ОТЗЫВ официального оппонента
о диссертации на соискание ученой степени
кандидата физико-математических наук
Тихонова Юрия Андреевича
на тему: «Исследование операторных моделей Кельвина-Фойгхта, возникающих в теории вязкоупругости»
по специальности 1.1.1 – «вещественный, комплексный и функциональный анализ»

В диссертационной работе Ю.А.Тихонова изучаются линейные полные интегро-дифференциальные уравнения второго порядка с операторными коэффициентами в гильбертовом пространстве. Интегро-дифференциальные уравнения возникают при описании систем с эффектами «памяти» и давно привлекают внимание многих авторов. Так, жидкости Джеффриса-Олдройта, Кельвина-Фойгта, Максвелла в гидродинамике моделируют разбавленные суспензии твёрдых частиц в ньютоновской жидкости, некоторые полимерные растворы и т.д. Модели Ильюшина и Тимошенко в механике вязкоупругих сплошных сред применяются для описания полимерных материалов и конструкций, а также металлов и других не вполне упругих тел. Различным вопросам, связанным с исследованием подобных систем, в зарубежной и отечественной литературе в последние годы посвящено значительное число работ, поэтому тема исследования, безусловно, представляет значительный научный интерес.

Во введении и общей характеристике работы обоснована актуальность темы диссертационного исследования, приведен краткий обзор результатов по исследуемой и близкой тематике. Наиболее близкими к тематике диссертации и используемым методам исследования являются работы Н.Д.Копачевского и Т.Я.Азизова, а также результаты, опубликованные в цикле работ В.В.Власова и Н.А.Раутиан. Так, Ю.А.Тихонов, с одной стороны, использует полугрупповой подход и сведение интегро-дифференциального уравнения к системе дифференциальных уравнений в прямой сумме гильбертовых пространств для исследования классических решений, что в духе исследований Н.Д.Копачевского и Т.Я.Азизова. С другой стороны, диссертант применяет методы оценки оператор-функции, являющейся символом исследуемого интегро-дифференциального уравнения, что в духе работ В.В.Власова и Н.А.Раутиан.

Отметим, что операторное интегро-дифференциальное уравнение, изучаемое Ю.А.Тихоновым в четвёртой главе, является более сложными, чем уравнения, рассматриваемые в многочисленных публикациях. Например, в работах G.Amendola, M.Fabrizio, J.M.Golden, C.Giorgi, V.Pata, L.Pandolfi, S.Ivanov (см. [59], [66], [67], [71], [72]) рассматриваются в основном уравнения, содержащие только один неограниченный самосопряженный оператор. С операторной точки зрения это существенно более простая ситуация.

Кратко остановимся на описании содержания диссертации по главам.

В первой главе приведены обозначения, используемые в диссертации, основные определения и теоремы, связанные с теорией сильно непрерывных и голоморфных полугрупп операторов. В п. 1.5 приведена основная постановка задачи Коши для операторного интегро-дифференциального уравнения, описывающего движения вязкоупругих сред с учётом трения Кельвина–Фойгхта:

$$u''(t) + \alpha A u'(t) + (A + C)u(t) - \int_0^t K(t-s)Au(s)ds = 0\,,$$

$$u(0) = u_0, u'(0) = u_1.$$

Здесь скалярная функция $K(t)$ в интегральном слагаемом задаётся интегралом Лебега-Стилтьеса специального вида. Далее сформулированы три предположения относительно операторных коэффициентов A, C, а также относительно ядра интегрального слагаемого. Точнее, оператор A самосопряжён, положительно определён и имеет дискретный спектр, а оператор C симметричен и компактен относительно оператора A. В диссертационной работе указанная задача изучена на предмет классической корректной разрешимости, получены оценки скорости убывания решения, а также в частном случае получено представление самого решения.

В п. 1.6 в качестве примеров приводятся конкретные задачи, укладывающиеся в абстрактное интегро-дифференцильное уравнение – задача о малых поперечных колебаниях вязкоупругого трубопровода и задача о малых движениях начально-изотропного вязкоупругого тела (модель Ильюшина). В п. 1.7 обсуждаются частные случаи ядер рассматриваемого типа.

Вторая глава посвящена спектральному анализу символа интегро-дифференциального уравнения и оценке его резольвенты. В п. 2.2 исследуется частный случай, когда оператор C нулевой. В этом случае соответствующая спектральная задача распадается в исследование нулей счётной последовательности скалярных функций. Утверждения об оценке спектра и резольвенты символа интегро-дифференциального уравнения (теоремы 2.2.1, 2.2.2, 2.2.3) получены в основном методами ТФКП. Общий случай в п. 2.3 рассматривается как возмущение уже разобранной задачи – теоремы 2.3.2, 2.3.3.

Из теоремы 2.3.2 следует, что спектр символа уравнения лежит в некоторой параболической области в левой полуплоскости. В работе А.Э.Ерёменко и С.А.Иванова [65] установлено, что если носитель меры в интеграле Лебега-Стилтьеса компактен, то невещественный спектр конечен. Аналогичная ситуация будет в случае ядра с конечным числом экспоненциальных функций с не коммутирующими операторными коэффициентами. В случае некомпактного носителя вопрос был открыт. В п. 2.4 Ю.А.Тихоновым совместно с А.В.Давыдовым построены примеры ядер с некомпактным носителем для которых невещественный спектр символа уравнения может быть как конечным, так и счётным.

В третьей главе исследована описанная задача Коши в случае, когда оператор C нулевой, а функция $K(t)$ представляет собой бесконечную сумму экспоненциальных функций. С использованием полугрупповых методов и результатов второй главы доказана теорема 3.4.3 о классической разрешимости исследуемой задачи, а также получено представление решения (теорема 3.5.1) через систему собственных значений и элементов оператора A. Отметим, что метод построения решения применялся ранее в работах В.В.Власова и Н.А.Раутиан к неполным интегро-дифференциальным уравнениям, и отражен в их монографии *Спектральный анализ функционально-дифференциальных уравнений* М: МАКС-Пресс, 2016, 488 с.

В четвёртой главе исследована описанная задача Коши в полной постановке. Как и в третьей главе, от интегро-дифференциального уравнения второго порядка осуществляется переход к системе (171) трёх дифференциальных операторных уравнений. Эта система трактуется как дифференциальное операторное уравнение (175) в прямой сумме некоторых гильбертовых пространств. Отметим, что полученное уравнение не эквивалентно исходному интегро-дифференциальному уравнению и, таким образом, обратный переход нужно доказывать. Далее с использованием результатов второй главы доказывается, что оператор полученного уравнения – генератор аналитической полугруппы (теорема 4.3.1). На основе этого факта устанавливается классическая разрешимость задачи Коши для уравнения первого порядка и предъявляются формулы для решения (теорема 4.4.2). При выборе «достаточно гладких» начальных данных устанавливается классическая разрешимость задачи Коши для исходного интегро-дифференциального уравнения и доказывается оценка этого решения (теорема 4.4.3).

В заключении, в частности, отмечены перспективные направления дальнейших научных исследований.

Характеризуя работу в целом, отмечу, что результаты, приведённые в диссертации, являются новыми и представляют несомненный научный интерес. При получении результатов и написании диссертации автор проделал большую работу, как технического, так и идейного характера.

Несомненным достоинством диссертации Ю.А.Тихонова является то, что она тесно связана с приложениями. Основные результаты диссертации снабжены строгими доказательствами и получены автором самостоятельно. При получении результатов, включенных в диссертацию, автор продемонстрировал уверенное владение методами теории функции комплексного переменного, методами спектральной теории, методами теории полугрупп операторов.

По диссертации имеются следующие замечания.

1. Утверждение на стр. 6 о том, что теория полугрупп применима «лишь для ядер экспоненциального типа» не верно. См., например, главу 3, п. 13.6 в монографии J.Pruss *Evolutionary Integral Equations and Applications* Birkhauser, 1993, 366 p.

2. В теореме 3.5.1 желательно пояснить, почему производные функций $l_n(\lambda)$ в действительных точках спектра пучка не обращаются в нуль.

3. В тексте имеются опечатки и неточности. Например, в названии п. 2.5 – не «к третьей», а «ко второй», в формуле (121) не строгий знак, а нестрогий. Обозначения классов функций в п. 4.4 и в предшествующем тексте различны – желательно придерживаться одной системы обозначений.

4. Имеются неточности в оформлении списка литературы – см. литературные источники [11], [18], [38], [63], [76].

Вместе с тем, указанные замечания не умаляют значимости диссертационного исследования. Диссертация отвечает требованиям, установленным Московским государственным университетом имени М.В. Ломоносова к работам подобного рода. Содержание диссертации соответствует паспорту специальности 1.1.1 – «вещественный, комплексный и функциональный анализ» (по физико-математическим наукам), а также критериям, определенным пп. 2.1-2.5 Положения о присуждении ученых степеней в Московском государственном университете имени М.В. Ломоносова, а также оформлена, согласно приложениям № 5, 6

Положения о диссертационном совете Московского государственного университета имени М.В. Ломоносова.

Таким образом, соискатель Тихонов Юрий Андреевич заслуживает присуждения ученой степени кандидата физико-математических наук по специальности 1.1.1 – «вещественный, комплексный и функциональный анализ».

Официальный оппонент:

доктор физико-математических наук,
доцент, профессор кафедры математического анализа
Физико-технического института (структурное подразделение)
ФГАОУ ВО «Крымский федеральный университет имени В.И. Вернадского»

ЗАКОРА Дмитрий Александрович

25 ноября 2022 г.

Контактные данные:

тел.: +7(3652)60-80-70, e-mail: dmitry.zakora@cfuv.ru

Специальность, по которой официальным оппонентом
защищена диссертация:

01.01.02 – «дифференциальные уравнения, динамические системы и оптимальное управление»

Адрес места работы:

295007, Республика Крым, г. Симферополь,
проспект Академика Вернадского, 4, главный корпус "А"
ФГАОУ ВО «Крымский федеральный университет имени В.И. Вернадского»
Физико-технический институт (структурное подразделение)
Тел.: +7(3652) 60-80-70; e-mail: phystech@cfuv.ru

Подпись сотрудника Физико-технического института
ФГАОУ ВО «КФУ им. В.И. Вернадского»
Д.А. Закоры удостоверяю:
Проректор по научной деятельности «КФУ им. В.И. Вернадского»
д.м.н., профессор А.В. Кубышкин

25 ноября 2022 г.