**Отзыв на кандидатскую диссертацию Анастасии Оноприенко "Совместная логика задач и высказываний"**

В диссертации Анастасии Оноприенко исследована построенная мной логика QHC и её пропозициональный фрагмент HC. На мой взгляд, Анастасия доказала содержательные и полезные теоремы и написала качественный текст.

Логика HC, известная также как логика задач и высказываний, удовлетворяет всем условиям исследовательской программы, сформулированной А. Н. Колмогоровым в комментарии 1985 года к своей статье 1932 года. Она содержит в себе интуиционистскую логику, понимаемую, следуя этой самой статье Колмогорова, как логика задач, и классическую логику, понимаемую, как логика высказываний. Язык логики задач и высказываний очень прост: он состоит из классической части и интуиционистской части, не содержащих ровным счётом ничего нового, и двух дополнительных операторов, понимаемых следующим образом: во-первых, высказыванию $p$ сопоставляется задача "доказать $p$"; во-вторых, задаче $\alpha$ сопоставляется высказывание "$\alpha$ имеет решение". Первый оператор рассматривал уже сам Колмогоров в своих письмах к Гейтингу, а входило ли в его планы изучение второго — неизвестно. Но оказывается, что эти два оператора довольно удачно дополняют друг друга с чисто формальной точки зрения, индуцируя пару сопряжённых функторов между категориями, задаваемыми частичными порядками на алгебрах Линденбаума интуиционисткого и классического фрагментов логики QHC.

Зачем нужна логика QHC? На этот вопрос можно отвечать по-разному. Можно искать и находить эту логику в "Началах" Евклида и в логике обычных действий с уравнениями в радикалах. С другой стороны, логика QHC позволяет дополнить и прояснить хорошо известные формальные связи между классической и интуиционистской логиками. Действительно, как перевод Колмогорова из классической логики в интуиционистскую, так и перевод Гёделя из интуиционистской логики в модальную логику S4 продолжаются до синтаксических переводов из логики QHC в себя. Если же эти расширенные переводы подправить таким образом, чтобы задачи переходили в задачи, а высказывания — в высказывания, то колмогоровский перевод начинает напоминать реальную связь между конструктивными и неконструктивными рассуждениями, имеющую место в математической практике, и оказывается связан с вложением Фиттинга классической логики в S4; а гёделев перевод становится родственным известному в конструктивной теории типов оператору "схлопывания", который для каждой задачи делает все её решения эквивалентными друг другу.

В контексте логик первого порядка некоторый аналог оператора схлопывания известен, в частности, под названием "геометрическая модальность" и появился уже в книге Х. Карри 1950 года. Вариант этой модальности, присутствующий в логике QHC, порождает интуиционистскую модальную логику QH4, которая до некоторой степени аналогична, или скорее двойственна, классической модальной логике QS4, т.е. предикатной версии логики S4. Один из основных результатов диссертации — QHC является её консервативным расширением. Эта теорема Анастасии отвечает на вопрос, поставленный мной ещё 9 лет назад.

Другой важный результат диссертации — построение класса моделей логики QHC, относительно которых она полна. Этого не было сделано раньше, и вот в диссертации Анастасии такой класс моделей наконец построен. Важность этого результата для исследований логики QHC сложно переоценить. В пропозициональном случае Анастасия также доказала полноту логики задач и высказываний относительно некоторого класса *топологических* моделей. Это отвечает на ещё один поставленный мной вопрос, а точнее — на его пропозициональный случай.

Есть и третий мой вопрос, на который Анастасия дала ответ в диссертации. В своей работе я выписал около сотни принципов и правил вывода, которые выглядят достаточно просто и интересно, невыводимы в логике QHC, но в то же время консервативны как над классической, так и над интуиционистской логикой. Выяснилось, что из этих принципов и правил всего 11 неэквивалентных, а всё остальное — их эквивалентные формы. Также я нашёл все имеющиеся импликации между этими 11 принципами и правилами, за исключением одной, наличие которой моя техника не позволила ни доказать, ни опровергнуть. Анастасия выяснила, используя свои модели логики задач и высказываний, что эта импликация на самом деле не имеет места. Хотя если быть совсем точным, её результат сформулирован в пропозициональном случае, а мой вопрос — в предикатном.

В диссертации получены и другие полезные результаты, в частности дизъюнктивное и экзистенциальное свойства для логики QHC и сведение понятия выводимости из посылок для логики QHC к такому, для которого выполнена теорема о дедукции.

## Замечания к тексту

(1) Во введении (стр. 9) говорится, что "Интуиционистская модальная логика, содержащая аксиомы $(1^\nabla)$, $(2^\nabla)$ и $(4^\nabla)$, впервые возникла в работе Р. Голдблатта", опубликованной в 1981 году. Но в действительности эта логика рассматривалась уже на 30 лет раньше, а именно, на странице 120 в книге H. Curry, *A Theory of Formal Deducibility*, Notre Dame Math. Lectures, vol. 6, University of Notre Dame, Notre Dame, IN, 1950. Также она рассматривалась и в книге "Топосы" того же Голдблатта, вышедшей в 1979 году.

(2) На странице 36, пятая строка снизу, вместо "имеем $I \to (\tau \to J)$" подразумевалось, видимо, "имеем $(I \to \tau) \wedge I \to J$", иначе следующая импликация "Отсюда получаем ..." непонятна.

(3) В начале параграфа 2.4 говорится о "решётке импликаций". Мне кажется, слово "решётка" здесь не по делу. Для двух расширений $L_1$ и $L_2$ заданной логики $L$, понимаемых как множества выводимых правил (включая принципы, т.е. правила без посылок), можно рассмотреть логику $L_1 \cap L_2$, а также наименьшую логику $L_1 \vee L_2$, содержащую множество $L_1 \cup L_2$. Эти две операции $\cap$ и $\vee$ на множестве расширений логики $L$ превращают его в решётку.

В случае расширений $L_1$ и $L_2$ логики QHC, заданных единичными принципами одного типа (т.е. оба — типа высказывание или оба — типа задача), по сути дела речь идёт о конъюнкции и о дизъюнкции этих двух принципов. Но ни в моей работе, ни в диссертации Анастасии импликации между подобными конъюнкциями и дизъюнкциями не изучены (за очень редкими исключениями). Описание решётки расширений логики QHC — интересная задача, но в её направлении пока сделано не так много. Я должен признать, что эта терминологическая путаница могла возникнуть в том числе по моей вине, поскольку в моей работе в одном месте была допущена аналогичная опечатка.

(4) Во введении (стр. 16) сказано, что в конце главы 2 "получен ответ на вопрос, поставленный С. А. Мелиховым [arXiv: 1504.03379]: верно ли, что PC-правило влечёт ED-принцип?" Но теорема 2.5, которой заканчивается эта глава, сформулирована и доказана в пропозициональной логике HC, тогда как оригинальный вопрос был сформулирован в предикатной логике QHC. Я подозреваю, что модели предикатной логики QHC, построенные в диссертации, позволяют решить и оригинальный вопрос без особых дополнительных усилий, так что я не думаю, что здесь есть какой-то содержательный пробел. Но всё же с формальной точки зрения из теоремы 2.5, как она сформулирована, ответ на оригинальный вопрос напрямую не следует — или во всяком случае мне такая импликация не очевидна. Ведь принцип, содержащий кванторы ("существенным", на первый взгляд, образом), вполне может оказаться эквивалентным принципу, не содержащему кванторы (такие примеры есть, например, в моей работе, упомянутой выше).

(5) В главе 3 рассматриваются модели логик HC и H4, основанные на задании топологического пространства с выделенным в нём всюду плотным подмножеством, и для этих моделей доказаны, кроме прочего, теоремы корректности (теоремы 3.4 и 3.6). В случае логики H4 эти модели являются частным случаем моделей, построенных в §6 работы D. S. Macnab, *Modal operators on Heyting algebras*, Algebra Universalis 12 (1981), 5–29.[1] В случае логики HC эти модели являются частным случаем моделей, построенных в параграфе "Topology of Onoprienko's models" моего препринта, который я отправил соискательнице и её научному руководителю в декабре 2018 года (причём доказательство теоремы корректности там было приведено).[2] Но обо всём этом в диссертации ничего не сказано. Впрочем, здесь следует отметить, что, во-первых, теорема 3.4 — это достаточно простой результат; куда интереснее

[1] А именно, Макнаб рассматривал модели модальной интуиционистской логики Карри (которой посвящено замечание 1 выше), основанные на задании топологического пространства с выделенным в нём подмножеством (не обязательно плотным). Логика H4 получается из неё добавлением одной аксиомы, и эта аксиома в точности соответствует требованию плотности подмножества.

[2] А именно, в моём препринте шла речь о моделях QHC, основанных на задании отображения с плотным образом; если из логики QHC выкинуть кванторы, а в качестве этого отображения взять отображение включения из подмножества в пространство, то получаются в точности модели, о которых идёт речь в теореме 3.4 из диссертации.

теорема 3.5 — теорема полноты для этого класса моделей, которая отвечает на пропозициональный случай открытого вопроса из моего препринта (этот вопрос в диссертации тоже не упоминается). Во-вторых, этот класс топологических моделей появился у меня в результате анализа класса моделей, построенных в дипломной работе Анастасии (защищённой в мае 2018 года), и вряд ли бы возник без этой её работы, хотя я также исходил из моделей Макнаба (о которых я узнал от М. Джибладзе в сентябре 2018 года) и из так называемых "обобщённых моделей Тарского" металогики интуиционистской логики [arXiv:1504.03380v3 (2017 г.)].

* * *

Результаты диссертации обоснованы, рассуждения проводятся на достаточно строгом уровне. Существенных пробелов в доказательствах я не обнаружил. Основные результаты опубликованы в 3 статьях в Матсборнике и Вестнике МГУ и были представлены в многочисленных докладах на конференциях и семинарах. Основные результаты диссертации новые и, насколько я могу судить, получены автором самостоятельно. Темы, затронутые в диссертации, относятся к единому кругу вопросов — совместной логике задач и высказываний и её предикатному аналогу. Результаты других авторов, упомянутые в тексте диссертации, отмечены соответствующими ссылками. Автореферат полно и правильно отражает содержание диссертации.

Считаю, что диссертация отвечает всем требованиям, предъявляемым к работам на соискание учёной степени кандидата наук, и вполне достойна присуждения этой степени её автору, Анастасии Александровне Оноприенко.

К.ф.-м.н., с.н.с. Отдела геометрии и топологии
Математического института им. В. А. Стеклова РАН,

Сергей Мелихов
30 октября 2022г.

119991 Москва, ул. Губкина 8
melikhov@mi-ras.ru

ПОДПИСЬ ЗАВЕРЯЮ
ВЕДУЩИЙ СПЕЦИАЛИСТ
О.О. ТИТОВА

ОТДЕЛ
КАДРОВ