

Московский Государственный университет имени М.В. Ломоносова

На правах рукописи

Лаврухин Ефим Валерьевич

**Математические методы обработки изображений
пористых сред при отсутствии размеченных данных**

Специальность 1.2.2 —
«Математическое моделирование, численные методы и комплексы программ»

Автореферат
диссертации на соискание ученой степени
кандидата физико-математических наук

Москва — 2024

Работа выполнена на кафедре исследования операций факультета вычислительной математики и кибернетики Московского Государственного университета имени М.В. Ломоносова.

Научный руководитель: **Измаилов Алексей Ферилович**
доктор физико-математических наук, профессор

Официальные оппоненты: **Лисица Вадим Викторович**
доктор физико-математических наук,
заведующий лабораторией «Вычислительной физики горных пород» Института нефтегазовой геологии и геофизики им. А.А. Трофимука Сибирского отделения Российской академии наук

Степанов Сергей Викторович
доктор технических наук,
старший эксперт Управления научно-технического развития ООО «Тюменский нефтяной научный центр»

Жиляев Петр Александрович
кандидат физико-математических наук,
старший научный сотрудник Сколковского института науки и технологий

Защита состоится «26» июня 2024г. в 16 ч. 30 мин. на заседании диссертационного совета МГУ.012.1 Московского государственного университета имени М.В. Ломоносова по адресу: 119991, Москва, Ленинские горы, д. 1, стр. 52, факультет ВМК, аудитория №685.

E-mail: ilgova@cs.msu.ru

С диссертацией можно ознакомиться в отделе диссертаций научной библиотеки МГУ имени М.В. Ломоносова (Ломоносовский проспект, д.27) и на портале: <https://dissovet.msu.ru/dissertation/2948>.

Автореферат разослан «11» _____ мая _____ 2024г.

Ученый секретарь
диссертационного совета МГУ.012.1,
доктор физико-математических наук,
член-корреспондент РАН

Ильин А.В.

Общая характеристика работы

Актуальность темы.

Пористой средой или пористым материалом называют твердое тело, имеющее внутри себя значительную объемную долю свободного пространства. Пористые среды широко встречаются в различных прикладных областях человеческой деятельности, таких как нефтяная, гидрологическая и экологическая инженерия, пищевая промышленность и многих других приложениях. Для повышения эффективности прикладных процессов необходимо моделировать различные физические свойства пористых сред. Такое моделирование невозможно без знаний о морфологии свободного пространства исследуемой пористой среды.

До появления компьютерной томографии в области моделирования пористых сред преобладали статистические методы. С развитием технологий неразрушающего получения информации о внутреннем строении пористых сред появилась возможность широко использовать значительно более точные прямые методы моделирования в масштабе пор. Это привело к появлению различных способов моделирования, таких как прямое моделирование с использованием воксельной модели или моделирование с использованием поровых сетей (pore network), с помощью которых стало возможным эффективно получить множество физических свойств, в том числе транспортные характеристики, по двух- или трехмерному изображению пористой среды.

Первоочередной задачей для реализации подхода прямого моделирования, независимо от используемой методологии, является получение некоторой первичной экспериментальной структурной информации об исследуемом объекте по снимку этого объекта, сделанного с помощью одной из доступных технологий (например, растровой электронной микроскопии, компьютерной томографии или другой). Таким образом, в области моделирования пористых сред необходимо решать множество задач по обработке изображений различных пространственных масштабов: от классификации и категоризации 3-D изображений целого образца керна или почвы до сегментации на фазы или однородные зоны изображений микро-КТ.

Данная работа посвящена решению задач категоризации и сегментации изображений пористых сред в различных постановках. Основной акцент в работе сделан не на количественных улучшениях метрик исследуемых методов и подходов, а на решении проблем с обучающими данными, которые возникают в конкретной доменной области, а именно: отсутствие размеченных обучающих данных, большая сложность и низкая точность разметки, маленький объем выборок. Небольшое количество доступных данных обусловлено трудоемкостью процедуры извлечения образцов и их съемки. Проблемы с разметкой вызваны наличием эффекта частичного

объема (partial volume effect) в вокселях изображения, трехмерным “контекстом” разметки и артефактами, которые вносит на изображение процесс съемки — все это делает точную ручную разметку сложновыполнимой задачей. В случае разделения изображения на однородные зоны сделать ручную разметку практически невозможно из-за субъективной природы этой задачи. Перечисленные особенности работы с изображениями пористых сред делают тему данного исследования особенно актуальной.

Степень разработанности темы.

Задача сегментации КТ изображений пористых сред является актуальной с момента появления технологии неразрушающего получения информации о внутренней структуре пористой среды в начале 1980-х. На текущий момент предложено множество методов сегментации, которые можно условно разделить на четыре категории: ручная сегментация, сегментация с помощью глобального порогового значения, локальные пороговые методы и другие подходы, которые включают в себя машинное обучение и, в частности, алгоритмы обучения без учителя. Несмотря на обилие методов сегментации и некоторых вспомогательных методов обработки изображений, таких как фильтрация, ни одна из существующих методологий не может претендовать на то, чтобы обеспечить универсальные и достаточно точные результаты. Широко признано, что ручные и глобальные методы пороговой обработки уступают методам локальной пороговой обработки, которые, в свою очередь, страдают от необходимости выбирать доверительные пороговые значения, а автоматический выбор порогов не обязательно дает адекватные результаты. Результаты методов без участия оператора ненадежны в смысле количества фаз и точности. Исследования в этой области показывают, что человек-оператор выполняет сегментацию намного лучше, чем любой автоматический алгоритм пороговой обработки.

В настоящее время появилось множество работ, посвященных сегментации пористых сред с помощью сверточных нейронных сетей, которые демонстрируют значимое превосходство данного подхода по сравнению с методами без учителя (unsupervised learning), но на заранее размеченном оператором наборе данных. Из-за этого невозможно в полной мере воспользоваться преимуществом нейросетевого подхода на практике, поскольку обученные модели становятся малоприменимыми при смещении распределения тестовых данных вследствие изменения условий КТ-съемки: смены модели или настроек томографа, использования дополнительных фильтров, отличия химического состава тренировочных и тестовых образцов и других причин.

Задача разделения изображения пористой среды на однородные зоны является сравнительно новой. На текущий момент существует небольшое количество работ, в которых исследуется возможность такого разделения на основе признаковых представлений, полученных с помощью расчета

различных статистических характеристик пористой среды. При этом в предметной области не существует общепринятых количественных или качественных способов оценки результатов решения данной задачи, поэтому прямое сравнение различных подходов является затруднительным.

Целью данной работы является разработка и исследование методов первичной обработки изображений пористых сред на основе машинного обучения и, в частности, сверточных нейронных сетей при отсутствии обучающих данных, с последующей реализацией предложенных методов в виде применимых на практике решений.

Для достижения поставленной цели необходимо было решить следующие **задачи**:

1. Разработать методику оценки качества сегментации, специфичную для исследуемой предметной области моделирования пористых сред.
2. Исследовать различные способы построения моделей нейронных сетей для решения задачи сегментации пористых сред.
3. Разработать алгоритмы построения искусственных обучающих выборок, достаточно точно имитирующих морфологические и статистические свойства различных видов пористых сред.
4. Исследовать влияние морфологических свойств изображений пористых сред на качество их сегментации.

Научная новизна:

1. Предложена модификация метода сжатия структурной информации пористых сред с помощью аппроксимации значений набора корреляционных функций.
2. Разработан метод разделения изображения пористой среды на однородные зоны, который использует в качестве признакового представления фрагментов изображения векторы корреляционных функций, рассчитанных по ортогональным направлениям.
3. Было выполнено исследование возможности обучения нейронных сетей для задачи сегментации почв на обучающей выборке, полученной с помощью локальных алгоритмов сегментации без учителя.
4. Описан перспективный способ построения универсальной модели сегментации пористых сред при помощи итеративного обучения сверточной нейронной сети на выборках, состоящих из синтетических КТ-изображений.
5. С помощью алгоритма построения синтетических КТ-изображений пористых сред было проведено исследование влияния морфологии входных данных на качество сегментации посредством предобученной модели сверточной нейронной сети.

Практическая значимость состоит в том, что разработаны новые и модифицированы существующие методы обработки изображений пористых сред. Данные методы не требуют для работы наличие обучающих данных, либо сами предназначены для создания обучающих выборок. Полученные и описанные в работе методы и алгоритмы были протестированы на наборах искусственных и реальных данных. Основные методы, описанные в работе, были реализованы в виде программного комплекса, который используется специалистами для решения прикладных задач моделирования течений в пористых средах.

Методология и методы исследования. Основными используемыми методами являются методы математического моделирования в обработке изображений. Вычислительные эксперименты реализованы в рамках задач машинного обучения и анализа данных. Для получения оптимальных наборов параметров моделей используются численные методы оптимизации. Для вычисления прямого и обратного преобразования Радона, а так же для моделирования проницаемости по воксельной модели пористой среды используются численные методы. Также в работе используются методы вероятностного моделирования.

Основные положения, выносимые на защиту:

1. Численный метод сжатия структурной информации, извлеченной из изображения пористой среды с помощью расчета пространственных корреляционных функций по ортогональным направлениям.
2. Метод сегментации изображений пористых сред с использованием модели сверточной нейронной сети, обученной на данных, размеченных с использованием оператором алгоритмов сегментации без учителя.
3. Модификация математической модели томографа, использующая информацию о пространственном распределении фаз исследуемого образца пористой среды и о физико-химических свойствах этих фаз для построения синтетического КТ-изображения.
4. Программный комплекс для первичного анализа трехмерных КТ-изображений пористых сред, который позволяет выделять на КТ-изображении однородные зоны, сегментировать КТ-изображение на несколько минеральных фаз и настраивать параметры модели сегментации по данным синтетической компьютерной томографии.

Достоверность полученных результатов обеспечивается детально описанными и опубликованными алгоритмами, методами и исследованиями, результаты которых при желании могут быть воспроизведены. Результаты исследований согласуются с результатами, полученными другими авторами в соответствующей предметной области.

Апробация работы.

Основные результаты, которые были получены в ходе данной работы, докладывались на следующих конференциях:

1. ГеоЕвразия-2018 (Россия, Москва, 5-8 февраля 2018);
2. Пятая Международная научная конференция “Практическая микротомография” (Россия, Москва, 7-9 ноября 2018);
3. Восьмая Всероссийская конференция с международным участием им. И.Ф. Образцова и Ю.Г. Яновского (Россия, ИПрМ РАН, 18-19 декабря 2018);
4. ГеоЕвразия-2019 (Россия, Москва, 4-7 февраля 2019);
5. European Geosciences Union General Assembly (Австрия, Вена, 3-8 мая 2020).
6. Тихоновские чтения 2023 (Москва, 30 октября - 3 ноября 2023).

Личный вклад. Все представленные в диссертации результаты получены лично автором под научным руководством д.ф.-м.н., проф. А.Ф. Измаилова. Анализ полученных результатов проводился автором с помощью соавторов, при этом вклад автора был определяющим. В работе [1] автором была разработана и реализована численный алгоритма сжатия структурной информации, извлеченной из изображения пористой среды, автором было проведено исследование качества дескрипторов, полученных с помощью разработанного алгоритма, на модельной задаче категоризации трехмерных изображений пористых сред. В работе [2] автор предложил алгоритм получения обучающей выборки для задачи сегментации изображений почв, реализовал алгоритм обучения модели сверточной нейронной сети, провел исследование качества обученной модели в зависимости от размера обучающей выборки, исследовал согласованность классических и доменных метрик сегментации. В работе [3] автор разработал модификацию математической модели синтетического томографа, использующую информацию о пространственном распределении фаз образца и их физико-химическим свойства, реализовал численный метод построения синтетического изображения КТ, предложенный алгоритм был использован автором для проведения исследования влияния морфологических свойств обучающих данных на качество сегментации с помощью предобученной модели сверточной нейронной сети. В работе [4] автор разработал и реализовал алгоритм разбиения бинарного изображения пористой среды на однородные зоны, предложил эмпирические критерии однородности изображения, автором было проведено исследование данного алгоритма на наборе синтетических и реальных данных.

Соавторы внесли значимый вклад в написание и редактуру текстов, а так же его перевод на английский язык. В работе [1] соавторы подготовили реальные данные КТ почв и произвели расчет корреляционных функций. В работе [2] соавторы подготовили реальные данные КТ почв, рассчитали корреляционные функции и метрики на основе проницаемости

для разметки и сегментаций, полученных с помощью обученных нейросетевых моделей. В работе [3] соавтор произвел итеративную синтетическую реконструкцию исходных образцов. В работе [4] соавторы предоставили наборы искусственных и реальных данных для тестирования алгоритма.

Публикации.

Основные результаты по теме диссертации изложены в 9 печатных изданиях, из них [1–4] в изданиях, индексируемых в Web of Science Core Collection, Scopus и РИНЦ, в том числе 3 статьи в журналах, входящих в Q1 [1; 2; 4]; 5 работ [5–9] опубликованы в прочих изданиях; зарегистрировано 2 программы для ЭВМ [10; 11].

Диссертационная работа была выполнена при поддержке гранта Российского фонда фундаментальных исследований №20-31-90118\20 и грантов Российского научного фонда №19-74-10070, №23-74-0006. Разработка программного комплекса, функционал и возможности которого были описаны в данной работе в главе 6, велась в рамках совместного НИОКР компаний «Иннопрактика» и ПАО «НК «Роснефть». ПАО «НК «Роснефть» является правообладателем данного программного комплекса.

Объем и структура работы. Диссертация состоит из введения, шести глав и заключения. Полный объем диссертации 169 страниц текста с 39 рисунками и 7 таблицами. Список литературы содержит 187 наименований.

Содержание работы

В введении обосновывается актуальность исследований, проводимых в рамках данной диссертационной работы, формулируется цель, ставятся задачи работы, излагается научная новизна, теоретическая и практическая значимость представляемой работы. Приводятся положения, выносимые на защиту, личный вклад автора, способы апробации работы и предоставляется информация о публикациях, в которых содержатся основные результаты работы.

В первой главе даются определения основных понятий и приводятся формулы, которые используются в следующих главах работы. В данной работе пористая среда рассматривается как двух- или трехмерное изображение, каждой пространственной координате ставится в соответствие некоторое значение: $U : U(x) = y$, где x может являться непрерывным аргументом из $\mathbb{R}^{2(3)}$, либо принадлежать ограниченному набору координат в прямоугольной сетке, а для множества возможных значений y существуют следующие варианты:

- $U^a : y \in \mathbb{R}$ — пример: необработанное КТ-изображение пористой среды;
- $U^g : y \in \{0, 1, \dots, 2^8 - 1\}$ — пример: снимок КТ;

– $U^c : y \in C, C = \{0, \dots, N-1\}$ — пример: двухфазная пористая среда, где фазами являются твердое вещество и пустотное пространство.

В случае, когда пористая среда состоит из большого количества фаз ($N > 2$), в работе используется индикаторная функция I_ω относительно конкретной фазы ω , область определения которой совпадает с областью определения исходной U^c , при этом I_ω принимает следующие значения:

$$I_\omega(x) = \begin{cases} 0, & \text{если } U^c(x) \neq \omega, \\ 1, & \text{если } U^c(x) = \omega. \end{cases}$$

Далее в главе определяются основные статистические характеристики изображений пористой среды, которые будут далее использоваться в работе. Пористость — это отношение объема пустотного пространства к общему объему образца. Пористость относительно фазы ω_0 рассчитывается по формуле:

$$\phi = \mathbb{E}_{x \in V_{U^c}} I_{\omega_0}(x).$$

В рамках данной работы объектом исследования являются изображения, поэтому используются дискретные варианты двухточечных корреляционных функций, рассчитанные для фазы пор. Корреляционная функция $S_2(r)$ изображения $U^c \in \mathbb{R}^{H \times W}$ определяет долю отрезков длины r , концы которых принадлежат фазе порового пространства. Формула расчета по оси x :

$$S_2^x[r] = \frac{\sum_{i,j=1}^{H-r,W} [U^c[i,j] = U^c[i+r,j] = 1]}{W(H-r)}.$$

Корреляционная функция $L_2(r)$ определяет долю отрезков длины r , которые полностью принадлежат фазе порового пространства. Формула расчета по оси y :

$$L_2^y[r] = \frac{\sum_{i,j=1}^{W-r,H} [U^c[i,j] = \dots = U^c[i,j+r] = 1]}{(W-r)H}.$$

Кластерная функция $C_2(r)$ определяет долю отрезков длины r , концы которых принадлежат одной компоненте связности порового пространства. Если все поровое пространство связно, то $C_2(r) = S_2(r)$. Функция поверхность-поверхность SS_2 определяется похожим на S_2 образом: индикативным событием является попадание обоих концов отрезков на границу между фазами. Поскольку мы рассматриваем дискретные объекты, граница может иметь различное определение, в зависимости от ее определения меняется алгоритм расчета SS_2 . Для каждой корреляционной функции описаны особенности реализации вычислительного алгоритма и его асимптотическая

сложность. В последней части главы вводится нормализация корреляционных функций для того, чтобы значения $K\Phi$ не зависели от пористости. На примере корреляционной функции S_2 :

$$S_2^{norm}(r) = \frac{S_2(r) - \phi^2}{\phi(1 - \phi)}.$$

Для корреляционной функции L_2 нормировка выглядит следующим образом:

$$L_2^{norm}(r) = \frac{L_2(r)}{L_2(0)}.$$

Функция C_2 и SS_2 нормализуется аналогичным с L_2 образом.

Во второй главе описана модификация математической модели представления корреляционной функции как выпуклой комбинации набора базисных функций и численный метод сжатия структурной информации, который был разработан для получения параметров данной модели. Решение этой задачи позволяет получить компактное признаковое представление изображения пористой среды в виде вектора небольшой размерности, который может быть использован для решения различных задач моделирования: категоризация, предсказание физических характеристик, сегментация и другие — с использованием методов машинного обучения. Исходный метод состоит в аппроксимации аналитической корреляционной функции ($K\Phi$) с помощью выпуклой комбинации базисных функций с настраиваемыми параметрами. Рассматриваемые базисные функции являются корреляционными функциями, полученными аналитически для некоторых моделей пористых сред специального вида. В рассматриваемом методе аппроксимации в качестве компактного векторного представления используются коэффициенты выпуклой комбинации и значения параметров базисных функций. В ходе проведенных экспериментов было показано, что полученные таким образом векторы не подходят для методов машинного обучения, основанных на векторной близости объектов, и в частности метода кластеризации K-Means. Описанные модификация математической модели и численный метод получения аппроксимации устраняет эту проблему. Далее в главе рассмотрена тестовая задача разделения множества изображений пористых сред на группы с морфологически близкой структурой, предложен метод решения этой задачи с помощью кластеризации в исходном и сжатом признаковом пространстве на основе векторов $K\Phi$.

Входными данными для метода аппроксимации является трехмерное изображение пористой среды $U_i^c \in \mathbb{R}^{H \times W \times D}$. В качестве гиперпараметров алгоритма необходимо выбрать набор $K\Phi$ $\{\bar{f}_j\}$ и максимальную длину корреляции R . В экспериментах с реальными данными использовался следующий набор функций: двухточечная функция вероятности $S_2[r]$, линейная функция $L_2[r]$, кластерная функция $C_2[r]$, функция поверхность-поверхность $SS_2[r]$. Использовалось значение максимальной длины

корреляции $L_{max} = 250$ как компромисс между точностью и объемом вычислений.

КФ 3D-изображения U_i^c рассчитывались следующим образом:

- Для всех дискретных длин корреляции r до максимальной длины корреляции L_{max} ;
- По трем основным ортогональным направлениям x , y и z ;
- Исключительно для фазы порового пространства;
- С усреднением по объему.

Рассчитанные таким образом корреляционные функции $\overline{f}_j^d[r|U_i^c]$ для заданного направления d представляют из себя массив из L_{max} значений. После расчета значения КФ были нормализованы, чтобы исключить зависимость значений от пористости образца. Таким образом было получено исходное векторное представление изображения U_i^c :

$$\overline{\theta}(U_i^c) = [\overline{f}_1^x(U_i^c), \overline{f}_1^y(U_i^c), \overline{f}_1^z(U_i^c), \dots, \overline{f}_M^z(U_i^c)].$$

Для проведенных экспериментов количество корреляционных функций $M = 4$, исходное изображение трехмерное, максимальная длина корреляции $L_{max} = 250$, поэтому $\overline{\theta}(U_i^c) \in \mathbb{R}^{3000}$.

Общий вид исходной математической модели представления непрерывной КФ с помощью базисных функций был следующим:

$$\begin{cases} \hat{f}(r|\theta) = \sum_{i=1}^N \alpha_i f_i(r|\theta_i) + \sum_{i,j=1}^N \beta_{ij} f_i(r|\theta_i) f_j(r|\theta_j), \\ \sum_{i=1}^N \alpha_i + \sum_{i,j=1}^N \beta_{i,j} = 1, \end{cases}$$

где $\{f_i(\theta_i)\}_{i=1}^N$ — это набор используемых базисных функций, $\{\theta_i\}_{i=1}^N$ — это параметры базисных функций, $[\{\alpha_i\}_{i=1}^N, \{\beta_{ij}\}_{i,j=1}^N]$ — это неотрицательные веса базисных функций и их попарных комбинаций, $\theta = [\{\alpha_i\}_{i=1}^N, \{\beta_{ij}\}_{i,j=1}^N, \{\theta_i\}_{i=1}^N]$ — это совокупность параметров модели. Изначально в качестве базисных функций использовался следующий набор:

$$\begin{aligned} f_1(r|a) &= e^{-\frac{r}{a}}, \\ f_2(r|b, q, \psi) &= e^{-\frac{r}{b}} \cos(qr + \psi), \\ f_3(r|c) &= \begin{cases} (1 - \frac{r}{c})^2, & 0 \leq r \leq c, \\ 0, & r > c, \end{cases} \end{aligned}$$

где a , b , c — это коэффициенты масштаба базисных функций, q — это частота осциллятора, ψ — это фазовый угол осциллятора.

По модели аппроксимации, набору базисных функций и рассчитанным векторам значений нормализованных корреляционных функций

$\{\bar{f}_j^d[r|U_i^c]\}_{j,d}$ была сформулирована оптимизационная задача для определения значений параметров:

$$\left\{ \begin{array}{l} \hat{f}(r|\theta) = \alpha_1 f_1(r|a) + \alpha_2 f_2(r|b, q, 0) + \alpha_3 f_3(r|c), \\ \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 = 1, \\ \theta = (a, b, c, q, \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3), \\ SSE(\bar{f}[r|U_i^c], \hat{f}(r|\theta)) = \sum_{r=0}^{L_{max}} (f[r|U_i^c] - \hat{f}(r|\theta))^2 \rightarrow \min_{\theta}, \end{array} \right.$$

где $SSE(\cdot, \cdot)$ — это функция ошибки аппроксимации. В качестве функции ошибки использовалось среднеквадратичное отклонение. Решения данной оптимизационной задачи производилось численно с помощью численного метода SLSQP, таким образом было получено отображение между вектором значений КФ из \mathbb{R}^{250} и вектором значений параметров из \mathbb{R}^7 .

В процессе экспериментов для приведенной выше модели аппроксимации были получены неоднозначные результаты численных симуляций: в реальных данных не было осцилляции корреляционных функций, поэтому базисные функции f_1 и f_2 стали взаимозаменяемы, что привело к возникновению симметричного минимума задачи оптимизации с точки зрения групп параметров $\{\alpha_1, a\}$ и $\{\alpha_2, b, q\}$. Для исправления коллизий в пространстве параметров постановка оптимизационной задачи была изменена следующим образом:

- Из базисной функции f_2 убран осциллирующий член q ;
- Добавлено дополнительное ограничение на параметры $a > b$, чтобы исключить симметричные минимумы в пространстве параметров.

В результате численного решения модифицированной оптимизационной задачи для M различных КФ было получено сжатое векторное представление 3D-изображения пористой среды U_i^c :

$$\theta(U_i^c) = [\theta_{\bar{f}_1^x}(U_i^c), \theta_{\bar{f}_1^y}(U_i^c), \theta_{\bar{f}_1^z}(U_i^c), \dots, \theta_{\bar{f}_M^z}(U_i^c)],$$

где количество параметров для аппроксимации отдельной корреляционной функции равно 6, поэтому $\theta(U_i^c) \in \mathbb{R}^{72}$.

Для проверки качества алгоритма аппроксимации использовалась задача кластеризации изображений пористых сред. В качестве признаков представлений использовались исходные векторы на основе КФ $\bar{\theta}(U_i^c)$ и их сжатый вариант $\theta(U_i^c)$. Перед кластеризацией векторные представления образцов стандартизовались:

$$\tilde{\theta}(U_i^c) = \frac{\theta(U_i^c) - \mathbb{E} \theta(U_k^c)}{\sqrt{\mathbb{D} \theta(U_k^c)}},$$

статистика считалась по всему набору примеров.

Полный алгоритм кластеризации изображений пористых сред в признаковом пространстве на основе корреляционных функций состоит в следующем:

1. Рассчитать для каждого образца U_i^c набор дискретных КФ по направлениям;
2. Рассчитать для каждого образца пористость ϕ и нормализовать значения КФ;
3. (Опционально) Для каждого образца U_i^c поставить и решить численно оптимизационную задачу аппроксимации, получить векторные представления $\theta(U_i^c)$, либо воспользоваться векторным представлением $\bar{\theta}(U_i^c)$;
4. Получить стандартизованную выборку векторов параметров $\tilde{\theta}(U_i^c)$;
5. Провести кластеризацию набора векторов $\{\tilde{\theta}(U_i^c)\}_{i=1}^N$ с помощью K-Means.

Для исследования предложенных в данной главе алгоритмов на реальных данных было отобрано 14 цельных проб почвы цилиндрической формы, в результате получилось 16 3D-изображений объемом от 900^3 до 1300^3 вокселей. Качество аппроксимации КФ с помощью предложенной модели было оценено по сравнению с другими существующими моделями с помощью метрики SSE . На рассматриваемой выборке представленная модифицированная модель оказалась лучше других аналогичных моделей: исходной модели аппроксимации, аналитических моделей пересекающихся полидисперсных сфер для функций S_2 и L_2 и полидисперсной сферической модели для SS_2 . Далее в исследовании были проанализированы результаты кластеризации, проведенной на основе расстояний между сжатыми дескрипторами из \mathbb{R}^{72} и исходным признаковым представлением на основе КФ из \mathbb{R}^{1000} (использовалось совмещение четырех усредненных по всем направлениям векторов корреляционных функций). Общая схема работы с данными изображена на рис. 1. Результаты кластеризации интерпретировались напрямую и с помощью тепловых карт попарных расстояний между образцами, с корректировкой на размерность пространства $\frac{L_2}{\sqrt{R}}$. Было установлено, что пары образцов с минимальным (максимальным) расстоянием между собой максимально (не)похожи друг на друга по структуре. Полученные в этой главе результаты позволили использовать представленный алгоритм кластеризации в признаковом пространстве на основе векторов корреляционных функций в качестве основы для решения задачи разделения изображений пористых сред на однородные зоны.

Третья глава посвящена прикладной задаче разбиения изображения пористой среды на морфологически однородные области. Данная задача актуальна как для изображений в градациях серого, так и для изображений, которые уже разделены на фазы, в контексте построения цифровой математической модели пористой среды. Практический пример

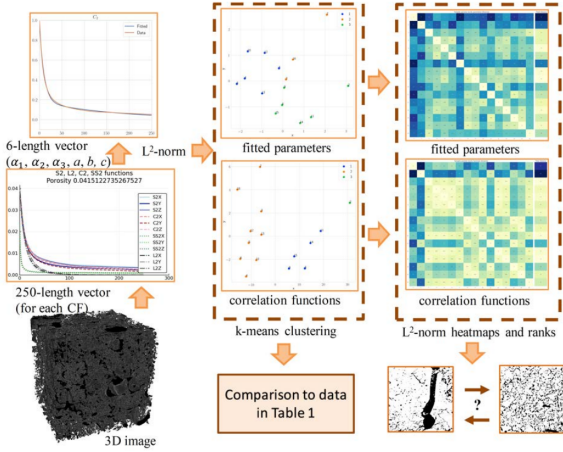


Рис. 1 — Общая схема работы с изображениями образцов для сравнения их морфологических свойств.

первого — это необходимость выделить наиболее репрезентативные зоны КТ-изображения образца полноразмерного ядра для съемки с меньшим разрешением, второго — это разделение КТ-изображения в микро-масштабе для корректного учета различий физических свойств между зонами с разной морфологической структурой в многомасштабной модели пористой среды.

Данная задача была сформулирована и решена как задача сегментации изображения с неизвестным заранее истинным количеством классов K :

$$U^c \longrightarrow U^{\hat{c}} : U^{\hat{c}}[x] = f_{seg}^{clust}(V(x|U^c)),$$

где x — это координата пикселя изображения пористой среды, $V(x|U^c)$ — это признаковое представление пикселя исходной пористой среды, f_{seg}^{clust} — это модель сегментации.

Предложенный метод решения опирается на следующую модель:

- Изображение рассматривается на заданном масштабе, масштаб задается используемым размером фрагмента изображения D ;
- Предполагается, что фрагменты изображения на заданном масштабе являются однородными;
- Однородные зоны, выделяемые на изображении, состоят из набора связанных между собой фрагментов размера D . Однородные зоны могут принадлежать к одному и тому же кластеру однородности, но при этом не быть связанными между собой;
- Условия однородности формируются исключительно на основе информации, извлеченной из самого изображения.

Метод применяется к изображению $U^c \in \mathbb{R}^{H \times W}$ и состоит из следующих шагов:

1. *Построение сетки фрагментов изображения с наложением* — используется прямоугольная сетка с размером фрагмента D и размером пересечения фрагментов O . Для параметров сетки требуется выполнение условий:

$$\begin{cases} D \bmod (D - O) = 0, \\ \frac{O}{D-O} \bmod 2 = 0. \end{cases}$$

Эти условия позволяют гарантировать для каждого пикселя (вокселя) изображения единственную метку кластера. Отдельное изображение фрагмента обозначается p_{ij}^{DD} : фрагменты нумеруются сверху вниз и далее слева направо, верхние индексы обозначают размер вдоль соответствующей оси.

2. *Расчет структурных дескрипторов* — для получения векторных представлений любых фрагментов изображения используются дискретные корреляционные функции S_2 и L_2 . В качестве признакового представления фрагмента изображения используется совмещение векторов корреляционных функций:

$$\begin{aligned} V^x(p_{ij}) &= [S_2^x[\cdot|p_{ij}], L_2^x[\cdot|p_{ij}]], \\ V^y(p_{ij}) &= [S_2^y[\cdot|p_{ij}], L_2^y[\cdot|p_{ij}]], \\ V(p_{ij}) &= [V^x(p_{ij}), V^y(p_{ij})]. \end{aligned}$$

Расстояние между фрагментами определяется как усредненное по координатам L_1 -расстояние:

$$\begin{aligned} L_1^{avg}(V_1, V_2) &= \frac{\sum_{i=1}^N |V_1[i] - V_2[i]|}{N}, \\ \rho(a, b) &= L_1^{avg}(V^x(a), V^x(b)) + L_1^{avg}(V^y(a), V^y(b)) = \rho^x(a, b) + \rho^y(a, b), \end{aligned}$$

где a, b — два произвольных фрагмента изображения.

3. *Условия (не)однородности* — в алгоритме используются два условия (не)однородности. Первое условие определяет, насколько похожи по морфологическим признакам исходное изображение на множество его фрагментов с помощью распределения между ними:

$$F(x) = P(\rho(U, p) \leq x).$$

Условие сформулировано следующим образом:

$$\mathbb{H}_{homo}(T_{homo}, \alpha) : F(T_{homo}) > \alpha,$$

где T_{homo} — это используемое пороговое значения расстояния, а α — доля фрагментов на расстоянии меньше, чем пороговое.

Второе условие проверяет на “существенность” получаемые на следующем шаге центры кластеров:

$$\mathbb{H}_{clusters}(T_{clusters}) : \exists i, j \ i \neq j : \rho(c_i, c_j) < T_{clusters}.$$

Условие не выполняется, если все кластеры находятся достаточно далеко друг от друга в сравнении с пороговым значением расстояния $T_{clusters}$.

4. *Вычисление пороговых значений расстояния* — пороговые значения расстояния вычисляются с помощью набора всех одномерных фрагментов изображения заданного размера:

$$\begin{aligned} x : p_{ij}^{D1}, i = \overline{1, H - D + 1}, j = \overline{1, W}, \\ y : p_{kl}^{1D}, k = \overline{1, H}, l = \overline{1, W - D + 1}. \end{aligned}$$

Функция зависимости между расстоянием в пространстве векторных представлений и расстоянием в координатах изображения задается следующим образом:

$$P(r) = \mathbb{E}_{i,j} \rho^x(p_{i+r,j}^{D1}, p_{i,j}^{D1}) + \mathbb{E}_{k,l} \rho^y(p_{k,l+r}^{1D}, p_{k,l}^{1D}).$$

В качестве порогов предложено использовать значения этой функции в заданном наборе точек (точки отличаются для разных классов однородности, они описаны в пункте 6):

$$\begin{aligned} T_1 &= T_{homo_1} = T_{clusters_1} = P(1), \\ T_2 &= T_{homo_2} = T_{clusters_2} = P(2), \\ T_3 &= T_{homo_3} = T_{clusters_3} = P(3). \\ T_4 &= T_{homo_4} = P(4). \end{aligned}$$

5. *Кластеризация* — производится разделение множества фрагментов изображения в пространстве их векторных представлений на K кластеров, используется алгоритм K-Means. На этом этапе изображение разделяется на однородные зоны, вычисляются центры кластеров однородности $\left\{ c_i \right\}_{i=1}^K$.
6. *Определение класса (не)однородности* — на основе приведенных условий изображение относится к одному из классов однородности. Для всех классов используются одинаковые значения $\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = \alpha_4 = 0.8$. Классы однородности:

- 1) Строго однородные изображения:

$$\mathbb{H}_{strictly} = \mathbb{H}_{homo}(T_1, \alpha_1) \wedge \mathbb{H}_{clusters}(T_1)$$

- 2) Слабо однородные изображения:

$$\mathbb{H}_{weakly} = \neg \mathbb{H}_{strictly} \wedge \left(\mathbb{H}_{homo}(T_2, \alpha_2) \wedge \mathbb{H}_{clusters}(T_2) \right),$$

$$\mathbb{H}_{stationary} = \mathbb{H}_{homo}(T_2, \alpha_2) \wedge \mathbb{H}_{clusters}(T_2)$$

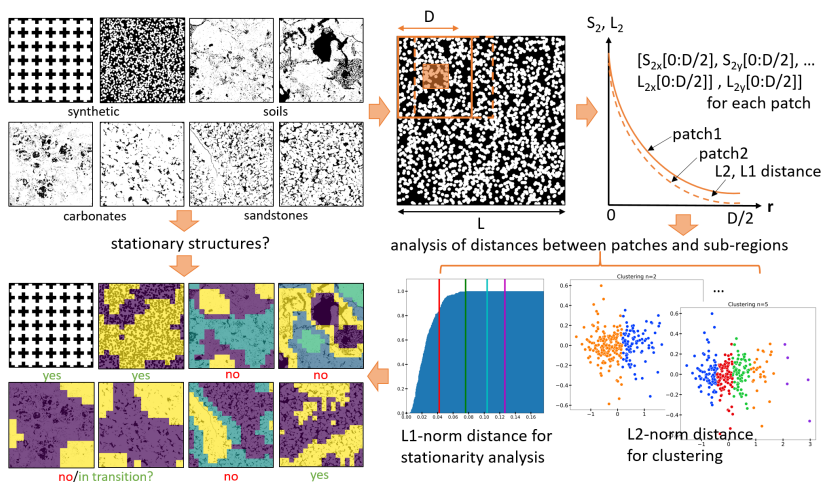


Рис. 2 — Общая схема работы метода по выделению однородных зон на изображении. Конечным результатом работы метода является решение об однородности изображения и раскраска изображения на заданное число однородных зон (в случае, если оно не является однородным).

3) Промежуточные изображения:

$$\mathbb{H}_{transition} = \neg \mathbb{H}_{stationary} \wedge \mathbb{H}_{homo}(T_3, \alpha_3)$$

4) Неоднородные изображения:

$$\mathbb{H}_{nonstationary} = \neg \mathbb{H}_{stationary} \wedge \neg \mathbb{H}_{transition}$$

Схему работы метода представлена на рис. 2.

Разработанный метод был протестирован с помощью набора реальных и искусственных примеров. Метод корректно выделил однородные зоны на искусственном примере, в котором в четырех квадрантах изображения находились структуры, имеющие одинаковую пористость и площадь поверхности, но разные морфологические свойства. Искусственные изображения, полученные с помощью повторения фиксированного шаблона, были классифицированы методом как строго однородные. Результаты работы метода на изображениях, порожденных стационарным процессом генерации упаковки сфер, зависели от размера изображения L и параметра метода D . Достаточно большое изображение при увеличении размера фрагмента D переходило из промежуточного класса $\mathbb{H}_{transition}$ в класс слабо-однородных изображений \mathbb{H}_{weak} . Результаты работы метода на реальных образцах песчаников и карбонатов демонстрировали поведение, схожее с оным на изображениях, полученных с помощью вышеописанного случайного процесса. Для реальных неоднородных изображений метод корректно выделил неоднородные зоны (например, трещины и большие поры).

Четвертая глава посвящена сегментации КТ-изображений.

В данной главе рассматривалась постановка задачи с заранее известным числом фаз (классов), когда процедура сегментации определяет каждый пиксель (воксель) КТ-изображения U^g в одну из N возможных фаз:

$$U^g \longrightarrow U^c : U^c[x] = f_{seg}^{cls}(V(x|U^g)) = y, y \in \{1, \dots, N\},$$

где N — это число фаз; x — это координата пикселя изображения пористой среды; $V(x|U^g)$ — это признаковое представление исходной пористой среды в точке x ; f_{seg}^{cls} — это модель сегментации; U^c — это результирующее изображение, разделенное на N фаз.

В главе дается обзор методов получения структурной информации о внутреннем строении пористой среды, обосновывается выбор компьютерной томографии в качестве основного метода получения подобной информации. Дается характеристика основных методов сегментации, используемых на практике в данной предметной области: методы глобальных порогов, метод сходящихся активных контуров (converging active contours), индикаторный кригинг (indicator kriging), метод растущих регионов (region growing). Детализировано описывается метод сегментации с помощью моделей сверточных нейронных сетей. Затем приводятся метрики качества сегментации, которые могут быть использованы в домене пористых сред: попиксельные; сегментационные; относительная ошибка по целевым физическим характеристикам (в данном случае проницаемости), рассчитанным с помощью численных методов; метрика различия морфологических свойств.

В конце главы приведены результаты исследования метода получения разметки для обучения математической модели сверточной нейронной сети с помощью использования оператором методов сегментации без учителя. В исследовании участвовали 7 3D-образцов пористых сред (почв) различного размера, качества и свойств. КТ-изображения образцов было получено с помощью настольного томографа SkyScan-1172, разрешение съемки образцов варьируется в диапазоне 15,85 — 15,88 μm . Все исследуемые образцы были обрезаны до размера 700^3 . Оператор использовал для получения разметки текущие лучшие (state-of-the-art) алгоритмы сегментации без учителя: метод активных сходящихся контуров (SAC) и метод растущих регионов (region growth). Параметры этих методов подбирались отдельно для каждого 3D-изображения. Каждый из 7 образцов был разделен на наборы тренировочный и тестовых 2D-срезов вдоль оси z в пропорции 2 : 1. На тренировочные данные применялся стандартный набор аугментационных преобразований: перемасштабирование, повороты и упругие преобразования координатной сетки. Использовалась архитектура полносверточной сети U-Net с ResNet101-энкодером, предобученным на датасете ImageNet. В качестве функции потерь использовалась взвешенная сумма кросс-энтропии и сглаженного dice-коэффициента. Для получения параметров модели использовался численный метод оптимизации Adam.

Номер образца	Доля правильных ответов	Точность	Полнота	PR-AUC	IoU
1	0,990278	0,943769	0,996358	0,998623	0,940524
2	0,996335	0,968988	0,993439	0,998841	0,962826
3	0,973652	0,820249	0,995574	0,990357	0,817269
4	0,939552	0,792140	0,999917	0,996171	0,792088
5	0,969022	0,998757	0,865202	0,996564	0,864272
6	0,975915	0,863557	0,994796	0,993793	0,859673
7	0,958027	0,998234	0,760084	0,989519	0,759064

Таблица 1 — Результаты нейросетевых моделей, обученных на отдельных образцах. Метрики качества считались для каждой модели на тестовой части соответствующего образца.

Номер образца	Доля правильных ответов	Точность	Полнота	PR-AUC	IoU
1	0,993453	0,954353	0,997504	0,99157	0,952079
2	0,993797	0,951161	0,995484	0,998651	0,947074
3	0,983351	0,884995	0,991901	0,992297	0,878646
4	0,966813	0,873061	0,997794	0,994909	0,871378
5	0,983910	0,964919	0,956062	0,995234	0,923946
6	0,985962	0,926988	0,992029	0,997118	0,920134
7	0,978669	0,908644	0,985702	0,994329	0,896824

Таблица 2 — Результаты нейросетевой модели, обученной на всех образцах одновременно. Метрики качества считались на тестовой части для каждого образца.

Для каждого образца на тренировочной части была обученная своя модель сверточной нейронной сети, с последующей оценкой тестовой части. В качестве метрик сегментации на тестовом наборе данных использовались классические метрики компьютерного зрения — точность (precision), полнота (recall), коэффициент Жаккара (intersection over union, IoU); ошибка в предсказании обычной и связной пористости, размер невязки векторов корреляционных функций и ошибка численного моделирования проницаемости (проведенного с помощью решателя finite-difference method Stokes solver, FDMSS).

В ходе исследования было установлено, что перечисленные метрики качества изменяются сонаправленно друг с другом. Модели сверточной нейронной сети показали в среднем хорошее качество сегментации на тестовой части выборки (см. таб. 1). При этом было установлено, что общее качество сегментации растет с увеличением количества обучающих данных, и наибольший рост наблюдался для образцов с худшим качеством сегментации отдельной нейросетевой моделью (см. таб. 2). Такое поведение метрик было объяснено недостаточностью разнообразия морфологических структур в отдельных образцах почвы. Данное исследование позволило предположить применимость нейросетевых моделей для построения

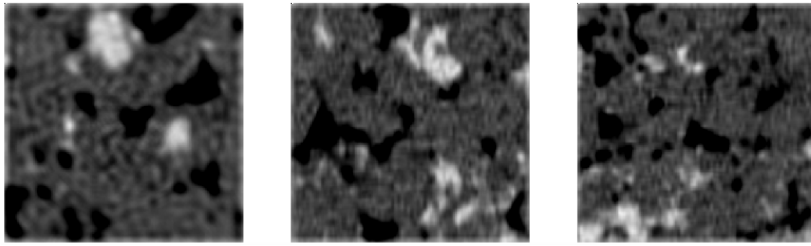


Рис. 3 — Пример изображения синтетического КТ размера 200^3 , построенного по многофазному образцу размера 1000^3 , в трех центральных проекциях.

универсального процесса сегментации с использованием синтетических размеченных данных. Так же полученные результаты подчеркивают важность разнообразия в обучающей выборке, которого сложно достичь одной разметкой без использования синтетических данных.

В **пятой главе** описана математическая модель томографа, которая использует пространственную информацию о пористой среде, физико-химические свойства ее фаз и геометрические параметрам установки томографа, и численный метод построения изображения синтетического КТ с помощью данной модели. Актуальность задачи построения синтетических размеченных выборок для тренировки моделей машинного обучения обоснована в предыдущей главе. Представленный алгоритм использует подход с построением прямой и обратной проекции с помощью преобразования Радона, при этом в его основе лежит более достоверная модель в сравнении с аналогичными методами, описанными ранее.

В начале главы дается физическая характеристика процесса съемки компьютерной томографии, выделяются основные физические и математические принципы, которые будут использоваться в данной работе для построения модели синтетического томографа. Далее описывается предлагаемый метод построения синтетического КТ. В качестве входных данных он принимает пространственное распределение фаз пористой среды U^c , проницаемость и плотность материалов фаз $\{(\sigma_{\omega_i}, n_{\omega_i})\}_i$, а так же набор настроек томографа, источника излучения и детектора. Алгоритм состоит из следующих шагов:

1. Для каждого материала ω_i рассчитывается изображение $C_{\omega_i} = n_{\omega_i}(X)I_{\omega_i}(X)$, где X — это координата вокселя, воксели C_{ω_i} пропорциональны локальному поглощению фазы ω_i в данной точке пространства.
2. Для каждой фазы ω_i , каждой точки детектора D и каждого угла поворота образца ϕ рассчитывается величина поглощения

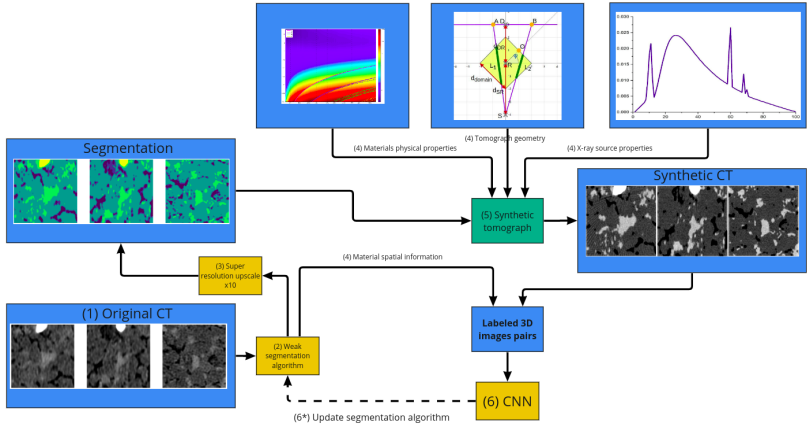


Рис. 4 — Схема процесса построение универсальной модели сегментации пористых сред. В качестве модели сегментации предполагается использование сверточных нейронных сетей. Обучающая выборка конструируется с помощью предложенного алгоритма построения синтетической КТ.

$$A_{\omega_i}^l(D, \phi) = \sigma_{\omega_i} \int C_{\omega_i}(l) dl \text{ и суммарное поглощение}$$

$$A^l(D, \phi) = \sum_{i=1}^N A_{\omega_i}^l;$$

3. Для каждой точки детектора D и каждого угла поворота образца ϕ рассчитывается величина проникаемости $T^l(D, \phi) = e^{-A^l}$ и количество долетевших до конкретной точки детектора фотонов $N^l(D, \phi)$ при заданном угле поворота, $N^l(D, \phi) \sim Pois(N_0 T^l)$, где N_0 — это число эмитированных частиц;
4. Получить необработанное изображение пористой среды U^a с помощью численного обратного преобразования Радона, примененного к синнограмме $N^l(D, \phi)$;
5. Преобразовать U^a с непрерывной областью значений в пористую среду в градациях серого U^g .

В результате работы алгоритма получается набор изображений синтетического КТ различного разрешения $\{U_s^g\}_s$.

Затем описано качественное сравнение результатов метода синтетического КТ с опубликованными методами на основе преобразования Радона и с реальными КТ-изображениями. Показано наличие на синтетическом КТ, полученного с помощью описанного численного метода, артефактов реконструкции, свойственных реальному КТ. Установлена высокая степень схожести гистограмм распределение интенсивностей пикселей реального и синтетического КТ-изображений. Далее была представлена схема (рис. 4) обучения потенциально идеальной модели сегментации пористых сред

на основе сверточных нейронных сетей с использованием данных, полученных с помощью синтетической томографии. Описаны преимущества предложенного подхода к построению универсальной модели по сравнению с опубликованными аналогами. С помощью описанного метода синтетического КТ выполнено исследование влияния морфологических свойств изображения на качество его сегментации с помощью предобученной сверточной нейронной сети. Модели сверточной нейронной сети обучались с помощью процедуры, описанной в главе 4. В этом исследовании было установлено, что на результаты в большей степени влияют значимые отличия в морфологии между разнородными образцами, чем незначительные отличия в морфологии, внесенные в исходный образец стохастической реконструкцией.

В шестой главе описаны возможности и функционал программного комплекса, предназначенного для первичного анализа КТ-изображений пористой сред. Программный комплекс включает в себя три модуля:

- Модуль «Анализ пустотного пространства» — предназначен для выделения однородных зон на КТ-изображении пористой среды;
- Модуль «Сегментация томографических изображений» — предназначен для предварительной обработки исходного КТ-изображения и его сегментации на несколько минеральных фаз (классов);
- Модуль «Синтетическая томография» — предназначен для настройки параметров моделей сегментации, реализованных в предыдущем модуле, а так же для оценки качества сегментации.

Программная реализация основной части модулей выполнена на языке Python с использованием классических научных библиотек и фреймворка Pytorch, который позволил перенести значимую часть трудоемких вычислений на GPU. Части программных модулей, вычисления в которых имеют высокие требования к производительности, но при этом не могут быть векторизованы, были реализованы на языке C++ с использованием технологии OpenMP.

В заключении приведены основные результаты работы.

Публикации автора по теме диссертации

Научные статьи, опубликованные в журналах WoS, Scopus, RSCI, а также в изданиях, рекомендованных для защиты в диссертационном совете МГУ имени М.В. Ломоносова по специальности:

1. Compressing soil structural information into parameterized correlation functions [Текст] / M. V. Karsanina, E. V. Lavrukhin, D. S. Fomin, A. V. Yudina, K. N. Abrosimov, K. M. Gerke // European Journal of Soil Science. United Kingdom, 2020. Vol. 72, no. 2. P. 561—577. DOI: [10.1111/ejss.13025](https://doi.org/10.1111/ejss.13025). [Scopus, SJR: 1,04; WOS, IF: 4,949; Scopus, IF: 4,108; Q1].

2. Assessing the fidelity of neural network-based segmentation of soil XCT images based on pore-scale modelling of saturated flow properties [Текст] / E. V. Lavrukhin, K. M. Gerke, K. A. Romanenko, K. N. Abrosimov, M. V. Karsanina // Soil and Tillage Research. Netherlands, 2021. Vol. 209. P. 104942. DOI: [10.1016/j.still.2021.104942](https://doi.org/10.1016/j.still.2021.104942). [Scopus, SJR: 1,8; WOS, IF: 5,374; Scopus, IF: 7,417; Q1].
3. *Lavrukhin E. V., Gerke K. M.* The Influence of Image Morphology on Neural Network-Based Segmentation Results [Текст] // Advances in Systems Science and Applications. 2022. Vol. 22, no. 4. P. 31—50. DOI: [10.25728/assa.2022.22.4.1308](https://doi.org/10.25728/assa.2022.22.4.1308). [Scopus, SJR: 0,22; Scopus, IF: 0,863; Q3].
4. *Lavrukhin E. V., Karsanina M. V., Gerke K. M.* Measuring structural nonstationarity: The use of imaging information to quantify homogeneity and inhomogeneity [Текст] // Physical Review E. 2023. Vol. 108, no. 6. P. 064128. DOI: [10.1103/PhysRevE.108.064128](https://doi.org/10.1103/PhysRevE.108.064128). [Scopus, SJR: 0,82; Scopus, IF: 2,4; Q1].

Иные публикации:

5. Использование методов машинного обучения для сегментации изображений пород полученных методом рентгеновской томографии [Текст] / Е. В. Лаврухин, К. М. Герке, Т. О. Сизоненко, Д. В. Корост // Геоевразия 2018. 2018. С. 418—422.
6. Решение проблемы обзора-разрешения томографического метода с помощью совмещения масштабов [Текст] / М. В. Карсанина, К. М. Герке, Т. О. Сизоненко, Е. В. Лаврухин, Д. В. Корост // Практическая микротомография. Сборник материалов Пятой международной конференции. 2018. С. 65—68.
7. Compressing soil structural information [Текст] / M. V. Karsanina, E. V. Lavrukhin, D. S. Fomin, A. V. Yudina, K. N. Abrosimov, K. M. Gerke // European Geosciences Union General Assembly 2020. Vol. 22. 2020. P. 10807—10807. DOI: [10.5194/egusphere-egu2020-10807](https://doi.org/10.5194/egusphere-egu2020-10807).
8. Томографическое исследование почвы при низком разрешении. Проблема автоматической сегментации [Текст] / Е. В. Лаврухин, И. Н. Семенов, К. Н. Абросимов, Д. В. Корост // Почвы — стратегический ресурс России: тезисы докладов VIII съезда Общества почвоведов им. В.В. Докучаева и Школы молодых ученых по морфологии и классификации почв. 2021. С. 29—30.
9. *Лаврухин Е. В.* Сегментация томографических изображений пористых сред с помощью нейронных сетей [Текст] // Тезисы докладов научной конференции "Тихоновские чтения 2023". 2023. С. 70.

Зарегистрированные программы для ЭВМ:

10. *Свидетельство о гос. регистрации программы для ЭВМ.* Модуль «Сегментация томографических изображений» ПК «РН — Цифровой керн» 1.0 / Р. В. Васильев, К. М. Герке, Е. В. Лаврухин [и др.] ; ПАО НК «Роснефть». № 2024611593 ; заявл. 08.02.2024 ; опубл. 26.01.2024, 2024613036 (RU). URL: https://new.fips.ru/registers-doc-view/fips_servlet?DB=EVM&DocNumber=2024613036&TypeFile=html.
11. *Свидетельство о гос. регистрации программы для ЭВМ.* Модуль «Синтетическая томография» ПК «РН — Цифровой керн» 1.0 / К. М. Герке, Е. В. Лаврухин, Р. В. Васильев [и др.] ; ПАО НК «Роснефть». № 2024614760 ; заявл. 18.03.2024 ; опубл. 06.03.2024, 2024616136 (RU). URL: https://new.fips.ru/registers-doc-view/fips_servlet?DB=EVM&DocNumber=2024616136&TypeFile=html.

Лаврухин Ефим Валерьевич

Математические методы обработки изображений пористых сред при отсутствии
размеченных данных

Автореф. дис. на соискание ученой степени канд. физ.-мат. наук

Подписано в печать _____. _____. _____. Заказ № _____

Формат 60×90/16. Усл. печ. л. 1. Тираж 100 экз.

Типография _____