МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
имени М. В. ЛОМОНОСОВА

На правах рукописи

Икэда Ясуси

Квантовый метод сдвига аргумента и квантовые алгебры Мищенко–Фоменко в $Ugl(d, \mathbb{C})$

Специальность 1.1.3 —
геометрия и топология

АВТОРЕФЕРАТ
диссертации на соискание учёной степени
кандидата физико-математических наук

Москва — 2024

Работа подготовлена на кафедре дифференциальной геометрии и приложений Механико-математического факультета ФГБОУ ВО «Московский государственный университет имени М. В. Ломоносова».

Научный руководителиь:	**Шарыгин Георгий Игорьевич,** кандидат физико-математических наук
Официальные оппоненты:	**Красильщик Иосиф Семенович,** доктор физико-математических наук, профессор, ФГБУН Институт проблем управления имени В.А.Трапезникова РАН, Лаборатория №6, главный научный сотрудник
	Сапонов Павел Алексеевич, доктор физико-математических наук, ФГАОУ ВО НИУ «Высшая школа экономики», факультет математики, профессор
	Тимашев Дмитрий Андреевич, кандидат физико-математических наук, доцент, ФГБОУ ВО «Московский государственный университет имени М.В. Ломоносова», Механико-математический факультет, кафедра высшей алгебры, доцент

Защита диссертации состоится 27 декабря 2024 г. в 16 часов 45 минут на заседании диссертационного совета МГУ.011.4 Московского государственного университета имени М.В. Ломоносова по адресу: 119234, Москва, ГСП-1, Ленинские горы, д. 1, МГУ имени М. В. Ломоносова, Механико-математический факультет, аудитория 14-08.

E-mail: dissovet.msu.011.4@math.msu.ru

С диссертацией можно ознакомиться в отделе диссертаций научной библиотеки МГУ имени М. В. Ломоносова (Ломоносовский просп., д. 27) и на портале: https://dissovet.msu.ru/dissertation/3185

Автореферат разослан

Ученый секретарь диссертационного совета
кандидат физико-математических наук **Кибкало В. А.**

Общая характеристика работы

Диссертация посвящена вопросу, лежащему на стыке теории интегрируемых систем, теории групп и алгебр Ли и теории деформационного квантования — вопросу о возможности переноса на универсальные обёртывающие алгебры (более общо, на любые алгебры, получающиеся деформационным квантованием из алгебр функций на пуассоновых многообразиях) метода сдвига аргумента, позволяющего строить интегрируемые системы на пространствах коприсоединённых представлений алгебр Ли. Более точно, вопросом, изучаемым в диссертации, является «квантование» (поднятие в универсальную обёртывающую алгебру Ug) оператора сдвига аргумента на Sg в частном случае $g = gl(d, \mathbb{C})$ и исследование свойств построенного оператора.

Пусть M — пуассоново многообразие, то есть многообразие с фиксированной структурой скобки Пуассона на гладких функциях. Напомним, что гамильтоновой интегрируемой системой на M назвается уравнение вида

$$\dot{x} = \{H, x\},$$

где H — функция Гамильтона (энергия системы). Интегрируемость таких систем понимают в смысле теоремы Лиувилля, то есть как существование большой системы первых интегралов в инволюции, то есть таких функций $H_1 = H, \dots, H_N$, что $\{H_i, H_j\} = 0$. Одним из главных вопросов теории гамильтоновых интегрируемых систем является задача построения систем первых интегралов в инволюции. Важным и эффективным методом построения коммутативных подалгебр в интегрируемых системах является *метод сдвига аргумента*, заключающийся в том, что при определённых условиях итерированные производные («сдвиги») центральных по отношению к скобке Пуассона функций вдоль некоторого векторного поля коммутируют между собой. Мы будем называть такое векторное поле «оператором сдвига».

С другой стороны, с каждым пуассоновым многообразием связывают ассоциативное некоммутативное умножение на пространстве формальных степенных рядов $C^\infty(M)[[\hbar]]$, которое называют деформационным квантованием многообразия M; если $M = g^*$ — пространство коприсоединённого представления алгебры Ли g, то деформационное квантование M тесно связано с универсальной обёртывающей алгеброй Ug. Если $C \in C^\infty(M)$ — пуассоново-коммутативная подалгебра (алгебра интегралов некоторой интегрируемой гамильтоновой системы), то выбор коммутативной подалгебры $\hat{C}$ в $C^\infty(M)[[\hbar]]$, «продолжающей» алгебру C, называют *квантовой интегрируемой системой* соответствующей классической системе C. Связи между квантовыми и классическими интегрируемыми системами являются важным объектом изучения.

Актуальность темы исследования и степень её разработанности

Как сказано выше, метод сдвига аргумента является одним из эффективных методов построения сохраняющихся величин в интегрируемых системах. Построенные при помощи него коммутативные пуассоновы подалгебры в Sg называют «алгебрами сдвига аргумента». Алгебры сдвига аргумента и их квантование (их «поднятия» в универсальную обёртывающую алгебру) являются предметом изучения многих современных работ. Вопрос о существовании операторов, поднимающих в универсальные обёртывающие алгебры оператор сдвига, ранее, насколько нам известно, в литературе не обсуждался. Наличие такого оператора в перспективе должно поспособствовать решению задачи квантования (подъёма в универсальные обёртывающие алгебры) других коммутативных пуассоновых подалгебр в Sg и в других важных примерах, в идеале оно должно помочь ответить на вопрос о квантовании метода бигамильтоновой индукции (другого широко распространённого метода построения коммутативных семейств функций на пуассоновых многообразиях).

Таким образом основные цели данной работы можно сформулировать в виде двух неразрывно связанных между собой пунктов:

1. предложить определение «квантового» оператора сдвига аргумента, действие которого на центральных элементах универсальной обёртывающей алгебры порождало бы квантовую алгебру сдвига аргумента;

2. описать квантовую алгебру сдвига аргумента и её элементы при помощи квантового оператора сдвига аргумента.

В диссертации дано решение этих задач для канонической структуры Пуассона на симметрической алгебре полной линейной алгебры Ли.

Метод сдвига аргумента для построения коммутативных относительно скобки Пуассона подалгебр в пуассоновых алгебрах был впервые предложен в работе А.С.Мищенко и А.Т.Фоменко[1] (обобщающей результаты С.В.Манакова[2]), как метод построения семейств функций коммутирующих относительно канонических скобок Пуассона на двойственном алгебре Ли g пространстве (по принятой терминологии, скобок Ли–Пуассона); в частности, если ограничиваться рассмотрением полиномиальных функций на g^*, то мы получим пуассоново-коммутативную подалгебру в симметрической алгебре алгебры Ли g. Основным ингредиентом этой конструкции является векторное поле ξ на двойственном пространстве g^*, постоянное относительно стандартных аффинных координат на g^*.

[1] А.С. Мищенко, А.Т. Фоменко. Уравнения Эйлера на конечномерных группах Ли, Известия Академии наук СССР. Серия математическая, 42(2), 396–415 (1978).

[2] С.В. Манаков. Замечание об интегрировании уравнений Эйлера динамики n-мерного твердого тела, Функциональный анализ и его приложения, 10(4), 93–94 (1976).

Позднее Э.Б.Винбергом было обнаружено, что эта конструкция может быть легко перенесена на произвольное пуассоново многообразие, на котором задано «нийенхёйсово» векторное поле, и даже на произвольное векторное пространство с билинейной операцией и «нийенхёйсовым» линейным оператором.

С другой стороны, с симплектическим или пуассоновым многообразием M связывают некоммутативную алгебру, «квантование» (геометрическое или деформационное) этого многообразия. Например, при разговоре о деформационном квантовании можно использовать конструкцию Б.В.Федосова[3], применимую для симплектических многообразий или более общую конструкцию М.Л.Концевича[4]. Как хорошо известно (см. работу М.Л.Концевича), для любой алгебры Ли g квантование пространства g^* тесно связано с универсальной обертывающей алгеброй Ug: можно сказать, что если ограничить эту конструкцию на полиномиальные функции на g^*, т.е. на Sg, то в результате квантования получается алгебра Ug. В этой связи Э.Б.Винберг[5] сформулировал задачу продолжения подалгебр «сдвига аргумента» (часто называемых «алгебрами Мищенко–Фоменко») до коммутативных подалгебр в универсальных обертывающих алгебрах.

Эта задача активно исследовалась различными авторами; серьезное продвижение было получено А.А.Тарасовым[6]: основываясь на данном М.Л.Назаровым и Г.И.Ольшанским[7] описании функций на gl_d^*, инвариантных относительно некоторого класса подгрупп в $GL(n)$, А.А.Тарасов показал, что для полей вида $\xi = \sum_i \xi^i \frac{\partial}{\partial x_{ii}}$ (где x_{ij} — стандартные координаты на gl_d, соответствующие матричным элементам) поднятия $\sigma(\xi^k(I_p))$ элементов $\xi^k(I_p)$ (здесь и далее I_p — коэффициенты универсального характеристического многочлена) в Ugl_d коммутируют между собой.

Позднее альтернативная конструкция подалгебр Мищенко–Фоменко в универсальной обертывающей алгебре была предложена Л.Г.Рыбниковым[8]: в этой работе рассматривается универсальная обертывающая алгебра $U_k\widehat{gl}_n$ на критическом уровне k алгебры Каца–Муди $\widehat{gl}_n$ — центральном расширении бесконечномерной алгебры Ли токов. У алгебры $U_k\widehat{gl}_n$ имеется большая центральная подалгебра, алгебра Фейгина–Френкеля; в работе Л.Г.Рыбникова построено параметризованное элементом $\xi \in g$ семейство гомоморфизмов $f_\xi\colon U_k\hat{g} \to Ug$ и показано, что f_ξ переводит образующие алгебры Фейгина–Френкеля в элементы, «накрываю-

[3]B. Fedosov. A simple geometrical construction of deformation quantization, Journal of Differential Geometry, 40(2), 213–238 (1994).

[4]M. Kontsevich. Deformation quantization of Poisson manifolds, Letters in Mathematical Physics, 66(3), 157–216 (2003).

[5]Э.Б. Винберг. О некоторых коммутативных подалгебрах универсальной обертывающей алгебры, Известия Академии наук СССР. Серия математическая, 54(1), 3–25 (1990).

[6]А.А. Тарасов. О некоторых коммутативных подалгебрах в универсальной обертывающей алгебре алгебры Ли $\mathfrak{gl}(n,\mathbb{C})$, Математический сборник, 191(9), 115–122 (2000).

[7]M. Nazarov, G. Olshanski. Bethe subalgebras in twisted Yangians, Communications in Mathematical Physics, 178(2), 483–506 (1996).

[8]Л.Г. Рыбников. Метод сдвига инвариантов и модель Годена, Функциональный анализ и его приложения, 40(3), 30–43 (2006).

щие» итерированные производные вдоль ξ от образующих центра Sgl_n. Важным достоинством этой конструкции является то, что она практически без изменений применима к любой полупростой алгебре Ли g.

Получающаяся этим методом конструкция достаточно сложна и связана со свойствами бесконечномерных алгебр Ли. Несмотря на это подход Рыбникова до сих пор остается основным методом построения квантования алгебры сдвига аргумента. За последнее время образующие центра Фейгина–Френкеля были достаточно хорошо изучены и благодаря усилиям А.И.Молева[9], А.И.Молева и О.С.Якимовой[10] и других математиков были получены явные формулы для образующих алгебр Мищенко–Фоменко не только для случая алгебр Ли матриц gl_n (или sl_n), но и для алгебр Ли из других основных серий полупростых алгебр Ли (серий B, C и D). Отметим, что методы вычислений зачастую связаны с использованием «янгианов» — специальных бесконечномерных алгебр Хопфа, построенных по алгебрам Ли, в которых удается выделить большие семейства коммутативных подалгебр (алгебр Бете).

Цели и задачи диссертации

Целью диссертации является построение квантовой версии метода сдвига аргумента на универсальных обёртывающих алгебрах Ugl_d и изучение его свойств. В качестве основного инструмента исследования выступают квантовые дифференцирования, введённые Д.И.Гуревичем, П.Н.Пятовым и П.А.Сапоновым. Для достижения поставленных целей в работе изучаются следующие основные задачи:

1. Пусть e — порождающая матрица алгебры Ли gl_d. Центр универсальной обертывающей алгебры Ugl_d порождается элементами $\operatorname{tr} e, \ldots, \operatorname{tr} e^d$. Следовательно, требуется найти квантовые дифференцирования матричных элементов $(e^n)^i_j$.

2. Изучить свойства оператора квантового сдвига аргумента, определённого с помощью квантовых дифференцирований.

3. Проверить гипотезы, что квантовые сдвиги аргумента любых двух центральных элементов универсальной обертывающей алгебры Ugl_d коммутируют.

4. Найти квантовые сдвиги аргумента высшего порядка для произвольного центрального элемента универсальной обертывающей алгебры Ugl_d.

[9] A. Molev. Feigin–Frenkel center in types B, C and D, Inventiones Mathematicae, 191(1), 1–34 (2013).

[10] A. Molev, O. Yakimova. Quantisation and nilpotent limits of Mishchenko–Fomenko subalgebras, Representation Theory, 23, 350–378 (2019).

5. Проверить гипотезы, что квантовые сдвиги аргумента любых порядков любых двух центральных элементов универсальной обертывающей алгебры Ugl_d коммутируют (квантовая версия теоремы А.С.Мищенко и А.Т.Фоменко для $g = gl_d$).

6. Проверить гипотезы, что квантовые алгебры сдвига аргумента порождаются образами итерированных операторов квазидифференцирования на центре универсальной обертывающей алгебры.

Положения, выносимые на защиту

В диссертационном исследовании изучались задачи, перечисленные в предыдущем пункте. В результате изучения получены следующие основные результаты, выносимые на защиту:

- дано описание квантовых дифференцирований матричных элементов степеней матрицы порождающих элементов алгебры Ли gl_d;
- сформулирована и доказана квантовая версия теоремы А.С.Мищенко и А.Т.Фоменко для алгебры Ли $g = gl_d$, как для сдвигов первого порядка, так и в общем случае;
- дано описание квантовых алгебр сдвига аргумента в универсальной обертывающей алгебре Ugl_d, в терминах квантовых операторов сдвига аргумента;
- дано описание квантовых сдвигов аргумента первого и второго порядка для произвольного центрального элемента универсальной обертывающей алгебры Ugl_d;
- явно описано ранее не встречавшееся в литературе коммутативное семейство элементов в универсальной обертывающей алгебре Ugl_d.

Научная новизна

Полученные в диссертации результаты являются новыми, получены автором самостоятельно и состоят в следующем.

1. Получена явная формула для квантовых дифференцирований для элементов $(e^n)^i_j$ — матричных элементов степеней матрицы образующих универсальной обертывающей алгебры Ugl_d.

2. Явно описаны квантовые сдвиги аргумента порядка один для произвольного центрального элемента универсальной обертывающей алгебры Ugl_d.

3. Определены генераторы подалгебры, порожденной квантовыми сдвигами аргумента центральных элементов универсальной обертывающей алгебры Ugl_d.

4. Показано, что квантовые сдвиги аргумента первого порядка любых двух центральных элементов универсальной обертывающей алгебры Ugl_d коммутируют между собой.

5. Найдены квантовые сдвиги аргумента второго порядка для произвольного центрального элемента универсальной обертывающей алгебры Ugl_d.

6. Определены генераторы подалгебры, порожденной квантовыми сдвигами аргумента второго порядка.

7. Доказана квантовая версия теоремы А.С.Мищенко и А.Т.Фоменко для $g = gl_d$.

8. Доказано, что квантовые алгебры сдвига аргумента порождаются образами итерированных операторов квазидифференцирования на центре универсальной обертывающей алгебры.

Методы исследования

В диссертации используются методы линейной и общей алгебры, комбинаторики, методы дифференциальной геометрии, теории групп и алгебр Ли и их универсальных обертывающих алгебр, методы деформационного квантования и методы символьных вычислений.

Теоретическая и практическая ценность работы

Работа имеет теоретический характер. Полученные результаты могут быть применены в теории интегрируемых систем, как классических гамильтоновых систем на алгебрах Ли, так и в теории квантовых интегрируемых систем (при изучении примеров таких систем и установления связей между ними), в теории алгебр и групп Ли (для построения коммутативных подалгебр в универсальных обертывающих алгебрах). Теория представляет из себя открытую проблему, потенциально связывающую между собою теорию алгебр Ли, теорию янгианов и квантовых групп с геометрией групп Ли и теорией интегрируемых систем. Кроме того, результаты могут быть использованы в задачах линейной и общей алгебры и комбинаторики.

Степень достоверности

Все результаты диссертации являются оригинальными, обоснованы с помощью строгих математических доказательств и опубликованы в открытой печати.

Результаты других авторов, используемые в диссертации, отмечены соответствующими ссылками.

Публикации по теме диссертации

По теме диссертации автором опубликовано 5 работ [1, 2, 3, 4, 5], из которых 4 личных работы и 1 работа в соавторстве (с научным руководителем Г.И.Шарыгиным). Основные результаты диссертации изложены в 3 статьях диссертанта [1, 2, 3] в рецензируемых изданиях, рекомендованных для защиты в диссертационном совете МГУ и входящих в международные базы цитирования (Web of Science / Scopus), RSCI.

Апробация работы

Основные результаты диссертации были представлены диссертантом в докладах по теме диссертации на следующих международных конференциях.

- Третья международная конференция по интегрируемым системам и нелинейной динамике, г. Ярославль, Россия, 7 октября 2021;
- Международная научная конференция студентов, аспирантов и молодых учёных «Ломоносов-2023», г. Москва, Россия, 19 апреля 2023;
- XL Workshop on Geometric Methods in Physics, г. Беловеж, Польша, 6 июля 2023;
- XII International Symposium on Quantum Theory and Symmetries, г. Прага, Чехия, 28 июля 2023;
- Четвёртая международная конференция по интегрируемым системам и нелинейной динамике, г. Ярославль, Россия, 28 сентября 2023;
- 20th Mathematics Conference for Young Researchers, г. Саппоро, Япония, 4 марта 2024;
- Noncommutative Integrable Systems, г. Нагоя, Япония, 13 марта 2024;

Также результаты излагались на известных научных семинарах:

- “Современные геометрические методы” под руководством профессора А.С.Мищенко и академика А.Т.Фоменко в МГУ (неоднократно),

- “Некоммутативная геометрия и топология” под руководством профессора А.С.Мищенко в МГУ (неоднократно),

- “Деформационное квантование и квантовые группы” под руководством профессора А.Б.Жеглова и доцента Г.И.Шарыгина в НМУ (неоднократно).

Структура и объём работы

Диссертация состоит из введения и четырёх глав, разделённых на подсекции, заключения и списка литературы. Общий объем диссертации 90 страниц. Список литературы состоит из 21 наименования.

Содержание работы

Введение содержит общие сведения об истории вопроса, актуальности темы исследований, целях, методах и основных результатах.

Первая глава посвящена более полному изложению истории вопроса, классическим результатам и содержит сведения, необходимые для последующих глав. Они включают в себя теорию пуассоновых алгебр и многообразий, теорию гамильтоновых систем, теорию скобок Ли-Пуассона на алгебре $C^\infty(g^*)$ (где g есть алгебра Ли), описание метода сдвига аргумента (как для общего случая, так и для случая скобок Ли-Пуассона), теорию универсальных обертывающих алгебр, изложена теорема Пуанкаре-Биркгофа-Витта и ее следствия.

Во второй главе диссертации изучаются квантовые дифференцирования на универсальной обертывающей алгебре Ugl_d, введённые Д.И.Гуревичем, П.Н.Пятовым и П.А.Сапоновым. Эти операторы однозначно характеризуются следующей теоремой:

Теорема (2.2.1). [11] *Квантовые дифференцирования на универсальной обертывающей алгебре Ugl_d — это матричные элементы единственного линейного отображения*

$$Ugl_d \to M(d, Ugl_d), \qquad\qquad x \mapsto \partial x$$

такого что

1. $\partial\nu = 0$ *для любого числа* ν.

[11] D. Gurevich, P. Pyatov, and P. Saponov. Braided Weyl algebras and differential calculus on $U(u(2))$, Journal of Geometry and Physics, 62(5), 1175–1188 (2012).

2. *$\partial\,\mathrm{tr}(\xi e) = \xi$ для любой числовой матрицы ξ.*

3. *$\partial(xy) = (\partial x)y + x(\partial y) + (\partial x)(\partial y)$ для любых элементов x и y универсальной обертывающей алгебры Ugl_d.*

Здесь e — это *матрица порождающих элементов* алгебры Ли gl_d и условие 3 называется *квантовым правилом Лейбница.* Эти операторы являются квантовыми аналогами операторов частных производных на симметрической алгебре $Sgl_d = \mathbb{C}[e^i_j : i,j = 1,\ldots,d]$:

$$\bar\partial = \begin{pmatrix} \bar\partial^1_1 & \ldots & \bar\partial^1_d \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \bar\partial^d_1 & \ldots & \bar\partial^d_d \end{pmatrix} \in \hom(Sgl_d, M(d, Sgl_d)), \qquad \bar\partial^i_j = \frac{\partial}{\partial e^j_i} \in \hom Sgl_d,$$

потому что оператор $\bar\partial$ однозначно характеризуются следующими условиями:

1. $\bar\partial\nu = 0$ для любого числа ν. ($\Leftrightarrow \bar\partial^i_j\nu = 0$)

2. $\bar\partial\,\mathrm{tr}(\xi e) = \xi$ для любой числовой матрицы ξ. ($\Leftrightarrow \bar\partial^i_j e^k_\ell = \delta^i_\ell\delta^k_j$)

3. $\bar\partial(xy) = (\bar\partial x)y + x(\bar\partial y)$ для любых элементов x и y универсальной обертывающей алгебры Ugl_d. ($\Leftrightarrow \bar\partial^i_j(xy) = (\bar\partial^i_j x)y + x(\bar\partial^i_j y)$)

В работе представлено два метода построения квантовых дифференцирований:

1. На тензорной алгебре $Tgl_d = \mathbb{C}\langle e^i_j : i,j = 1,\ldots,d\rangle$ индуктивно определяют операторы таким образом, чтобы они удовлетворяли квантовому правилу Лейбница, после чего доказывают, что они сохраняет идеал, соответствующий универсальной обертывающей алгебре Ugl_d. Этот метод описан в параграфе 2.2.

2. Мы используем тот факт, что сумма $\delta + \partial$ квантового дифференцирования ∂ и вложения δ алгебры Ugl_d в алгебру $M(d, Ugl_d)$ является гомоморфизмом унитальных комплексных алгебр. Используя универсальность тензорной алгебры Tgl_d, можно построить гомоморфизм унитальных комплексных алгебр, продолжив до гомоморфизма линейное отображение

$$gl_d \to M(d, Ugl_d), \qquad \mathrm{tr}(\xi e) \mapsto \xi.$$

Иаким образом получаем отображение

$$\begin{tikzcd}
gl_d \arrow[r] \arrow[d] & M(d, U gl_d)\,, \\
T gl_d \arrow[ur] \arrow[d] & \\
U gl_d \arrow[uur, "\delta+\partial"'] &
\end{tikzcd} \qquad\qquad \operatorname{tr}(\xi e) \mapsto \xi.$$

Этот метод описан в абзаце 2.3.

Затем в параграфе 2.4 доказаны основные формулы для квантовых дифференцирований, которые оказываются полезными повсюду в этой диссертации. Сформулируем этот результат, опубликованный и доказанный диссертантом в [1]:

Теорема (2.4.1). *Квантовые дифференцирования матричных элементов* $(e^n)^i_j$ *задаются следующей формулой:*

$$\begin{aligned}\partial(e^n)^i_j &= \sum_{m=0}^{n-1}\Big(f_+^{(n-m-1)}(e)_j(e^m)^i + f_-^{(n-m-1)}(e)(e^m)^i_j\Big)\\ &= \sum_{m=0}^{n-1}\Big((e^m)_j f_+^{(n-m-1)}(e)^i + (e^m)^i_j f_-^{(n-m-1)}(e)\Big),\end{aligned}$$

где

$$f_\pm^{(n)}(x) = \frac{(x+1)^n \pm (x-1)^n}{2} = \sum_{m=0}^{n} \frac{1 \pm (-1)^{n-m}}{2}\binom{n}{m}x^m \in \mathbb{Z}[x].$$

Обозначим через C центр универсальной обертывающей алгебры $U gl_d$. Он порождается элементами $\operatorname{tr} e$, $\operatorname{tr} e^2$, $\ldots$. Пусть ∂_ξ обозначает оператор $\operatorname{tr}(\xi\partial)$ на $U gl_d$, где ξ — постоянная матрица коэффициентов, мы будем называть этот оператор оператором “квантового сдвига аргумента”. Применяя к элементам центра формулу теоремы 2.4.1, автор получил следующие результаты (см. параграф 2.5):

- Формулы для квантовых сдвигов аргумента в случае центральных элементов:

  Следствие (2.5.1). *Для конечного произведения* $\prod_m \operatorname{tr} e^{n_m}$ *имеют место равенства*

  $$(\operatorname{tr}\xi + \partial_\xi)\prod_m \operatorname{tr} e^{n_m} = \sum_{m_1=-1}^{n_1} \operatorname{tr} e^{m_1} \sum_{m_2=-1}^{n_2} \operatorname{tr} e^{m_2} \cdots \operatorname{tr}\big(\xi \prod_k f_-^{(n_k-m_k-1)}(e)\big).$$

- Основная теорема для $m = n = 1$:

Теорема (2.5.2). *Для любых центральных элементов x и y универсальной обертывающей алгебры Ugl_d справедлива формула*

$$[\partial_\xi x, \partial_\xi y] = 0.$$

- Генераторы подалгебры $C_\xi^{(1)} \subseteq Ugl_d$, порожденной однократными квантовыми сдвигами аргумента центральных элементов в универсальной оберывающей алгебре описываются следующим образом:

  Теорема (2.5.3). $C_\xi^{(1)} = C\Big[\operatorname{tr}\big(\xi e^n\big) : n = 1, 2, \dots\Big]$.

В третьей главе доказана основная теорема этой диссертации. Она формулируется следующим образом:

Теорема (3.1.1, см. [2]). *Для любых неотрицательных целых чисел m и n и любых центральных элементов x и y универсальной обертывающей алгебры Ugl_d справедливо следующее равенство:*

$$[\partial_\xi^m x, \partial_\xi^n y] = 0.$$

В параграфе 3.2 изучается, как квантовый сдвиг аргумента трансформируется под действием сопряжения алгебры Ugl_d элементами общей линейной группы GL_d. В результате, основная теорема 3.1.1 сводится к случаю, когда ξ является диагональной матрицей с различными собственными значениями. В этом случае можно использовать характеризацию алгебры квантового сдвига аргументов, предложенную Э.Б.Винбергом и Л.Г.Рыбниковым, доказавшими, что при условии $\xi = \operatorname{diag}(z_1, \dots, z_d)$, $z_i \neq z_j$, $i \neq j$, квантовая алгебра сдвига аргумента оказывается централизатором множества

$$\left\{ e_i^i, \sum_{j \neq i} \frac{e_i^j e_j^i}{z_i - z_j} \right\}_{i=1}^d.$$

.

В параграфе 3.3 доказывается основная теорема 3.1.1, для чего по индукции доказывается, что элементы $\partial_\xi^m x$ для любого центрального элемента x универсальной обертывающей алгебры Ugl_d лежит в централизаторе элементов, указанных выше.

В параграфе 3.4 в качестве следствия основной теоремы показано, что алгебра C_ξ, порожденная элементами центра универсальной обертывающей алгебры Ugl_d и их высшими квантовыми сдвигами аргумента, является квантовой алгеброй сдвига аргумента в направлении ξ:

Теорема (3.4.1, см. [2]). *Алгебра C_ξ является квантовой алгеброй сдвига аргумента в направлении ξ.*

Линейное отображение $\delta + \partial$ (где δ — единичная матрица) сохраняет произведение в силу квантового правила Лейбница. Далее через ∂ мы будем обозначать гомоморфизм $\delta + \partial$.

Квантовая алгебра C_ξ сдвига аргумента представляется как сумма фильтраций $C_\xi^{(n)}$:

$$C_\xi = \bigcup_{n=0}^{\infty} C_\xi^{(n)}, \qquad C_\xi^{(0)} = C, \qquad C_\xi^{(n)} = C_\xi^{(n-1)}\big[\partial_\xi^n C\big],$$

где $C_\xi^{(n-1)}\big[\partial_\xi^n C\big]$ обозначает комплексную алгебру, порожденную комплексной алгеброй $C_\xi^{(n-1)}$ и множеством $\partial_\xi^n C$. В этих обозначениях результаты второй половины главы 2 диссертации могут быть кратко сформулированы следующим образом:

- Следствие 2.5.1:

$$\partial_\xi \prod_m \operatorname{tr} e^{n_m} = \sum_{m_1=-1}^{n_1} \operatorname{tr} e^{m_1} \sum_{m_2=-1}^{n_2} \operatorname{tr} e^{m_2} \cdots \operatorname{tr}\big(\xi \prod_k f_-^{(n_k-m_k-1)}(e)\big).$$

- Теорема 2.5.3:

$$C_\xi^{(1)} = C\Big[\operatorname{tr}\big(\xi e^n\big) : n = 1, 2, \ldots\Big].$$

В четвёртой главе мы доказываем следующие результаты:

- Квантовый сдвиг аргумента второго порядка произвольного центрального элемента универсальной обертывающей алгебры Ugl_d описывается следующей формулой:

$$\partial_\xi^2 \prod_m \operatorname{tr} e^{n_m} = \sum_{m_1=-1}^{n_1} \operatorname{tr} e^{m_1} \sum_{m_2=-1}^{n_2} \operatorname{tr} e^{m_2} \cdots \sum_{k_1=-1}^{n_1-m_1-1} \sum_{k_2=-1}^{n_2-m_2-1} \cdots$$
$$\operatorname{tr}\Big(\xi \prod_\ell f_-^{(k_\ell)}(e) \partial \operatorname{tr}\big(\xi \prod_\ell f_-^{(n_\ell-m_\ell-k_\ell-2)}(e)\big)\Big),$$

$$\operatorname{tr}\Big(\xi e^m \partial \operatorname{tr}\big(\xi e^n\big)\Big) = \tau_\xi\Big(P_n^{(m)}\Big) + \sum_{j=1}^{n+1} \operatorname{tr}\big(\xi e^m f_-^{(n-j)}(e)\big) \operatorname{tr}\big(\xi e^{j-1}\big).$$

- Алгебра $C_\xi^{(2)}$ может быть описана при помощи следующего набора порождающих элементов:

$$C_\xi^{(2)} = C_\xi^{(1)}\Big[\tau_\xi\Big(P_n^{(n)}\Big), \tau_\xi\Big(P_{n+1}^{(n)}\Big) + \tau_\xi\Big(P_n^{(n+1)}\Big) : n = 1, 2, \ldots\Big].$$

Введём следующие обозначения:

Определение (4.2.1)**.** Пусть $P_n^{(m)}$ — матрица размера $(m+n)\times n$, элементы которой равны коэффициентам полинома

$$x^m f_+^{(n-j)}(x) = \sum_{i=1}^{m+n} \Bigl(P_n^{(m)}\Bigr)_j^i x^{i-1};$$

положим тогда $P_n = P_n^{(0)}$.

Определение (4.2.2)**.** Для любой числовой матрицы x размера $m\times n$ положим $\tau_\xi(x) = \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} x_j^i \operatorname{tr}\bigl(\xi e^{i-1}\xi e^{j-1}\bigr)$.

При помощи формулы для второго порядка квантовых дифференцирований (см. теорему 2.4.1) мы доказываем равенство

$$C_\xi^{(2)} = C_\xi^{(1)}\left[(\tau_\xi\circ\sigma)\begin{pmatrix} 0 & P_n^T \\ P_m & 0\end{pmatrix} : m,n=0,1,2,\dots\right],$$

где $\sigma(x) = \sum_{i,j} x_j^i \delta_{\max\{i,j\}}\delta^{\min\{i,j\}}$. Теперь порождающие элементы алгебры $C_\xi^{(2)}$ можно описать при помощи следующей теоремы, полученной диссертантом:

Теорема (4.3.1, см. [3])**.** *Для любых целых неотрицательных чисел m и n выполняются равенства*

$$\sigma\begin{pmatrix} 0 & P_m^T \\ P_{m+2n} & 0\end{pmatrix} = \sum_{k=0}^{n}\left(\binom{2n-k}{k} + \binom{2n-k-1}{k-1}\right)P_{m+k}^{(m+k)},$$

$$\sigma\begin{pmatrix} 0 & P_m^T \\ P_{m+2n+1} & 0\end{pmatrix} = \sum_{k=0}^{n}\binom{2n-k}{k}\Bigl(P_{m+k+1}^{(m+k)} + P_{m+k}^{(m+k+1)}\Bigr).$$

Теорема 4.3.1 эквивалентна следующим четырём комбинаторным равенствам:

$$\binom{2n_1+n_2+2n_3+1}{2n_3}+\binom{n_2+2n_3}{2n_3}$$
$$=\sum_{n_4=0}^{n_3}\left(\binom{n_1+n_2+n_3+n_4+1}{2n_4}+\binom{n_1+n_2+n_3+n_4}{2n_4}\right)\binom{n_1+n_3-n_4}{2(n_3-n_4)},$$

$$\binom{2n_1+n_2+2n_3+2}{2n_3}+\binom{n_2+2n_3}{2n_3}$$
$$=\sum_{n_4=0}^{n_3}\binom{n_1+n_2+n_3+n_4+1}{2n_4}\left(\binom{n_1+n_3-n_4+1}{2(n_3-n_4)}+\binom{n_1+n_3-n_4}{2(n_3-n_4)}\right),$$

$$f_+^{(m+2n)}(x)+f_+^{(m)}(x)x^{2n}=\sum_{k=0}^{n}\left(\binom{2n-k}{k}+\binom{2n-k-1}{k-1}\right)f_+^{(m+k)}(x)x^k,$$

$$f_+^{(m+2n+1)}(x)+f_+^{(m)}(x)x^{2n+1}=\sum_{k=0}^{n}\binom{2n-k}{k}\left(f_+^{(m+k+1)}(x)x^k+f_+^{(m+k)}(x)x^{k+1}\right),$$

которые были доказаны при помощи символьных вычислений в пакете Mathematica.

Заключение

Диссертация открыла путь к конструктивному описанию квантовой алгебры сдвига аргументов, ранее определяемой аксиоматически или при помощи перечисления образующих. Для этого были использованы операторы квантового сдвига аргумента, соответствие которых классическим операторам сдвига аргумента достаточно очевидно из определений. В диссертации доказано, что операторы квантового сдвига аргумента удовлетворяют теореме (основной теореме диссертации), аналогичной теореме А.С.Мищенко и А.Т.Фоменко в классическом случае. Как следствие, в диссертации установлено, что квантовая алгебра сдвига аргумента и порождается образами уцентральных элементов относительно операторов квантового сдвига аргумента. Существование операторов квантового сдвига аргумента, порождающих квантовые алгебр сдвига аргумента для произвольных алгебр Ли, пока не установлено. Диссертация является первым шагом в этом направлении. Для практической конструкции квантовой алгебры сдвига аргумента необходимо вычисление сдвигов аргумента высокого порядка центральных элементов. Здесь важную роль играет основная формула для квантовых дифференцирований, доказанная во второй главе диссертации. При помощи этой формулы в диссертации доказана коммутативность элементов, получающихся однократным квантовым сдвигом из центральных элементов универсальной обёртывающей алгебры; кроме того, при помощи этой формулы и результата Э.Б.Винберга и Л.Г.Рыбникова доказана основная теорема диссертации, коммутативность элементов, получающихся из центральных сдвигами высшего порядка. Основная теорема позволяет ввести фильтрацию на квантовой алгебры сдвига аргумента по порядку операторов квантового сдвига аргумента. Полное описание всех уровней этой фильтрации является задачей для будущих исследований, однако в диссертации удалось получить полные формулы для квантовых сдвигов аргумента центральных элементов и генераторов квантовой алгебры сдвига аргумента порядка вплоть до второго. Для этого потребовались сложные комбинаторные равенства, при работе с которыми была использована система компьютерной алгебры Mathematica.

Благодарности

Автор выражает глубокую благодарность своему научному руководителю доценту Г.И. Шарыгину за постановку задачи, внимание и поддержку во время работы, а также всему коллективу кафедры дифференциальной геометрии и приложений механико-математического факультета МГУ за вдохновляющую атмосферу и поддержку.

Список публикаций автора по теме диссертации

Статьи в рецензируемых научных изданиях, рекомендованных для защиты в диссертационном совете МГУ

[1] Я.Икэда. Квазидифференциальный оператор и квантовый метод сдвига инвариантов. Теоретическая и математическая физика. **212** (1) (2022) 33–39.
Английский перевод: Y. Ikeda. Quasidifferential operator and quantum argument shift method. Theoretical and Mathematical Physics. **212** (1) (2022) 918–924.
DOI: 10.1134/S0040577922070030
Журнал индексируется в Scopus. IF: SJR 0.325. 0,4375 печ. л.

[2] Y. Ikeda and G. Sharygin. The argument shift method in universal enveloping algebra $U\mathfrak{gl}_d$. Journal of Geometry and Physics. **195** (2024) 105030.
Вклад соавторов равноценный и неделимый (50%/50%).
DOI: 10.1016/j.geomphys.2023.105030
Журнал индексируется в Scopus. IF: SJR 0.617. 0,6875 печ. л.

[3] Я.Икэда. Квантовые сдвиги аргумента второго порядка в Ugl_d. Теоретическая и математическая физика. **220** (2) (2024) 275–285.
Английский перевод: Y. Ikeda. Second-order quantum argument shifts in Ugl_d.

Theoretical and Mathematical Physics. **220** (2) (2024) 1294–1303.
DOI: 10.1134/S004057792408004X
Журнал индексируется в Scopus. IF: SJR 0.325. 0,6250 печ. л.

Другие публикации автора по теме диссертации

[4] Y. Ikeda. Quantum derivation and Mishchenko–Fomenko construction. Geometric Methods in Physics XL. (2024) 383–391.
DOI: 10.1007/978-3-031-62407-0_25
0,5625 печ. л.

[5] Y. Ikeda. Quantum analog of Mishchenko-Fomenko theorem for Ugl_d. Hokkaido University technical report series in Mathematics. **186** (2024) 271–280.
DOI: 10.14943/109379
0,6250 печ. л.