МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
имени М.В. ЛОМОНОСОВА

На правах рукописи

Емельянов Дмитрий Павлович

Построение решений краевых задач для нерегулярно вырождающихся эллиптических дифференциальных уравнений с аналитическими коэффициентами

1.1.2 – Дифференциальные уравнения и математическая физика

АВТОРЕФЕРАТ

диссертации на соискание ученой степени
кандидата физико-математических наук

Москва – 2024

Диссертация подготовлена на кафедре Общей математики
факультета Вычислительной математики и кибернетики
Московского государственного университета имени М.В. Ломоносова.

Научный руководитель: **Ломов Игорь Сергеевич,**

доктор физико-математических наук, доцент, МГУ имени М.В. Ломоносова, факультет Вычислительной математики и кибернетики, кафедра общей математики, профессор

Официальные оппоненты: **Камынин Виталий Леонидович,**

доктор физико-математических наук, профессор, Национальный исследовательский ядерный университет «МИФИ», институт общей профессиональной подготовки, кафедра высшей математики, профессор

Качалов Василий Иванович,

доктор физико-математических наук, доцент, Национальный исследовательский университет «МЭИ», кафедра высшей математики, заведующий кафедрой

Солдатов Александр Павлович,

доктор физико-математических наук, профессор, ФИЦ «Информатика и управление» РАН, отдел вычислительных методов и математической физики, ведущий научный сотрудник

Защита диссертации состоится «25» сентября 2024 года в 15 часов 00 минут на заседании диссертационного совета *МГУ.011.8* ФГБОУ ВО «Московский государственный университет имени М.В. Ломоносова» по адресу: *Российская Федерация, 119991, Москва, Ленинские горы, д.1, главное здание МГУ, ауд.16-10.*

E-mail: ast.diffiety@gmail.com

С диссертацией можно ознакомиться в отделе диссертаций научной библиотеки МГУ имени М.В. Ломоносова (Ломоносовский просп., д. 27) и на портале:
https://dissovet.msu.ru/dissertation/3052/

Автореферат разослан «_____» ____________________ 2024 г.

Ученый секретарь
диссертационного совета *МГУ.011.8*,
доктор физико-математических наук,
профессор *Г.А. Чечкин*

Общая характеристика работы

Актуальность темы исследования. В диссертационной работе в прямоугольнике $\Omega \equiv [0,1] \times [0,b]$ рассматриваются следующие краевые задачи для эллиптического дифференциального уравнения с параболическим вырождением порядка m, аналитическими по переменной вырождения коэффициентами и правой частью: задача

$$\begin{cases} u_{xx} + y^m u_{yy} + c(y)u_y - a(y)u = f(x,y), \quad (x,y) \in \Omega, \\ u(0,y) = u(1,y) = u(x,0) = u(x,b) = 0, \end{cases} \tag{1}$$

которую мы далее, следуя М.В. Келдышу[1], будем называть краевой задачей D, и задача

$$\begin{cases} u_{xx} + y^m u_{yy} + c(y)u_y - a(y)u = f(x,y), \quad (x,y) \in \Omega, \\ u(0,y) = u(1,y) = u(x,b) = 0, \quad |u(x,0)| < +\infty, \end{cases} \tag{2}$$

которую мы будем называть краевой задачей E.

В то время как общие свойства приведённых выше задач исследованы очень подробно, вопрос о наследовании решениями таких задач свойства аналитичности коэффициентов и правой части подробно не рассматривался. Известные результаты аналитической теории дифференциальных уравнений относятся к исследованию задач Коши при целых порядках вырождения m (см., например, С.В. Ковалевская[2], В.В. Голубев[3], А.И. Янушаускас[4]).

Целью диссертационной работы автора будет исследование неаналитической зависимости решений приведённых краевых задач в окрестности отрезка вырождения $y = 0$ при произвольных порядках вырождения $1 \leqslant m \leqslant 2$.

[1] Келдыш М. В. О некоторых случаях вырожденных уравнений эллиптического типа на границе области // Доклады АН СССР. — 1951. — Т. 77, № 2. — С. 181–183.

[2] von Kowalevsky S. Zur Theorie der partiellen Differentialgleichung // Journal für die reine und angewandte Mathematik. — 1875. — Vol. 80. — P. 1–32.

[3] Голубев В. В. Лекции по аналитической теории дифференциальных уравнений. — М. : Государственное издательство технико-теоретической литературы, 1950. — С. 436.

[4] Янушаускас А. И. Аналитическая теория эллиптических уравнений. — Новосибирск, 1979.

В предположении, что коэффициенты уравнения $a(y)$, $c(y)$ и правая часть $f(x, y)$ аналитичны по y в комплексном круге $U = \{y \in \mathbb{C} : |y| < R\}$, где $R > b$, и при условии, что $a(y) \geqslant 0$ при $y \in [0, b]$ классическое решение построено в виде ряда

$$u(x, y) = \sum_{k=1}^{+\infty} Y_k(y) \sin \pi k x, \quad (x, y) \in \bar{\Omega},$$

который сходится при общих ограничениях на правую часть $f(x, y)$. При этом для функций $Y_k(y)$ получены представления:

при $m = 2$, $c(y) \geqslant 0$ и $c(0) = 0$:

$$Y_k(y) = \psi_{k,0}(y) + y^{r_k}\psi_{k,1}(y) + \ln y \cdot \psi_{k,2}(y),$$

$$r_k = \frac{1 - c'(0) + \sqrt{(1 - c'(0))^2 + 4\pi^2 k^2 + 4a(0)}}{2},$$

при $m = 1$:

$$Y_k(y) = \psi_{k,0}(y), \quad c(0) \geqslant 1,$$

$$Y_k(y) = \psi_{k,0}(y) + y^{1-c(0)}\psi_{k,1}(y), \quad c(0) < 1, \quad c(0) \neq 0, -1, -2, ...,$$

$$Y_k(y) = \psi_{k,0}(y) + \ln y \cdot \psi_{k,1}(y), \quad c(0) = 0, -1, -2, ...,$$

при $1 < m < 2$ и $c(0) = 0$:

$$Y_k(y) = \psi_{k,0}(y) + \sum_{n=1}^{q-1} y^{n/q}\psi_{k,n}(y) + \ln y \cdot \psi_{k,q}(y), \quad m = \frac{p}{q} \in \mathbb{Q},$$

$$Y_k(y) = \psi_{k,0}(y) + \sum_{n=1}^{+\infty} y^{n(2-m)}\psi_{k,n}(y), \quad m \notin \mathbb{Q}.$$

В указанных представлениях все функции $\psi_{k,n}(y)$ являются аналитическими в области U аналитичности коэффициентов и правой части дифференциального уравнения.

Степень разработанности темы исследования. Бурное развитие физики и её инженерных приложений начиная с конца XIX века привело к необходимости рассмотрения в рамках математической физики задач для линейных уравнений в частных производных, меняющих свой тип. Такой класс уравнений получил название уравнений смешанного типа. В частности, большой интерес представляют уравнения второго порядка, принадлежащие к классу эллиптических уравнений в одной части области рассмотрения и к классу гиперболических в другой. Линия (поверхность) раздела данных областей называется линией (поверхностью) параболического вырождения.

Рассмотрим задачи для таких уравнений на плоскости $(x, y) \in \mathbb{R}^2$. Если коэффициенты при старших производных являются аналитическими функциями в области рассмотрения, то, согласно результату М. Чибрарио[5], существует регулярная замена независимых переменных, переводящая линию вырождения в участок прямой $y = 0$ и приводящая уравнение к одному из следующих видов:

$$y^m \cdot u_{xx} + u_{yy} + a_1(x, y) \cdot u_x + a_2(x, y) \cdot u_y - a(x, y) \cdot u = f(x, y), \tag{3}$$

$$u_{xx} + y^m \cdot u_{yy} + a_1(x, y) \cdot u_x + a_2(x, y) \cdot u_y - a(x, y) \cdot u = f(x, y), \tag{4}$$

где целый неотрицательный показатель вырождения m является нечётным в случае смены типа уравнения с эллиптического на гиперболический и чётным в случае эллиптического уравнения с параболическим вырождением внутри или на границе области рассмотрения.

Краевые задачи для уравнений вида (3) в смешанной области возникают, в частности, в трансзвуковой газовой динамике. Первые существенные исследования в этом направлении принадлежат Ф. Трикоми[6] [7]. В указанных работах им была поставлена краевая задача для уравнения вида (3) с $a \equiv a_1 \equiv a_2 \equiv f \equiv 0$ и $m = 1$ в области, ограниченной гладкой кривой в эллиптической части и двумя характеристиками в гиперболической части. Для этой задачи, впоследствии названной задачей Трикоми, были доказаны существование и единственность регулярного решения.

---

[5] Cibrario M. Sulla reduzione a forma canonica delle equazione lineari alle derivate parziali di secondo ordine di tipo misto // Rend. Lombardo. — 1932. — Vol. 65. — P. 889–906.

[6] Tricomi F. G. Ulteriori richerche sull'equazione $yz_{xx} + z_{yy} = 0$ // Rend. Circolo Math. Palermo. — 1928. — Vol. 52. — P. 63–90.

[7] Tricomi F. G. Ancora sull'equazione $yz_{xx} + z_{yy} = 0$ // Rend. Acc. Lincei. — 1927. — Vol. VI, no. 6.

Дальнейшее развитие указанного направления осуществлено Геллерстедтом[8] (задача Трикоми для уравнения более общего вида с $a(x,y) \equiv const > 0$ и правой частью), Ф.И. Франклем[9], М.А. Лаврентьевым[10] (модельное уравнение) и А.В. Бицадзе[11] [12] (задача Трикоми для уравнений (3) общего вида; задача с заданной нормальной производной); И.Л. Кароль[13] (существование и единственность решения задачи Трикоми для уравнения с вырождением $\operatorname{sgn} y\,|y|^m$).

Для различных частных случаев уравнения вида (3) был доказан принцип максимума для однородных уравнений (3): А.В. Бицадзе[14] для уравнения Лаврентьева-Бицадзе, Жерменом и Баде[15] для уравнения Трикоми, К.И. Бабенко[16] для обобщения уравнения Трикоми.

Отметим также вклад С.П. Пулькина[17], Ф.И. Франкля[18] и В.П. Михайлова[19] в исследовании обобщённых решений задачи Трикоми.

---

[8] Gellerstedt S. Sur un problème aux limites pour une équation linéaire aux dérivées partielles du second ordre de tipe mixte : Ph. D. thesis. — Uppsala, 1935.

[9] Франкль Ф. И. О задачах Чаплыгина для смешанных до- и сверхзвуковых течений // Изв. АН СССР, Серия математическая. — 1945. — Т. 9, № 2. — С. 121–142.

[10] Лаврентьев М. А., Бицадзе А. В. К проблеме уравнений смешанного типа // Доклады АН СССР. — 1950. — Т. 70, № 3. — С. 373–376.

[11] Бицадзе А. В. О единственности решения общей граничной задачи для уравнения смешанного типа // Сообщения АН ГрузССР. — 1950. — Т. XI, № 4.

[12] Бицадзе А. В. К общей задаче смешанного типа // Доклады АН СССР. — 1951. — Т. 78, № 4. — С. 621–624.

[13] Кароль И. Л. Об одной краевой задаче для уравнения смешанного эллиптико-гиперболического типа // Доклады АН СССР. — 1953. — Т. 88, № 2. — С. 197–200.

[14] Бицадзе А. В. О некоторых задачах смешанного типа // Доклады АН СССР. — 1950. — Т. 70, № 4. — С. 561–565.

[15] Germain P., Bader R. Sur le problème de Tricomi // Compt. Rend. Acad. Sci. Paris. — 1951. — no. 232. — P. 463.

[16] Бабенко К. И. К теории уравнений смешанного типа : дис. … д-ра наук. — 1952.

[17] Пулькин С. П. Задача Трикоми для обобщённого уравнения Лаврентьева // Доклады АН СССР. — 1958. — Т. 118, № 1. — С. 38–41.

[18] Франкль Ф. И. Об одной краевой задаче для уравнения $yz_{xx} + z_{yy} = 0$ // Уч. зап. МГУ. — 1953. — Т. 152, № III. — С. 33–45.

[19] Михайлов В. П. Об обобщённой задаче Трикоми // Доклады АН СССР. — 1967. — Т. 175, № 5. — С. 1012–1014.

Ряд задач для уравнений смешанного типа также рассматривался А.П. Солдатовым[20].

Спектральные свойства задачи Трикоми подробно исследованы в работах Е.И. Моисеева[21] [22] [23] [24]. В частности, им было получено решение задачи Трикоми в виде биортогонального ряда. Аналогичный вид решения получен Е.И. Моисеевым для задачи Дирихле для уравнения вида (3) в области эллиптичности.

Исследование краевых задач для уравнений (3) и (4) в области эллиптичности $y > 0$ имеет ценность в том числе в контексте исследования задач для уравнений смешанного типа. Если коэффициент $a(x,y) \geqslant 0$, то для данных однородных уравнений имеет место принцип максимума в области эллиптичности (см., например, [25]).

Хольмгрен[26] и Геллерстедт[8] явно построили функции Грина для смешанной краевой задачи и задачи Дирихле для частного случая уравнения (3).

Краевая задача Дирихле для уравнения (3) общего вида заменой

$$\eta = \frac{2}{m+2} y^{\frac{m+2}{2}}$$

сводится к задаче Дирихле в ограниченной области для эллиптического уравнения без вырождения. Для уравнения без вырождения доказано существование функции Грина и классического решения при условии, что существует функция Грина задачи Дирихле для уравнения Лапласа в той же области.

---

[20] Солдатов А. П. О единственности решения одной задачи А. В. Бицадзе // Дифференциальные уравнения. — 1972. — Т. 8, № 1. — С. 143–146.

[21] Моисеев Е. И. О расположении спектра задачи Трикоми для уравнения Лаврентьева–Бицадзе // Дифференциальные уравнения. — 1989. — Т. 25, № 1. — С. 77–84.

[22] Моисеев Е. И. О неполноте системы корневых функций задачи Трикоми для уравнения Лаврентьева–Бицадзе // Дифференциальные уравнения. — 1989. — Т. 25, № 1. — С. 170–172.

[23] Моисеев Е. И. О представлении решения задачи Трикоми в виде биортогонального ряда // Дифференциальные уравнения. — 1991. — Т. 27, № 7. — С. 868–874.

[24] Моисеев Е. И. О решении вырождающихся уравнений с помощью биортогональных рядов // Дифференциальные уравнения. — 1991. — Т. 27, № 1. — С. 75–82.

[25] Бицадзе А. В. Некоторые классы уравнений в частных производных. — М. : Наука, Главная редакция физико-математической литературы, 1981. — С. 448.

[26] Holmgren E. Sur un problème aux limites pour l'équation $y^m z_{xx} + z_{yy} = 0$ // Arkiv f. M. A. o. F. — 1927. — Vol. 14, no. 19B. — P. 1–3.

В случае краевой задачи Дирихле для уравнения (4) указанные преобразования могут быть произведены только лишь для некоторых случаев вырождений и коэффициентов уравнения. В общем же случае краевая задача Дирихле для уравнения (4) не имеет решения.

Фундаментальные результаты для этого случая получены М.В. Келдышем[1]. Им была поставлена краевая задача E, отличающаяся от краевой задачи Дирихле (задачи D) заменой условия на значения функции на кривой вырождения на условие ограниченности. В указанной работе приведены достаточные условия, при которых краевые задачи D и E для уравнения (4) с нулевой правой частью имеют единственное решение.

Отметим, что для уравнений класса (4) представляет интерес характер неаналитической зависимости решения краевой задачи от переменной y для такого уравнения вблизи кривой вырождения при условии аналитических коэффициентов и правой части. Исследованиями в этой области занимались А.И. Янушаускас[4], В.Н. Врагов[27] и др.

Следует отметить, что результат В.Н. Врагова[27], относящийся к краевой задаче E в случае линейного вырождения, частично соответствует результату, полученному во второй главе диссертации автора. При этом результат автора получен иным методом и относится к краевой задаче в прямоугольнике, в то время как В.Н. Врагов рассматривает область с гладкой границей.

И.С. Ломовым[28] [29] предложен новый метод построения решений краевых задач для уравнения (4) — метод спектрального выделения особенностей. Решение строится в виде разложения по собственным функциям дифференциального оператора. Коэффициенты такого разложения являются аналитически-

---

[27] Врагов В. Н. Аналитичность решения задачи E для одного вырождающегося эллиптического уравнения // Дифференциальные уравнения. — 1974. — Т. 10, № 1. — С. 36–40.

[28] Ломов И. С. Малые знаменатели в аналитической теории вырождающихся дифференциальных уравнений // Дифференциальные уравнения. — 1993. — Т. 29, № 12. — С. 2079–2089.

[29] Ломов И. С. Метод спектрального разделения переменных для нерегулярно вырождающихся эллиптических дифференциальных операторов // Доклады РАН. — 2001. — Т. 376, № 5. — С. 593–596.

ми функциями аргумента y, аналитичность которых может нарушаться при $y = 0$. Характер неаналитической зависимости коэффициентов от переменного y в окрестности точки $y = 0$ выписывается явно с привлечением известных результатов аналитической теории обыкновенных дифференциальных уравнений. Устанавливаются условия сходимости построенного спектрального разложения решения при $m = 2$ и нулевых $a_1(x, y)$ и $a_2(x, y)$.

Указанный выше метод выделения особенностей является развитием метода регуляризации С.А. Ломова[30]. Метод регуляризации развивался различными авторами, в том числе В.И. Качаловым[31] [32].

Указанные результаты переносятся в диссертационной работе автора на более широкий класс уравнений (4) с показателем вырождения $1 \leqslant m \leqslant 2$.

Отметим вклад других исследователей уравнений смешанного типа и вырождающихся эллиптических уравнений: И.Н. Векуа[33], С.Г. Михлин[34], М.М. Смирнов[35], М.И. Вишик[36], А.П. Солдатов[37], А.В. Фурсиков[38], О.А. Олей-

[30] Ломов С. А. Введение в общую теорию сингулярных возмущений. — М. : Наука, 1981. — С. 400.

[31] Ломов С. А., Качалов В. И. Гладкость решений дифференциальных уравнений по сингулярно входящему параметру // Доклады АН СССР. — 1988. — Т. 299, № 4. — С. 805–808.

[32] Качалов В. И. О существовании гладких по параметру решений для сингулярно возмущенных уравнений // Дифференциальные уравнения. — 1990. — Т. 26, № 9. — С. 1641–1643.

[33] Векуа И. Н. О комплексном представлении общего решения уравнений плоской задачи стационарного колебания теории упругости // Доклады АН СССР. — 1937. — Т. 16. — С. 155–160.

[34] Михлин С. Г. Об интегральном уравнении Трикоми // Доклады АН СССР. — 1948. — Т. 99. — С. 1053–1056.

[35] Смирнов М. М. Обобщённое уравнение Трикоми // Уч. зап. Белорусского государственного университета. — 1951. — Т. 12. — С. 3–9.

[36] Вишик М. И. Об общих краевых задачах для эллиптических дифференциальных уравнений // Тр. ММО. — 1952. — Т. 1. — С. 187–246.

[37] Солдатов А. П. Эллиптические системы высокого порядка // Дифференциальные уравнения. — 1989. — Т. 25, № 1. — С. 136–144.

[38] Фурсиков А. В. О глобальной гладкости решений одного класса вырождающихся эллиптических уравнений // Успехи математических наук. — 1971. — Т. 26, № 5. — С. 227–228.

ник[39], А.Б. Костин и В.Б. Шерстюков[40], И.М. Петрушко[41], С.В. Руткаускас[42], С.М. Пономарёв[43], В.М. Ивакин[44], Е.А. Волков[45], В.П. Глушко[46], А.Д. Баев[47], В.В. Панков[48].

В большей части перечисленных работ рассматриваются краевые задачи в областях, граница которых является гладкой в эллиптической области. В контексте диссертационной работы важен эффект, оказываемый угловыми точками области, в которой решается краевая задача. В частности, показано, что задача Дирихле в двумерном случае остаётся корректной, если мера каждого угла области решения задачи в эллиптической части не превосходит π. Среди исследований в этом направлении можно отметить работы Е.А. Волкова[49] и В.А. Кондратьева[50].

[39] Олейник О. А. О свойствах решений некоторых краевых задач для уравнений эллиптического типа // Матем. сб. — 1952. — Т. 30. — С. 695–702.

[40] Костин А. Б., Шерстюков В. Б. Базисность системы корневых функций задачи с наклонной производной для оператора Лапласа в круге // Дифференциальные уравнения. — 2019. — Т. 55, № 10. — С. 1392–1404.

[41] Петрушко И. М. Краевые задачи для уравнений смешанного типа // Труды ордена Ленина Математического института им. В.А. Стеклова. — 1968. — Т. 103. — С. 181–200.

[42] Руткаускас С. В. Полные семейства решений систем вырождающихся эллиптических уравнений // Дифференциальные уравнения. — 1977. — Т. 13, № 1. — С. 126–132.

[43] Пономарёв С. М. К задаче на собственные значения для уравнения Лаврентьева-Бицадзе // Доклады АН СССР. — 1977. — Т. 233. — С. 39–40.

[44] Ивакин В. М. Видоизмененная задача Дирихле для вырождающихся на границе эллиптических уравнений и систем // Аналитические методы в теории эллиптических уравнений. — 1982. — С. 12–21.

[45] Волков Е. А. К численному решению задачи Лаврентьева-Бицадзе // Доклады АН СССР. — 1955. — Т. 103, № 5. — С. 755–758.

[46] Глушко В. П. О вырождающихся эллиптических уравнениях второго порядка в произвольных гладких областях // Доклады АН СССР. — 1967. — Т. 173, № 1. — С. 18–21.

[47] Баев А. Д. Вырождающиеся эллиптические уравнения высокого порядка и связанные с ними псевдодифференциальные операторы // Доклады АН СССР. — 1982. — Т. 265, № 5. — С. 1044–1046.

[48] Панков В. В. Об априорной оценке решений одной краевой задачи в полосе для вырождающегося эллиптического уравнения высокого порядка // Вестник Воронежского государственного университета. Серия: Физика. Математика. — 2021. — № 2. — С. 90–101.

[49] Волков Е. А. О решении краевых задач для уравнения Пуассона в прямоугольнике // Доклады АН СССР. — 1962. — Т. 147, № 1. — С. 13–16.

[50] Кондратьев В. А. Краевые задачи для эллиптических уравнений в областях с коническими или угловыми точками // Тр. ММО. — 1967. — Т. 16. — С. 209–292.

Цели и задачи диссертационной работы. В работе автора исследуются краевые задачи D и E для дифференциального уравнения $u_{xx} + y^m u_{yy} + c(y)u_y - a(y)u = f(x, y)$ в прямоугольнике. Ставится задача построить решения в явном виде и выделить неаналитическую зависимость от аргумента y решений в окрестности прямой $y = 0$ при $1 \leqslant m \leqslant 2$.

Для достижения этой цели автором работы решаются следующие задачи:

1. Построение формальных решений задач D и E для дифференциального уравнения $u_{xx} + y^m u_{yy} + c(y)u_y - a(y)u = f(x, y)$, сведение их к серии задач для обыкновенных дифференциальных уравнений.

2. Решение краевых задач для обыкновенных дифференциальных уравнений вида $y^m Y'' + c(y)Y' - (a(y) + \pi^2 k^2)Y = f(y)$, выделение особенностей.

3. Исследование асимптотических свойств решений уравнений $y^m Y'' + c(y)Y' - (a(y) + \pi^2 k^2)Y = f(y)$ с большим параметром k.

4. Доказательство сходимости формальных рядов к классическим решениям задач п. 1. Доказательство существования классических решений.

Научная новизна. Степень разработанности диссертации. В диссертационной работе развивается метод спектрального выделения особенностей И.С. Ломова.

1. Для случая $m = 2$ полученный ранее И.С. Ломовым результат о представлении решения обобщается на случай $c(y) \not\equiv 0$. Решается открытая до этого проблема малых знаменателей и логарифмических особенностей коэффициентов формального ряда: доказывается, что даже в случае их наличия построенная сумма двух рядов сходится при минимальных ограничениях на правую часть дифференциального уравнения.

2. Аналогичные результаты (явный вид решения и его особенностей) получены в случаях $1 \leqslant m < 2$. Отдельно рассматривается случай иррациональных m; установлено разложение решения по степеням y и y^{2-m}.

Теоретическая и практическая значимость. Результаты диссертации имеют теоретическое и практическое значение. Они могут быть использованы при исследовании неклассических задач математической физики и построении численных методов их решения. Они вносят существенный вклад в аналитическую теорию вырождающихся дифференциальных уравнений в частных производных.

Методология и методы исследования. В диссертации используются методы теории дифференциальных уравнений в частных производных, теории обыкновенных дифференциальных уравнений, методы аналитической теории дифференциальных уравнений, асимптотические методы, метод спектрального выделения особенностей.

Положения, выносимые на защиту. 1. Для краевой задачи E для рассматриваемого эллиптического дифференциального уравнения (2) при порядках вырождения $m = 1, 2$ установлен общий вид формальных решений в виде рядов, в которых характер неаналитической зависимости решения от переменного y указан явно. Доказаны теоремы о существовании решения задачи из класса $C(\bar{\Omega}) \cap C^2(\Omega)$. При $m = 2$ решены проблемы малых знаменателей и логарифмических особенностей.

2. Для краевой задачи D для рассматриваемого эллиптического дифференциального уравнения (1) при порядках вырождения $1 \leqslant m < 2$ установлен общий вид формальных решений в виде рядов, в которых характер неаналитической зависимости решения от переменного y указан явно. Доказаны теоремы о существовании решения задачи из класса $C(\bar{\Omega}) \cap C^2(\Omega)$. При этом в случае иррациональных m установлено разложение решения по целым степеням переменной $\tau = y^{2-m}$ с аналитическими коэффициентами.

3. Установлены асимптотические свойства решений линейных обыкновенных дифференциальных уравнений второго порядка с вырождением порядка $m \in [1, 2]$ и большим параметром k при неизвестной функции.

Степень достоверности. Достоверность результатов диссертационной работы обеспечивается строгостью математических доказательств и использованием апробированных научных методов.

Апробация результатов. Основные результаты диссертации и отдельные её части докладывались и обсуждались на следующих международных и всероссийских **конференциях**:

1. Международная конференция «Математика в созвездии наук», приуроченная к юбилею ректора МГУ, академика Виктора Антоновича Садовничего (Москва, МГУ, 1–2 апреля 2024 г.);

2. Международная конференция «Ломоносовские чтения — 2024» (Москва, МГУ, 20 марта — 3 апреля 2024 г.);

3. Международная конференция «Современные методы теории краевых задач. Понтрягинские чтения — XXXIV» (Воронеж, ВГУ, 3–9 мая 2023 г.);

4. Международная конференция «Ломоносовские чтения — 2023» (Москва, МГУ, 4–14 апреля 2023 г.);

5. Международная конференция «Ломоносовские чтения — 2022» (Москва, МГУ, 14–22 апреля 2022 г.);

6. Международная научная конференции студентов, аспирантов и молодых учёных «Ломоносов 2021» (Москва, МГУ, 12–23 апреля 2021 г.);

7. Международная конференция: ВЗМШ «Современные методы теории функций и смежные проблемы» (Воронеж, ВГУ, 28 января — 2 февраля 2021 г.);

8. Международная научная конференции студентов, аспирантов и молодых учёных «Ломоносов 2020» (Москва, МГУ, 10–21 ноября 2020 г.);

9. Международная научная конференции студентов, аспирантов и молодых учёных «Ломоносов 2019» (Москва, МГУ, 8–12 апреля 2019 г.);

10. Международная конференция «Современные методы теории краевых задач. Понтрягинские чтения — XXIX», посвященная 90-летию В.А. Ильина (Москва, МГУ, 2–6 мая 2018 г.);

11. Международная научная конференции студентов, аспирантов и молодых учёных «Ломоносов 2018» (Москва, МГУ, 9–13 апреля 2018 г.).

Результаты диссертации также докладывались и обсуждались на следующих международных и всероссийских **семинарах**:

1. Межвузовский научно-исследовательский семинар «Анализ и его приложения» (руководители проф. Г.Г. Брайчев, проф. И.В. Тихонов и проф. В.Б. Шерстюков) (Москва, МПГУ, 5 декабря 2023 г.);

2. Научно-исследовательский семинар «Обратные задачи математической физики и естествознания» механико-математического факультета МГУ имени М.В. Ломоносова (руководители акад. РАН В.А. Садовничий и проф. А.И. Прилепко) (Москва, Мех-мат МГУ, 27 апреля 2023 г.);

3. Научно-исследовательский семинар «Обратные задачи математической физики и естествознания» механико-математического факультета МГУ имени М.В. Ломоносова (руководители акад. РАН В.А. Садовничий и проф. А.И. Прилепко) (Москва, Мех-мат МГУ, 20 апреля 2023 г.);

4. Научно-исследовательский семинар «Спектральная теория дифференциальных операторов и актуальные вопросы математической физики» факультета вычислительной математики и кибернетики МГУ имени М.В. Ломоносова (руководители акад. РАН Е.И. Моисеев и проф. И.С. Ломов) (Москва, ВМК МГУ, 21 ноября 2022 г.);

5. Семинар в рамках Шестой Римско-Московской школы по матричным методам и прикладной линейной алгебре (Москва, МГУ, август 2018 г.).

Публикации. Материалы диссертации опубликованы в 10 печатных работах, из них 4 научные статьи в рецензируемых журналах [1–4], индексируемых РИНЦ и RSCI, при этом переводные версии статей [1, 3, 4] опубликованы в журнале, индексируемом Web of Science и Scopus, и 6 тезисов докладов [5–10].

Личный вклад автора. Все приводимые в работе результаты, за исключением специально выделенных, сформулированы и доказаны автором лично. Результаты других авторов, упомянутые в тексте диссертации, отмечены соответствующими ссылками.

Структура и объём диссертации. Диссертация состоит из введения, 3 глав, заключения и списка литературы из 93 наименований. Общий объём диссертации составляет 150 страниц.

Краткое содержание диссертации

Введение содержит информацию об актуальности рассматриваемой темы, краткую историю вопроса, изложение цели работы, методов и основных результатов.

В **главе 1** приводятся общие постановки рассматриваемых краевых задач D и E, после чего подробно рассматривается краевая задача E с квадратичным вырождением y^2.

В **разделе 1** формулируются краевые задачи D и E (в терминологии М.В. Келдыша) с произвольным порядком вырождения m.

Краевая задача D: в области $\Omega \equiv (0,1) \times (0,b)$, $b > 0$, требуется найти функцию $u \in C(\bar{\Omega}) \cap C^2(\Omega)$, удовлетворяющую условиям

$$\begin{cases} u''_{xx} + y^m u''_{yy} + c(y)u'_y - a(y)u = f(x,y), \quad (x,y) \in \Omega, \\ u(0,y) = u(1,y) = u(x,0) = u(x,b) = 0, \end{cases} \tag{5}$$

краевая задача E: в области $\Omega \equiv (0,1) \times (0,b)$, $b > 0$, требуется найти функцию $u \in C(\bar{\Omega}) \cap C^2(\Omega)$, удовлетворяющую условиям

$$\begin{cases} u''_{xx} + y^m u''_{yy} + c(y)u'_y - a(y)u = f(x,y), \quad (x,y) \in \Omega, \\ u(0,y) = u(1,y) = u(x,b) = 0, \quad |u(x,0)| < +\infty. \end{cases} \tag{6}$$

Показатель вырождения $m > 0$. Коэффициенты $a(y)$, $c(y)$ и правая часть задач $f(x,y)$ являются аналитическими функциями переменного y в комплексном круге $U \equiv \{y \in \mathbb{C} : |y| < R\}$, где $R > b$ — некоторое число, правая часть $f(x,y)$ принадлежит классу $C(\bar{\Omega})$, $a(y) \geqslant 0$ при $y \in [0,b]$.

Также рассматривается дифференциальное уравнение

$$y^m Y''(y) + c(y)Y'(y) - (a(y) + \pi^2 k^2)Y = 0, \quad 0 < y < b, \quad k \in \mathbb{N}, \tag{7}$$

получающееся при разделении переменных. Приводится ряд известных фактов о решениях уравнения (7).

В **разделе 2** приводится постановка краевой задачи E в случае квадратичного вырождения $m = 2$. На коэффициенты задачи дополнительно накладываются условия $c(y) \geqslant 0$ при $y \in [0, b]$ и $c(0) = 0$. С этого момента и до окончания **первой главы** m полагается равным 2.

В **разделе 3** производится регуляризация задачи (6) и приводится общий вид её формального решения:

$$u(x,y) = \sum_{k=1}^{+\infty} \left(g_k(y)\varphi_k(y) + g_0(y)\chi_k(y) + \eta_k(y)\right) \sin \pi k x, \quad (x,y) \in \bar{\Omega}, \tag{8}$$

где функции $\varphi_k(y)$, $\chi_k(y)$ и $\eta_k(y)$ полагаются аналитическими в круге U, $g_k(y) \equiv (y/b)^{r_k}$, $k \in \mathbb{N}$, $g_0(y) = \ln(y/b)$,

$$r_k = \frac{1 - c'(0) + \sqrt{(1 - c'(0))^2 + 4\pi^2 k^2 + 4a(0)}}{2} > 0, \quad k \in \mathbb{N}.$$

Вводится счётное число новых независимых переменных $\tau_0, \tau_1, ..., \tau_k, ...$ и рассматривается функция

$$v(x,y,\tau) = \sum_{k=1}^{+\infty} \left(\tau_k \varphi_k(y) + \tau_0 \chi_k(y) + \eta_k(y)\right) \sin \pi k x, \tag{9}$$

которая формально зависит от своих аргументов аналитически и при подстановке $\tau_0 = g_0(y)$, $\tau_1 = g_1(y)$, ..., $\tau_k = g_k(y)$, ... совпадает с функцией (8).

Для функции (9) получена расширенная задача

$$\begin{cases} v''_{xx} + y^2 v''_{yy} + 2y v''_{y\tau_0} - v'_{\tau_0} + 2y \sum\limits_{k=1}^{+\infty} r_k v''_{y\tau_k} \tau_k + \sum\limits_{k=1}^{+\infty} r_k (r_k - 1) v'_{\tau_k} \tau_k + \\ \qquad + c(y) v'_y + c(y) \frac{v'_{\tau_0}}{y} + c(y) \sum\limits_{k=1}^{+\infty} \frac{r_k v'_{\tau_k} \tau_k}{y} - a(y) v = f(x,y), \\ v(0,y,\tau) = v(1,y,\tau) = v(x,b,\{0,1,1,...\}) = 0, \quad |v(x,0,0)| < +\infty, \\ (x,y) \in \Omega, \quad \tau_0 < 0, \quad 0 < \tau_k < 1. \end{cases}$$

С использованием разложения правой части $f(x,y)$ в ряд по системе функций $\{\sin \pi k x\}$

$$f(x,y) = \sum_{k=1}^{+\infty} f_k(y) \sin \pi k x, \quad (x,y) \in \Omega,$$

получены задачи на коэффициенты рядов (8) и (9):

$$y^2\eta_k''(y)+c(y)\eta_k'(y)-(\pi^2k^2+a(y))\eta_k(y)+2y\chi_k'(y)+\frac{c(y)}{y}\chi_k(y)-\chi_k(y) = f_k(y), \quad (10)$$

$$y^2\chi_k''(y) + c(y)\chi_k'(y) - (\pi^2k^2 + a(y))\chi_k(y) = 0, \quad (11)$$

$$y^2\varphi_k''(y) + c(y)\varphi_k'(y) + 2yr_k\varphi_k'(y)+$$

$$+r_k(r_k-1)\varphi_k(y) + r_k\frac{c(y)}{y}\varphi_k(y) - (\pi^2k^2 + a(y))\varphi_k(y) = 0, \quad 0 < y < b, \quad (12)$$

$$\eta_k(b) = -\varphi_k(b), \quad \eta_k, \chi_k, \varphi_k \in A(U), \quad k \in \mathbb{N}.$$

В **разделе 4** устанавливается факт разрешимости поставленных задач для функции $\eta_k(y)$, $\chi_k(y)$ и $\varphi_k(y)$ в классе функций, аналитических в U. В **разделе 5** продолжается уточнение свойств функций $\varphi_k(y)$. Вводится функция

$$Y_k^0(y) = g_k(y) \cdot \mathring{\varphi}_k(y), \quad k \in \mathbb{N}.$$

Данная функция является решением дифференциального уравнения (7), удовлетворяющим краевому условию $Y_k^0(0) = 0$. Устанавливаются двусторонние оценки функций $Y_k^0(y)$ и их производных.

Теорема 1.4. *Существуют постоянные* $0 < C_1 < C_2$, *не зависящие от* $k \in \mathbb{N}$, *такие, что при всех* $k \geqslant k_0$

$$C_1\left(\frac{y}{b}\right)^{r_k} \leqslant Y_k^0(y) \leqslant C_2\left(\frac{y}{b}\right)^{r_k}, \quad y \in [0, b],$$

$$C_1\frac{r_k}{y}\left(\frac{y}{b}\right)^{r_k} \leqslant \frac{dY_k^0}{dy}(y) \leqslant C_2\frac{r_k}{y}\left(\frac{y}{b}\right)^{r_k}, \quad y \in (0, b].$$

В **разделе 6** производятся первоначальные исследования, направленные на установление факта сходимости ряда (9). Вводятся обозначения

$$J_k \equiv \underset{n\in\mathbb{N}_0}{\operatorname{argmin}}|n(n+c'(0)-1)-\pi^2k^2-a(0)|, \quad \nu(n,k) \equiv n(n+c'(0)-1)-\pi^2k^2-a(0),$$

$$\delta_k \equiv \nu(J_k, k), \quad k \in \mathbb{N}.$$

Формулируются достаточные условия получения эффективных оценок функций $\eta_k(y)$:

$$\begin{gathered}\forall\, k \in \mathbb{N} : r_k \notin \mathbb{N},\\ \forall\, R_1 \in (b,R)\, \exists\, M > 0 : \left|\frac{f_k^{(n)}(0)}{n!}\right| \leqslant \frac{M}{R_1^n}, \quad n \in \mathbb{N}_0, \quad k \in \mathbb{N},\\ \exists\, C_\delta > 0, q_0 > \frac{b}{R} : \forall\, k \in \mathbb{N} : |\delta_k| \geqslant C_\delta q_0^{J_k}.\end{gathered} \tag{13}$$

Теорема 1.7. *Пусть выполнены условия* (13) *и ряд Фурье функции* $f(x,y)$ *по системе* $\{\sin \pi k x\}$ *сходится равномерно по* $x \in [c,d] \subset (0,1)$ *для любого фиксированного* $y \in [0,b]$*. Тогда ряд*

$$\sum_{k=1}^{+\infty} \eta_k(y)\psi_k(x)$$

сходится равномерно в прямоугольнике $\bar{\Omega}$*, определяет в нём непрерывную функцию и допускает двукратное дифференцирование под знаком суммы по* x *и по* y *внутри* Ω.

В **разделе 7** доказывается сходимость ряда (9) формального решения расширенной задачи, а также частный случай сходимости ряда (8).

Теорема 1.8. *Пусть выполнены условия* (13) *и ряд Фурье функции* $f(x,y)$ *по системе* $\{\sin \pi k x\}$ *сходится равномерно по* $x \in [c,d] \subset (0,1)$ *для любого фиксированного* $y \in [0,b]$*. Тогда равномерно по* $y \in [0,b]$ *выполнено*

$$\varphi_k^{(N)}(y) = O\left(\frac{1}{k^2}\right), \quad k \in \mathbb{N}, \quad N = 0,1,2,$$

ряд

$$\sum_{k=1}^{+\infty} \tau_k \varphi_k(y)\psi_k(x)$$

сходится равномерно в прямоугольнике $\bar{\Omega}$ *и определяет в нём непрерывную функцию, а ряд*

$$\sum_{k=1}^{+\infty} g_k(y)\varphi_k(y)\psi_k(x)$$

сходится равномерно в прямоугольнике $\bar{\Omega}$, определяет в нём непрерывную функцию и допускает двукратное дифференцирование под знаком суммы по x и по y внутри Ω.

Следствие 1.8.1. *В условиях теоремы 1.8, формальное решение* (9) *расширенной задачи определено и сходится к непрерывной функции, а формальное решение* (8) *исходной задачи* (6) *определено и является её классическим решением.*

Теорема 1.9. *Пусть $a(0)$ и $c'(0)$ — рациональные числа, а правая часть $f(x, y)$ является аналитической функцией по совокупности переменных (x, y) в области $(-\varepsilon, 1+\varepsilon) \times U$, $\varepsilon > 0$. Тогда формальное решение* (9) *расширенной задачи определено и сходится к непрерывной функции, а формальное решение* (8) *исходной задачи* (6) *определено и является её классическим решением.*

В **разделе 8** устанавливаются свойства второго элемента ФСР уравнения (7). Он строится в виде

$$Y_k^b(y) \equiv -Y_k^0(y) \int\limits_b^y \frac{1}{(Y_k^0(\xi))^2} \exp\left(-\int\limits_b^\xi \frac{c(\zeta)}{\zeta^2} d\zeta\right) d\xi, \quad y \in (0, b], \quad k \in \mathbb{N}.$$

Теорема 1.11. *Существуют $C_4 > C_3 > 0$, не зависящие от $k \in \mathbb{N}$ и $y \in [0, b]$, такие, что*

$$Y_k^b(y) \leqslant \frac{C_4}{k} \cdot \left(\frac{y}{b}\right)^{r_k^-}, \quad y \in (0, b],$$
$$Y_k^b(y) \geqslant \frac{C_3}{k} \cdot \left(\frac{y}{b}\right)^{r_k^-}, \quad y \in (0, 3b/4],$$
$$\left|\frac{dY_k^b}{dy}(y)\right| \leqslant \frac{C_4}{y} \cdot \left(\frac{y}{b}\right)^{r_k^-}, \quad y \in (0, b].$$

Получены оценки определителей Вронского $w_k(y)$ систем $\{Y_k^0(y), Y_k^b(y)\}$.

Раздел 9 начинается с построения функций Грина $G_k(y, \eta)$ краевых задач нахождения ограниченных решений $Y_k(y)$ уравнений (7), удовлетворяющих условию $Y_k(b) = 0$. Доказываются оценки их средних. Коэффициенты ряда (8) обозначаются как

$$Y_k(y) \equiv \eta_k(y) + g_0(y)\chi_k(y) + g_k(y)\varphi_k(y), \quad k \in \mathbb{N}, \quad y \in [0, b].$$

Теорема 1.14. *Пусть функции $f_k(y)$ являются равномерно ограниченными вместе с первыми и вторыми производными при $k \in \mathbb{N}$ и $y \in [0, b]$. Тогда равномерно по $y \in [0, b]$ имеет место асимптотика*

$$Y_k(y) = O\left(\frac{1}{k^2}\right).$$

Кроме того, на любом компакте $K \subset (0, b)$ равномерно по $y \in K$ справедлива асимптотическая формула

$$Y_k^{(N)}(y) = -\frac{f_k^{(N)}(y)}{\pi^2 k^2} + O\left(\frac{1}{k^{4-N}}\right), \quad N = 0, 1, 2.$$

В **разделе 10** формулируется основной результат **главы I** — теорема сходимости ряда (8) к решению задачи (6).

Теорема 1.15. *Пусть правая часть $f(x, y)$ задачи (6) непрерывна в $\bar{\Omega}$ вместе с первыми и вторыми производными, при каждом фиксированном $x \in (0, 1)$ функция $f(x, y) \in A(U)$ как функция аргумента y.*

Тогда существует классическое решение задачи (6), представимое рядом (8), который сходится равномерно в прямоугольнике $\bar{\Omega}$ и допускает двукратное дифференцирование под знаком суммы по x и по y внутри Ω, функции $\eta_k(y), \chi_k(y)$ и $\varphi_k(y)$ аналитичны в области U.

Если при некотором $k \in \mathbb{N}$ число $r_k \notin \mathbb{N}$, то $\chi_k(y) \equiv 0$.

Завершает **главу I раздел 11**, приводящий пример использования полученных в главе результатов. Рассматривается краевая задача

$$\begin{cases} u''_{xx} + y^2 u''_{yy} + y u'_y - y u = f \equiv const, & (x, y) \in \Omega = (0, 1)^2, \\ u(0, y) = u(1, y) = u(x, 1) = 0, & |u(x, 0)| < +\infty. \end{cases}$$

На основании следствия 1.8.1 находится её решение

$$u(x,y) = 4f \sum_{k=1, k/2\notin\mathbb{N}}^{+\infty} \left[\frac{4f}{\pi k} \sum_{n=0}^{+\infty} y^n \prod_{m=0}^{n} \frac{1}{m^2 - \pi^2 k^2} - y^{\pi k} \frac{4f}{\pi k} \sum_{n=0}^{+\infty} \prod_{m=0}^{n} \frac{1}{m^2 - \pi^2 k^2} \times \right.$$

$$\left. \times \left(1 + \sum_{n=1}^{+\infty} \prod_{m=1}^{n} \frac{y}{m^2 + 2\pi k m} \right) \cdot \left(1 + \sum_{n=1}^{+\infty} \prod_{m=1}^{n} \frac{1}{m^2 + 2\pi k m} \right)^{-1} \right] \cdot \frac{\sin \pi k x}{\pi k}.$$

Ряд сходится равномерно в $[0,1]^2$. Его можно дифференцировать под знаком суммы по x и по y внутри $(0,1)^2$ два раза.

Результаты **главы 1** были опубликованы в работах [4], [3], [8], [6], [9].

В **главе 2** подробно рассматриваются краевые задачи D и E с линейным вырождением y. Результаты **главы 1** переносятся на случай линейного вырождения.

В **разделе 1** производится постановка краевых задач D и E для линейного вырождения ($m = 1$). При этом краевая задача D рассматривается при условии $c(0) < 1$, а краевая задача E при условии $c(0) \geqslant 1$.

В **разделе 2** строятся формальные решения задач (5) и (6). Решения ищутся в общем виде

$$u(x,y) = \sum_{k=1}^{+\infty} Y_k(y) \cdot \sin \pi k x, \quad (x,y) \in \bar{\Omega}, \tag{14}$$

где коэффициенты $Y_k(y)$ удовлетворяют краевым задачам

$$\begin{cases} y Y_k'' + c(y) Y_k' - (a(y) + \pi^2 k^2) Y_k = f_k(y), \quad 0 < y < b, \\ Y_k(0) = Y_k(b) = 0, \end{cases} \qquad k \in \mathbb{N}, \tag{15}$$

в случае (5) и

$$\begin{cases} y Y_k'' + c(y) Y_k' - (a(y) + \pi^2 k^2) Y_k = f_k(y), \quad 0 < y < b, \\ Y_k(b) = 0, \quad |Y_k(0)| < +\infty, \end{cases} \qquad k \in \mathbb{N}, \tag{16}$$

в случае (6).

Для описания особенностей решений этих задач достаточно функции y^{r_1} или $\ln y$, где $r_1 = 1 - c(0)$. Таким образом, коэффициенты ищутся в виде

$$Y_k(y) = \eta_k(y)$$

в случае краевой задачи E и в виде

$$Y_k(y) = \eta_k(y) + \ln\left(\frac{y}{b}\right)\chi_k(y) + \left(\frac{y}{b}\right)^{r_1}\varphi_k(y)$$

в случае краевой задачи D, где функции $\eta_k(y)$, $\chi_k(y)$ и $\varphi_k(y)$ являются аналитическими в круге U.

Функции $\eta_k(y)$ в случае краевой задачи E ищутся как решения задач (16), а в случае краевой задачи D имеют место соотношения

$$y\eta_k''(y) + c(y)\eta_k'(y) - (\pi^2k^2 + a(y))\eta_k(y) + 2\chi_k'(y) + \frac{c(y)}{y}\chi_k(y) - \frac{\chi_k(y)}{y} = f_k(y),$$

$$y\chi_k''(y) + c(y)\chi_k'(y) - (\pi^2k^2 + a(y))\chi_k(y) = 0,$$

$$y\varphi_k''(y) + c(y)\varphi_k'(y) + 2r_1\varphi_k'(y) +$$

$$+\frac{r_1(r_1-1)}{y}\varphi_k(y) + r_1\frac{c(y)}{y}\varphi_k(y) - (\pi^2k^2 + a(y))\varphi_k(y) = 0, \quad 0 < y < b,$$

$$\eta_k(b) = -\varphi_k(b), \quad \eta_k, \chi_k, \varphi_k \in A(U), \quad k \in \mathbb{N},$$

$$\eta_k(0) = 0, \quad k \in \mathbb{N}.$$

В **разделе 3** устанавливается факт разрешимости задач для функций $\eta_k(y)$, $\chi_k(y)$ и $\varphi_k(y)$. В **разделе 4** при условии $c(0) \geqslant 1$ исследуется специальная задача для уравнения с малым параметром $1/k$ при больших k:

$$\begin{cases} yY_k'' + c(y)Y_k' - (a(y) + \pi^2k^2)Y = 0, \quad y \in (0, b), \\ Y(0) = 1. \end{cases} \qquad k > 0, \tag{17}$$

Её решение ищется в виде

$$Y_k(y) = \frac{\Gamma(\alpha+1)}{(\pi k i\sqrt{y})^{\alpha}} \cdot J_\alpha(2\pi k i\sqrt{y}) \cdot z_k(y),$$

где Γ — гамма-функция Эйлера, i — мнимая единица, а J_α — функция Бесселя первого рода порядка $\alpha = c(0) - 1$, $z_k(y)$ — новая неизвестная функция. Тогда

$$\begin{cases} y\mu z''(y) + 2\sqrt{y}R_\mu(y)z'(y) + \mu c(y)z'(y) + \sqrt{y}\bar{c}(y)R_\mu(y)z(y) - \mu a(y)z(y) = 0, \\ z(0) = 1, \quad y \in (0,b), \quad \mu > 0, \end{cases} \tag{18}$$

где $\mu = 1/(\pi k)$, $R_\mu(y) = -iJ_{\alpha+1}(2i\sqrt{y}/\mu)/J_\alpha(2i\sqrt{y}/\mu)$, $\bar{c}(y) = (c(y) - c(0))/y$.

При формальном предельном переходе при $\mu \to 0+0$ задача (18) принимает вид

$$\begin{cases} 2\bar{z}'(y) + \bar{c}(y)\bar{z}(y) = 0, \quad y \in (0,b), \\ \bar{z}(0) = 1. \end{cases} \tag{19}$$

Теорема 2.3. *Пусть коэффициенты $a(y)$, $\sqrt{y}\cdot a'(y)$, $c(y)$ и $c'(y)$ принадлежат классу $C[0,b]$, а функция $\bar{c}'(y)$ непрерывна на $(0,b]$ и имеет интегрируемую особенность в точке $y = 0$. Тогда, если решение задачи (17) существует, то:*

1. Существует постоянная $M > 0$ такая, что имеют место оценки $|z(y,\mu)| \leqslant M$, $|z'_y(y,\mu)| \leqslant M/\sqrt{y}$ равномерно по $y \in (0,b]$.

2. $z(y,\mu) \to \bar{z}(y)$ при $\mu \to 0+0$ равномерно по $y \in [0,b]$,

3. Для любого $\varepsilon \in (0,b)$, $z'_y(y,\mu) \to \bar{z}'_y(y)$ при $\mu \to 0+0$ равномерно по $y \in [\varepsilon, b]$.

Здесь $z(y,\mu)$ и $\bar{z}(y)$ — решения задач (18) и (19) соответственно.

Следствие 2.3.1. *Для решения задачи (17) при $k \to +\infty$ имеет место равномерная по $y \in [0,b]$ асимптотика*

$$Y_k(y) = \frac{\Gamma(\alpha+1)}{\left(\pi k i\sqrt{y}\right)^\alpha} \cdot J_\alpha(2\pi k i\sqrt{y}) \cdot \left(\exp\left(\int\limits_0^y -\frac{\bar{c}(\xi)}{2}\,d\xi \right) + \bar{o}(1) \right),$$

$$y \in [0,b], \quad k \in \mathbb{N}.$$

В **разделе 5** исследуется ФСР уравнения (7) в случае краевой задачи Е. Для обозначения специальным образом выбранных функций из ФСР уравнения (7) здесь и далее используются символы $Y_k^0(y)$ и $Y_k^b(y)$.

Теорема 2.4. *Существуют не зависящие от $y \in [0,b]$ и $k \in \mathbb{N}$ постоянные C_1 и C_2 такие, что имеют место неравенства*

$$0 < C_1 \cdot \frac{e^{2\pi k\sqrt{y}}}{1+(\pi k\sqrt{y})^{\alpha+1/2}} \leqslant Y_k^0(y) \leqslant C_2 \cdot \frac{e^{2\pi k\sqrt{y}}}{1+(\pi k\sqrt{y})^{\alpha+1/2}},$$

$$Y_k^{0\prime}(y) \leqslant C_2 \cdot \frac{k}{\sqrt{y}} \cdot \frac{e^{2\pi k\sqrt{y}}}{1+(\pi k\sqrt{y})^{\alpha+1/2}},$$

при всех $y \in [0,b]$ и $k \in \mathbb{N}$,

$$0 < C_1 \cdot k \cdot \frac{e^{2\pi k\sqrt{y}}}{1+(\pi k\sqrt{y})^{\alpha+1/2}} \leqslant Y_k^{0\prime}(y),$$

при всех $y \in [b/4, b]$ и $k \geqslant k_0$, $\alpha = c(0) - 1$.

Теорема 2.5. *Существуют не зависящие от $y \in [0,b]$ и $k \in \mathbb{N}$ постоянные C_1 и C_2 такие, что имеют место неравенства:*

$$0 \leqslant Y_k^b(y) \leqslant C_2 \cdot \frac{y^{-c(0)+1/2}}{k} \cdot \frac{1+(\pi k\sqrt{y})^{\alpha+1/2}}{e^{2\pi k\sqrt{y}}}, \quad y \in (0,b], \quad k \in \mathbb{N},$$

$$C_1 \cdot \frac{1}{k} \cdot \frac{1+(\pi k\sqrt{y})^{\alpha+1/2}}{e^{2\pi k\sqrt{y}}} \leqslant Y_k^b(y), \quad y \in \left[\frac{b}{4}, \frac{3b}{4}\right], \quad k \in \mathbb{N},$$

$$\left|Y_k^{b\prime}(y)\right| \leqslant C_2 \cdot y^{-c(0)} \cdot \frac{1+(\pi k\sqrt{y})^{\alpha+1/2}}{e^{2\pi k\sqrt{y}}}, \quad y \in (0,b], \quad k \in \mathbb{N}.$$

В **разделе 6** исследуется ФСР уравнения (7) в случае краевой задачи D. Обозначая $\alpha = |c(0) - 1|$, могут быть получены следующие оценки.

Теорема 2.6. *Существуют не зависящие от $y \in [0,b]$ и $k \in \mathbb{N}$ постоянные C_1 и C_2 такие, что имеют место неравенства*

$$0 < C_1 \cdot y^\alpha \cdot \frac{e^{2\pi k\sqrt{y}}}{1+(\pi k\sqrt{y})^{\alpha+1/2}} \leqslant Y_k^0(y) \leqslant C_2 \cdot y^\alpha \cdot \frac{e^{2\pi k\sqrt{y}}}{1+(\pi k\sqrt{y})^{\alpha+1/2}},$$

$$Y_k^{0\prime}(y) \leqslant C_2 \cdot k y^{\alpha-1} \cdot \frac{e^{2\pi k\sqrt{y}}}{1+(\pi k\sqrt{y})^{\alpha+1/2}},$$

при всех $y \in [0,b]$ и $k \in \mathbb{N}$,

$$0 < C_1 \cdot k y^\alpha \cdot \frac{e^{2\pi k\sqrt{y}}}{1+(\pi k\sqrt{y})^{\alpha+1/2}} \leqslant Y_k^{0\prime}(y),$$

при всех $y \in [b/4, b]$ и $k \geqslant k_0$, $\alpha = 1 - c(0)$.

Теорема 2.7. *Существуют не зависящие от $y \in [0, b]$ и $k \in \mathbb{N}$ постоянные C_1 и C_2 такие, что имеют место неравенства:*

$$0 \leqslant Y_k^b(y) \leqslant C_2 \cdot \frac{1}{k\sqrt{y}} \cdot \frac{1 + (\pi k\sqrt{y})^{\alpha+1/2}}{e^{2\pi k\sqrt{y}}}, \quad y \in (0, b], \quad k \in \mathbb{N},$$

$$C_1 \cdot \frac{y^\alpha}{k} \cdot \frac{1 + (\pi k\sqrt{y})^{\alpha+1/2}}{e^{2\pi k\sqrt{y}}} \leqslant Y_k^b(y), \quad y \in \left(0, \frac{3b}{4}\right], \quad k \in \mathbb{N},$$

$$\left|Y_k^{b\prime}(y)\right| \leqslant C_2 \cdot \frac{1}{y} \cdot \frac{1 + (\pi k\sqrt{y})^{\alpha+1/2}}{e^{2\pi k\sqrt{y}}}, \quad y \in (0, b], \quad k \in \mathbb{N}.$$

В **разделе 7** по аналогии с **разделами 8 и 9 главы 1** устанавливаются оценки определителей Вронского $w_k(y)$ ФСР уравнения (7) и оценки средних функций Грина $G_k(y, \eta)$ задач (15) и (16). В **разделе 8** по аналогии с **разделом 9 главы 1** устанавливается асимптотика коэффициентов $Y_k(y)$ ряда (14) при $k \to +\infty$. В **разделе 9** доказываются основные теоремы **главы 2** о существовании и явном виде решений задач (5) и (6).

Теорема 2.11. *Пусть $c(0) \geqslant 1$ и правая часть $f(x, y)$ задачи (6) непрерывна в $\bar{\Omega}$ вместе с первыми и вторыми производными, при каждом фиксированном $x \in (0, 1)$ функция $f(x, y) \in A(U)$ как функция аргумента y. Тогда существует классическое решение задачи (6), представимое рядом*

$$u(x, y) = \sum_{k=1}^{+\infty} \eta_k(y) \cdot \sin \pi k x,$$

который сходится равномерно в прямоугольнике $\bar{\Omega}$ и допускает двукратное дифференцирование под знаком суммы по x и по y внутри Ω, функции $\eta_k(y)$ аналитичны в области U.

Теорема 2.12. *Пусть $c(0) < 1$, $c(0) \neq 0, -1, -2, \ldots$ и правая часть $f(x, y)$ задачи (5) непрерывна в $\bar{\Omega}$ вместе с первыми и вторыми производными, при каждом фиксированном $x \in (0, 1)$ функция $f(x, y) \in A(U)$ как функция аргумента y. Тогда существует классическое решение задачи (5), представимое* *рядом*

$$u(x,y)=\sum_{k=1}^{+\infty}\left(\eta_k(y)+\left(\frac{y}{b}\right)^{r_1}\varphi_k(y)\right)\cdot\sin\pi kx,$$

который сходится равномерно в прямоугольнике $\bar{\Omega}$ и допускает двукратное дифференцирование под знаком суммы по x и по y внутри Ω, функции $\eta_k(y)$ и $\varphi_k(y)$ аналитичны в области U.

Теорема 2.13. *Пусть $c(0)=0,-1,-2,\ldots$ и правая часть $f(x,y)$ задачи* (5) *непрерывна в $\bar{\Omega}$ вместе с первыми и вторыми производными, при каждом фиксированном $x\in(0,1)$ функция $f(x,y)\in A(U)$ как функция аргумента y. Тогда существует классическое решение задачи* (5)*, представимое рядом*

$$u(x,y)=\sum_{k=1}^{+\infty}\left(\eta_k(y)+\ln\left(\frac{y}{b}\right)\chi_k(y)\right)\cdot\sin\pi kx,$$

который сходится равномерно в прямоугольнике $\bar{\Omega}$ и допускает двукратное дифференцирование под знаком суммы по x и по y внутри Ω, функции $\eta_k(y)$ и $\chi_k(y)$ аналитичны в области U.

Результаты **главы 2** были опубликованы в работах [1], [6].

В **главе 3** подробно рассматривается краевая задача D с вырождением y^m, $m\in(0,1)\cup(1,2)$. Для данного случая получены результаты, аналогичные результатам **глав 1 и 2**.

В **разделе 1** производится постановка задачи. Накладываются условия $m\in(0,1)\cup(1,2)$ и $c(0)=0$. По аналогии с **главами 1 и 2** формальное решение ищется в виде

$$u(x,y)=\sum_{k=1}^{+\infty}Y_k(y)\cdot\sin\pi kx,\quad (x,y)\in\bar{\Omega},\tag{20}$$

где функции $Y_k(y)$ являются решениями краевых задач

$$\begin{cases}y^mY_k''+c(y)Y_k'-(a(y)+\pi^2k^2)Y_k=f_k(y), & 0<y<b,\\ Y_k(0)=Y_k(b)=0.\end{cases}\qquad k\in\mathbb{N},\tag{21}$$

В **разделе 2** производится выделение особенностей функций $Y_k(y)$ и доказывается разрешимость задач (21).

При $m \notin \mathbb{Q}$ рассматриваются вспомогательные задачи

$$\begin{cases} y^m \eta_k'' + c(y)\eta_k' - (a(y) + \pi^2 k^2)\eta_k = f_k(y), \quad 0 < y < b, \\ \eta_k(0) = 0, \end{cases} \qquad k \in \mathbb{N}, \tag{22}$$

$$\begin{cases} y^m \mathring{\varphi}_k'' + c(y)\mathring{\varphi}_k' - (a(y) + \pi^2 k^2)\mathring{\varphi}_k = 0, \quad 0 < y < b, \\ \mathring{\varphi}_k(0) = 0. \end{cases} \qquad k \in \mathbb{N}, \tag{23}$$

Рассматривается класс $\mathcal{A}_\gamma$ всех функций $\chi(y) \in A(U \setminus \{0\})$, допускающих представление в виде рядов

$$\chi(y) = y^\gamma \cdot \sum_{n=0}^{+\infty} \chi_n \cdot y^n = \sum_{n=0}^{+\infty} \chi_n \cdot y^{n+\gamma}, \quad y \in U,$$

вводится оператор $\mathcal{R}$: $\mathcal{A}_\gamma \to \mathcal{A}_{\gamma+2-m}$, обращающий дифференциальный оператор $\mathcal{L} : \mathcal{A}_\gamma \to \mathcal{A}_{\gamma+m-2}$:

$$(\mathcal{L}\chi)(y) \equiv y^m \cdot \chi''(y).$$

С его помощью строятся решения задач (22) и (23) следующим образом.

$$\begin{gathered} \eta_{k,0}(y) = \mathcal{R}(f_k)(y), \qquad \mathring{\varphi}_{k,0}(y) = y, \\ \eta_{k,n}(y) = \mathcal{R}(d_k \cdot \eta_{k,n-1} - c \cdot \eta_{k,n-1}')(y), \quad \mathring{\varphi}_{k,n}(y) = \mathcal{R}(d_k \cdot \mathring{\varphi}_{k,n-1} - c \cdot \mathring{\varphi}_{k,n-1}')(y), \end{gathered} \tag{24}$$

$$k, n \in \mathbb{N}, \quad d_k(y) \equiv a(y) + \pi^2 k^2,$$

$$\eta_k(y) = \sum_{n=0}^{+\infty} \eta_{k,n}(y), \quad \mathring{\varphi}_k(y) = \sum_{n=0}^{+\infty} \mathring{\varphi}_{k,n}(y), \quad k \in \mathbb{N}, \quad y \in U. \tag{25}$$

Теорема 3.1. *Пусть $m \in (0, 2)$, $m \notin \mathbb{Q}$. Тогда соотношения* (24) *корректны и определяют функции $\eta_{k,n}(y) \in \mathcal{A}_{n(2-m)}$ и $\mathring{\varphi}_{k,n}(y) \in \mathcal{A}_{1+n(2-m)}$, а ряды* (25) *сходятся в пространствах $A(U \setminus \{0\})$ и $C[0, b]$ к частным решениям задач* (22) *и* (23) *соответственно.*

Таким образом доказывается, что при иррациональных m решения задач (21) имеют вид

$$Y_k(y)=\eta_k(y)-\frac{\eta_k(b)}{\mathring{\varphi}_k(b)}\mathring{\varphi}_k(y)=\psi_{k,0}(y)+\sum_{n=1}^{+\infty}y^{n(2-m)}\psi_{k,n}(y),\quad y\in U,\quad k\in\mathbb{N},$$

где $\psi_{k,n}(y)\in A(U)$, $n\in\mathbb{N}_0$, а при рациональных m

$$Y_k(y)=\eta_{k,0}(y)+\sum_{n=1}^{q-1}y^{n/q}\cdot\eta_{k,n}(y)+\chi_k(y)\cdot\ln y,\quad y\in U,\quad k\in\mathbb{N},$$

функции $\eta_{k,n}(y)$, $\chi_k(y)$ аналитичны в U, $n=0,1,...,q-1$.

Таким образом были выделены особенности решений задач (21).

Функции $\mathring{\varphi}_k(y)$, определённые в (25) определены корректно независимо от рациональности m. Далее обозначается $Y_k^0(y)\equiv\mathring{\varphi}_k(y)$.

В **разделе 3** приводятся оценки элементов ФСР уравнения (7), аналогичные таковым из **разделов 5 и 6 главы 2**.

Теорема 3.2. *Существуют не зависящие от $y\in[0,b]$ и $k\in\mathbb{N}$ постоянные C_1 и C_2 такие, что имеют место неравенства*

$$0<C_1\cdot y\cdot\frac{e^{2\pi k\alpha y^{1/(2\alpha)}}}{1+(\pi k\alpha y^{1/(2\alpha)})^{\alpha+1/2}}\leqslant Y_k^0(y)\leqslant C_2\cdot y\cdot\frac{e^{2\pi k\alpha y^{1/(2\alpha)}}}{1+(\pi k\alpha y^{1/(2\alpha)})^{\alpha+1/2}},$$

$${Y_k^0}'(y)\leqslant C_2\cdot k\cdot\frac{e^{2\pi k\alpha y^{1/(2\alpha)}}}{1+(\pi k\alpha y^{1/(2\alpha)})^{\alpha+1/2}},$$

при всех $y\in[0,b]$ и $k\in\mathbb{N}$,

$$0<C_1\cdot k\cdot\frac{e^{2\pi k\alpha y^{1/(2\alpha)}}}{1+(\pi k\alpha y^{1/(2\alpha)})^{\alpha+1/2}}\leqslant {Y_k^0}'(y),$$

при всех $y\in[b_0,b]$ и $k\geqslant k_0$, $0<b_0<b$.

Теорема 3.3. *Существует не зависящая от $y\in[0,b]$ и $k\in\mathbb{N}$ постоянная C_2 такая, что имеют место неравенства:*

$$0\leqslant Y_k^b(y)\leqslant C_2\cdot\frac{1}{k}\cdot\frac{1+(\pi k\alpha y^{1/(2\alpha)})^{\alpha+1/2}}{e^{2\pi k\alpha y^{1/(2\alpha)}}},\quad y\in(0,b],\quad k\in\mathbb{N},$$

$$\left|Y_k^{b\prime}(y)\right| \leqslant C_2 \cdot \frac{1}{y} \cdot \frac{1+\left(\pi k \alpha y^{1/(2\alpha)}\right)^{\alpha+1/2}}{e^{2\pi k \alpha y^{1/(2\alpha)}}}, \quad y \in (0, b], \quad k \in \mathbb{N}.$$

Кроме того, для любого $\varepsilon > 0$ можно выбрать постоянную $C_3(\varepsilon) > 0$ такую, что при всех $y \in [\varepsilon, b-\varepsilon]$ и $k \in \mathbb{N}$ выполнено

$$C_3(\varepsilon) \cdot \frac{1}{k} \cdot \frac{1+\left(\pi k \alpha y^{1/(2\alpha)}\right)^{\alpha+1/2}}{e^{2\pi k \alpha y^{1/(2\alpha)}}} \leqslant Y_k^b(y).$$

В **разделе 4** приводятся оценки определителей Вронского $w_k(y)$ ФСР уравнений (7) и средних функций Грина $G_k(y,\eta)$ задач (21), аналогичные таковым из **раздела 7 главы 2**. В **разделе 5** по аналогии с **разделом 8 главы 2** получена асимптотика функций $Y_k(y)$.

Раздел 6 завершает основную часть **главы 3**, представляя основные результаты главы.

Теорема 3.7. *Пусть $0 < m < 2$, $m \notin \mathbb{Q}$ и правая часть $f(x,y)$ задачи (5) непрерывна в $\bar{\Omega}$ вместе с первыми и вторыми производными, при каждом фиксированном $x \in (0,1)$ функция $f(x,y) \in A(U)$ как функция аргумента y. Тогда существует классическое решение задачи (5), представимое рядом*

$$u(x,y) = \sum_{k=1}^{+\infty} \left(\psi_{k,0}(y) + \sum_{n=1}^{+\infty} y^{n(2-m)} \psi_{k,n}(y) \right) \cdot \sin \pi k x,$$

который сходится равномерно в прямоугольнике $\bar{\Omega}$ и допускает двукратное дифференцирование под знаком суммы по x и по y внутри Ω, функции $\psi_{k,n}(y)$, $n \in \mathbb{N}_0$ аналитичны в области U.

Теорема 3.8. *Пусть $0 < m < 2$, $m = p/q \in \mathbb{Q}$, $m \neq 1$ и правая часть $f(x,y)$ задачи (5) непрерывна в $\bar{\Omega}$ вместе с первыми и вторыми производными, при каждом фиксированном $x \in (0,1)$ функция $f(x,y) \in A(U)$ как функция аргумента y. Тогда существует классическое решение задачи (5), представимое рядом*

$$u(x,y) = \sum_{k=1}^{+\infty} \left(\eta_{k,0}(y) + \sum_{n=1}^{q-1} y^{n/q} \cdot \eta_{k,n}(y) + \chi_k(y) \cdot \ln y \right) \cdot \sin \pi k x,$$

который сходится равномерно в прямоугольнике $\bar{\Omega}$ и допускает двукратное дифференцирование под знаком суммы по x и по y внутри Ω, функции $\eta_{k,n}(y)$, $n = 0, 1, ..., q-1$ и $\chi_k(y)$ аналитичны в области U.

Раздел 7 демонстрирует пример построения решения задачи (5). Рассматривается задача

$$\begin{cases} u''_{xx} + y^{\sqrt{2}}u''_{yy} - \pi^2 u = f \equiv const, \quad (x, y) \in \Omega = (0, 1)^2, \\ u(0, y) = u(1, y) = u(x, 0) = u(x, 1) = 0. \end{cases}$$

С использованием теоремы 3.7 получено решение этой задачи:

$$u(x, y) = \frac{4f}{\pi k} \sum_{k=1, k/2 \notin \mathbb{N}}^{+\infty} \left[\frac{\Gamma(1-\alpha)}{\left(i\pi\alpha\sqrt{1+k^2} \cdot y^{1/(2\alpha)}\right)^{1-\alpha}} \cdot J_{1-\alpha}\left(2i\pi\alpha\sqrt{1+k^2} \cdot y^{1/(2\alpha)}\right) - \right.$$

$$\left. - \frac{\sqrt{y} \cdot \Gamma(1-\alpha)}{\left(i\pi\alpha\sqrt{1+k^2}\right)^{1-\alpha}} \cdot \frac{J_{1-\alpha}\left(2i\pi\alpha\sqrt{1+k^2}\right)}{J_\alpha\left(2i\pi\alpha\sqrt{1+k^2}\right)} \cdot J_\alpha\left(2i\pi\alpha\sqrt{1+k^2} \cdot y^{1/(2\alpha)}\right) \right] \times$$

$$\times \sin \pi k x, \quad \alpha = \frac{1}{2-\sqrt{2}},$$

ряд сходится равномерно в $\bar{\Omega}$.

Результаты **главы 3** были опубликованы в работах [2], [10], [7], [5].

В **заключении** диссертационной работы подводятся итоги полученных в **главах 1, 2 и 3** результатов и устанавливаются возможные дальнейшие направления исследования.

Заключение

1. Для краевой задачи E для рассматриваемого эллиптического дифференциального уравнения при порядках вырождения $m = 1, 2$ установлен общий вид формальных решений в виде рядов, в которых характер неаналитической зависимости решения от переменного y указан явно. Доказаны теоремы о существовании решения задачи из класса $C(\bar{\Omega}) \cap C^2(\Omega)$. При $m = 2$ решены проблемы малых знаменателей и логарифмических особенностей.

2. Для краевой задачи D для рассматриваемого эллиптического дифференциального уравнения при порядках вырождения $1 \leqslant m < 2$ установлен общий вид формальных решений в виде рядов, в которых характер неаналитической зависимости решения от переменного y указан явно. Доказаны теоремы о существовании решения задачи из класса $C(\bar{\Omega}) \cap C^2(\Omega)$. При этом в случае иррациональных m установлено разложение решения по целым степеням переменной $\tau = y^{2-m}$ с аналитическими коэффициентами.

3. Исследованы асимптотические свойства решений линейных обыкновенных дифференциальных уравнений второго порядка с вырождением порядка $m \in [1, 2]$ и большим параметром k при неизвестной функции.

Полученные теоретические результаты имеют значимость в рамках аналитической теории дифференциальных уравнений и при разработке численных методов решения задач математической физики.

Благодарности

Автор выражает благодарность своему научному руководителю профессору Игорю Сергеевичу Ломову за постановку задачи, руководство процессом исследования и ценные советы.

Также автор выражает благодарность коллективу кафедры Общей математики факультета ВМК МГУ имени М.В. Ломоносова за поддержку при написании диссертационной работы.

Публикации автора по теме диссертации

Основные публикации автора по теме диссертации в журналах, индексируемых Web of Science, Scopus, RSCI, рекомендованных для защиты в диссертационном совете МГУ:

1. Емельянов Д. П. Эллиптические дифференциальные операторы с аналитическими коэффициентами и линейным вырождением // Дифференциальные уравнения. — 2022. — Т. 58, № 5. — С. 607–627. — (Входит в перечень ВАК РФ, RSCI, двухлетний импакт-фактор РИНЦ: 0,855). Перевод:

   Emel'yanov D. P. Elliptic Differential Operators with Analytic Coefficients and Linear Degeneracy // Differential Equations. — 2022. — Vol. 58, no. 5. — P. 610–630. — (RSCI, Web of Science, Scopus, Five Year Impact Factor 2022 — 0.6, SJR — 0.57).

   Работа опубликована в открытой печати.
2. Емельянов Д. П. Эллиптические дифференциальные операторы с вырождением нецелого порядка // Вестник Московского университета. Серия 15. Вычислительная математика и кибернетика. — 2023. — № 2. — С. 12–22. — (Входит в перечень ВАК РФ, RSCI, импакт-фактор РИНЦ 2021: 0,077). Перевод:

   Emel'yanov D. P. Elliptic Differential Operators with Noninteger Order Degeneration // Moscow University Computational Mathematics and Cybernetics. — 2023. — Vol. 47, no. 2. — P. 71–81. — (RSCI).

   Работа опубликована в открытой печати.
3. Емельянов Д. П., Ломов И. С. Использование рядов Пуассона в аналитической теории нерегулярно вырождающихся эллиптических дифференциальных операторов // Дифференциальные уравнения. — 2021. — Т. 57, № 5. — С. 655–672. — (Входит в перечень ВАК РФ, RSCI, двухлетний импакт-фактор РИНЦ: 0,855). Перевод:

   Emel'yanov D. P., Lomov I. S. Using Poisson Series in the Analytic Theory of

Irregularly Degenerate Elliptic Differential Operators // Differential Equations. — 2021. — Vol. 57, no. 5. — P. 636–653. — (RSCI, Web of Science, Scopus, Five Year Impact Factor 2022 — 0.6, SJR — 0.57).

Работа опубликована в открытой печати. Д.П. Емельянову принадлежат все теоремы.

4. Емельянов Д. П., Ломов И. С. Построение точных решений нерегулярно вырождающихся эллиптических уравнений с аналитическими коэффициентами // Дифференциальные уравнения. — 2019. — Т. 55, № 1. — С. 45–58. — (Входит в перечень ВАК РФ, RSCI, двухлетний импакт-фактор РИНЦ: 0,855). Перевод:

   Emel'yanov D. P., Lomov I. S. Construction of Exact Solutions of Irregularly Degenerate Elliptic Equations with Analytic Coefficients // Differential Equations. — 2019. — Vol. 55, no. 1. — P. 46–59. — (RSCI, Web of Science, Scopus, Five Year Impact Factor 2022 — 0.6, SJR — 0.57).

   Работа опубликована в открытой печати. Д.П. Емельянову принадлежат все теоремы.

Иные публикации автора по теме диссертации:

5. Емельянов Д. П. Построение решения задачи для эллиптического дифференциального уравнения с вырождением нецелого порядка меньше единицы // Ломоносовские чтения-2024: научная конференция, факультет ВМК МГУ имени М.В.Ломоносова. Тезисы докладов. — Москва : ООО "МАКС Пресс". — 2024. — «Вычислительная математика и кибернетика». — С. 70–71.
6. Емельянов Д. П. Асимптотика фундаментальной системы решений семейства вырождающихся дифференциальных уравнений // Материалы Международного молодежного научного форума «Ломоносов-2020». — Москва : ООО "МАКС Пресс". — 2020. — С. 65–66.
7. Емельянов Д. П. Построение решения задачи для эллиптического дифференциального уравнения с вырождением нецелого порядка // СОВРЕМЕННЫЕ

МЕТОДЫ ТЕОРИИ КРАЕВЫХ ЗАДАЧ. ПОНТРЯГИНСКИЕ ЧТЕНИЯ - XXXIV. — Воронеж : Изд-во ВГУ. — 2023. — С. 145–146.

8. Емельянов Д. П. Построение точных решений нерегулярно вырождающихся эллиптических уравнений с аналитическими коэффициентами // Материалы Международного молодежного научного форума «Ломоносов-2019». — Москва : ООО "МАКС Пресс". — 2019. — Т. 1. — С. 16–17.
9. Емельянов Д. П., Ломов И. С. Использование рядов Пуассона в аналитической теории нерегулярно вырождающихся эллиптических дифференциальных операторов // Современные методы теории функций и смежные проблемы: материалы Межд. конф.: Воронежская зимняя матем. школа (28 января - 2 февраля 2021 г.) / ВГУ; МГУ им. М.В. Ломоносова; Матем. ин-т им. В.А. Стеклова РАН. — Воронеж : Издательский дом ВГУ. — 2021. — С. 118–118.
10. Ломов И. С., Емельянов Д. П. Решение задачи для эллиптического дифференциального уравнения с вырождением нецелого порядка // Ломоносовские чтения-2023: научная конференция, факультет ВМК МГУ имени М.В.Ломоносова. Тезисы докладов. — Москва : ООО "МАКС Пресс". — 2023. — С. 134–136.

Научное издание

Емельянов Дмитрий Павлович

АВТОРЕФЕРАТ

диссертации на соискание ученой степени

кандидата физико-математических наук на тему:

Построение решений краевых задач для нерегулярно вырождающихся эллиптических дифференциальных уравнений с аналитическими коэффициентами