Московский государственный университет
имени М.В.Ломоносова

На правах рукописи

Резниченко Евгений Александрович

Группы с топологией и однородные пространства

Специальность 1.1.3 —
«Геометрия и топология»

Автореферат
диссертации на соискание учёной степени
доктора физико-математических наук

Москва — 2023

Работа выполнена в Федеральном государственном бюджетном образовательном учреждение высшего образования «Московский государственный университет имени М.В. Ломоносова».

Официальные оппоненты: **Щепин Евгений Витальевич,**
доктор физико-математических наук, член-кор. РАН, Математический институт им. В. А. Стеклова, главный научный сотрудник

Геворкян Павел Самвелович,
доктор физико-математических наук, профессор, Московский педагогический государственный университет (МПГУ), заведующий кафедрой

Осипов Александр Владимирович,
доктор физико-математических наук, доцент, Институт математики и механики им. Н.Н. Красовского Уральского отделения Российской академии наук, заведующий сектором

Защита диссертации состоится 19 января 2024 года в 16 часов 45 минут на заседании диссертационного совета МГУ.011.4 Московский государственный университет имени М. В. Ломоносова по адресу 119234, Москва, ГСП-1, Ленинские горы, д. 1., ФГБОУ ВО «Московский государственный университет имени М. В. Ломоносова», механико-математический факультет, аудитория 14-08.

E-mail: manuilov@mech.math.msu.su

С диссертацией можно ознакомиться в отделе диссертаций Фундаментальной библиотеки Московского государственного университета имени М. В. Ломоносова (Москва, Ломоносовский проспект, д. 27) и и на портале

https://dissovet.msu.ru/dissertation/011.4/2786

Автореферат разослан 18 ноября 2023 года.

Ученый секретарь
диссертационного совета
МГУ.011.4,
доктор физико-математических наук,
доцент В. М. Мануйлов

Общая характеристика работы

Актуальность темы и степень её разработанности

В топологической алгебре изучаются алгебраические объекты с топологией, в той или иной степени согласованной с алгебраической структурой. Наиболее важные алгебраические объекты — это группы.

Операция Мальцева на множестве X — это отображение $f : X^3 \to X$ (трехместная операция), для которого выполнено тождество

$$f(x, y, y) = f(y, y, x) = x.$$

Пространства с операция Мальцева называются мальцевскими пространствами. Операция Мальцева играет фундаментальную роль в общей теории алгебраических систем, разработанной академиком А.И. Мальцевым[1]. На группе есть естественная операция Мальцева: $f(x, y, z) = xy^{-1}z$. Ретракты мальцевских пространств (в частности, ретракты групп) также являются мальцевскими пространствами: операция $g(x, y, z) = r(f(x, y, z))$ является операцией Мальцева на $r(X)$, где r есть ретракция. Компактное пространство является мальцевским, если и только если оно является ретрактом топологической группы[2].

Возможны различные способы согласованности алгебраической и топологической структуры. Наиболее важный и исследуемый случай — это когда алгебраические операции непрерывны. Топологические группы (группы с непрерывными операциями умножения и взятия обратного элемента) — важнейший и наиболее изученный объект в топологической алгебре.

Важное направление исследований — это изучение алгебраических систем, в которых для операций выполняются слабые формы непрерывности, например, раздельная непрерывность. Для таких систем проводят как традиционные для топологоческой алгебры исследования — изучение топологических и алгебро-топологических свойств, так и специфические для таких систем — исследования условий, при которых из непрерывности операций в слабом смысле вытекает их непрерывность в более сильном смысле.

Для групп данное направление началось с работы Д.Монтгомери[3] (1936 г.), который доказал, что полная метризуемая сепарабельная груп-

[1] *В. А. Артамонов.* Универсальные алгебры // Общая алгебра, Т.2. Наука, Москва, 1991. С. 295—367. (Справочная математическая библиотека); *Мальцев А. И.* К общей теории алгебраических систем // Математический сборник. 1954. Т. 35, № 1. С. 3—20.

[2] *Сипачёва О. В.* Компакты с непрерывной операцией Мальцева и ретракты топологических групп // Вестник Московского университета. Серия 1: Математика. Механика. 1991. № 1. С. 33—36.

[3] *Montgomery D.* Continuity in topological groups // Bull. Am. Math. Soc. 1936. T. 42. C. 879—882. ISSN 0002-9904. DOI: `10.1090/S0002-9904-1936-06456-6`.

па с раздельно непрерывным умножением (т.е. полутопологическая группа) является топологической группой. Р. Эллис в работе[4] (1957 г.) доказал, что локально компактная группа с непрерывным умножением (т.е. паратопологическая группа) является топологической группой. Позднее[5] он обобщил этот результат на полутопологические группы и доказал свою основополагающею теорему: локально компактная полутопологическая группа является топологической группой. Центральные задачи в этой области, выяснить, при каких условиях (1) паратопологическая группа является топологической группой и (2) полутопологическая группа является топологической группой. Работы Д. Монтгомери и Р. Эллиса положили начало новому направлению в топологической алгебре, развитием которого занимались и продолжают заниматься многие математики, отметим наиболее значительные работы[6], также в этом ряду отметим работы автора [9; 16], смотри также обзор[7]. В этом направлении интенсивно изучается и непрерывность операций в классах групп с топологией более широких чем классы классы пара- и полутопологических групп[8].

[4] *Ellis R.* A note on the continuity of the inverse // Proc. Am. Math. Soc. 1957. Т. 8. С. 372—373. ISSN 0002-9939. DOI: 10.2307/2033747.

[5] *Ellis R.* Locally compact transformation groups // Duke Mathematical Journal. 1957. Т. 24, № 2. С. 119—125.

[6] *Moors W. B.* Some Baire semitopological groups that are topological groups // Topology and its Applications. 2017. Т. 230. С. 381—392. ISSN 0166-8641. DOI: 10.1016/j.topol.2017.08.042; *Moors W. B.* Any semitopological group that is homeomorphic to a product of Cech-complete spaces is a topological group // Set-Valued and Variational Analysis. 2013. Т. 21, № 4. С. 627—633; *Arhangel'skii A. V.*, *Choban M. M.* Completeness type properties of semitopological groups, and the theorems of Montgomery and Ellis // Topology Proc. 2011. Т. 37. С. 33—60; *Arhangel'skii A. V.*, *Choban M. M.*, *Kenderov P. S.* Topological games and continuity of group operations // Topology and its Applications. 2010. Т. 157, № 16. С. 2542—2552. ISSN 0166-8641. DOI: 10.1016/j.topol.2010.08.001; *Ravsky O.* Paratopological groups II // Mat. Stud. 2002. Т. 17, № 1. С. 93—101; *Kenderov P. S.*, *Kortezov I. S.*, *Moors W. B.* Topological games and topological groups // Topology Appl. 2001. Т. 109, № 2. С. 157—165. ISSN 0166-8641. DOI: 10.1016/S0166-8641(99)00152-2; *Ravsky O.* Paratopological groups I // Mat. Stud. 2001. Т. 16, № 1. С. 37—48; *Bouziad A.* Continuity of separately continuous group actions in p-spaces // Topology Appl. 1996. Т. 71, № 2. С. 119—124. ISSN 0166-8641. DOI: 10.1016/0166-8641(95)00039-9; *Bouziad A.* Every Cech-analytic Baire semitopological group is a topological group // Proceedings of the American Mathematical Society. 1996. С. 953—959; *Bouziad A.* The Ellis theorem and continuity in groups // Topology and its Applications. 1993. Т. 50, № 1. С. 73—80; *Korovin A. V.* Continuous actions of pseudocompact groups and axioms of topological group // Commentationes Mathematicae Universitatis Carolinae. 1992. Т. 33, № 2. С. 335—343; *Pfister H.* Continuity of the inverse // Proceedings of the American Mathematical Society. 1985. Т. 95, № 2. С. 312—314; *Brand N.* Another note on the continuity of the inverse // Archiv der Mathematik. 1982. Т. 39, № 3. С. 241—245; *Zelazko W.* Metric generalizations of Banach algebras. Warszawa : Instytut Matematyczny Polskiej Akademi Nauk, 1965.

[7] *Tkachenko M.* Paratopological and semitopological groups vs topological groups // Recent Progress in General Topology. 2014. Янв. Т. 3. С. 825—872.

[8] *Moors W. B.* Fragmentable mappings and CHART groups // Fundamenta Mathematicae. 2016. Т. 234. С. 191—200; *Glasner E.*, *Megrelishvili M.* Banach representations and affine

Систематическое изучение групп с топологией, не являющихся топологическими группами, берет начало в топологической динамике. В работе[9] Р. Аренс доказал, что группа автогомеоморфизмов локально компактного пространства в компактно открытой топологии является паратопологической группой; там же он получил условия, при которых группа автогомеоморфизмов является топологической группой. Основополагающая теорема Р. Эллиса была доказана в рамках работы по топологической динамики. Обертывающие полугруппы (enveloping semigroup) динамических систем были введены Р. Эллисом в 1960 г. в работе[10]. Они стали основным инструментом абстрактной теории топологических динамических систем. И. Намиока в работе по топологической динамике[11] ввел CHART (compact Hausdorff admissible right topological) группы. Это компактные правотопологические (правые сдвиги $x \mapsto xg$ непрерывны) допустимые (топологический центр $\Lambda(G) = \{g \in G :$ левый сдвиг $x \mapsto gx$ непрерывен$\}$ плотен в G) группы. В этой статье он показал что метризуемые CHART группы являются топологическими группами. Ряд авторов получили усиления этого результата И.Намиоки[12]. Изучение динамических систем, для которых обертывающая полугруппа является CHART группой, играет большую роль в абстрактной теории топологических динамических систем.

---

compactifications of dynamical systems // Asymptotic geometric analysis. Springer, 2013. С. 75—144; *Cao J.*, *Drozdowski R.*, *Piotrowski Z.* Weak continuity properties of topologized groups // Czechoslovak Mathematical Journal. 2010. Т. 60, № 1. С. 133—148; *Ferri S.*, *Hernández S.*, *Wu T.* Continuity in topological groups // Topology and its Applications. 2006. Т. 153, № 9. С. 1451—1457. ISSN 0166-8641. DOI: 10.1016/j.topol.2005.04.007; *Solecki S.*, *Srivastava S.* Automatic continuity of group operations // Topology and its Applications. 1997. Т. 77, № 1. С. 65—75. ISSN 0166-8641. DOI: 10.1016/S0166-8641(96)00119-8; *Milnes P.* Continuity properties of compact right topological groups // Mathematical Proceedings of the Cambridge Philosophical Society. Т. 86. Cambridge University Press. 1979. С. 427—435; *Ruppert W.* Uber kompakte rechtstopologische Gruppen mit gleichgradig stetigen Linkstranslationen // Sitz. ber. d. Osterr. Akad. d. Wiss. Math.-naturw. Kl. 1975. Т. 184. С. 159—169.

[9] *Arens R.* Topologies for Homeomorphism Groups // American Journal of Mathematics. 1946. Т. 68, № 4. С. 593—610. ISSN 00029327, 10806377.

[10] *Ellis R.* A semigroup associated with a transformation group // Transactions of the American Mathematical Society. 1960. Т. 94, № 2. С. 272—281.

[11] *Namioka I.* Right topological groups, distal flows, and a fixed-point theorem // Mathematical systems theory. 1972. Т. 6, № 1. С. 193—209.

[12] *Moors W. B.* Fragmentable mappings and CHART groups // Fundamenta Mathematicae. 2016. Т. 234. С. 191—200; *Glasner E.*, *Megrelishvili M.* Banach representations and affine compactifications of dynamical systems // Asymptotic geometric analysis. Springer, 2013. С. 75—144; *Moors W. B.*, *Namioka I.* Furstenberg's structure theorem via CHART groups // Ergodic Theory and Dynamical Systems. 2013. Т. 33, № 3. С. 954—968; *Milnes P.* Continuity properties of compact right topological groups // Mathematical Proceedings of the Cambridge Philosophical Society. Т. 86. Cambridge University Press. 1979. С. 427—435; *Ruppert W.* Uber kompakte rechtstopologische Gruppen mit gleichgradig stetigen Linkstranslationen // Sitz. ber. d. Osterr. Akad. d. Wiss. Math.-naturw. Kl. 1975. Т. 184. С. 159—169.

В основополагающей работе[13] (1899 г.) Р. Бэр показал, что вещественные раздельно непрерывные функции двух аргументов имеют много точек совместной непрерывности. Такие функции квазинепрерывны, то есть внутренность $f^{-1}(U)$ плотна в $f^{-1}(U)$ для открытого U (С. Кемписти). Исследования точек непрерывности и квазинепрерывности стали важным направлением в топологии и анализе. Используя результаты этих исследований, Д. Монтгомери доказал в работе[14] (1936 г.), что в полной метризуемой полутопологической группе умножение непрерывно (т.е. такая группа является паратопологической).

В последние тридцать лет одним из самых эффективных методов исследований непрерывности операций в группах и квазинеперервности отображений стали топологические игры. В основном используются модификации игры Банаха–Мазура (также часто называемой игрой Шоке) — первой и самой важной топологической игры в истории.

В игру Банаха–Мазура играют два игрока α и β на топологическом пространстве X. На первом ходу игрок α выбирает $U_0 = X$, игрок β выбирает открытое непустое $V_0 \subset U_0$. На n-м ходу игрок α выбирает непустое открытое $U_n \subset V_{n-1}$, игрок β выбирает непустое открытое $V_n \subset U_n$. Игра заканчивается после счетного числа ходов. Игрок α выиграл, если пересечение $\bigcap_n U_n$ непусто.

Фундаментальное значение игры Банаха–Мазура определяется теоремой Банаха–Окстоби[15]: пространство X является бэровским (т.е. обладает свойством Бэра), если и только если у игрока β нет выигрышной стратегии в игре Банаха–Мазура.

Подавляющее большинство изучаемых групп с топологией однородны — правые сдвиги $x \mapsto xg$ (или левые сдвиги $x \mapsto gx$) непрерывны. Такие группы называются право- (лево-) топологическими. Теория однородных пространств — один из больших и хорошо развитых разделов топологии[16]. Одно из направлений исследований однородных пространств и групп с топологией — состоит в выявлении сходства и различий их топологических свойств. Другое направление исследований — выяснение, какие пространства реализуются как ретракты и факторы[17] однородных пространств и групп с топологией из некоторого топологического клас-

[13] *Baire R.* Sur les fonctions de variables reelles // Annali di Matematica Pura ed Applicata (1898-1922). 1899. T. 3, № 1. C. 1—123.

[14] *Montgomery D.* Continuity in topological groups // Bull. Am. Math. Soc. 1936. T. 42. C. 879—882. ISSN 0002-9904. DOI: `10.1090/S0002-9904-1936-06456-6`.

[15] *Oxtoby J. C.* The Banach-Mazur game and Banach category theorem // Contributions to the Theory of Games, Volume III. Princeton University Press, Princeton, NJ, 1957. C. 159—163.

[16] *Arhangel'skii A., Mill J. v.* Topological homogeneity // Recent Progress in General Topology III. Springer, 2014. C. 1—68.

[17] пространство X называется фактором P, если P гомеоморфно $X \times Y$ для некоторого Y

са пространств. Компактные ретракты (σ-компактных) топологических групп это в точности компакты с операцией Мальцева[18]. Не всякий компакт является ретрактом компактного однородного пространства. Любое пространство является фактором некоторого однородного пространства[19].

Важное значение в топологической алгебре имеют пространства со счетным числом Суслина. У компактной топологической группы число Суслина всегда счетно, это вытекает как из существования меры Хаара, так и из диадичности такой группы[20]. Позднее счетное число Суслина (и более сильное свойство ω-клеточности) было найдено у σ-компактных (и даже у более широкого класса линделефовых Σ) топологических групп (М.Г. Ткаченко[21]) и мальцевских пространства (В.В. Успенский[22]).

Объект и предмет исследования

В диссертации изучаются алгебраические структуры с топологией: группы и пространства с операцией Мальцева, универсальные алгебры, однородные пространства и их ретракты. Также изучаются продолжение и факторизация отображений, топологические игры.

Методы исследования

В работе используются как традиционные методы общей топологии, топологической алгебры, теории пространств функций, функционального анализа и теории топологических игр, так и разработанные автором метод продолжения и факторизации раздельно непрерывных отображений и метод использования полуокрестностей диагонали.

Теоретическая и практическая ценность

Диссертация носит теоретический характер. Ее результаты могут быть использованы в общей топологии, топологической алгебре, универсаль-

[18] *Сипачёва О. В.* Компакты с непрерывной операцией Мальцева и ретракты топологических групп // Вестник Московского университета. Серия 1: Математика. Механика. 1991. № 1. С. 33—36.

[19] *Uspenskii V. V.* For any X, the product $X \times Y$ is homogeneous for some Y // Proceedings of the American Mathematical Society. 1983. Т. 87, № 1. С. 187—188.

[20] *Кузъминов В.* О гипотезе П.С. Александрова в теории топологических групп // Докл. АН СССР. Т. 125. 1959. С. 727—729; *Ивановский Л.* Об одной гипотезе ПС Александрова // Доклады Академии наук. Т. 123. Российская академия наук. 1958. С. 785—786.

[21] *Ткаченко М.* О свойстве Суслина в свободных топологических группах над бикомпактами // Математические заметки. 1983. Т. 34, № 4. С. 601—607.

[22] *Успенский В. В.* О непрерывных образах линделёфовых топологических групп // Доклады Академии наук. Т. 285. Российская академия наук. 1985. С. 824—827.

ной алгебре, в топологической динамике, теории функциональных пространств, функциональном анализе.

Степень достоверности и апробация результатов

Все результаты диссертации математически строго доказаны. Они многократно докладывались на семинаре кафедры кафедры общей топологии и геометрии "Научно-исследовательский семинар имени П.С. Александрова", конференциях Ломоносовские чтения, международном Пражском симпозиуме по общей топологии и ее связи с современным анализом и алгеброй (Prague Symposia on General Topology, and its Relations to Modern Analysis and Algebra) в 1996, 2006, 2011, 2016, 2022 годах, международной конференция по топологии и ее приложениям в г. Нафпактос, Греция (International Conference on Topology and its Applications, Nafpaktos, Greece) в 2006, 2010, 2014 годах, международной 30-й летней конференции по топологии и ее приложениям в г. Голуэй, Ирландия (30th Summer Conference on Topology and its Applications, Galway, Ireland) в 2015 году, международная конференции "Теоретико-множественная топология и топологическая алгебра", посвященной 80-летию профессора Александра Владимировича Архангельского в Москве в 2018 году, международной 36-й летней топологической конференции в Вене, Австрия (36th Summer Topology Conference, Vienna, Austria) в 2022 году.

Цели и задачи диссертации

Главными целями диссертации являются:

(1) получение достаточных условий, при которых в группах с топологией происходит усиление непрерывности операций, в частности, при которых CHART, паратопологические и полутопологические группы являются топологическими группами;

(2) характеризация отображений произведений пространств, которые допускают раздельно непрерывное продолжение на произведение стоун–чеховских расширений этих пространств;

(3) выяснение условий при которых универсальная алгебра[23] с раздельно непрерывными операциями вкладывается в произведение метризуемых универсальных алгебр;

(4) исследование пространств с операцией Мальцева и ретрактов топологических групп;

[23]рассматриваются универсальные алгебры только с конечным числом операций

(5) исследование классов бэровских пространств, таких что для пространств из этих классов слабая непрерывность групповых операций автоматически влечет сильную их непрерывность;

(6) для разных классов $\mathcal{P}$ топологических пространств, выяснить какие пространства реализуются как ретракты и факторы однородных пространств и групп с топологией из класса $\mathcal{P}$;

(7) исследование топологических свойства групп с топологией, мальцевских пространств, однородных пространств, их ретрактов, близкие к компактности, метризуемости и экстремальной несвязности.

Научная новизна

Все основные результаты диссертации являются новыми и получены автором самостоятельно.

Некоторые работы автора написаны в соавторстве и содержат важные и принципиальные результаты, полученные в результате тесной совместной работы. Эти совместные результаты, включенные в диссертацию, либо выводятся из более общих утверждений, доказанных в диссертации, либо доказываются с помощью новых методов, развитых автором, они содержатся в разделах 5.4 и 5.5: примеры 5.35 [14] и 5.37 [8], теоремы 5.41, 5.43 и 5.50 [13]. Основные результаты состоят в следующем:

(1) получены достаточные условия, при которых в группах с топологией происходит усиление непрерывности операций, в частности, когда CHART, паратопологические и полутопологические группы являются топологическими группами;

(2) охарактеризованы отображения произведений псевдокомпактных пространств, которые допускают раздельно непрерывное продолжение на произведение стоун–чеховских расширений этих пространств;

(3) найдены условия, при которых универсальная алгебра с раздельно непрерывными операциями вкладывается в произведение метризуемых универсальных алгебр;

(4) псевдокомпактные пространства с операцией Мальцева охарактеризованы как ретракты топологической группы; исследованы псевдокомпактные пространства с раздельно непрерывной операцией Мальцева; построены мальцевские пространства не являющиеся ретрактами топологических групп;

(5) найдены широкие классы бэровских пространств, определяемые с помощью топологических игр и расположения диагонали в квадрате, таких что для пространств из этих классов слабая непрерывность групповых операций автоматически влечет сильную их непрерывность;

(6) для нескольких классов пространств $\mathcal{P}$, доказаны утверждения вида: для $X \in \mathcal{P}$ существует пространство Y, так что произведение $X \times Y$ однородно и принадлежит $\mathcal{P}$; исследованы однородные подпространства произведений экстремально несвязных пространств;

(7) для групп с топологией, мальцевских пространств, их ретрактов найдены условия, влекущие счетность числа Суслина, диагональ типа G_δ, метризуемость.

Положения, выносимые на защиту

(1) достаточные условия, при которых в группах с топологией из непрерывности групповых операций в слабом смысле вытекает их непрерывность в более сильном смысле, в частности, условия, при которых CHART, паратопологические и полутопологические группы являются топологическими группами;

(2) характеризация отображений произведений пространств, которые допускают раздельно непрерывное продолжение на произведение стоун–чеховских расширений этих пространств;

(3) условия, при которых универсальная алгебра с раздельно непрерывными операциями вкладывается в произведение метризуемых универсальных алгебр с раздельно непрерывными операциями;

(4) характеризация псевдокомпактных пространств с операцией Мальцева как ретрактов топологических групп; характеризация раздельно непрерывных операций Мальцева на псевдокомпактных пространствах, которые продолжаются до раздельно непрерывных операций Мальцева на стоун–чеховские расширения; построение мальцевского пространства не ретракта группы;

(5) классы бэровских пространств, определяемые с помощью топологических игр и расположения диагонали в квадрате, таких что для пространств из этих классов слабая непрерывность групповых операций автоматически влечет сильную их непрерывность;

(6) для нескольких классов пространств найдены однородные произведения из этих классов, которые содержат в качестве сомножителя

любое данное пространство из этого класса; исследованы однородные подпространства произведений экстремально несвязных пространств;

(7) найдены условия на группы с топологией, мальцевские пространства, их ретракты, влекущие счетность число Суслина, диагональ типа G_δ, метризуемость.

Содержание работы

Работа состоит из введения и пяти глав.

Во **введении** приводится обзор результатов, полученных ранее другими авторами по теме исследования диссертации, а также смежным направлениям исследований, и кратко излагаются результаты диссертации.

В **первой главе** обозначения, терминология и предварительные сведения. Так же дается определение топологических игр, базовые свойства и доказываются некоторые утверждения, которые используются далее.

Вторая глава посвящена исследованию раздельно непрерывных отображений, их факторизаций, когда они допускают раздельно непрерывное продолжение на произведение стоун–чеховских расширений пространств. Даются достаточные условия для универсальной алгебры, когда она может быть вложена в произведение метризуемых универсальных алгебр.

Сначала исследуется продолжения раздельно непрерывных функций на произведении двух пространств. Для пространства X через $C_p(X)$ обозначается непрерывные функции на X в топологии поточечной сходимости.

Теорема 1 (см. теорему 2.7). *Пусть X и Y есть псевдокомпактные пространства, $\Phi : X \times Y \to \mathbb{R}$ раздельно непрерывная функция,*

$$\varphi : X \to C_p(Y),\ \varphi(x)(y) = \Phi(x, y).$$

Следующие условия эквивалентны: (1) существует плотное типа G_δ подмножество $D \subset Y = \overline{D}$ так что Φ непрерывна в каждой точке $(x, y) \in X \times D$; (2) функция Φ квазинепрерывна; (3) Φ продолжается до раздельно непрерывной функции на $\beta X \times \beta Y$; (4) $\varphi(X)$ имеет компактное замыкание в $C_p(Y)$; (5) $\varphi(X)$ компактно.

Пара пространств X и Y образуют *пару Гротендика*, если замыкание любого непрерывного образа X в $C_p(Y)$ компактно, то есть выполняется пункт (4) теоремы 1 для всех раздельно непрерывных функций Φ. Для пары пространств X и Y выполняется условие Нимиоки [64], если выполняется пункт (1) теоремы 1 для всех раздельно непрерывных функций Ф. Теорема 1 показывает, что эти два свойства эквивалентны для пар псевдокомпактных пространств, что позволяет объединить исследование этих двух свойств, которые в общем случае изучаются отдельно. Важно следующее следствие теоремы 1.

Следствие 2 (см. теорему 2.17). *Для псевдокомпактных пространств X и Y, любая непрерывная функция на $X \times Y$ продолжается до раздельно непрерывной функции на $\beta X \times \beta Y$.*

Теорема Гликсберга[24] гласит что любая непрерывная функция на $X \times Y$ продолжается до непрерывной функции на $\beta X \times \beta Y$ если и только если $X \times Y$ псевдокомпактно. Теорему Гротендика[25] о предкомпактных подмножествах функциональных пространств можно сформулировать так: пара счетно компактных пространств образуют пару Гротендика. Из теоремы Гротендика и теоремы 1 вытекает что для счетно компактных X и Y любая раздельно непрерывная функция на $X \times Y$ продолжается до раздельно непрерывной функции на $\beta X \times \beta Y$. Таким образом, следствие 2 занимает промежуточное место между теоремами Гликсберга и Гротендика.

Следствие 2 позволило в теореме Д.Грант[26] — паратопологическая псевдокомпактная в квадрате группа является топологической группой, избавится от условия о псевдокомпактности квадрата, достаточно псевдокомпактности самой группы. Многомерный аналог следствия 2, следствие 5, позволил в теореме О.Сипачевой[27] — мальцевское пространство, куб которого псевдокомпактен, является ретрактом группы, заменить условие псевдокомпактности куба на псевдокомпактность самого пространства (Теорема 5.50).

Пространство X называется пространством *pc-Гротендика*[28], если любое псевдокомпактное подпространство $C_p(X)$ компактно. Для псевдокомпактного X, X пространство pc-Гротендика если для любого псевдокомпактного Y пара (X, Y) является парой Гротендика (Предложе-

[24] *Glicksberg I.* Stone-Cech Compactifications of Products // Transactions of the American Mathematical Society. 1959. Т. 90, № 3. С. 369—382. DOI: doi:10.2307/1993177.

[25] *Grothendieck A.* Criteres de Compacite dans les Espaces Fonctionnels Generaux // American Journal of Mathematics. 1952. Т. 74. С. 168.

[26] *Grant D. L.* The Wallace problem and continuity of the inverse in pseudocompact groups // General Topology and Applications. CRC Press, 1991. С. 93—114.

[27] *Сипачёва О. В.* Компакты с непрерывной операцией Мальцева и ретракты топологических групп // Вестник Московского университета. Серия 1: Математика. Механика. 1991. № 1. С. 33—36.

[28] *Arhangel'skii A.* On a theorem of Grothendieck in Cp-theory // Topology and its Applications. 1997. Т. 80, № 1. С. 21—41. ISSN 0166-8641. DOI: 10.1016/S0166-8641(96)00167-8. Memory of P.S. Alexandroff.

ния 2.2.7 и 2.2.8). Ясно, (X, X) пара Гротендика, если X является псевдокомпактным пространством pc-Гротендика. Псевдокомпактные пространства из ниже перечисленных классов пространств являются пространствами pc-Гротендика (Предложение 2.2.9):

> счетно компактные пространства; пространства счетной тесноты; сепарабельные пространства; k-пространства; пространства с плотным σ-компактным подпространством.

Затем эти результаты используются для исследования раздельно непрерывных отображений на произведении нескольких пространств. Для функции $\Phi : \prod_{i=1}^{n} X_i \to \mathbb{R}$, $\bar{x} = (x_1, ..., x_n) \in \prod_{i=1}^{n} X_i$ и $1 \leq i < j \leq n$ обозначим

$$(\Phi)^{\bar{x}}_{;i,j} : X_i \times X_j \to \mathbb{R},\ (x, y) \mapsto \Phi(x_1, ..., x_{i-1}, x, x_{i+1}, ..., x_{j-1}, y, x_{j+1}, ..., x_n).$$

Функция Φ называется *2-β-продолжаемой* если любые функции вида $(\Phi)^{\bar{x}}_{;i,j}$ раздельно непрерывно продолжаются на $\beta X_i \times \beta X_j$, Функция Φ называется 2-*квазинепрерывной* если любые функции вида $(\Phi)^{\bar{x}}_{;i,j}$ квазинепрерывны.

Теорема 3 (Теорема 2.15). *Пусть X_1, X_2, ...,X_n псевдокомпактные пространства, $\Phi : \prod_{i=1}^{n} X_i \to \mathbb{R}$ — раздельно непрерывная функция. Тогда следующие условия эквивалентны: (1) функция Φ продолжается до раздельно непрерывной функции на $\prod_{i=1}^{n} \beta X_i$; (2) функция Φ 2-β-продолжаемая; (3) функция Φ 2-квазинепрерывная.*

Теорема 4 (Следствие 2.10). *Пусть X_1, X_2, ... , X_n — псевдокомпактные пространства и X_i — пространство pc-Гротендика для $i < n$. Тогда любая раздельно непрерывная функция Φ на произведение $\prod_{i=1}^{n} X_i$ продолжается до раздельно непрерывной функции на произведение $\prod_{i=1}^{n} \beta X_i$ стоун–чеховских расширений.*

Отметим следующее важные следствия теорем 3 и 4.

Следствие 5 (Теорема 2.17). *Любая непрерывная функция Φ на произведении $\prod_{i=1}^{n} X_i$ псевдокомпактных пространств продолжается до раздельно непрерывной функции на произведении $\prod_{i=1}^{n} \beta X_i$ стоун–чеховских расширений.*

Теорема Гликсберга[29] характеризует те X_i, для которых Φ продолжается до непрерывной функции — произведение $\prod_{i=1}^{n} X_i$ псевдокомпактно.

[29] *Glicksberg I.* Stone-Cech Compactifications of Products // Transactions of the American Mathematical Society. 1959. Т. 90, № 3. С. 369—382. DOI: `doi:10.2307/1993177`.

Следствие 6. *Любая раздельно непрерывная функция Φ на произведении $\prod_{i=1}^n X_i$ счетно компактных пространств продолжается до раздельно непрерывной функции на произведении $\prod_{i=1}^n \beta\, X_i$ стоун–чеховских расширений.*

Отметим, что следствие 6 нельзя усилить до условия, что X_i псевдокомпактны.

Отображение $f : X^n \to X$ называется *операцией*. Множество X с набором операций $f_1, f_2, ..., f_m$ называется *универсальной алгеброй*[30] $\mathbf{X} = (X, f_1, ..., f_m)$. К универсальным алгебрам относятся группы и мальцевские пространства.

Теорема 7 (Следствие 2.32)**.** *Пусть $\mathbf{X} = (X, f_1, f_2, ..., f_m)$ есть псевдокомпактная универсальная алгебра с раздельно непрерывными операциями. Предположим выполняется одно из перечисленных ниже условий: (1) операции $\mathbf{X}$ 2-квазинепрерывны; (2) операции $\mathbf{X}$ непрерывны; (3) (X, X) есть пара Гротендика; (4) X есть пространство pc-Гротендика. Тогда операции $\mathbf{X}$ продолжаются до раздельно непрерывных операций на $\beta\, X$ и $\mathbf{X}$ гомоморфно вкладывается в компактную универсальную алгебру $\mathbf{Y} = (\beta\, X, \hat{f}_1, \hat{f}_2, ..., \hat{f}_m)$ с раздельно непрерывными операциями.*

Получены теоремы о факторизации раздельно непрерывных функций.

Теорема 8 (Теорема 2.35)**.** *Пусть X_1, X_2, ..., X_n есть компактные пространства, у пространства X_i калибр ω_1 для $i = 1, ..., n-1$, $X = \prod_{i=1}^n X_i$ и Y есть сепарабельное метризуемое пространство, $\Phi : X \to Y$ раздельно непрерывное отображение. Тогда отображение Φ sc-факторизуется через метризуемые компакты, то есть существуют метризуемые компакты $\widetilde{X}_1$, $\widetilde{X}_2$, ..., $\widetilde{X}_n$, непрерывные отображения $\delta_i : X_i \to \widetilde{X}_i$ для $i = 1, ..., n$ и раздельно непрерывное отображение $\widetilde{F} : \prod_{i=1}^n \widetilde{X}_i \to Y$ так что*

$$\Phi = \widetilde{\Phi} \circ \prod_{i=1}^n \delta_i.$$

Если функция Φ непрерывна, то условие о калибре ω_1 пространств X_i можно убрать. Но для раздельно непрерывных функций это условие необходимо.

Теорема 9 (см. теорему 2.39)**.** *Пусть $\mathbf{X} = (X, f_1, f_2, ..., f_m)$ есть универсальная компактная алгебра с раздельно непрерывными операциями.*

[30] рассматриваются универсальные алгебры только с конечным числом операций

Предположим, что X с калибром ω_1. Тогда алгебра $\mathbf{X}$ гомоморфно вкладывается в произведение универсальных метризуемых алгебр с раздельно непрерывными операциями.

Из теорем 7 и 9 можно получить следствие, какие псевдокомпактные универсальные алгебры вкладываются в произведение метризуемых универсальных алгебр с раздельно непрерывными операциями (Теорема 2.40).

В **3-ей главе** изучаются классы бэровских пространств, которые определяются с помощью топологических игр и полуокрестностей диагонали.

Подмножество $P \subset X \times X$ назовем *полуокрестностью диагонали*, если $P(x) = \{y \in X : (x, y) \in P\}$ есть окрестность точки x для всех $x \in X$. Для $\widetilde{\Delta} \in \{\Delta, \Delta_h, \Delta_s\}$, пространство X называется $\widetilde{\Delta}$-тучным, если для любой полуокрестности диагонали P существует открытое непустое $W \subset X$, так что выполняется условие $(\widetilde{\Delta})$:

(Δ) $W \times W \subset \overline{P \cap (W \times W)}$;

(Δ_h) $W \subset \overline{\{x : (x, y) \in P\}}$ для всех $y \in W$;

(Δ_s) $W \subset \overline{\{x : \{x\} \times W \subset P\}}$.

Пространство X называется $\widetilde{\Delta}$-бэровским, если каждое его непустое открытое подпространство является $\widetilde{\Delta}$-тучным. В следующей главе эти классы пространств используются для исследования непрерывности операций в группах. В этой главе главная цель — выяснить какие пространства принадлежат перечисленным классам. Для этого интенсивно используются топологические игры. Эти игры являются модификациями игры $BM(X)$ Банаха–Мазура.

Игра $\widetilde{BM}(X)$ является модификацией игры $BM(X)$, если на nм ходу игрок β выбирает открытое $V_n \subset U_n$ и еще что то, игрок α выбирает открытое $U_n \subset V_n$. После счетного числа ходов, игрок α выиграл, если $\bigcap_n U_n \neq \varnothing$ и еще дополнительно некоторое условие $\mathfrak{C}_{\widetilde{BM}}$, зависящее от игры. Определяются еще две модификации игры $\widetilde{BM}(X)$: (1) игра $\widetilde{MB}(X)$, которая отличается от игры $\widetilde{BM}(X)$ первым ходом — игрок α выбирает непустое открытое $U_0 \subset X$; (2) и игра $\widetilde{BM}^*(X)$, которая отличается от игры $\widetilde{MB}(X)$ условием выигрыша — игрок α выиграл если либо $\bigcap_n U_n = \varnothing$ либо выполняется условие $\mathfrak{C}_{\widetilde{BM}}$. Эти три игры определяют три класса пространств: $\widetilde{\Gamma}$-бэровские, $\widetilde{\Gamma}$-тучные и $\widetilde{\Gamma}$-пространства.

Пространство X называется $\widetilde{\Gamma}$-*бэровским*, если у игрока β нет выигрышной стратегии в игре $\widetilde{BM}(X)$.

Пространство X называется $\widetilde{\Gamma}$-*тучным*, если у игрока β нет выигрышной стратегии в игре $\widetilde{MB}(X)$.

Пространство X называется $\widetilde{\Gamma}$-*пространством*, если у игрока α есть выигрышной стратегия в игре $\widetilde{BM}^*(X)$.

При этом, тучное $\widetilde{\Gamma}$-пространство является $\widetilde{\Gamma}$-тучным и бэровское $\widetilde{\Gamma}$-пространство является $\widetilde{\Gamma}$-бэровским. В приложениях рассматриваемых игр используются $\widetilde{\Gamma}$-бэровские пространства, но автору не известны примеры $\widetilde{\Gamma}$-бэровских пространств не бэровских $\widetilde{\Gamma}$-пространств. Находить $\widetilde{\Gamma}$-пространства легче, чем $\widetilde{\Gamma}$-бэровские пространства.

Рассматривается восемь игр, каждая из которых определяет три класса пространств: Г-бэровские, Г-тучные и Г-пространства, где

$$\Gamma \in \{\Gamma_f^{BM}, \Gamma_r^{BM}, \Gamma_p^{BM}, \Gamma_o^{BM}, \Gamma_{o,k}^{OD}, \Gamma_{o,l}^{OD}, \Gamma_{p,k}^{OD}, \Gamma_{p,l}^{OD}\}.$$

Наиболее важны игры $BM_f(X)$, $OD_{p,l}(X)$ и $OD_{o,l}(X)$, которые определяют Γ_f^{BM}-бэровские, $\Gamma_{p,l}^{OD}$-бэровские и $\Gamma_{o,l}^{OD}$-бэровские пространства.

Пусть $\mathcal{P}_k$ ($\mathcal{P}_c$) есть наименьший класс пространств, который

- содержит локально компактное пространства, полные по Чеху пространства, p-пространства и сильно Σ-пространства;
- замкнут относительно произвольных (счетных) произведений;
- переходу к открытым подпространствам.

Для $\Gamma \in \{\Gamma_f^{BM}, \Gamma_{p,l}^{OD}, \Gamma_{o,l}^{OD}\}$, если регулярное бэровское пространство X принадлежит классу пространств, описанных в пункте (Г), то X является Г-бэровским.

(Γ_f^{BM}) метризуемые пространства, σ-пространства.

($\Gamma_{p,l}^{OD}$) наименьший класс пространств, который – содержит счетно компактные пространства, Σ-пространства и $w\Delta$-пространства; – замкнут относительно произведений на пространства из класса $\mathcal{P}_c$; – переходу к открытым подпространствам.

($\Gamma_{o,l}^{OD}$) наименьший класс пространств, который – содержит псевдокомпактные пространства, Σ-пространства и $w\Delta$-пространства; – замкнут относительно произведений на пространства из класса $\mathcal{P}_k$; – переходу к открытым подпространствам.

Важнейшие для исследования непрерывности в группах свойства пространств, определяемые с помощью полуокрестностей диагонали, это Δ-бэровские, Δ_h-бэровские и Δ_s-бэровские пространства. Исследование этих классов производится в основном с помощью топологических игр:

- Γ_f^{BM}-бэровское пространство является Δ_s-бэровским пространством;
- $\Gamma_{p,l}^{OD}$-бэровское пространство является Δ_h-бэровским пространством;
- $\Gamma_{o,l}^{OD}$-бэровское пространство является Δ-бэровским пространством.

В **четвертой главе** выясняют условий, когда в группах с топологиях и пространствах с операцией Мальцева происходит усиление непрерывности операций, в частности, когда паратопологические и полутопологические группы являются топологическими группами. Исследования непрерывности операций проводятся перечисленными ниже тремя методами. Наиболее универсальный это второй метод. Однако у каждого метода есть приложения, которые нельзя получить другими методами.

1-ый метод. Продолжение операций с X на βX. (Раздел 4.2) Данный метод основан на том что группы и мальцевские пространства являются универсальными алгебрами и применением теоремы 7 и других результатов из второй главы.

В рамках этого подхода доказано, что если G есть псевдокомпактная полутопологическая группа и для G выполняется одно из условий, перечисленных ниже, то G топологическая группа: (1) умножение в G квазинепрерывно; (2) умножение в G непрерывно (т.е. G является паратопологической группой); (3) (G, G) есть пара Гротендика (см. теоремы 4.2 и 4.3).

Пусть X есть псевдокомпактное пространство с раздельно непрерывной операцией Мальцева $\Phi : X^3 \to X$. Если для X и Φ выполняется одно из условий, перечисленных ниже, то Φ продолжается до раздельно непрерывной операции Мальцева $\widetilde{\Phi} : (\beta X)^3 \to \beta X$: (1) Φ непрерывна; (2) Φ 2-квазинепрерывна; (3) (X, X) есть пара Гротендика (см. теоремы 4.5 и 4.6).

Также в разделе 4.2 получена теорема о усиления непрерывности действия группы.

Теорема 10 (Теорема 4.1). *Пусть G есть псевдокомпактная группа с топологией, X — пространство, $\alpha : G \times X \to X$ есть раздельно непрерывное транзитивное действие G на X, $gx = \alpha(g, x)$ для $g \in G$ и $x \in X$. Следующие условия эквивалентны:*

(1) действие α непрерывно;

(2) действие α квазинепрерывно;

(3) действие α продолжается до раздельно непрерывного отображения $\hat{\alpha} : \beta G \times \beta X \to \beta X$;

(4) *действие α продолжается до непрерывного отображения $\hat{\alpha} : \beta\, G \times \beta\, X \to \beta\, X$.*

2-ой метод. Подклассы бэровских пространств, определяемые с помощью полуокрестностей диагонали. (Раздел 4.7) Отображение $f : X \to Y$ называется *слабо непрерывным* (в точке $x \in X$), если внутренность $f^{-1}(U)$ непуста для открытого $U \subset Y$, $U \cap f(X) \neq \varnothing$ ($f(x) \in U$). Квазинепрерывные отображения слабо непрерывны.

Для группы G с топологией обозначим левый сдвиг $\lambda_g : G \to G$, $x \mapsto gx$, топологический центр $\Lambda(G) = \{g \in G : \lambda_g$ непрерывно$\}$ и $\Lambda_f(G) = \{g \in G : \lambda_g$ слабо непрерывно$\}$.

Пусть G есть правотопологическая группа. Если для G выполняется одно из условий, перечисленных ниже, то G топологическая группа:

(R_1) G является Δ-бэровским пространством, $\Lambda_f(G) \cap \Lambda_f(G)^{-1}$ плотно в G и умножение $(g, h) \mapsto gh$ слабо непрерывно в единице группы (теорема 4.29);

(R_2) G является Δ_h-бэровским пространством, $\Lambda(G) \cap \Lambda(G)^{-1}$ плотно в G и взятие обратного элемента $g \mapsto g^{-1}$ слабо непрерывно в единице группы (теорема 4.31);

(R_3) G является Δ_s-бэровским пространством, $\Lambda_f(G) \cap \Lambda_f(G)^{-1}$ плотно в G (теорема 4.32).

Отсюда получаем, что если G есть полутопологическая группа и для G выполняется одно из условий, перечисленных ниже, то G топологическая группа:

(S_1) G является Δ-бэровским пространством и умножение $(g, h) \mapsto gh$ слабо непрерывно[31];

(S_2) G является Δ_h-бэровским пространством и взятие обратного элемента $g \mapsto g^{-1}$ слабо непрерывно;

(S_3) G является Δ_s-бэровским пространством;

(S_4) G является Δ-бэровской паратопологической группой;

(S_5) G является Δ_h-бэровской квазитопологической группой.

[31] *Moors W. B.* Some Baire semitopological groups that are topological groups // Topology and its Applications. 2017. Т. 230. С. 381—392. ISSN 0166-8641. DOI: `10.1016/j.topol.2017.08.042`.

Большинство утверждений вида «Если G есть полутопологическая группа и $G \in \mathcal{P}$, то G есть топологическая группа» можно доказать по схеме: (1) доказываем, что если $G \in \mathcal{P}$, то G является Δ-бэровским пространством; (2) доказываем, что если $G \in \mathcal{P}$ и отображение $f : G \times G \to S$ раздельно непрерывно, то f квазинепрерывно; (3) далее применяем (S_1).

Большинство утверждений вида «Если G есть паратопологическая группа и $G \in \mathcal{P}$, то G есть топологическая группа можно» доказать по схеме: (1) доказываем, что если $G \in \mathcal{P}$, то G является Δ-бэровским пространством; (2) далее применяем (S_4).

Из (R_1) и (R_3) вытекает теорема Намиоки[32] и теорема Морса[33]: если CHART группа G метризуема или умножение слабо непрерывно в единице, то G является топологической группой.

Также получено обобщение теоремы Намиоки для малых кардиналов (Следствие 4.33): если τ кардинал, выполняется $MA(\tau)$ (аксиома Мартина для кардинала τ), вес CHART группы G не превосходит τ, то G является топологической группой.

3-ий метод. Свойства типа компактности квадрата группы. (Раздел 4.3) Если G есть T_1 паратопологическая группа, то G является непрерывным гомоморфным образом некоторой топологической группы, которая замкнуто вкладывается в G^2 (Следствие 4.12). Используя этот факт, доказываются что если G есть T_1 паратопологическая группа и либо (1) G^2 счетно компактно либо (2) G бэровская и G^2 линделефово, то G топологическая группа (см. Теорема 4.13).

Отметим, что в последнем утверждении нельзя ограничатся требованием, что G линделефова. Примером служит прямая Зонгенфрея, стандартный пример паратопологической не топологической линделефовой бэровской группы. Прямая Зонгенфрея в квадрате не линделефова.

В **пятой главе** изучаются топологические свойства групп, ретрактов групп, мальцевских пространств, однородных пространств. Выясняется, какие пространства могут быть реализованы как сомножители в однородных произведениях, ретракты однородных пространств, групп.

Однородность произведения пространств. (Раздел 5.2)

Теорема 11 (Теорема 5.8). *Пусть $\mathcal{P}$ есть один из ниже перечисленных классов пространств: (1) σ-компактные пространства; (2) линделефо-*

[32] *Namioka I.* Right topological groups, distal flows, and a fixed-point theorem // Mathematical systems theory. 1972. Т. 6, № 1. С. 193—209, Theorem 2.1.

[33] *Moors W. B.* Fragmentable mappings and CHART groups // Fundamenta Mathematicae. 2016. Т. 234. С. 191—200, Proposition 3.2.

вы Σ-пространства; (3) $\mathcal{K}$-аналитические пространства; (4) пространства, линделефовые в конечных степенях; (5) пространства, паракомпактные в конечных степенях; (6) пространства, имеющие в конечных степенях счетную тесноту; (7) счетные пространства; (8) ω-ограниченные пространства; (9) секвенциально компактные пространства; (10) тотально счетно компактные пространства; (11) p-компактные пространства ($p \in \omega^*$); (12) секвенциально p-компактные пространства ($p \in \omega^*$); (13) пространства, счетно компактные в счетной степени; (14) пространства, псевдокомпактные в счетной степени; (15) метризуемые пространства; (16) кружевные пространства; (17) паракомпактные σ-пространства.

Если $X \in \mathcal{P}$, то существует такое однородное пространство $Y \in \mathcal{P}$, так что $X \times Y$ гомеоморфно Y.

Следствие 12 (Следствие 5.9)**.** *Пусть X компактное пространство и $\mathcal{P}$ есть один из ниже перечисленных классов пространств: (1) σ-компактные пространства; (2) счетно компактное пространства. Существует пространство $Y \in \mathcal{P}$, так что $X \times Y$ однородно.*

Моторов[34] построил метризуемый компакт X, так что $X \times Y$ не однородно для любого компакта Y. Этот пример показывает, что условия (1) и (2) в следствии 12 нельзя объединить.

Следствие 13 (Следствие 5.10)**.** *Пусть X сепарабельное метризуемое пространство и $\mathcal{P}$ есть один из ниже перечисленных классов пространств: (1) линделефовы Σ-пространства; (2) метризуемые пространства. Существует пространство $Y \in \mathcal{P}$, так что $X \times Y$ однородно.*

Метризуемое сепарабельное сильно жесткое пространства Гроота X[35] обладает таким свойством: если Y сепарабельное метрической пространство, то $X \times Y$ не однородное пространство (пример 5.12). Этот пример показывает, что условия (1) и (2) в следствии 13 нельзя объединить.

Используя теорему 11 строятся следующие примеры.

Пример 14. (1) Существует однородное пространство счетной тесноты, которое не является p-секвенциальным для любого $p \in \beta\,\omega \setminus \omega$.

(2) Существуют два однородных счетно компактных пространства X и Y, так что произведение $X \times Y$ не псевдокомпактно.

[34] *Архангельский А. В.* Топологическая однородность. Топологические группы и их непрерывные образы // Успехи математических наук. 1987. Т. 42, 2 (254). С. 69—105.

[35] *Groot J. de.* Groups represented by homeomorphism groups I // Mathematische Annalen. 1959. Т. 138, № 1. С. 80—102.

Однородные подпространства произведений. (Раздел 5.2)

Пусть X однородное пространство.

(a) Предположим, что для X выполняется одно из перечисленных условий:

  (1) X вкладывается в Y^3 для некоторого F-пространства Y (теорема 5.20);

  (2) (CH) X вкладывается в Y^n для некоторого $\beta\omega$ пространства Y и $n \in \omega$ (теорема 5.18).

  Тогда все компактные подпространства X конечны.

(b) (CH) Если X вкладывается в Y^ω для некоторого $\beta\omega$ пространства Y, то все компактные подпространства X метризуемы (теорема 5.16).

(c) Если X компактно и X вкладывается в Y^n для некоторого нульмерного F-пространства Y и $n \in \omega$, то X конечно (теорема 5.22).

Топологические свойства групп с топологией (Разделы 5.3 и 5.6)

CHART группа метризуема, если у нее счетный π-характер (следствие 5.30) или (в предположении континуум гипотезы) группа секвенциальна компактна (следствие 5.32).

Теорема 15 (Теорема 5.54)**.** *Пусть X есть линделефово Σ-пространство. Если X принадлежит одному из перечисленных ниже классов пространств, то X ω-клеточно:*

(1) топологические группы (М.Г. Ткаченко[36]);

(2) мальцевские пространства (В.В. Успенский[37]);

(3) пространства с раздельно непрерывной операцией Мальцева (Е.А. Резниченко, В.В. Успенский [13]);

(4) паратопологические группы[38];

(5) квазитопологические группы;

(6) полутопологические группы, которые вкладываются в произведение паратопологических и квазитопологических групп.

[36] *Ткаченко М.* О свойстве Суслина в свободных топологических группах над бикомпактами // Математические заметки. 1983. Т. 34, № 4. С. 601—607.

[37] *Успенский В. В.* О непрерывных образах линделёфовых топологических групп // Доклады Академии наук. Т. 285. Российская академия наук. 1985. С. 824—827.

[38] *Arhangel'skii A., Tkachenko M.* Topological Groups and Related Structures. Atlantis Press, 2008. DOI: `10.2991/978-94-91216-35-0`.

Топологические свойства мальцевских пространств и ретрактов топологических групп (Разделы 5.4 и 5.5)

Псевдокомпактное мальцевское пространство является ретрактом топологической группы. Не все мальцевские пространства являются ретрактами топологических групп. Регулярные Σ-пространства со счетным экстендом (в частности, линделефовы Σ-пространства) с раздельно непрерывной операцией Мальцева являются ω-клеточными пространствами. Если на псевдокомпактном пространстве X есть раздельно непрерывная 2-квазинепрерывная операция Мальцева, то стоун–чеховское расширение βX является компактом Дугунжи.

Используя теоремы о ретрактах топологических групп, строятся примеры топологических групп (раздел 5.4).

Пример 16. (1) Существует линделефова топологическая группа с числом Суслина 2^ω.

(2) Существует сепарабельная не $\mathbb{R}$-факторизуемая топологическая группа.

Публикации

Основные результаты диссертации опубликованы в 17 работах автора, из которых 17 опубликованы в рецензируемых научных изданиях, рекомендованных для защиты в диссертационном совете МГУ по специальности. Всего у автора 31 работа, близкие к теме диссертации.

Структура и объем работы

Диссертация состоит из введения, четырех глав и заключения, главы разбиваются на разделы и подразделы. Текст диссертации изложен на 236 страницах. Список литературы содержит 149 наименований.

Заключение

Основные результаты работы заключаются в следующем:

- Получены достаточных условий, когда в группах с топологиях происходит усиление непрерывности операций, в частности, когда CHART, паратопологические и полутопологические группы являются топологическими группами.

- Характеризованы раздельно непрерывные отображения произведений псевдокомпактных пространств, которые допускают раздельно непрерывное продолжение на произведение стоун–чеховских расширений пространств.

- Найдены условия, когда компактные универсальная алгебра с раздельно непрерывными операциями вкладывается в произведение метризуемых универсальных алгебр.

- Псевдокомпактные пространства с операцией Мальцева характеризованы как ретракты топологической группы. Исследованы псевдокомпактные пространства с раздельно непрерывной операцией Мальцева. Построены мальцевские пространство не ретракты групп.

- Исследованы подклассы класса бэровских пространств, влекущие непрерывность в группах с топологией.

- Для нескольких классов пространств, найдены однородные произведения, в которых в качестве сомножителя реализуется любое пространство из этого класса, исследованы однородные подпространства произведений экстремально несвязных пространств.

- Найдены условия для групп с топологией, мальцевских пространств, их ретрактов, влекущие счетное число Суслина, диагональ типа G_δ, метризуемость.

Результаты диссертации могут найти применение в общей топологии, топологической алгебре, анализе, функциональном анализе, топологической динамике.

Благодарность

Автор выражает глубокую благодарность своему учителю А.В. Архангельскому за то что он вдохновлял и направлял научную работу автора в течение многих лет, внимание и поддержку.

Автор благодарен всем сотрудникам кафедры общей топологии за творческую и доброжелательную атмосферу на кафедре, всем коллегам.

Автор благодарен Ольге Викторовне Сипачевой, соавтору многих работ, за внимание и помощь.

Автор благодарен Надежде Валерьевне Губиной за всемерную поддержку.

Публикации автора по теме диссертации

Статьи в рецензируемых научных изданиях, рекомендованных для защиты в диссертационном совете МГУ по специаль-

ности 1.1.3 «Геометрия и топология» и входящих в базы цитирования Scopus, Web of Science и RSCI

1. *Reznichenko E.* Almost paratopological groups // Topology and its Applications. — 2023. — Т. 338. — С. 108673. — DOI: `10.1016/j.topol.2023.108673`. —
Журнал индексируется в *Scopus, WoS*. Импакт фактор: *SJR 0.387, JCR 0.583*.
2. *Reznichenko E.* Classes of Baire spaces defined by topological games // Topology and its Applications. — 2023. — Т. 329. — С. 108377. — DOI: `10.1016/j.topol.2022.108377`. —
Журнал индексируется в *Scopus, WoS*. Импакт фактор: *SJR 0.387, JCR 0.583*.
3. *Reznichenko E.* Metrizability of CHART groups // Topology and its Applications. — 2023. — Т. 326. — С. 108408. — DOI: `10.1016/j.topol.2023.108408`. —
Журнал индексируется в *Scopus, WoS*. Импакт фактор: *SJR 0.387, JCR 0.583*.
4. *Reznichenko E.* Extension of mappings from the product of pseudocompact spaces // Topology and its Applications. — 2022. — Т. 322. — С. 108329. — ISSN 0166-8641. — DOI: `10.1016/j.topol.2022.108329`. —
Журнал индексируется в *Scopus, WoS*. Импакт фактор: *SJR 0.387, JCR 0.583*.
5. *Reznichenko E.* Functions on products of pseudocompact spaces // Topology and its Applications. — 2022. — Февр. — Т. 307. — С. 107935. — DOI: `10.1016/j.topol.2021.107935`. —
Журнал индексируется в *Scopus, WoS*. Импакт фактор: *SJR 0.387, JCR 0.583*.
6. *Резниченко Е.* Непрерывность обратного в группах // Вестн. Моск. ун-та. Сер. 1. Матем., мех. — 2022. — № 4. — С. 63—67. —
Журнал индексируется в *RSCI*. Импакт фактор: *IM 0.467*. [Перевод на английский язык: *E. A. Reznichenko* The Continuity of Inverse in Groups // Moscow University Mathematics Bulletin. – 2022. – Т. 77. – Н. 4. – С. 199–203. – DOI: 10.3103/S0027132222040076. Журнал индексируется в *Scopus*. Импакт фактор: *SJR 0.417*.]
7. *Reznichenko E.* Homogeneous subspaces of products of extremally disconnected spaces // Topology and its Applications. — 2020. — Окт. — Т. 284. — С. 107403. — DOI: `10.1016/j.topol.2020.107403`. —
Журнал индексируется в *Scopus, WoS*. Импакт фактор: *SJR 0.387, JCR 0.583*.

8. *Reznichenko E.*, *Sipacheva O.* The free topological group on the Sorgenfrey line is not ℝ-factorizable // Topology and its Applications. — 2013. — Т. 160, № 11. — С. 1184—1187. —
Журнал индексируется в *Scopus, WoS*. Импакт фактор: *SJR 0.387, JCR 0.583*.
Е. А. Резниченко доказаны леммы 8, 9.

9. *Arhangel'skii A.*, *Reznichenko E.* Paratopological and semitopological groups versus topological groups // Topology and its Applications. — 2005. — Т. 151, № 1—3. — С. 107—119. —
Журнал индексируется в *Scopus, WoS*. Импакт фактор: *SJR 0.387, JCR 0.583*.
Е. А. Резниченко доказаны леммы 1.2, 1.2, 2.10, теоремы 1.8, 2.11.

10. *Gartside P.*, *Reznichenko E.* Katetov revisited // Topology and its Applications. — 2000. — Т. 108, № 1. — С. 67—74. —
Журнал индексируется в *Scopus, WoS*. Импакт фактор: *SJR 0.387, JCR 0.583*.
Е. А. Резниченко доказаны леммы 1, 3, предложение 2, теорема 4.

11. *Gartside P.*, *Reznichenko E.* Near metric properties of function spaces // Fundamenta Mathematicae. — 2000. — Т. 164, № 2. — С. 97—114. —
Журнал индексируется в *Scopus, WoS*. Импакт фактор: *SJR 0.482, JCR 0.589*.
Е. А. Резниченко доказаны пример 2, леммы 6, 8, 13, предложение 15, теорема 34.

12. *Резниченко Е.*, *Сипачева О.* Свойства типа Фреше–Урысона в топологических пространствах, группах и локально выпуклых пространствах // Вестн. Моск. ун-та. Сер. 1. Матем., мех. — 1999. — № 3. — С. 32—38. —
Журнал индексируется в *RSCI*. Импакт фактор: *IM 0.467*.
Е. А. Резниченко доказаны предложения 2, 3, 13, теорема 1(2).

13. *Reznichenko E.*, *Uspenskij V.* Pseudocompact Mal'tsev spaces // Topology and its Applications. — 1998. — Т. 86, № 1. — С. 83—104. —
Журнал индексируется в *Scopus, WoS*. Импакт фактор: *SJR 0.387, JCR 0.583*.
Е. А. Резниченко доказаны теоремы 1.7, 1.8, 1.10, все результаты из 3-го раздела.

14. *Gartside P.*, *Reznichenko E.*, *Sipacheva O.* Mal'tsev and retral spaces // Topology and its Applications. — 1997. — Т. 80, № 1/2. — С. 115—129. —
Журнал индексируется в *Scopus, WoS*. Импакт фактор: *SJR 0.387,*

JCR 0.583.

Е. А. Резниченко доказаны теорема 3, теорема 7 (версия 2), следствие 12, пример 14.

15. *Резниченко Е.* Однородные произведения пространств // Вестн. Моск. ун-та. Сер. 1. Матем., мех. — 1996. — Т. 51, № 3. — С. 10—13. —
Журнал индексируется в *RSCI.* Импакт фактор: *IM 0.467.*

16. *Reznichenko E.* Extension of functions defined on products of pseudocompact spaces and continuity of the inverse in pseudocompact groups // Topology and its Applications. — 1994. — Т. 59, № 3. — С. 233—244. —
Журнал индексируется в *Scopus, WoS.* Импакт фактор: *SJR 0.387, JCR 0.583.*

17. *Резниченко Е.* Псевдокомпактное пространство, в котором только множества неполной мощности не замкнуты и не дискретны // Вестн. Моск. ун-та. Сер. 1. Матем., мех. — 1989. — Т. 44, № 6. — С. 69—70. —
Журнал индексируется в *RSCI.* Импакт фактор: *IM 0.467.*