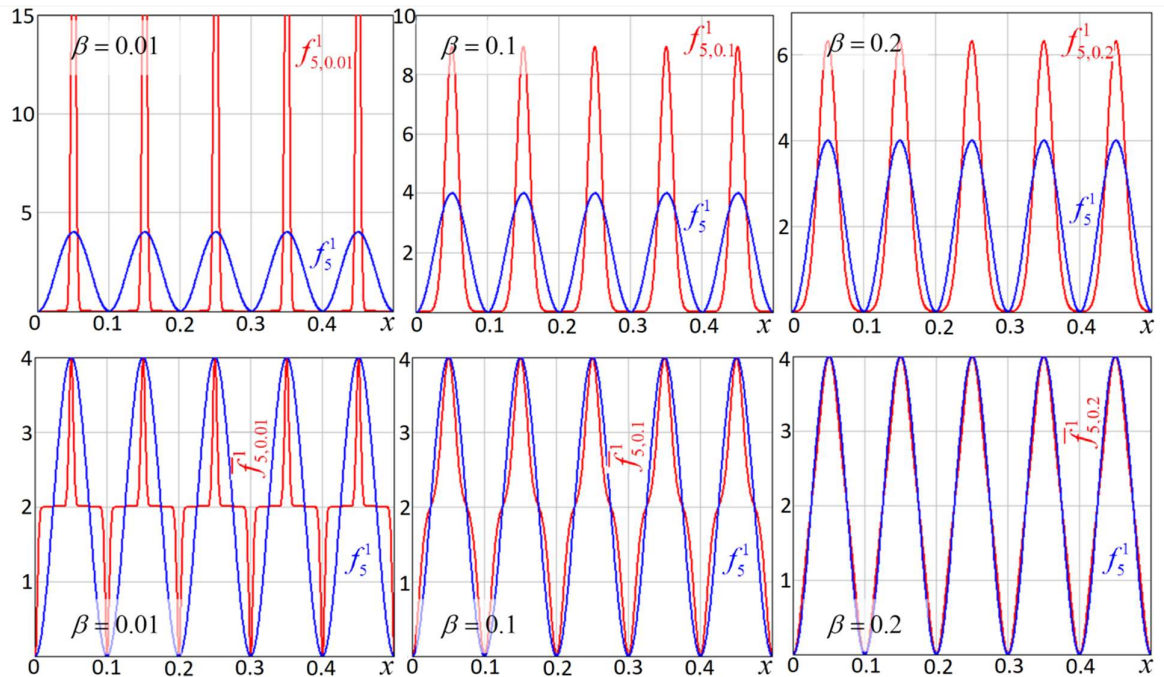


Рис. 4 Сравнение распределений  $f_{s,\beta}^1(x,0)$  и  $\bar{f}_{s,\beta}^1(x)$  с распределением  $f_s^1(x)$

Данный результат численного моделирования можно сформулировать в виде теоремы.

**Теорема 5.** Стационарная функция плотности вероятностей  $f_\mu^1(x)$  (3.93) является асимптотикой для усредненного по времени распределения  $\bar{f}_{\mu,\beta}^1(x)$  (3.124) при больших значениях параметра  $\beta$ , то есть

$$\lim_{\beta \rightarrow +\infty} \bar{f}_{\mu,\beta}^1(x) = f_\mu^1(x). \quad (3.129)$$

Доказательство теоремы 5 непосредственно следует из интегрирования (3.123) выражения (3.112) по периоду  $T_\mu$ .

### §3.5 Функция Вигнера

Найдем функцию Вигнера  $f_{\mu,\beta}^{1,2}(x, v, t) = \hbar W_{\mu,\beta}(x, p, t)$  [9, 10], соответствующую волновой функции (3.94)

$$W_{\mu,\beta}(x, p, t) = \frac{1}{2\pi\hbar} \int_{-\infty}^{+\infty} \Psi_{\mu,\beta}^* \left( x - \frac{s}{2}, t \right) \Psi_{\mu,\beta} \left( x + \frac{s}{2}, t \right) e^{-i\frac{ps}{\hbar}} ds. \quad (3.130)$$

**Теорема 6.** Функция Вигнера  $W_{\mu,\beta}(x, p, t)$  (3.130) для нестационарного решения уравнения Шрёдингера (3.94) имеет вид:

$$W_{\mu,\beta}(x, p, t) = \frac{1}{\hbar N(\beta)} \sum_{n,k=-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{\pi\beta}{4}[(2n+1)^2 + (2k+1)^2]} \delta(P_{n,k}^\mu - p) T_{|k-n|} \left[ \cos \mathcal{G}_{n,k}^\mu(x, t) \right], \quad (3.131)$$

$$\text{где } \mathcal{G}_{n,k}^\mu(x, t) = \frac{2\pi\mu}{l} \left( -\frac{P_{n,k}^\mu}{m} t + x \right) + \pi; \quad P_{n,k}^\mu = \sqrt{2mE_\mu} (n+k+1); \quad \delta(P_{n,k}^\mu - p) -$$

дельта-функция Дирака;  $T_{|k-n|}$  – полиномы Чебышёва.

#### Доказательство теоремы 6.

Подставляя выражение (3.92) в интеграл (3.125), получим

$$\begin{aligned} \Psi_{\mu,\beta}^* \left( x - \frac{s}{2}, t \right) \Psi_{\mu,\beta} \left( x + \frac{s}{2}, t \right) &= \frac{1}{N(\beta)} \sum_{n,k=-\infty}^{+\infty} e^{\left( -i\frac{\pi^2 \varepsilon_\mu t - \pi}{4\hbar} \right) (2k+1)^2 + \left( i\frac{\pi^2 \varepsilon_\mu t - \pi}{4\hbar} \right) (2n+1)^2} \times \\ &\times e^{-\pi i (2n+1) \left( \frac{\sqrt{2m\varepsilon_\mu}}{\hbar} \left( x - \frac{s}{2} \right) + \frac{1}{2} \right) + \pi i (2k+1) \left( \frac{\sqrt{2m\varepsilon_\mu}}{\hbar} \left( x + \frac{s}{2} \right) + \frac{1}{2} \right)} = \\ &= \frac{1}{N(\beta)} \sum_{n,k=-\infty}^{+\infty} e^{\left( i\frac{\pi^2 \varepsilon_\mu t - \pi}{4\hbar} \right) (2n+1)^2 - \left( i\frac{\pi^2 \varepsilon_\mu t + \pi}{4\hbar} \right) (2k+1)^2} e^{\pi i \left( \frac{2\sqrt{2m\varepsilon_\mu}}{\hbar} x + 1 \right) (k-n)} e^{\pi i \frac{\sqrt{2m\varepsilon_\mu}}{\hbar} (n+k+1)s}, \end{aligned}$$

$$W_{\mu,\beta}(x,p,t) = \frac{1}{2\pi\hbar N(\beta)} \sum_{n,k=-\infty}^{+\infty} e^{\left(i\frac{\pi^2\varepsilon_\mu t - \pi\beta}{\hbar}\right)(2n+1)^2 - \left(i\frac{\pi^2\varepsilon_\mu t + \pi\beta}{\hbar}\right)(2k+1)^2} e^{\pi i \left(\frac{2\sqrt{2m\varepsilon_\mu}}{\hbar}x+1\right)(k-n)} G_{n,k}^\mu(p), \quad (3.132)$$

где

$$G_{n,k}^\mu(\bar{p}) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{\frac{i\bar{p}s}{\hbar}} ds = 2\pi\delta(\bar{p}), \quad \bar{p} = \pi\sqrt{2m\varepsilon_\mu}(n+k+1) - p.$$

Преобразуем показатель экспоненты в выражении (3.132), получим

$$\begin{aligned} & e^{-\frac{\pi\beta}{4}[(2n+1)^2+(2k+1)^2]} e^{i\frac{\pi^2\varepsilon_\mu}{\hbar}[(2n+1)^2-(2k+1)^2]t} e^{i\pi(k-n)\left(\frac{2\sqrt{2m\varepsilon_\mu}}{\hbar}x+1\right)} = \\ & = e^{-\frac{\pi\beta}{4}[(2n+1)^2+(2k+1)^2]} \left[ \cos(\delta_1 + \delta_2) + i \sin(\delta_1 + \delta_2) \right], \end{aligned} \quad (3.133)$$

где

$$\begin{aligned} \delta_1 &= \frac{E_\mu}{\hbar} \left[ (2n+1)^2 - (2k+1)^2 \right] t, & \delta_2 &= \pi(k-n) \left( 2\mu\frac{x}{l} + 1 \right), \\ \delta_1 + \delta_2 &= (k-n) \left\{ \frac{2\pi\mu}{l} \left[ -\frac{\mu\pi\hbar}{ml} (n+k+1)t + x \right] + \pi \right\}. \end{aligned} \quad (3.134)$$

Функция  $\sin$  в выражении (3.133) является нечётной по индексам  $n, k$ , следовательно, при суммировании (3.132) останутся только чётные члены с функцией  $\cos$ . Учитывая сказанное и подставляя (3.133) в выражение (3.132), получим

$$\begin{aligned} W_{\mu,\beta}(x,p,t) &= \frac{1}{\hbar N(\beta)} \sum_{n,k=-\infty}^{+\infty} (-1)^{k-n} e^{-\frac{\pi\beta}{4}[(2n+1)^2+(2k+1)^2]} \delta\left(\sqrt{2mE_\mu}(n+k+1) - p\right) \times \\ &\times \cos \left\{ (k-n) \frac{2\pi\mu}{l} \left[ -\frac{\mu\pi\hbar}{ml} (n+k+1)t + x \right] \right\}. \end{aligned} \quad (3.135)$$

Введем обозначение импульса  $P_{n,k}^{\mu} = \sqrt{2mE_{\mu}} (n+k+1)$ , тогда выражение для функции Вигнера примет вид

$$W_{\mu,\beta}(x,p,t) = \frac{1}{\hbar N(\beta)} \sum_{n,k=-\infty}^{+\infty} (-1)^{k-n} e^{-\frac{\pi\beta}{4}[(2n+1)^2+(2k+1)^2]} \times \\ \times \delta(P_{n,k}^{\mu} - p) \cos \left[ (k-n) \frac{2\pi\mu}{l} \left( -\frac{P_{n,k}^{\mu}}{m} t + x \right) \right],$$

или

$$W_{\mu,\beta}(x,p,t) = \frac{1}{\hbar N(\beta)} \sum_{n,k=-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{\pi\beta}{4}[(2n+1)^2+(2k+1)^2]} \delta(P_{n,k}^{\mu} - p) T_{|k-n|} \left[ \cos \mathcal{G}_{n,k}^{\mu}(x,t) \right],$$

так как  $\mathcal{G}_{n,k}^{\mu}(x,t) = \frac{2\pi\mu}{l} \left( -\frac{P_{n,k}^{\mu}}{m} t + x \right) + \pi$ . Теорема 6 доказана.

**Замечание.** Из выражения (3.131) видно, что функция Вигнера представляется в виде суперпозиции точечных источников плотности вероятностей. Интегрирование функции Вигнера (3.131) по пространству импульсов даст плотность вероятностей  $f_{\mu,\beta}^1(x,t)$ , то есть

$$f_{\mu,\beta}^1(x,t) = \int_{-\infty}^{+\infty} f_{\mu,\beta}^{1,2}(x,v,t) dv = \hbar \int_{-\infty}^{+\infty} W_{\mu,\beta}(x,p,t) dp = \\ = \frac{1}{N(\beta)} \sum_{n,k=-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{\pi\beta}{4}[(2n+1)^2+(2k+1)^2]} T_{|k-n|} \left[ \cos \mathcal{G}_{n,k}^{\mu}(x,t) \right], \quad (3.136)$$

что совпадает с выражением (3.112).

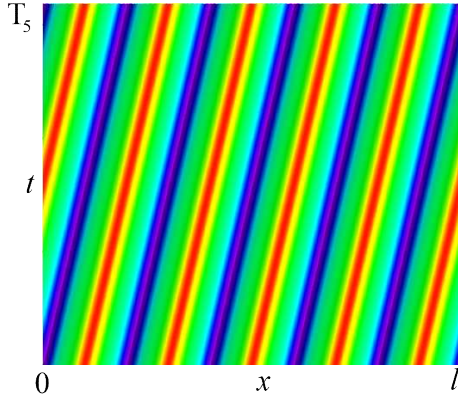


Рис. 5 Эволюция «точечного» источника квази-плотности вероятностей

Каждый «точечный» источник в выражении (3.131) с импульсом  $p = P_{n,k}^\mu$  будет состоять из набора гармоник, движущихся вдоль одной характеристики  $\mathcal{G}_{n,k}^\mu(x,t) = const$ . Угол наклона  $\gamma$  таких характеристик (3.120) будет определяться импульсом  $p = P_{n,k}^\mu$ . Согласно теореме Хадсона [66] функция (3.131) будет иметь области отрицательных значений, что

оправдывает ее название как функции квази-вероятностей [37, 38]. Эволюция квази-плотности вероятности такого «точечного» источника (при  $n+k=1$ ) будет иметь вид, изображенный на рис. 5. Красный цвет на рис.5 соответствует максимальному значению, а синий минимальному значению функции. Как видно из рис. 5 площадь фазовой области, в которой функция Вигнера является отрицательной (синий цвет) с течением времени остается постоянной, что соответствует теореме 7 из работы [78].

Функция Вигнера (3.131) допускает предельный переход при  $\beta \rightarrow +\infty$  и стремится к стационарной функции Вигнера для волновой функции (3.92).

Вычислим векторное поле потока вероятностей. Первое уравнение Власова для рассматриваемой системы примет вид [78, 10]:

$$\frac{\partial f_{\mu,\beta}^1}{\partial t} + \langle v \rangle_1^{\mu,\beta} \frac{\partial f_{\mu,\beta}^1}{\partial x} + f_{\mu,\beta}^1 \frac{\partial \langle v \rangle_1^{\mu,\beta}}{\partial x} = 0, \quad (3.137)$$

или

$$\frac{\partial \langle v \rangle_1^{\mu,\beta}}{\partial x} + \frac{\partial S_{\mu,\beta}^1}{\partial x} \langle v \rangle_1^{\mu,\beta} + \frac{\partial S_{\mu,\beta}^1}{\partial t} = 0, \quad S_{\mu,\beta}^1 \stackrel{\text{det}}{=} \ln f_{\mu,\beta}^1, \quad (3.138)$$



где  $\langle v \rangle_1^{\mu,\beta}$  – средняя скорость потока вероятностей, определяемая из второго уравнения Власова [78] для функции  $f_{\mu,\beta}^{1,2}(x, v, t)$

$$\frac{\partial f_{\mu,\beta}^{1,2}}{\partial t} + v \frac{\partial f_{\mu,\beta}^{1,2}}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial v} \left[ f_{\mu,\beta}^{1,2} \langle \dot{v} \rangle_{1,2}^{\mu,\beta} \right] = 0, \quad (3.139)$$

$$\langle v \rangle_1^{\mu,\beta}(x, t) = \frac{\int_{-\infty}^{+\infty} f_{\mu,\beta}^{1,2}(x, v, t) v dv}{\int_{-\infty}^{+\infty} f_{\mu,\beta}^{1,2}(x, v, t) dv} = \frac{\int_{-\infty}^{+\infty} f_{\mu,\beta}^{1,2}(x, v, t) v dv}{f_{\mu,\beta}^1(x)}, \quad (3.140)$$

Уравнение (3.137) переходит в уравнение Моэля [48] для функции Вигнера  $W(x, p, t)$  при аппроксимации Власова-Моэля для среднего потока ускорений  $\langle \dot{v} \rangle_{1,2}^{\mu,\beta}$  [49]:

$$\langle \dot{v} \rangle_{1,2}^{\mu,\beta}(x, v, t) = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^{k+1} (\hbar/2)^{2k}}{m^{2k+1} (2k+1)!} \frac{\partial^{2k+1} U}{\partial x^{2k+1}} \frac{1}{f_{\mu,\beta}^{1,2}} \frac{\partial^{2k} f_{\mu,\beta}^{1,2}}{\partial v^{2k}} = 0, \quad (3.141)$$

где учтен вид потенциала  $U$  (3.90). Подставляя (3.141) в уравнение (3.139), получим

$$\frac{\partial f_{\mu,\beta}^{1,2}}{\partial t} + v \frac{\partial f_{\mu,\beta}^{1,2}}{\partial x} = 0. \quad (3.142)$$

С одной стороны уравнение (3.142) соответствует уравнению Моэля для функции Вигнера квантовой системы с потенциалом (3.90), а с другой стороны уравнение (3.142) является уравнением переноса, решение которого может быть найдено методом характеристик [77]:

$$f_{\mu,\beta}^{1,2}(x,t) = F_{\mu,\beta}(\xi(x,t)), \quad \xi(x,t) = x - vt, \quad (3.143)$$

где  $\xi(x,t) = const$  – характеристика, а  $F_{\mu,\beta}(\xi)$  – некоторая функция, определяемая из начально-краевых условий или как функция Вигнера (3.131) волновой функции  $\Psi_{\mu,\beta}(x,t)$  (3.112).

Функция  $\mathcal{G}_{n,k}^\mu(x,t)$  в выражении (3.131) фактически определяет характеристику  $\xi(x,t)$  в уравнении переноса (3.143), так как  $\delta$  – функция будет давать вклад в выражении (3.131) только при  $p = mv = P_{n,k}^\mu$ .

В результате распределение скоростей  $\langle \vec{v} \rangle_1^{\mu,\beta}(x,t)$  можно получить двумя способами. Первый способ, используя выражение для функции Вигнера (3.131) произвести интегрирование по формуле (3.140). Вторым способом, зная функцию распределения  $f_{\mu,\beta}^1(x,t)$  решить первое уравнение Власова (3.137)/(2.11) относительно  $\langle \vec{v} \rangle_1^{\mu,\beta}(x,t)$ . В обоих случаях получится один и тот же результат. Действительно, первый способ дает представление

$$\langle v \rangle_1^{\mu,\beta}(x,t) = \frac{l}{2\mu T_\mu N(\beta) f_{\mu,\beta}^1(x)} \sum_{n,k=-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{\pi\beta}{4}[(2n+1)^2 + (2k+1)^2]} (n+k+1) T_{|k-n|} [\cos \mathcal{G}_{n,k}^\mu(x,t)]. \quad (3.144)$$

Решение вторым способом следует из следующей теоремы.

**Теорема 7** Решение первого уравнения Власова (3.137)/(3.138) представимо в виде

$$\langle v \rangle_1^{\mu,\beta}(x,t) = \frac{l}{2\mu T_\mu f_{\mu,\beta}^1(x,t) N(\beta)} \times \quad (3.145)$$

$$\times \sum_{n,k=-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{\pi\beta}{4}[(2k+1)^2 + (2n+1)^2]} (n+k+1) \cos[\mathcal{G}_{n,k}^\mu(x,t)(k-n)] + \frac{const}{f_{\mu,\beta}^1(x,t)},$$

где величина

$$\langle\langle v \rangle\rangle(t) = \int_0^l f_{\mu,\beta}^1(x,t) \langle v \rangle_1^{\mu,\beta}(x,t) dx = const \cdot l, \quad (3.146)$$

соответствует скорости движения центра масс и при этом справедлива асимптотика

$$\lim_{\beta \rightarrow +\infty} \langle v \rangle_1^{\mu,\beta}(x,t) = 0. \quad (3.147)$$

### Доказательство теоремы 7.

Подставляя явное выражение (3.112) для функции  $f_{\mu,\beta}^1(x,t)$  в уравнение (3.138), получим уравнение для средней скорости  $\langle v \rangle_1^{\mu,\beta}$ . С целью упрощения дальнейших выкладок вместо обозначения  $\langle v \rangle_1^{\mu,\beta}$  будем использовать  $\langle v \rangle$ . Общее решение  $\langle v \rangle_{o.n}$  неоднородного уравнения (3.137)/(3.138) можно представить в виде:

$$\langle v \rangle_{o.n} = \langle v \rangle_{o.o} + \langle v \rangle_{ч.н}, \quad (3.148)$$

где  $\langle v \rangle_{o.o}$  – общее решение однородного уравнения,  $\langle v \rangle_{ч.н}$  – частное решение неоднородного уравнения. Найдем решение однородного уравнения

$$\frac{\partial \langle v \rangle_1^{\mu,\beta}}{\partial x} + \frac{\partial S_{\mu,\beta}^1}{\partial x} \langle v \rangle_1^{\mu,\beta} = 0 \Rightarrow \ln \langle v \rangle_1^{\mu,\beta} = - \int \frac{\partial S_{\mu,\beta}^1}{\partial x} dx = -S_{\mu,\beta}^1 + const,$$

$$\ln \langle v \rangle_1^{\mu,\beta} = - \ln f_{\mu,\beta}^1 + const,$$

$$\langle v \rangle_{o.o}(x,t) = \frac{C}{f_{\mu,\beta}^1(x,t)}, \quad (3.149)$$

Для нахождения  $\langle v \rangle_{c,n}$  воспользуемся методом вариации произвольной постоянной  $C$ :

$$\begin{aligned} \frac{\partial f_{\mu,\beta}^1}{\partial t} + \frac{C}{f_{\mu,\beta}^1} \frac{\partial f_{\mu,\beta}^1}{\partial x} + \frac{\partial C}{\partial x} - \frac{C}{f_{\mu,\beta}^1} \frac{\partial f_{\mu,\beta}^1}{\partial x} &= 0, \\ \frac{\partial C}{\partial x} &= -\frac{\partial f_{\mu,\beta}^1}{\partial t}. \end{aligned} \quad (3.150)$$

Подставляя в уравнение (3.150) выражение (3.112), получим

$$C(x,t) = -\int \frac{\partial f_{\mu,\beta}^1}{\partial t} dx = -\frac{\pi}{N(\beta)T_\mu} \sum_{n,k=-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{\pi\beta}{4}[(2k+1)^2+(2n+1)^2]} (n+k+1)(k-n)\Lambda_{n,k}^\mu, \quad (3.151)$$

Вычислим интеграл

$$\Lambda_{n,k}^\mu = \int \sin[(k-n)\mathcal{G}_{n,k}^\mu] dx = \int \sin(Ax+B) dx,$$

где

$$\begin{aligned} (k-n)\mathcal{G}_{n,k}^\mu &= 2\mu\pi(k-n)\frac{x}{l} + \pi(k-n)\left[1 - \frac{t}{T_\mu}(n+k+1)\right] = Ax+B, \\ \bar{x} &= Ax+B, \quad d\bar{x} = A dx, \\ \Lambda_{n,k}^\mu &= \frac{1}{A} \int \sin(\bar{x}) d\bar{x} = -\frac{1}{A} \cos(Ax+B) + const. \end{aligned} \quad (3.152)$$

Подставляя интеграл (3.152) в выражение (3.151), получим

$$C(x,t) = \frac{l}{2\mu T_\mu N(\beta)} \sum_{n,k=-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{\pi\beta}{4}[(2k+1)^2+(2n+1)^2]} (n+k+1) \cos[\mathcal{G}_{n,k}^\mu(x,t)(k-n)]. \quad (3.153)$$

Таким образом, общее решение (3.148) неоднородного уравнения (3.137)/(3.138) имеет вид:

$$f_{\mu,\beta}^1 \langle v \rangle_1^{\mu,\beta} = \frac{l}{2\mu T_\mu N(\beta)} \times \quad (3.154)$$

$$\times \sum_{n,k=-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{\pi\beta}{4}[(2k+1)^2+(2n+1)^2]} (n+k+1) T_{|k-n|} \left( \cos \left[ \mathcal{G}_{n,k}^\mu(x,t) \right] \right) + const,$$

где постоянная величина  $const$  может быть определена из начально-краевых условий. Для ее определения вычислим скорость движение центра масс  $\langle\langle v \rangle\rangle(t)$

$$\langle\langle v \rangle\rangle(t) = \int_0^l f_\mu^\beta(x,t) \langle v \rangle_{o.n}(x,t) dx =$$

$$\frac{l}{2\mu T_\mu N(\beta)} \sum_{n,k=-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{\pi\beta}{4}[(2k+1)^2+(2n+1)^2]} (n+k+1) \int_0^l \cos \left[ \mathcal{G}_{n,k}^\mu(x,t)(k-n) \right] dx + const \cdot l,$$

учитывая

$$\int_0^l \cos \left[ \mathcal{G}_{n,k}^\mu(x,t)(k-n) \right] dx =$$

$$= \frac{2}{A} \cos \left\{ 2\pi(k-n) \left( \mu + 1 - \frac{t}{T_\mu} (n+k+1) \right) \right\} \sin \left[ 2\pi\mu(k-n) \right] = 0,$$

получим

$$\langle\langle v \rangle\rangle(t) = const \cdot l. \quad (3.155)$$

Как было показано в доказательстве теоремы 3 зависимость  $n+k+1=0$  дает основной вклад  $\frac{2}{N(\beta)} e^{-\frac{\pi\beta}{2}} \cos \left[ \pi \left( 2\mu \frac{x}{l} + 1 \right) \right]$  при  $n=-1, k=0$  и

$n = 0, k = -1$  в сумму ряда (3.154). Умножение основного вклада на нулевой множитель  $n + k + 1 = 0$  дает ноль.

Теорема 7 доказана.

**Замечание.** Из выражения (2.146) следует, что величина  $const \cdot l$  определяет постоянную скорость движения центра масс квантовой системы с потенциалом (3.90). Не ограничивая общности, для дальнейшего рассмотрения будем полагать величину (2.146) равной нулю. В результате, решение полученное, вторым способом (3.145) полностью совпадает с решением (3.144), полученным первым способом.

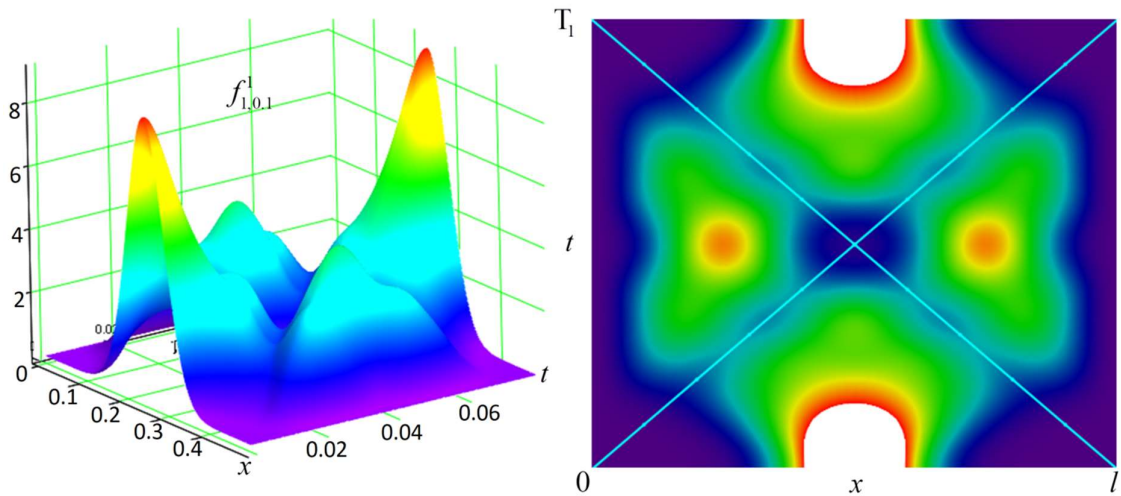


Рис. 6 Эволюция распределения плотности вероятностей  $f_{1,0.1}^1$ .

В качестве примера, иллюстрирующего эволюцию распределения поля скоростей  $\langle v \rangle_1^{1,0.1}$  (3.144), рассмотрим состояние с номером  $\mu = 1$  и параметром  $\beta = 0.1$ . По аналогии с рис.1 на рис. 6 приведена эволюция функции плотности вероятностей  $f_{1,0.1}^1$ . Слева на рис. 6 показана изометрическая проекция, а справа вид сверху с двумя основными характеристиками (3.120). На рис. 7 приведено сравнение распределений плотности вероятностей:  $f_1^1(x)$  – стационарное решение (3.133);  $f_{1,0.1}^1(x,0)$  –

новое нестационарное решение (3.112) в начальный момент времени;  $\bar{f}_{1,0.1}^1(x)$  – усредненное по периоду новое нестационарное решение (3.124).

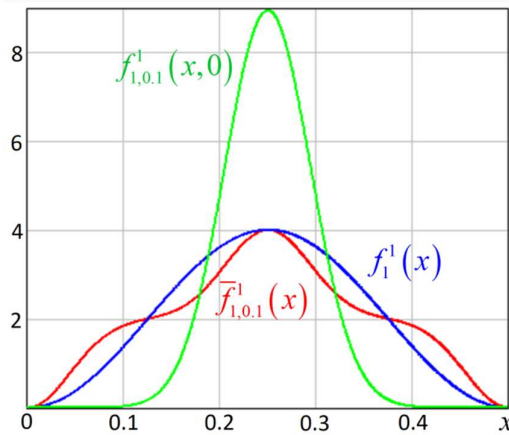


Рис. 7 Распределения плотностей вероятностей для  $\mu = 1$  и  $\beta = 0.1$

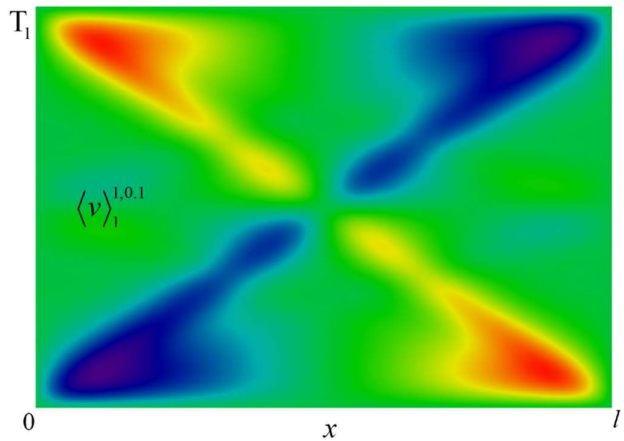


Рис. 8 Эволюция распределения поля скоростей  $\langle v \rangle_1^{1,0.1}$

На рис. 7 видно, что из-за малости параметра  $\beta$  графики существенно отличаются друг от друга. Аналогичная ситуация наблюдалась и ранее для состояния с номером  $\mu = 5$  (см. рис. 4). На рис. 8 приведен вид сверху на эволюцию распределение поля скоростей  $\langle v \rangle_1^{1,0.1}$ . Синий цвет соответствует минимальным значениям, а красный – максимальным. Как видно на рис. 8 эволюция поля скоростей  $\langle v \rangle_1^{1,0.1}$  имеет колебательный характер. На краях потенциальной ямы ( $x = 0$  и  $x = l$ ) скорость  $\langle v \rangle_1^{1,0.1}$  равна нулю (зелёный цвет на рис. 8) во все моменты времени. Внутри потенциальной ямы изначально происходит быстрое распространение волн вероятностей вправо (красный цвет) и влево (синий цвет) относительно центра потенциальной ямы (см. рис. 8).

В течение первого полупериода  $t \in (0, T_1/2)$  волны вероятностей, отразившись от стенок потенциальной ямы, постепенно угасают и возникают отраженные волны, распространяющиеся в противоположные стороны в течение второго полупериода  $t \in (T_1/2, T_1)$  (см. рис.8). На конец периода  $t = T_1$ , как и на его начало скорости равны нулю.

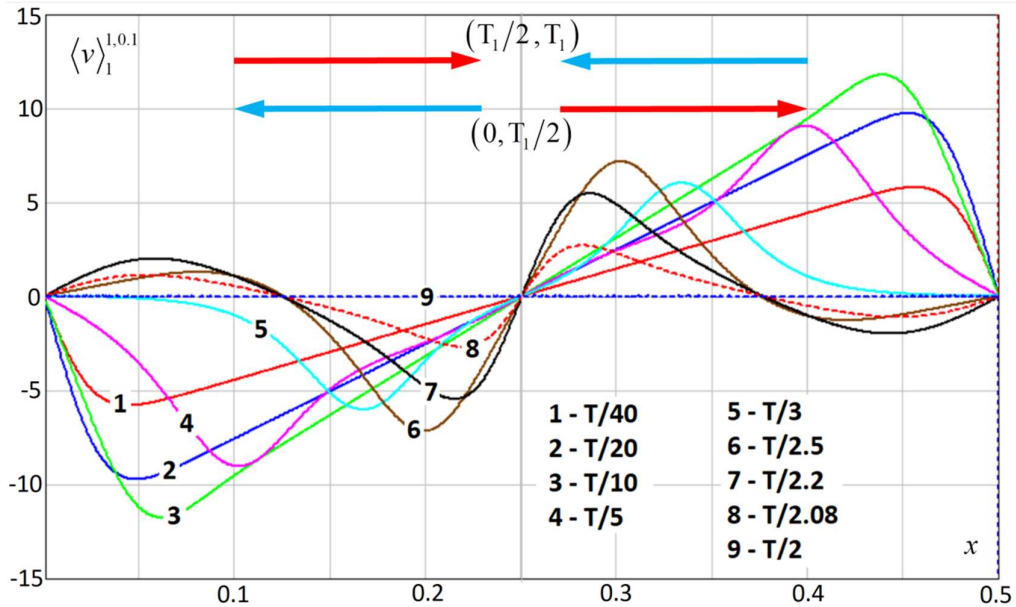


Рис. 9 Эволюция распределения поля скоростей  $\langle v \rangle_1^{1,0,1}$  в течение полупериода  $t \in (0, T_1/2)$

На рис. 9 приведены временные срезы распределения  $\langle v \rangle_1^{1,0,1}$  (см. рис.8) в моменты:  $t_1 = T_1/40$ ,  $t_2 = T_1/20$ ,  $t_3 = T_1/10$ ,  $t_4 = T_1/5$ ,  $t_5 = T_1/3$ ,  $t_6 = T_1/2.5$ ,  $t_7 = T_1/2.2$ ,  $t_8 = T_1/2.08$ ,  $t_9 = T_1/2$ .

Эволюция распространения волн вероятностей происходит «нелинейно». Вначале и в конце полупериода распределение скоростей  $\langle v \rangle_1^{1,0,1}$  меняется быстро, а в середине полупериода существенно медленнее (см. рис. 9). Из-за указанной особенности шкала временных срезов на рис. 9 имеет непостоянный шаг.



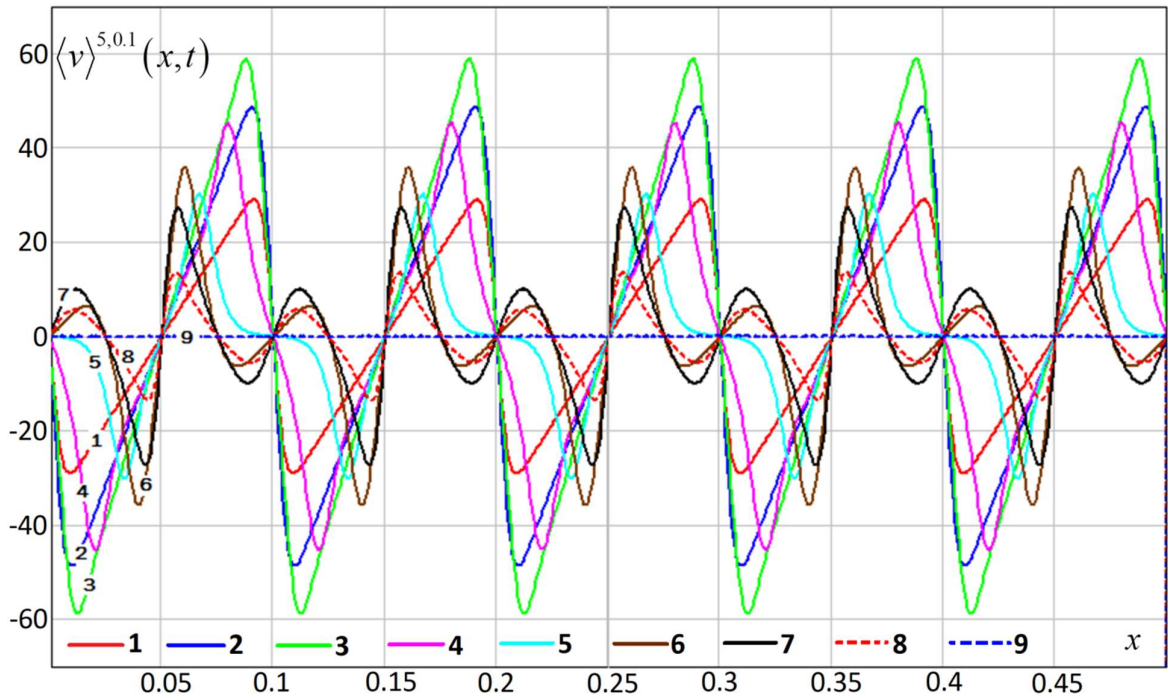


Рис. 10 Эволюция распределения поля скоростей  $\langle v \rangle^{5,0.1}$  в течение полупериода  $t \in (0, T_1/2)$

Для квантовых состояний с номерами  $\mu > 1$  получаются распределения в виде «суперпозиций» распределений, изображенных на рис. 8, 9. Пример такой «суперпозиции» для состояния с номером  $\mu = 5$  и  $\beta = 0.1$  приведен на рис.10. Графики, приведенные на рис. 10 получены для тех же временных срезов, что и на рис. 9. Заметим, что согласно выражению (3.114) период  $T_\mu \sim 1/\mu^2$ , следовательно, для  $\mu = 5$  частота колебаний плотности вероятностей  $f_{5,0.1}^1$  и  $\bar{f}_{5,0.1}^1$  будет в 25 раз выше (см. рис.10), чем при  $\mu = 1$  для функций  $f_{1,0.1}^1$  и  $\bar{f}_{1,0.1}^1$  (см. рис. 8,9).

Сравнивая рис. 9 и 10 видно, что распределения для состояния с номером  $\mu = 5$  (см. рис. 10) «состоят» из распределений для состояния с номером  $\mu = 1$  (см. рис. 9). Аналогичная картина наблюдается для

распределений плотностей вероятностей  $f_{1,0,1}^1(x,0)$  (см. рис. 7) и  $f_{5,0,1}^1(x,0)$  (см. рис. 4).

При увеличении  $\beta$  эволюционная картина для распределений  $f_{\mu,\beta}^1$  и  $\langle v \rangle_1^{\mu,\beta}$  согласно теоремам 3 и 7 вырождается в стационарное распределение.

### §3.6 Распределение Гиббса

Выражение (3.124) можно проанализировать в терминах средних по распределению Гиббса. Из определения  $P_{n,k}^\mu$  (3.131) следует, что

$$(2k+1)^2 = \frac{[P_{k,k}^\mu]^2}{2m} \frac{1}{E_\mu}. \quad (3.156)$$

Используя (3.156) перепишем выражение (3.124), получим

$$\begin{aligned} \bar{f}_{\mu,\beta}^1(x) &= \frac{2}{N(\beta)} \sum_{\kappa=-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{\pi\beta \hbar^2 \kappa^2}{2} \frac{1}{2m E_\mu}} \sin^2(\kappa x), \quad P_{k,k}^\mu = \hbar \kappa, \\ N(\beta) &= l \sum_{k=-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{\pi\beta}{2}(2k+1)^2} = l \sum_{\kappa=-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{\pi\beta \hbar^2 \kappa^2}{2} \frac{1}{2m E_\mu}}, \end{aligned} \quad (3.157)$$

где  $\kappa$  – волновое число. Введем обозначения

$$\begin{aligned} \mathcal{E}_\kappa &= \frac{\det \hbar^2 \kappa^2}{2m}, \quad \beta = \frac{\det \pi\beta}{2E_\mu} = \frac{1}{\tau}, \quad Z(\beta) = \sum_{\kappa=-\infty}^{+\infty} e^{-\beta \mathcal{E}_\kappa} = \frac{1}{l} N(\beta), \\ w_\kappa &= \frac{\det 1}{Z(\beta)} e^{-\beta \mathcal{E}_\kappa}, \quad \sum_{\kappa=-\infty}^{+\infty} w_\kappa = 1, \end{aligned} \quad (3.158)$$

где  $\mathcal{E}_\kappa$  – кинетическая энергия, соответствующая волновому числу  $\kappa$ ,  $\beta = \frac{1}{\tau}$  – аналог обратной температуры  $\tau$ ,  $Z(\beta)$  – аналог статистической суммы распределения Гиббса,  $w_\kappa$  – аналог распределения Гиббса. Используя обозначения (3.158) выражение (3.157) примет вид:

$$\bar{f}_{\mu,\beta}^1(x) = \frac{2}{l} \frac{1}{Z(\beta)} \sum_{\kappa=-\infty}^{+\infty} e^{-\beta \mathcal{E}_\kappa} \sin^2(\kappa x) = \frac{2}{l} \langle \sin^2(\kappa x) \rangle_{Gibbs}. \quad (3.159)$$

Таким образом, усредненная по времени (по периоду) нестационарная плотность вероятностей  $f_{\mu,\beta}^1$  равна среднему по Гиббсу от всех волновых пакетов (3.159). Проанализируем результат (3.159). При уменьшении «температуры»  $\tau \rightarrow 0+$  квантовой системы обратная температура растет  $\beta \rightarrow +\infty$ , что приводит согласно теоремам 3 и 5 к «замерзанию» системы, то есть

$$\lim_{\beta \rightarrow +\infty} f_{\mu,\beta}^1(x,t) = \lim_{\beta \rightarrow +\infty} \bar{f}_{\mu,\beta}^1(x) = f_\mu^1(x), \quad (3.160)$$

отсюда

$$\lim_{\beta \rightarrow +\infty} \langle \sin^2(\kappa x) \rangle_{Gibbs} = \sin^2 \left( \frac{\sqrt{2mE_\mu}}{\hbar} x \right) = \sin^2 \left( \frac{\pi\mu}{l} x \right).$$

При этом среднее поле скоростей  $\langle v \rangle_1^{\mu,\beta}(x,t)$  в соответствии с теоремой 7 также стремиться к нулю

$$\lim_{\beta \rightarrow +\infty} \langle v \rangle_1^{\mu,\beta}(x,t) = 0. \quad (3.161)$$

Данный результат неоднократно обсуждался выше и проиллюстрирован на рис. 3,4. При увеличении температуры  $\tau \rightarrow +\infty$ , обратная температура уменьшается  $\beta \rightarrow 0$ , что приводит к сильной нестационарности квантовой системы, наличию быстро осциллирующих волн плотности вероятностей (см. рис. 1, 3, 9, 10).

Сформулируем теорему.

**Теорема 8** Средняя по Гиббсу (3.158) энергия  $\mathcal{E}$  имеет вид

$$\langle \mathcal{E}_\mu \rangle_{Gibbs}(\beta) = \frac{1}{Z(\beta)} \sum_{\kappa=-\infty}^{+\infty} w_\kappa \mathcal{E}_\kappa = -\frac{d}{d\beta} \ln Z(\beta), \quad (3.162)$$

$$Z(\beta) = \theta_1 \left( -\frac{1}{2}, i \frac{4E_\mu}{\pi} \beta \right), \quad (3.163)$$

при этом справедлив предельный переход

$$\lim_{\beta \rightarrow +\infty} \langle \mathcal{E}_\mu \rangle_{Gibbs}(\beta) = E_\mu. \quad (3.164)$$

**Доказательство теоремы 8.**

Используя обозначения (3.158), вычислим статистическую сумму  $Z(\beta)$ , получим

$$Z(\beta) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} e^{-E_\mu(2k+1)^2 \frac{\pi\beta}{2E_\mu}} = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} e^{-\pi\beta(2k+1)^2} = \theta_1 \left( -\frac{1}{2}, 2i\beta \right) = \theta_1 \left( -\frac{1}{2}, i \frac{4E_\mu}{\pi} \beta \right).$$

Рассмотрим предел (3.164). По аналогии с доказательством теоремы 3 выражение для  $\langle \mathcal{E}_\mu \rangle_{Gibbs}$  с точностью до членов первого порядка малости будет иметь вид

$$\langle \mathcal{E}_\mu \rangle_{Gibbs} \approx \frac{E_\mu}{\sum_{k=-1}^0 e^{-\frac{\pi\beta}{2}(2k+1)^2}} \sum_{k=-1}^0 e^{-\frac{\pi\beta}{2}(2k+1)^2} (2k+1)^2 = E_\mu.$$

Теорема 8 доказана.

На рис. 11 показана зависимость средней энергии  $\langle \mathcal{E}_\mu \rangle_{Gibbs}(\beta)$  от обратной температуры  $\beta$  для различных квантовых состояний  $\mu$ . Видно, что согласно теореме 8 при  $\beta \rightarrow +\infty$  (охлаждение системы) энергетический спектр  $\langle \mathcal{E}_\mu \rangle_{Gibbs}$  стремится к спектру  $E_\mu$  стационарного решения (3.93).

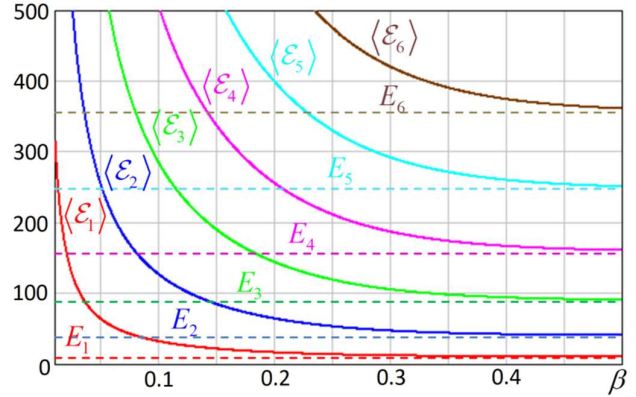


Рис. 11 Зависимость средней энергии  $\langle \mathcal{E}_\mu \rangle_{Gibbs}$  от обратной температуры

Используя функцию Вигнера (3.131) найдем координатное распределение среднего значения энергии (потенциальная энергия согласно (3.90) внутри ямы равна нулю):

$$\langle \mathcal{E}_{\mu,\beta} \rangle(x,t) = \frac{\hbar}{f_{\mu,\beta}^1(x,t)} \int_0^l \frac{p^2}{2m} W_{\mu,\beta}(x,p,t) dp, \quad (3.165)$$

$$\langle \mathcal{E}_{\mu,\beta} \rangle(x,t) = \frac{E_\mu}{N(\beta) f_{\mu,\beta}^1(x,t)} \sum_{n,k=-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{\pi\beta}{4}[(2n+1)^2 + (2k+1)^2]} (n+k+1)^2 T_{|k-n|} \left[ \cos \mathcal{G}_{n,k}^\mu(x,t) \right],$$

где учтено выражение  $f_{\mu,\beta}^{1,2}(x,v,t) = \hbar W_{\mu,\beta}(x,p,t)$ .

Распределение (3.165) является периодическим с периодом  $T_\mu$ . На рис. 12 показана эволюция перераспределения энергии  $\langle \mathcal{E}_{\mu,\beta} \rangle(x,t)$  внутри потенциальной ямы для квантового состояния с номером  $\mu = 1$  и  $\beta = 0.1$ .

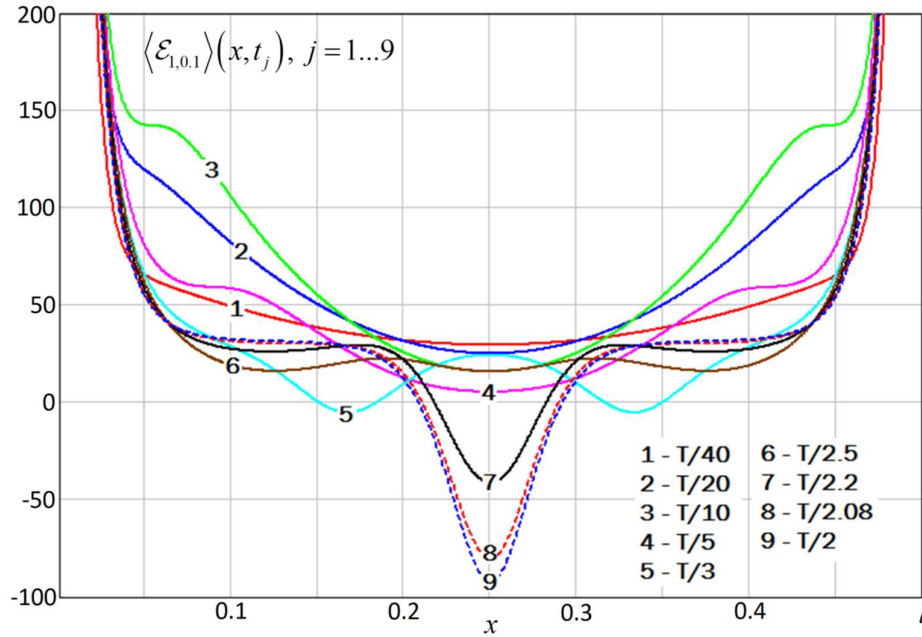


Рис. 12 Эволюция средней энергии  $\langle \mathcal{E}_{1,0.1} \rangle$  внутри потенциальной ямы

Особенностью эволюции энергии  $\langle \mathcal{E}_{\mu,\beta} \rangle(x,t)$  является наличие отрицательных значений (см. рис. 12, центральная область, моменты времени  $t_5, t_7, t_8, t_9$ ), которые обусловлены отрицательными значениями функции Вигнера (3.130). Отрицательные значения энергии  $\langle \mathcal{E}_{\mu,\beta} \rangle$  также связаны с понятием квантового потенциала  $Q(x,t)$ , который входит в уравнение Гамильтона-Якоби [2, 31] и используется в теории «волны-пилота» де'Бройля-Бома [34-36]

$$\frac{\partial \Phi_{\mu,\beta}}{\partial t} = -\frac{2}{\hbar} \langle \mathcal{E}_{\mu,\beta} \rangle = -\frac{2}{\hbar} \left[ \frac{m}{2} |\langle v \rangle^{\mu,\beta}|^2 + e\chi_{\mu,\beta} \right], \quad (3.166)$$

$$e\chi_{\mu,\beta} = U + Q_{\mu,\beta}, \quad Q_{\mu,\beta} = -\frac{\hbar^2}{2m} \frac{1}{\sqrt{f_{\mu,\beta}^1}} \frac{\partial^2}{\partial x^2} \sqrt{f_{\mu,\beta}^1}, \quad (3.167)$$

$$\Phi_{\mu,\beta} = 2\varphi_{\mu,\beta} + 2\pi k, \quad k \in \mathbb{Z}, \quad \varphi_{\mu,\beta} = \frac{S_{\mu,\beta}}{\hbar}, \quad \langle v \rangle^{\mu,\beta} = \frac{\hbar}{2m} \frac{\partial \Phi_{\mu,\beta}}{\partial x}, \quad (3.168)$$

где  $\varphi_{\mu,\beta}(x,t)$  – фаза волновой функции  $\Psi_{\mu,\beta}(x,t)$  (3.70);  $S_{\mu,\beta}$  – действие. На рис. 13 показано распределение квантового потенциала для моментов времени  $t_5, t_7, t_8, t_9$ , для которых распределение энергии  $\langle \mathcal{E}_{\mu,\beta} \rangle$  на рис. 12

имеет области отрицательных значений. Согласно уравнению Гамильтона-Якоби (3.166), энергия  $\langle \mathcal{E}_{\mu,\beta} \rangle$  складывается из кинетической энергии (определяемой выражением (3.130), см. рис. 9) и потенциальной энергии, которая полностью совпадает с квантовым потенциалом  $Q_{\mu,\beta}$  (3.167) (см. рис.

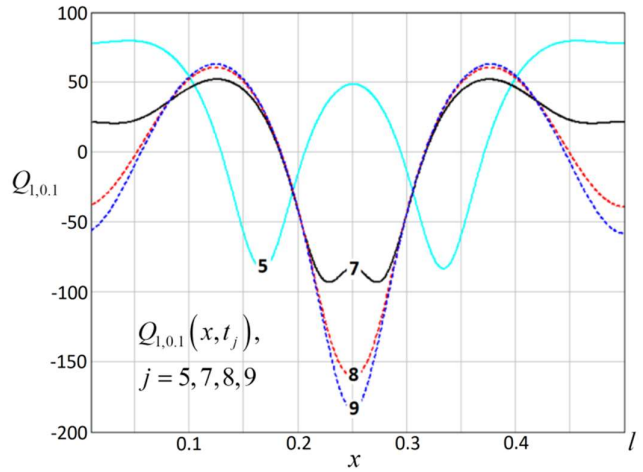


Рис. 13 Эволюция квантового потенциала  $\langle Q_{1,0,1} \rangle$  внутри

13). Учитывая сказанное и сравнивая распределения на рис. 12 с распределениями на рис. 13 видно, что отрицательные значения  $\langle \mathcal{E}_{\mu,\beta} \rangle$  связаны с отрицательными значениями квантового потенциала  $Q_{\mu,\beta}$ .

На краях потенциальной ямы функция энергии  $\langle \mathcal{E}_{\mu,\beta} \rangle$  имеет полюса, так как знаменатель выражения (3.165)  $f_{1,\beta}^1(x,t)$  равен нулю, то есть  $f_{1,\beta}^1(0,t) = f_{1,\beta}^1(l,t) = 0$ . Для квантовых состояний с номером  $\mu > 1$  эволюция распределения энергии  $\langle \mathcal{E}_{\mu,\beta} \rangle(x,t)$  будет иметь похожую структуру, но периодичную по координате (число периодов в потенциальной яме будет равно номеру квантового состояния  $\mu$ ). Аналогичная структура

распределений наблюдалась при сравнении рис. 9 ( $\mu=1$ ) с рис.10 ( $\mu=5$ ).  
 Количество полюсов энергии  $\langle \mathcal{E}_{\mu,\beta} \rangle(x,t)$  будет равно  $\mu+1$ .

**Теорема 9** Пусть средние величины  $\langle \bar{\mathcal{E}}_{\mu,\beta} \rangle(x)$  и  $\langle \langle \bar{\mathcal{E}}_{\mu,\beta} \rangle \rangle$  определены как

$$\langle \bar{\mathcal{E}}_{\mu,\beta} \rangle(x) \stackrel{\text{det}}{=} \frac{1}{\bar{f}_{\mu,\beta}^1(x)} \int_0^{\Gamma_\mu} f_{\mu,\beta}^1(x,t) \langle \mathcal{E}_{\mu,\beta} \rangle(x,t) dt, \quad (3.169)$$

$$\langle \langle \bar{\mathcal{E}}_{\mu,\beta} \rangle \rangle \stackrel{\text{det}}{=} \frac{1}{\bar{f}_{\mu,\beta}^0} \int_0^l \bar{f}_{\mu,\beta}^1(x) \langle \bar{\mathcal{E}}_{\mu,\beta} \rangle(x) dx, \quad \bar{f}_{\mu,\beta}^0 \stackrel{\text{det}}{=} \int_0^l \bar{f}_{\mu,\beta}^1(x) dx,$$

тогда справедливы представления

$$\langle \bar{\mathcal{E}}_{\mu,\beta} \rangle(x) = \frac{1}{l} \frac{\langle \mathcal{E}_\mu \rangle_{\text{Gibbs}}(\beta)}{\bar{f}_{\mu,\beta}^1(x)} = \frac{\langle \mathcal{E}_\mu \rangle_{\text{Gibbs}}(\beta)}{2 \langle \sin^2(\kappa x) \rangle_{\text{Gibbs}}}, \quad \langle \langle \bar{\mathcal{E}}_{\mu,\beta} \rangle \rangle = \langle \mathcal{E}_\mu \rangle_{\text{Gibbs}}(\beta), \quad (3.170)$$

при этом

$$\lim_{\beta \rightarrow +\infty} \langle \bar{\mathcal{E}}_{\mu,\beta} \rangle(x) = \frac{1}{l} \frac{E_\mu}{f_\mu^1(x)}, \quad \lim_{\beta \rightarrow +\infty} \langle \langle \bar{\mathcal{E}}_{\mu,\beta} \rangle \rangle = E_\mu. \quad (3.171)$$

### Доказательство теоремы 9.

Произведем непосредственные вычисления

$$\bar{f}_{\mu,\beta}^1(x) \langle \bar{\mathcal{E}}_{\mu,\beta} \rangle(x) = \frac{E_\mu}{N(\beta)} \sum_{n,k=-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{\pi\beta}{4}[(2n+1)^2+(2k+1)^2]} (n+k+1)^2 J_{n,k}^\mu(x), \quad (3.172)$$

где интеграл  $J_{n,k}^\mu(x)$  вычислен при доказательстве теоремы 4 (3.128).

Подставляя (3.128) в выражение (3.172), получим



$$\bar{f}_{\mu,\beta}^1(x) \langle \bar{\mathcal{E}}_{\mu,\beta} \rangle(x) = \frac{E_\mu}{N(\beta)} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{\pi\beta}{2}(2k+1)^2} (2k+1)^2. \quad (3.173)$$

Используя обозначения (3.156) и (3.158) выражение (3.173) примет вид

$$\langle \bar{\mathcal{E}}_{\mu,\beta} \rangle(x) \frac{2}{l} \frac{1}{Z(\beta)} \sum_{\kappa=-\infty}^{+\infty} e^{-\beta\mathcal{E}_\kappa} \sin^2(\kappa x) = \frac{1}{l} \frac{1}{Z(\beta)} \sum_{\kappa=-\infty}^{+\infty} e^{-\beta\mathcal{E}_\kappa} \mathcal{E}_\kappa = \frac{1}{l} \langle \mathcal{E}_\mu \rangle_{Gibbs}(\beta), \quad (3.174)$$

$$\langle \bar{\mathcal{E}}_{\mu,\beta} \rangle(x) = \frac{\langle \mathcal{E}_\mu \rangle_{Gibbs}(\beta)}{2 \langle \sin^2(\kappa x) \rangle_{Gibbs}}, \quad \lim_{\beta \rightarrow +\infty} \langle \bar{\mathcal{E}}_{\mu,\beta} \rangle(x) = \frac{\lim_{\beta \rightarrow +\infty} \langle \mathcal{E}_\mu \rangle_{Gibbs}(\beta)}{2 \sin^2\left(\frac{\pi\mu}{l}x\right)} = \frac{1}{l} \frac{E_\mu}{f_\mu^1(x)}, \quad (3.175)$$

где учтено (3.160). Усредняя выражение (3.173) по координате и учитывая (3.174), получим

$$\begin{aligned} \bar{f}_{\mu,\beta}^0 \langle \langle \bar{\mathcal{E}}_{\mu,\beta} \rangle \rangle &= \langle \mathcal{E}_\mu \rangle_{Gibbs}(\beta), \\ \langle \langle \bar{\mathcal{E}}_{\mu,\beta} \rangle \rangle &= \langle \mathcal{E}_\mu \rangle_{Gibbs}(\beta), \end{aligned} \quad (3.176)$$

где учтено

$$\begin{aligned} \bar{f}_{\mu,\beta}^0 &= \int_0^l \bar{f}_{\mu,\beta}^1(x) dx = \frac{2}{l} \int_0^l \langle \sin^2(\kappa x) \rangle_{Gibbs} dx = \\ &= \frac{2}{l} \frac{1}{Z(\beta)} \sum_{\kappa=-\infty}^{+\infty} e^{-\beta\mathcal{E}_\kappa} \int_0^l \sin^2(\kappa x) dx = 2 \frac{1}{2} \frac{1}{Z(\beta)} \sum_{\kappa=-\infty}^{+\infty} e^{-\beta\mathcal{E}_\kappa} = 1. \end{aligned}$$

и выражение (3.159). Теорема 9 доказана.

На рис. 14 приведены распределения средней энергии  $\langle \bar{\mathcal{E}}_{2,\beta} \rangle$  для квантового состояния с номером  $\mu = 2$  и различными значениями параметра обратной температуры. Распределение  $\langle \bar{\mathcal{E}}_{2,\beta} \rangle$  имеет три полюса (в точках  $x = 0, x = l, x = l/2$ ), которые определяются тремя нулями функции распределения  $\bar{f}_{2,\beta}^1(x)$ . Полюса разбивают (создают бесконечно высокие энергетические барьеры) распределение энергии  $\langle \bar{\mathcal{E}}_{2,\beta} \rangle$  внутри потенциальной ямы на два симметричных распределения (см. рис. 14) в двух одинаковых областях размером  $l/2$  [87].

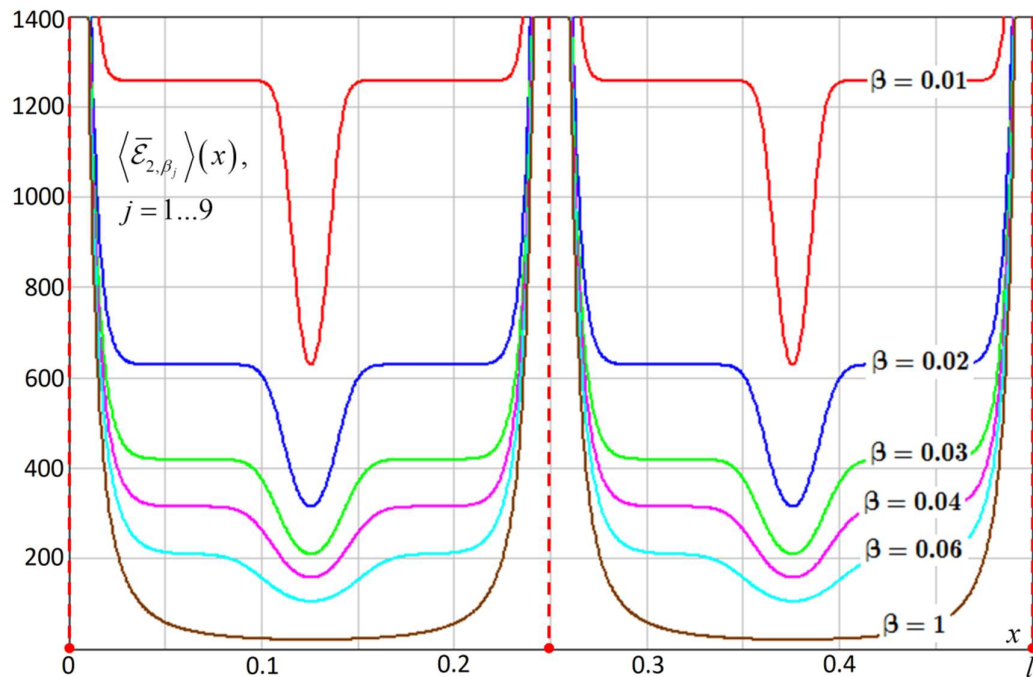


Рис. 14 Распределение средней энергии  $\langle \bar{\mathcal{E}}_{2,\beta} \rangle$  внутри потенциальной ямы

На рис. 14 видно, что при уменьшении «температуры» квантовой системы ( $\beta \rightarrow +\infty$ ) энергия внутри каждой области выравнивается, а при повышении «температуры» ( $\beta \rightarrow 0$ ) энергия имеет сильную неоднородность распределения в середине каждой области (см. рис. 14). Сравнивая распределения энергии  $\langle \bar{\mathcal{E}}_{2,\beta} \rangle$  на рис. 14 с распределениями плотности

вероятностей  $\bar{f}_{\mu,\beta}^1(x)$ , например, на рис. 4, видно, что оба распределения имеют сильную неоднородность в центре областей. Указанная неоднородность наиболее ярко выражена при высокой температуре ( $\beta \rightarrow 0$ ) и полностью исчезает при низких температурах ( $\beta \rightarrow +\infty$ ). Картина такого поведения становится прозрачнее, если учесть в рассмотрении распределение скоростей  $\langle v \rangle^{\mu,\beta}$  в потенциальной яме (см. рис. 9, 10). Для удобства рассуждений рассмотрим понятие сплошной среды, соответствующей плотности вероятностей  $\bar{f}_{\mu,\beta}^1(x)$ . При низкой температуре почти все «частицы» сплошной среды неподвижны, так как скорость  $\langle v \rangle^{\mu,\beta} \rightarrow 0$  при  $\beta \rightarrow +\infty$  (см. теорема 7 выражение (3.147)). Энергия таких частиц постоянна, что соответствует распределению  $\langle \bar{\mathcal{E}}_{2,\beta} \rangle$  на рис. 14 ( $\beta = 1$ ). Покоящиеся частицы распределены внутри потенциальной области (см. рис. 4) по закону  $f_{\mu}^1(x)$ . При увеличении температуры возникают осциллирующие потоки вероятностей (см. рис. 9). Первую половину периода  $t \in (0, T_1/2)$  основные потоки частиц среды расходятся от центра области в противоположные стороны. Частицы среды, расположенные в левой части потенциальной ямы движутся влево, а частицы из правой части движутся вправо (см. рис. 9). В середине периода  $t = T_1/2$  наступает покой, после чего в течении второго полупериода  $t \in (T_1/2, T_1)$  потоки начинают двигаться в обратные стороны – на встречу друг другу. Частицы среды, которые находятся в центре областей («центральные частицы»), имеют нулевую скорость (см. рис. 9, 10), так как на них слева и справа действуют взаимно компенсирующие потоки. При небольших температурах, существенная часть «центральных частиц» покоится (или имеет низкую энергию  $\langle \bar{\mathcal{E}}_{2,\beta} \rangle$ , см. рис. 14,  $\beta = 0.06$ ) и в основном колебательные движения совершают «периферийные частицы» среды (имеющие большую энергию  $\langle \bar{\mathcal{E}}_{2,\beta} \rangle$ , см. рис. 14,  $\beta = 0.06$ ).

Увеличение температуры (увеличивается амплитуда скорости, энергия  $\langle \bar{\mathcal{E}}_{2,\beta} \rangle$ ) приводит к росту числа частиц, участвующих в колебательном движении (см. рис. 14,  $\beta = 0.01$ ) и все меньше остается «центральных» частиц (обладающих низкой энергией  $\langle \bar{\mathcal{E}}_{2,\beta} \rangle$ , см. рис. 14,  $\beta = 0.01$ ) не

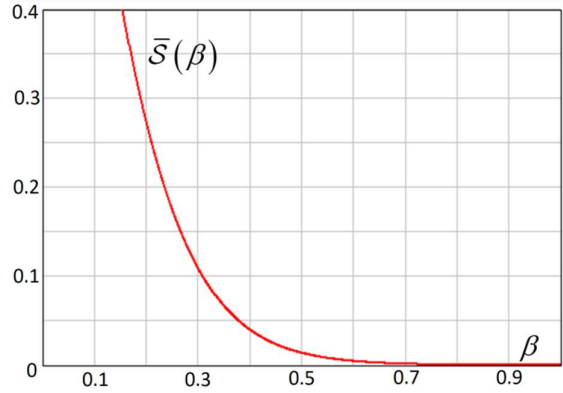


Рис. 15 Зависимость энтропии  $\bar{S}(\beta)$

участвующих в колебательном процессе (см. рис. 4). Действительно, на рис. 4 видно образование горизонтального плато у функции распределения  $\bar{f}_{\mu,\beta}^1(x)$  слева и справа от центра области. В центре области сужение ширины пика распределения  $\bar{f}_{\mu,\beta}^1(x)$ , свидетельствующее об уменьшении неподвижного числа «центральных частиц». В предельном случае при  $\beta \rightarrow 0$  функция  $\bar{f}_{\mu,\beta}^1(x)$  вырождается в набор  $\delta$ -функций с центрами в середине областей (так называемый «Гребень Дирака»). Таким образом, в пределе остается только одна неподвижная «центральная частица» (см. рис. 1, 4).

Рассмотрим понятие термодинамической энтропии  $\mathcal{S}$  квантовой системы. Исходя из второго начала термодинамики, получим

$$d\langle \mathcal{E}_\mu \rangle_{Gibbs} = \frac{\tau}{k_B} d\mathcal{S}, \quad d\mathcal{S} = k_B \beta d\langle \mathcal{E}_\mu \rangle_{Gibbs}, \quad (3.177)$$

где  $k_B$  – постоянная Больцмана.

**Теорема 10** Для термодинамической энтропии  $\mathcal{S}$  (3.177) квантовой системы с потенциалом (3.90) справедливо представление

$$\mathcal{S}(\beta) = -k_B \ln \mathcal{Z}(\beta), \quad (3.178)$$

$$\mathcal{Z}(\beta) = \frac{2}{Z(\beta)} e^{-\beta \langle \mathcal{E}_\mu \rangle_{Gibbs}(\beta)},$$

при этом

$$\lim_{\beta \rightarrow +\infty} \mathcal{S}(\beta) = 0, \quad \lim_{\beta \rightarrow 0^+} \mathcal{S}(\beta) = +\infty. \quad (3.179)$$

### Доказательство теоремы 10

Из утверждения (3.162) теоремы 8 следует, что

$$d\mathcal{S} = k_B d \left[ \beta \langle \mathcal{E}_\mu \rangle_{Gibbs} + \ln Z(\beta) \right], \quad (3.180)$$

отсюда

$$\mathcal{S}(\beta) = k_B \left[ \beta \langle \mathcal{E}_\mu \rangle_{Gibbs}(\beta) + \ln Z(\beta) \right] + \text{const}. \quad (3.181)$$

Определим постоянную величину в выражении (3.181).

$$\begin{aligned} \lim_{\beta \rightarrow +\infty} \mathcal{S}(\beta) &= \lim_{\beta \rightarrow +\infty} \bar{\mathcal{S}}(\beta) = k_B \lim_{\beta \rightarrow +\infty} \left[ \frac{\pi\beta}{2E_\mu} \langle \mathcal{E}_\mu \rangle_{Gibbs} \left( \frac{\pi\beta}{2E_\mu} \right) + \ln Z \left( \frac{\pi\beta}{2E_\mu} \right) \right] + \text{const} = \\ &= k_B \lim_{\beta \rightarrow +\infty} \left[ \frac{\pi\beta}{2} + \ln \bar{Z}(\beta) \right] + \text{const} = k_B \ln \lim_{\beta \rightarrow +\infty} \left[ \bar{Z}(\beta) e^{\frac{\pi\beta}{2}} \right] + \text{const}, \end{aligned} \quad (3.182)$$

где учтено (3.164). Вычислим предел

$$\lim_{\beta \rightarrow +\infty} \left[ \bar{Z}(\beta) e^{\frac{\pi\beta}{2}} \right] = \lim_{\beta \rightarrow +\infty} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{\pi\beta}{2} [(2k+1)^2 - 1]} = \lim_{\beta \rightarrow +\infty} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} e^{-2\pi\beta k(k+1)} = 2, \quad (3.183)$$

где учтено, что при предельном переходе в сумме (3.83) только два слагаемых с номерами  $k=0$  и  $k=-1$  дают вклад. Подставляя (3.83) в (3.182), получим

$$\lim_{\beta \rightarrow +\infty} \mathcal{S}(\beta) = k_B \ln 2 + \text{const}, \quad (3.184)$$

где полагая  $\text{const} = -k_B \ln 2$ , получаем справедливость выражений (3.178) и (3.179):

$$\mathcal{S}(\beta) = -k_B \left[ \ln e^{-\beta \langle \varepsilon_\mu \rangle_{Gibbs}(\beta)} + \ln \frac{2}{Z(\beta)} \right] = -k_B \ln \left[ \frac{2}{Z(\beta)} e^{-\beta \langle \varepsilon_\mu \rangle_{Gibbs}(\beta)} \right].$$

Вычислим предел (3.179) при  $\beta \rightarrow 0+$ .

$$\begin{aligned} \lim_{\beta \rightarrow 0+} \mathcal{S}(\beta) &= -k_B \ln \left[ 2 \lim_{\beta \rightarrow 0+} \frac{e^{-\beta \langle \varepsilon_\mu \rangle_{Gibbs}(\beta)}}{Z(\beta)} \right] = -k_B \ln \left[ 2 \lim_{\beta \rightarrow 0+} \frac{e^{-\beta E_\mu}}{Z(\beta)} \right] = \\ &= -k_B \ln \left[ 2 \lim_{\beta \rightarrow 0+} \frac{1}{Z(\beta)} \right] = +\infty, \end{aligned}$$

где  $\lim_{\beta \rightarrow 0+} Z(\beta) = +\infty$ . Теорема 10 доказана.

### Замечание

Энтропия (3.178) не зависит от номера квантового состояния  $\mu$ . Действительно, перепишем выражение (3.178) через переменную  $\beta$  (3.158), получим:

$$\mathcal{S}(\beta) = \bar{\mathcal{S}}(\beta) = -k_B \ln \left\{ \frac{2l}{N(\beta)} \exp \left[ -\frac{\pi l}{2} \frac{\beta}{N(\beta)} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} (2k+1)^2 e^{-\frac{\pi \beta}{2} (2k+1)^2} \right] \right\}. \quad (3.185)$$

На рис. 15 показана зависимость энтропии (3.185) от обратной температуры. В соответствии с теоремой 10 энтропия стремится к нулю при понижении температуры («замораживание») квантовой системы. При

увеличении температуры энтропия неограниченно растет (см. рис. 15). Энтропия  $\bar{S}(\beta)$  является строго монотонной функцией.

В заключение отметим, что рассмотренная система удовлетворяет трем законам сохранения [6-7, 78]:

***Закон сохранения вероятности / массы***

$$\frac{\partial f_{\mu,\beta}^1}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} \left[ f_{\mu,\beta}^1 \langle \vec{v} \rangle_1^{\mu,\beta} \right] = 0, \quad (3.186)$$

где  $f_{\mu,\beta}^1$  и  $\langle \vec{v} \rangle_1^{\mu,\beta}$  определяются выражениями (3.112) и (3.144) соответственно.

***Закон сохранения импульса***

$$\frac{d \langle v \rangle_1^{\mu,\beta}}{dt} = \left( \frac{\partial}{\partial t} + \langle v \rangle_1^{\mu,\beta} \frac{\partial}{\partial x} \right) \langle v \rangle_1^{\mu,\beta} = - \frac{1}{f_{\mu,\beta}^1} \frac{\partial P_{11}^{\mu,\beta}}{\partial x} + \langle \langle \dot{v} \rangle \rangle_1^{\mu,\beta}, \quad (3.187)$$

где в силу выражения (3.141)  $\langle \langle \dot{v} \rangle \rangle_1^{\mu,\beta} = 0$ ;  $P_{11}^{\mu,\beta} = \int_{-\infty}^{+\infty} f_{\mu,\beta}^{1,2} (v - \langle v \rangle_1^{\mu,\beta})^2 dv$   
давление:

$$P_{11}^{\mu,\beta} = \frac{1}{mN(\beta)} \sum_{n,k=-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{\pi\beta}{4}[(2n+1)^2 + (2k+1)^2]} \left[ P_{n,k}^{\mu} - m \langle v \rangle_1^{\mu,\beta}(x,t) \right]^2 T_{|k-n|} \left[ \cos \mathcal{G}_{n,k}^{\mu}(x,t) \right]. \quad (3.188)$$

где учтено выражение (3.144) для функции Вигнера  $f_{\mu,\beta}^{1,2}$ . Заметим, что давление  $P_{11}^{\mu,\beta}$  связано с квантовым давлением  $Q_{\mu,\beta}$  (см. рис. 13, (3.167)) [78, 33]:

$$-\frac{1}{f_{\mu,\beta}^1} \frac{\partial P_{11}^{\mu,\beta}}{\partial x} = \frac{\hbar^2}{2m^2} \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{1}{f_{\mu,\beta}^1} \frac{\partial^2 \sqrt{f_{\mu,\beta}^1}}{\partial x^2} \right) = -\frac{1}{m} \frac{\partial Q_{\mu,\beta}}{\partial x}. \quad (3.189)$$

Учитывая представление (3.188) выражение (3.189) можно получить в явном виде.

### *Закон сохранения энергии*

$$\begin{aligned} & \frac{\partial}{\partial t} \left[ \frac{f_{\mu,\beta}^1}{2} |\langle v \rangle_1^{\mu,\beta}|^2 + \frac{1}{2} P_{11}^{\mu,\beta} \right] + \\ & + \frac{\partial}{\partial x} \left[ \frac{f_{\mu,\beta}^1}{2} |\langle v \rangle_1^{\mu,\beta}|^2 \langle v \rangle_1^{\mu,\beta} + \frac{1}{2} \langle v \rangle_1^{\mu,\beta} P_{11}^{\mu,\beta} + \langle v \rangle_1^{\mu,\beta} P_{11}^{\mu,\beta} + \frac{1}{2} P_{111}^{\mu,\beta} \right] = \\ & = \int_{-\infty}^{+\infty} f_{\mu,\beta}^{1,2} \langle \dot{v} \rangle_1^{\mu,\beta} v dv = 0, \end{aligned} \quad (3.190)$$

где слагаемые в уравнении (3.190) соответствуют следующим

макроскопическим величинам:  $\frac{f_{\mu,\beta}^1}{2} |\langle v \rangle_1^{\mu,\beta}|$  – плотность кинетической

энергии;  $\frac{1}{2} P_{11}^{\mu,\beta}$  плотность внутренней энергии;  $\frac{f_{\mu,\beta}^1}{2} |\langle v \rangle_1^{\mu,\beta}|^2 \langle v \rangle_1^{\mu,\beta}$  плотность

потока кинетической энергии;  $\frac{1}{2} \langle v \rangle_1^{\mu,\beta} P_{11}^{\mu,\beta}$  – поток внутренней энергии;

$\langle v \rangle_1^{\mu,\beta} P_{11}^{\mu,\beta}$  характеризует «работу вероятности»;  $\frac{1}{2} P_{111}^{\mu,\beta}$  – «тепловой» поток,

$$P_{111}^{\mu,\beta} = \int_{-\infty}^{+\infty} f_{\mu,\beta}^{1,2} (v - \langle v \rangle_1^{\mu,\beta})^3 dv$$

$$P_{111}^{\mu,\beta} = \frac{1}{mN(\beta)} \sum_{n,k=-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{\pi\beta}{4}[(2n+1)^2+(2k+1)^2]} \left[ P_{n,k}^{\mu} - m \langle v \rangle_1^{\mu,\beta}(x,t) \right]^3 T_{|k-n|} \left[ \cos \vartheta_{n,k}^{\mu}(x,t) \right].$$



Правая часть уравнения (3.190)  $\int_{-\infty}^{+\infty} f_{\mu,\beta}^{1,2} \langle \dot{v} \rangle_1^{\mu,\beta} v dv = 0$  является средним

значением внешней силы (где учтено, что (3.141)).

Законы сохранения (3.187), (3.186) и (3.190) при «замораживании» квантовой системы ( $\beta \rightarrow +\infty$ ) вырождаются в тривиальные уравнения «0=0». Энергия квантовой системы согласно уравнению Гамильтона-Якоби (3.166) имеет асимптотику

$$\langle \mathcal{E}_{\mu,\beta} \rangle = \frac{m}{2} \left| \langle v \rangle^{\mu,\beta} \right|^2 + Q_{\mu,\beta},$$

$$\lim_{\beta \rightarrow +\infty} \langle \mathcal{E}_{\mu,\beta} \rangle = \lim_{\beta \rightarrow +\infty} Q_{\mu,\beta} = Q_{\mu} = -\frac{\hbar^2}{2m} \frac{1}{\sqrt{f_{\mu}^1}} \frac{\partial^2}{\partial x^2} \sqrt{f_{\mu}^1} = E_{\mu}, \quad (3.191)$$

здесь учтены теоремы 3, 7 и представление (3.90), (3.93). Заметим, что равенство (3.191) совпадает с выражением (3.164). Таким образом, энергия «замороженной» системы совпадает с квантовым потенциалом  $Q_{\mu}$ .

Уравнение Шрёдингера с математической точки зрения схоже с уравнением теплопроводности и, как показано в этой главе, имеет схожий характер поведения. В предельном случае при «остывании квантовой системы» нестационарное решение сходится к стационарному решению. Несмотря на известную необычность квантового мира динамические процессы в такой системе имеют наглядную интерпретацию в терминах классической физики.

## ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Основные результаты, полученные в диссертации:

1. Построена дисперсионная цепочка уравнений Власова для функций распределений смешанного типа.
2. На основе дисперсионной цепочки уравнений Власова получены законы сохранения для кинематических величин высшего порядка.
3. Получена дисперсионная цепочка для  $H^{n_1 \dots n_R}$  - функций Больцмана.
4. Предложена динамическая аппроксимация для векторного поля потока ускорений второго порядка  $\langle \ddot{\mathbf{v}} \rangle$ .
5. Получена модификация третьего уравнения Власова –  $\Psi$  - уравнение Власова для систем с излучением.
6. Найдены точные решения нестационарного уравнения Шрёдингера и соответствующие им функции Вигнера. Проведен анализ динамических свойств квантовой системы с позиции статистической физики, механики сплошных сред и квантовой механики в фазовом пространстве.

## ЛИТЕРАТУРА

1. Н.Н. Боголюбов, Собрание научных трудов в 12 томах Том 6. Равновесная статистическая механика, 1945-1986. – М.: Наука, 2006. – 520 с. – ISBN 5-02-034143-6
2. V. Aldaya and J. A. de Azcarraga, Variational principles on  $r$ -th order jets of fibre bundles in field theory, *J. Math. Phys.*, 19 (1978), 1869-1875.
3. C. M. Campos, M. de Leon, D. Martin de Diego and J. Vankerschaver, Unambiguous formalism for higher-order Lagrangian field theories, *J. Phys. A*, 42 (2009), 475207, 24 pp.
4. F. Cantrijn, M. Crampin and W. Sarlet, Higher-order differential equations and higher-order Lagrangian mechanics, *Math. Proc. Cambridge Philos. Soc.*, 99 (1986), 565-587.
5. L. Vitagliano, The Lagrangian-Hamiltonian formalism for higher-order field theories, *J. Geom. Phys.*, 60 (2010), 857-873.
6. Перепёлкин Е.Е., Садовников Б.И., Иноземцева Н.Г., Обобщенное фазовое пространство, МГУ, 164 стр., 2014
7. Sadovnikov B.I., Inozemtseva N.G., Perepelkin E.E., Generalized phase space and conservative systems, в журнале *Doklady Mathematics*, издательство Maik Nauka/Interperiodica Publishing (Russian Federation), том 88, № 1, с. 457-459
8. А.А. Власов, Statistical Distribution Functions. Nauka, Moscow, 1966
9. Vlasov A.A., Many-Particle Theory and Its Application to Plasma, New York, Gordon and Breach, 1961, ISBN 0-677-20330-6
10. Perepelkin E.E., Sadovnikov B.I., Inozemtseva N.G., The properties of the first equation of the Vlasov chain of equations, *J. Stat. Mech.* (2015) P05019
11. Boris Atenas, Sergio Curilef, Dynamics and thermodynamics of systems with long-range dipole-type interactions, *Physical Review E* 95, 022110 (2017)

12. Massimiliano Giona, Space-time-modulated stochastic processes, *Physical Review E* 96, 042132 (2017)
13. Pankaj Kumar and Bruce N. Miller, Thermodynamics of a one-dimensional self-gravitating gas with periodic boundary conditions, *Physical Review E* 95, 022116 (2017)
14. S. V. Batalov, A. G. Shagalov, Autoresonant excitation of Bose-Einstein condensates, *Physical Review E* 97, 032210 (2018)
15. Wojciech Florkowski, Ewa Maksymiuk, Radoslaw Ryblewski, Anisotropic-hydrodynamics approach to a quark-gluon fluid mixture, *Physical Review C* 97, 014904 (2018)
16. M. Stephanov<sup>1</sup> and Y. Yin, Hydrodynamics with parametric slowing down and fluctuations near the critical point, *Physical Review D* 98, 036006 (2018)
17. M. E. Carrington, St. Mrowczynski, B. Schenke, Momentum broadening in unstable quark-gluon plasma, *Physical Review C* 95, 024906 (2017)
18. R. Haenel, M. Schulz-Weiling, J. Sous, H. Sadeghi, M. Aghigh, L. Melo, J. S. Keller, E. R. Grant, Arrested relaxation in an isolated molecular ultracold plasma, *Physical Review A* 96, 023613 (2017)
19. Kentaro Hara, Ido Barth, Erez Kaminski, I. Y. Dodin, N. J. Fisch, Kinetic simulations of ladder climbing by electron plasma waves, *Physical Review E* 95, 053212 (2017)
20. M. Horky, W. J. Miloch, V. A. Delong, Numerical heating of electrons in particle-in-cell simulations of fully magnetized plasmas, *Physical Review E* 95, 043302 (2017)
21. N. Ratan, N. J. Sircombe, L. Ceurvorst,<sup>1</sup> J. Sadler, M. F. Kasim, J. Holloway, M. C. Levy, R. Trines, R. Bingham, and P. A. Norreys, Dense plasma heating by crossing relativistic electron beams, *Physical Review E* 95, 013211 (2017)
22. Shetty, D. V., Botvina, A. S., Yennello, S. J., Souliotis, G. A., Bell, E., & Keksis, A. (2005). Fragment yield distribution and the influence of neutron composition and excitation energy in multifragmentation reactions. *Physical Review C*, 71(2).

23. Zheng, H., Burrello, S., Colonna, M., Lacroix, D., & Scamps, G. (2018). Connecting the nuclear equation of state to the interplay between fusion and quasifission processes in low-energy nuclear reactions. *Physical Review C*, 98(2).
24. Pierroutsakou, D., Martin, B., Agodi, C., Alba, R., Baran, V., Boiano, A., ... Signorini, C. (2009). Dynamical dipole mode in fusion reactions at 16 MeV/nucleon and beam energy dependence. *Physical Review C*, 80(2).
25. M. Kopp, K. Vattis, C. Skordis, Solving the Vlasov equation in two spatial dimensions with the Schrödinger method, *Physical Review D* 96, 123532 (2017)
26. S. Bergström, R. Catena, A. Chiappo, J. Conrad, B. Eurenus, M. Eriksson, M. Högberg, S. Larsson, E. Olsson, A. Unger, R. Wadman, J-factors for self-interacting dark matter in 20 dwarf spheroidal galaxies, *Physical Review D* 98, 043017 (2018)
27. L. Gabriel Gomez, J. A. Rueda, Dark matter dynamical friction versus gravitational wave emission in the evolution of compact-star binaries, *Physical Review D* 96, 063001 (2017)
28. Derek Inman, Hao-Ran Yu, Hong-Ming Zhu, J. D. Emberson, Ue-Li Pen, Tong-Jie Zhang, Shuo Yuan, Xuele Chen, Zhi-Zhong Xing, Simulating the cold dark matter-neutrino dipole with TianNu, *Physical Review D* 95, 083518 (2017)
29. Giovanni Manfredi, Jean-Louis Rouet, Bruce Miller, Gabriel Chardin, Cosmological structure formation with negative mass, *Physical Review D* 98, 023514 (2018)
30. Jan Veltmaat, Jens C. Niemeyer, Bodo Schwabe, Formation and structure of ultralight bosonic dark matter halos, *Physical Review D* 98, 043509 (2018)
31. Perepelkin E.E., Sadovnikov B.I., Inozemtseva N.G. Riemann surface and quantization, в журнале *Annals of Physics*, издательство Academic Press (United States), 2017, том 376, с. 194-217

32. Perepelkin E.E., Sadovnikov B.I., Inozemtseva N.G.,  $\Psi$ -model of micro- and macrosystems, в журнале *Annals of Physics*, издательство Academic Press (United States), 2017, том 383, с. 511-544
33. Perepelkin E. E., Sadovnikov B. I., Inozemtseva N. G. The quantum mechanics of high-order kinematic values // *Annals of Physics*. – 2019. – Т. 401. – С. 59-90.
34. Bohm, D., Hiley, B.J., Kaloyerou, P.N. (1987). An ontological basis for the quantum theory. *Phys. Rep.* 144: 321–375.
35. Bohm, D., Hiley, B.J. (1993). *The Undivided Universe: An Ontological Interpretation of Quantum Theory. Routledge, London.*
36. de Broglie, L. (1956). Une interpretation causale et non lineaire de la mecanique ondulatoire: la theorie de la double solution, *Gauthiers-Villiers, Paris.*
37. E.P. Wigner, On the quantum correction for thermodynamic equilibrium, *Phys. Rev.* 40 (June 1932) 749—759
38. H. Weyl, *The Theory of Groups and Quantum Mechanics* (Dover, New York, 1931).
39. Rundle R. P., Tilma T., Samson J. H., Dwyer V. M., Bishop R. F., Everitt M. J. General approach to quantum mechanics as a statistical theory // *Phys. Rev. A*. – 2019. – Т. 99. – №. 012115.
40. Arkhipov I., Barasiński A., Svozilík J. Negativity volume of the generalized Wigner function as an entanglement witness for hybrid bipartite states // *Sci Rep*. – 2018. – Т.8. – №. 16955.
41. Andersen U., Neergaard-Nielsen J., van Loock P. et al. Hybrid discrete- and continuous-variable quantum information // *Nature Physics*. – 2015. – Т. 11. – С. 713–719.
42. Smithey D.T., Beck M., Raymer M.G., Faridani A. Measurement of the Wigner distribution and the density matrix of a light mode using optical homodyne tomography: application to squeezed states and the vacuum // *Phys. Rev. Lett.* – 1993. – Т. 70. – С. 1244-1247.

43. Radon J. fiber die Bestimmung von Funktionen durch ihre Integralwerte langs gewisser Mannigfaltigkeiten //Ber. Verh. Sachs. Akad. Wiss. Leipzig, Math.-Nat. Kl. – 1917. – T.69. – C. 262-277.
44. D’Ariano G. M., Paris M. G. A., Sacchi M. F. Quantum Tomography, edited by P. W. Hawkes, Advances in Imaging and Electron Physics. – Elsevier, 2003. – T. 128. – C. 205-308.
45. Vogel, K.; Risken, H. Determination of quasiprobability distributions in terms of probability distributions for the rotated quadrature phase //Phys. Rev. A. – 1989. – T.40. – №.5. – C. 2847-2849.
46. Casado, A.; Guerra, S.; Plácido, J. From Stochastic Optics to the Wigner Formalism: The Role of the Vacuum Field in Optical Quantum Communication Experiments //Atoms. – 2019. – T. 7. – C. 76.
47. Casado, A.; Guerra, S.; Plácido, J. Wigner representation for experiments on quantum cryptography using two-photon polarization entanglement produced in parametric down-conversion //J. Phys. B At. Mol. Opt. Phys. – 2008. – T. 41. – №. 045501.
48. Moyal E. Quantum mechanics as a statistical theory //Proceedings of the Cambridge Philosophical Society. – 1949. – T. 45. – C. 99-124.
49. Perepelkin E.E., Sadovnikov B.I., Inozemtseva N.G., Burlakov E.V., Wigner function of a quantum system with polynomial potential //Journal of Statistical Mechanics: Theory and Experiment. – 2020. – №. 053105.
50. Z. Chen and X. Zhang, Global existence to the Vlasov-Poisson system and propagation of moments without assumption of finite kinetic energy, Commun. Math. Phys., 343 (2016), 851–879.
51. Maruca B A, Kasper J C and Gary S P 2012 Instability-driven limits on helium temperature anisotropy in the solar wind: observations and linear Vlasov analysis Astrophys. J. 748 137
52. Brizard A J 1995 Nonlinear gyrokinetic Vlasov equation for toroidally rotating axisymmetric tokamaks Phys. Plasmas 2 459–71

53. Kunze and A. D. Rendall, Simplified models of electromagnetic and gravitational radiation damping, *Classical Quantum Gravity*, 18 (2001), 3573–3587.
54. M. Kunze and A. D. Rendall, The Vlasov-Poisson system with radiation damping, *Ann. Henri Poincaré*, 2 (2001), 857–886
55. Perepelkin E. E., Sadovnikov B. I., Inozemtseva N. G. The new modified Vlasov equation for the systems with dissipative processes // *Journal of Statistical Mechanics: Theory and Experiment*. – 2017. – №. 053207.
56. M. Grmela, Kinetic Equation Approach to Phase Transitions, *Journal of Statistical Physics*, Vol. 3, No. 3, 1971
57. E. S. Benilov, M. S. Benilov, Energy conservation and H theorem for the Enskog-Vlasov equation, *Physical Review E* 97, 062115 (2018)
58. E. Camporeale, G.L. Delzanno, B.K. Bergen, J.D. Moulton, On the velocity space discretization for the Vlasov–Poisson system: Comparison between implicit Hermite spectral and Particle-in-Cell methods, *Computer Physics Communications* (2016)
59. M. R. Dorr, P. Colella, M. A. Dorf, D. Ghosh, J. Hittinger, P. O. Schwartz, High-order Discretization of a Gyrokinetic Vlasov Model in Edge Plasma Geometry, *Journal of Computational Physics* (2018)
60. E. Fijalkow, A numerical solution to the Vlasov equation, *Computer Physics Communications* (1999)
61. F. Filbet, E. Sonnendrucker, P. Bertrandz, Conservative Numerical Schemes for the Vlasov Equation, *Journal of Computational Physics* (2001)
62. E. Sonnendrucker, J. Roche, P. Bertrand, and A. Ghizzoy, The Semi-Lagrangian Method for the Numerical Resolution of the Vlasov Equation, *Journal of Computational Physics* (1999)
63. F. Valentini, P. Travnicek, F. Califano, P. Hellinger, A. Mangeney, A hybrid-Vlasov model based on the current advance method for the simulation of collisionless magnetized plasma, *Journal of Computational Physics* 225 (2007) 753–770



64. Farkas Hershel M., Kra Irwin, *Riemann Surfaces*, (1980) New York: Springer-Verlag. ch. 6. ISBN 978-0-387-90465-8
65. Whittaker E. T., Watson G. N., *A Course in Modern Analysis* (4<sup>th</sup> ed.), (1927) Cambridge: Cambridge University Press. ch. 21.
66. R.L. Hudson, When is the Wigner quasi-probability density non-negative?, *Reports on mathematical physics*, vol. 6, N 2 (1974)
67. Perepelkin E.E., Sadovnikov B.I., Inozemtseva N.G., Tarelkin A.A., A new class of exact solutions of the Schrödinger equation, *Continuum Mechanics and Thermodynamics*, Springer Verlag (Germany), 2019, vol. 31, pp. 639-667
68. W. Guo and J.-M. Qiu, “Hybrid semi-Lagrangian finite element-finite difference methods for the Vlasov equation,” *Journal of Computational Physics*, vol. 234, no. 0, pp. 108 – 132, 2013.
69. J.-M. Qiu and A. Christlieb, “A conservative high order semi-lagrangian WENO method for the Vlasov equation,” *Journal of Computational Physics*, vol. 229, no. 4, pp. 1130 – 1149, 2010.
70. 19] T. Umeda, J.-I. Miwa, Y. Matsumoto, T. K. M. Nakamura, K. Togano, K. Fukazawa, and I. Shinohara, “Full electromagnetic Vlasov code simulation of the KelvinHelmholtz instability,” *Physics of Plasmas*, vol. 17, no. 5, 2010.
71. J. A. Rossmannith and D. C. Seal, “A positivity-preserving high-order semi-Lagrangian discontinuous Galerkin scheme for the Vlasov–Poisson equations,” *Journal of Computational Physics*, vol. 230, no. 16, pp. 6203 – 6232, 2011.
72. Kunze and A. D. Rendall, Simplified models of electromagnetic and gravitational radiation damping, *Classical Quantum Gravity*, 18 (2001), 3573–3587.
73. M. Kunze and A. D. Rendall, The Vlasov-Poisson system with radiation damping, *Ann. Henri Poincaré*, 2 (2001), 857–886
74. J. Larmor, On a dynamical theory of the electric and luminiferous medium, *Philosophical Transactions of the Royal Society* 190, (1897) pp. 205-300
75. Perepelkin E.E., Sadovnikov B.I., Inozemtseva N.G., Burlakov E.V., Explicit form for the kernel operator matrix elements in eigenfunction basis of harmonic

- oscillator //Journal of Statistical Mechanics: Theory and Experiment – 2020. – №. 023109.
- 76.Perepelkin E.E., Sadovnikov B.I., Inozemtseva N.G., Burlakov E.V., The Wigner function negative value domains and energy function poles of the harmonic oscillator, Journal of Computational Electronics, 2021, pp. 1-11
- 77.Perepelkin E.E., Sadovnikov B.I., Inozemtseva N.G., Burlakov E.V., Extended Wigner function for the harmonic oscillator in the phase space, Results in Physics, 2020, vol. 19, № 103546, pp. 1-8
- 78.Perepelkin E.E., Sadovnikov B.I., Inozemtseva N.G., Aleksandrov I.I., Dispersion chain of Vlasov equations //J. Stat. Mech. – 2022. – №. 0132
- 79.Thermal Infrared Sensor (TIRS). NASA Landsat Science. August 23, 2018. Retrieved August 27, 2018.
- 80.Rogalski, Antoni, History of infrared detectors. Opto-Electronics Review. (September 2012) **20** (3): 279. [doi:10.2478/s11772-012-0037-7](https://doi.org/10.2478/s11772-012-0037-7)
- 81.Miller, D. Band-Edge Electroabsorption in Quantum Well Structures: The Quantum-Confined Stark Effect. Phys. Rev. Lett. (1984) **53** (22): 2173–2176.
- 82.Kuo Yu-Hsuan, Lee Yong Kyu, Ge Yangsi, Ren Shen, Roth Jonathan E., Kamins Theodore I., Miller David A. B., Harris, James S., Strong quantum-confined Stark effect in germanium quantum-well structures on silicon, Nature. (October 2005) **437** (7063): 1334–1336. [doi:10.1038/nature04204](https://doi.org/10.1038/nature04204).
- 83.Chaisakul Papichaya, Marris-Morini Delphine, Frigerio Jacopo, Chrastina Daniel, Rouifed Mohamed-Said, Cecchi Stefano, Crozat Paul, Isella Giovanni, Vivien Laurent, Integrated germanium optical interconnects on silicon substrates, Nature Photonics (11 May 2014), **8** (6): 482–488
- 84.Rice, C.V.; Griffin, G.A., Simple Syntheses of CdSe Quantum Dots, Journal of Chemical Education (2008), **85** (6): 842, Retrieved 5 November 2016.
- 85.Alberto P, Fiolhais C, Gil V M S., Relativistic particle in a box, European Journal of Physics, (1996) **17** (1): 19–24
- 86.Majernik Vladimir, Richterek Lukas, Entropic uncertainty relations for the infinite well, (1997-12-01) J. Phys. A. **30** (4): L49, Retrieved 11 February 2016.

87.Perepelkin E.E., Sadovnikov B.I., Inozemtseva N.G., Burlakov E.V., The Wigner function negative value domains and energy function poles of the harmonic oscillator, Journal of Computational Electronics, 2021, vol. 20 pp. 2148-2158