

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ БЮДЖЕТНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ  
НАУКИ «ИНСТИТУТ ПРОБЛЕМ УПРАВЛЕНИЯ ИМ.  
В.А. ТРАПЕЗНИКОВА РОССИЙСКОЙ АКАДЕМИИ НАУК»

На правах рукописи  
УДК 517.977

Бузиков Максим Эмонайевич

**ПОСТРОЕНИЕ ТРАЕКТОРИИ НАИСКОРЕЙШЕГО  
ПЕРЕХВАТА ДВИЖУЩЕЙСЯ ЦЕЛИ**

Специальность 1.2.2 —  
«Математическое моделирование, численные методы и комплексы программ»

Диссертация на соискание учёной степени  
кандидата физико-математических наук

Научный руководитель:  
доктор технических наук, чл.-корр. РАН  
Галяев Андрей Алексеевич

Москва — 2023

## Оглавление

	Стр.
<b>Введение</b> . . . . .	4
<b>Глава 1. Наискорейший перехват цели, движущейся известным образом</b> . . . . .	18
1.1 Постановка задачи перехвата движущейся цели . . . . .	18
1.2 Свойства проекций множества достижимости в задаче перехвата . . . . .	20
1.3 Свойства универсальных оценок снизу для наименьшего времени перехвата . . . . .	24
1.4 Применение метода простой итерации в задаче перехвата . . . . .	30
1.5 Пример вычислений для модели простых движений . . . . .	37
1.6 Выводы по главе 1 . . . . .	38
<b>Глава 2. Наискорейший перехват известно движущейся цели машиной Дубинса</b> . . . . .	40
2.1 Постановка задачи перехвата непрерывно движущейся цели машиной Дубинса . . . . .	40
2.2 Описание границы плоского множества достижимости машины Дубинса . . . . .	43
2.3 Вычисление положения оптимальной точки перехвата . . . . .	48
2.4 Иллюстрация использования полученных аналитических результатов для задачи перехвата . . . . .	56
2.5 Схема вычисления наименьшего времени перехвата предписано движущейся цели машиной Дубинса . . . . .	59
2.6 Выводы по главе 2 . . . . .	68
<b>Глава 3. Наискорейший боковой перехват движущейся цели машиной Дубинса</b> . . . . .	69
3.1 Постановка задачи бокового перехвата непрерывно движущейся цели машиной Дубинса . . . . .	69
3.2 Вычисление положения оптимальной точки перехвата и оптимального угла перехвата . . . . .	71

3.3	Вычисление параметров оптимального управления в задаче бокового перехвата . . . . .	81
3.4	Иллюстрация использования полученных аналитических результатов для задачи бокового перехвата . . . . .	88
3.5	Выводы по главе 3 . . . . .	94
<b>Глава 4. Игра двух идентичных автомобилей: аналитическое описание барьера . . . . .</b>		
4.1	Игровая постановка задачи о двух идентичных автомобилях . . . . .	97
4.2	Уравнение Айзекса для игры двух идентичных автомобилей . . . . .	100
4.3	Проистекание барьера игры двух идентичных автомобилей . . . . .	103
4.4	Отсечение лишних частей поверхностей, содержащих барьер игры двух идентичных автомобилей . . . . .	111
4.5	Синтез оптимальных управлений на барьере для игры двух идентичных автомобилей . . . . .	122
4.6	Выводы по главе 4 . . . . .	128
<b>Заключение . . . . .</b>		<b>130</b>
<b>Список литературы . . . . .</b>		<b>133</b>
<b>Публикации автора по теме диссертации . . . . .</b>		<b>146</b>
<b>Иные публикации автора . . . . .</b>		<b>147</b>
<b>Приложение А. Комплекс программ для построения траектории наискорейшего перехвата цели, движущейся известным образом . . . . .</b>		
		<b>148</b>

## Введение

Задачи перехвата движущейся цели возникают как в военной, так и в гражданской проблемной области. Большинство современных законов наведения, используемых на практике, выводятся с использованием теории оптимального управления для линейно-квадратичных моделей [1]. Такая формализация позволяет получить аналитическое решение в форме управления по обратной связи. Этот подход требует линейной аппроксимации уравнений состояния реальной системы. Более общий способ решения задачи наискорейшего перехвата движущейся цели состоит в упрощении модели системы до такого уровня, что соответствующая задача оптимального управления начинает поддаваться аналитическому решению. В свою очередь, решение упрощённой задачи определяет опорную траекторию<sup>1</sup> для реального объекта управления, поэтому использование такого решения требует применение методов синтеза законов управления для следования по опорной траектории [3]. При этом упрощённая задача должна одновременно удовлетворять двум требованиям. Во-первых, опорная траектория, полученная в результате решения упрощённой задачи, должна быть в определённом смысле как можно более близка к практически реализуемой. Во-вторых, процесс вычисления оптимальной траектории должен быть быстрым по времени и не затратным по дополнительно выделяемой памяти компьютера.

В современной литературе достаточно большое количество моделей подвижных объектов исследовано аналитически. Например, изотропная ракета [4–10], модель Дубинса [11–18] (в том числе асимметричный случай [19–21]), самолёт Дубинса [22–24], модель Ридса-Шеппа [25–28] и др. Такие модели, в сравнении с линейно-аппроксимированными моделями, могут, например, более точно учитывать ограничения на манёвренность реального объекта управления. В то же время подобные модели сохраняют возможность аналитического решения задач, связанных с вычислением оптимальных по заданному критерию траекторий. Зачастую бесконечномерную задачу удаётся свести к решению системы вещественных уравнений, либо к поиску корня одного вещественного

---

<sup>1</sup>Термин «траектория» в данной работе имеет то же значение, что и в книге [2], т. е. функция изменения вектора состояния во времени. Под термином «путь» здесь будет подразумеваться линия в пространстве состояний, которая не обязательно параметризована временем. В физике и технике под термином «траектория» часто понимают «путь» в нашей терминологии, а сам термин «путь» обозначает длину соответствующей линии. Мы эту терминологию использовать не будем.

уравнения. Гарантированные и всегда сходящиеся методы поиска корней вещественных уравнений встречаются в работах [29—32].

Из упомянутых выше моделей объектов управления в данной работе особое внимание уделяется модели Дубинса. Модель Дубинса тесно связана с задачами построения линий ограниченной<sup>2</sup> кривизны на плоскости. Первые работы по поиску линии, соединяющей две заданные точки на плоскости и имеющей ограниченную кривизну и кратчайшую длину, принадлежат А.А. Маркову. В работе [11] он рассматривал четыре задачи о прокладке железнодорожных путей. Первая задача была сформулирована как поиск линии, соединяющей две точки на плоскости и имеющей кратчайшую длину и ограниченную кривизну, причём в первой точке фиксировано направление выхода этой линии. Первая задача Маркова может быть переформулирована как задача наискорейшего достижения финальной точки объектом управления, имеющим постоянную по модулю скорость и ограниченную манёвренность. В такой постановке задачу рассматривал Р. Айзекс в книге [4] для иллюстрации понятия универсальной поверхности в задаче о шофёре-убийце с неподвижным пешеходом. В работе [14], используя принцип максимума Понтрягина для первой задачи Маркова, Ю.И. Бердышев получил аналитическое решение в явном виде для этой задачи. Помимо этого, в работе [14] приведено решение задачи о наискорейшем попадании из заданного начального состояния на окружность с нормальным к ней в конечный момент времени вектором скорости при условии достаточной удалённости начального положения объекта управления от центра терминальной окружности. Результат Ю.И. Бердышева дополняет результаты А.А. Маркова явными аналитическими выражениями для оптимального управления. Решение первой задачи Маркова получено и для некоторых более сложных случаев: когда область захвата имеет форму окружности или отрезка [18; 33]; когда вводится дополнительное управление производной модуля скорости [34; 35]; когда ограничено угловое ускорение [36; 37]; когда на объект управления действует постоянное возмущение [38; 39]; когда целевая точка может непредсказуемо, но ограниченно перемещаться [4; 33; 40—44].

В работе [12] Л.Э. Дубинс произвёл классификацию кратчайших линий в задаче поиска линии наименьшей длины и ограниченной кривизны при заданном направлении выхода из первой точки и заданном направлении прихода во

---

<sup>2</sup>Под линией ограниченной кривизны понимается параметризованная своей длиной гладкая линия, производная вдоль которой липшиц-непрерывна.

вторую точку. Подробное аналитическое решение этой задачи получил Т. Пексаради в работе [13]. Позднее этот результат был переоткрыт другой группой исследователей [45; 46] и дополнительно обоснован в работе [17]. Кратчайшую линию в этой задаче называют «путь Дубинса», а соответствующий подвижный объект управления с ограниченной манёвренностью называют «машина Дубинса» (первые аналогии с машиной проводил, по-видимому, Р. Айзекс). В работе [15] разработана логическая схема для эффективного вычисления оптимального управления в том случае, когда целевое состояние находится достаточно далеко от начального положения машины Дубинса. Решение задачи Дубинса получено и для некоторых более сложных случаев: когда нужно посетить промежуточную точку [47] или окружность [48; 49]; когда построенный путь наименьшей длины должен касаться заданной окружности на конце [50]; когда на машину Дубинса действует постоянное возмущение [51–55]; когда путь Дубинса строится в неевклидовой геометрии [56–59].

Для некоторых приложений [60–62], использующих модель Дубинса, важную роль занимает понятие множества достижимости. При этом основной интерес представляет как само трёхмерное множество достижимости, так и его двумерная проекция на плоскость движения машины (плоское множество достижимости). Под множеством достижимости «в момент» понимают совокупность точек в пространстве состояний, в которых объект управления может оказаться в заданный момент времени, используя допустимые управления. Множество достижимости «к моменту» — это совокупность состояний, в которых мог оказаться объект управления к заданному моменту времени, используя допустимые управления. В данной работе будет активно использоваться только множество достижимости «в момент», поэтому указание «в момент» будет опускаться. Плоское множество достижимости машины Дубинса «в момент» описано в работе [63], а «к моменту» — в работе [64]. Способы попадания во внутренние точки плоского множества достижимости предложены в работе [65]. В работе [66] решается задача распределённого управления «щупальцем осьминога» фиксированной длины, причём финальная форма этого щупальца также может быть использована для достижения внутренних точек плоского множества достижимости машины Дубинса. Построение и анализ трёхмерного множества достижимости машины Дубинса произвели В.С. Пацко, А.А. Федотов и др. в

работах [16; 67—70]. Способы попадания во внутренние точки трёхмерного множества достижимости рассмотрены в работе [71].

В настоящей работе в качестве содержательных примеров рассмотрены задачи наискорейшего перехвата движущейся цели машиной Дубинса с фиксированным и не фиксированным углом перехвата. Предполагается, что цель движется по произвольной и заранее известной непрерывной траектории. Под перехватом, в случае не фиксированного угла перехвата, понимается сближение положения движущейся цели и машины Дубинса на плоскости на заданную величину. Если угол при перехвате фиксирован, то такой перехват называется боковым. В отличии от работ [72; 73] в рассматриваемых задачах функция управления считается ограниченной функцией времени, а критерием выступает время до перехвата. Подобные задачи встречались сразу в нескольких работах, но авторы ограничивались лишь частичными решениями.

Опишем ключевые работы по задаче перехвата цели машиной Дубинса с не фиксированным углом перехвата. В работе [74] для игры «двух автомобилей» установлены необходимые и достаточные условия поимки цели при любых начальных условиях. В неигровом случае предписанных движений цели эти условия носят достаточный характер. В работе [75] установлены достаточные условия того, что оптимальной траекторией будет линия типа «дуга-прямая». Эти условия накладывают ограничения на отношение наименьшего радиуса кривизны траектории машины Дубинса и расстояния между целью и машиной в начальный момент времени. В работах [76; 77] получено управление для перехвата цели по линии кратчайшей длины (из решения первой задачи Маркова), проведённой из начала движения машины в точку перехвата, причём полагается, что цель движется по прямой с постоянной скоростью. В работе [78] приведён алгоритм поимки движущейся равномерно по прямой цели машиной Дубинса, которая выбирает наискорейшую траекторию из класса «дуга-прямая». Авторы работ [79; 80] выделили сразу несколько утверждений, связанных с рассматриваемой в настоящей работе задачей. Во-первых, они установили, что если траектория движущейся цели не попадает в круги минимально доступного для разворота радиуса, которые касаются вектора скорости машины Дубинса в начальный момент времени, то перехват за наименьшее время осуществляется по линии кратчайшей длины. Во-вторых, если траектория движущейся цели всё же попадает в эти круги, то возможны случаи, когда наискорейший

перехват осуществляется не по линии кратчайшей длины из начального положения в точку перехвата. Также авторы приводят оценки сверху и снизу для оптимального времени перехвата. В работе [39] для вычисления наименьшего времени перехвата цели, движущейся равномерно по прямой, использован алгоритм деления пополам для участков непрерывности величины времени до экстремального прибытия в заданную движущуюся точку. Для той же задачи в работе [81] предложена схема вычислений с линейной сходимостью, которая автоматически (в отличие от работы [39]) учитывает участки отсутствия непрерывности функции времени до экстремального прибытия.

Теперь опишем ключевые результаты по задаче бокового перехвата движущейся цели машиной Дубинса. Прежде всего отметим, что такая задача перехвата эквивалентна задаче достижения фиксированного состояния в условиях зависящего только от времени возмущения (ветра). В этом можно убедиться, перейдя в систему координат, связанную с ветром. Поэтому в публикациях, приводимых далее, задача быстрогодействия в условиях ветра является эквивалентной задаче наискорейшего перехвата движущейся цели. В работах [51; 52] впервые рассмотрен случай наличия постоянного ветра в задаче наискорейшего перемещения машины Дубинса в фиксированное конечное состояние. Для зависящего от времени ветра численная схема для решения задачи быстрогодействия предложена в работе [82]. Первые аналитические результаты для случая постоянного ветра получены в работе [53]. В ней авторы строили оптимальный по времени путь для аэробиологической миссии беспилотного летательного аппарата. В этой работе результаты были получены лишь для достаточно больших расстояний между начальным и конечным положением машины Дубинса на плоскости. Позднее этот результат был обобщён и на случай близких расстояний в работе [54]. Основным итогом этих работ заключается в том, что для некоторых случаев есть явные выражения для вычисления параметров оптимального управления, а для других сценариев в худшем случае нужно решить систему двух вещественных уравнений с двумя неизвестными. Численный метод решения подобной системы вещественных уравнений рассмотрен в работе [83]. В работе [84] показано, что можно обойтись решением одного вещественного уравнения с одним неизвестным. Аналитические результаты по задаче наискорейшего достижения целевого состояния в условиях постоянного ветра подытожены в работе [55]. В работе [85] было показано, что путём отказа от оптимальности



можно получить управление для задачи с постоянным ветром аналитически в явном виде без решения вещественных уравнений численными методами.

Непосредственное рассмотрение задачи бокового перехвата движущейся прямолинейно и равномерно цели можно найти в работе [86]. В этой статье рассмотрен случай перехвата под прямым углом цели, которая изначально находилась на достаточно большом расстоянии от машины Дубинса. В работе [87] получено обобщение этого решения на случай не только прямого угла перехвата движущейся цели. В работах [88; 89] получено решение аналогичной задачи, но для случая движения цели по окружности с постоянной по модулю скоростью. Предполагается, что векторы скорости цели и машины Дубинса при перехвате должны стать сонаправленными. Более сложный случай движения цели по траектории формы ипподрома разобран в работе [90]. Область практического применения подобных постановок достаточно широка. К ней относятся задачи построения опорных траекторий в случае движения различных объектов управления в условиях ветра [91; 92], в случае дозаправки самолётов и других транспортных средств [88; 93], в случае посадки беспилотного летательного аппарата на движущуюся платформу (задача может решаться в том числе в условиях наличия ветра), в военных приложениях [86], в случаях перехвата и поражения движущихся по программным траекториям целей.

Модель Дубинса широко изучалась и в рамках игровой задачи преследования-уклонения. Например, в так называемой игре двух автомобилей в качестве моделей движения преследователя и убегающего используется модель Дубинса. Игра двух автомобилей впервые сформулирована и исследована Р. Айзексом в 50-е годы прошлого века. В классической работе [4, стр. 237–244] Р. Айзекс получил частичное описание барьерной поверхности для этой игры, а также описание сингулярных линий на этой поверхности. Айзекс предполагал, что независимые параметры игры (радиус захвата, отношение скоростей и отношение минимальных радиусов поворота) таковы, что захват возможен из произвольного начального состояния. Таким образом, барьер, исследованный Айзексом, не был замкнутой поверхностью. В [74] Э. Кокейн выявил необходимые и достаточные условия для гарантии перехвата из произвольного начального состояния. В дальнейшем эти условия были уточнены Г.Т. Рублейном в [94]. Необходимые и достаточные условия существования стратегии уклонения представлены в работе [95]. В публикациях [74; 94; 95] предполагается, что перехват — это

совпадение координат на плоскости у преследователя и убегающего, что соответствует нулевому радиусу захвата. В [4; 41] Р. Айзекс и Э. Мерц интенсивно исследовали случай игры двух автомобилей с нулевым минимальным радиусом поворота для убегающего (игра шофёр-убийца). Ёмкий анализ и современное обсуждение этого случая приведены в работе [33]. В [96] Дж.В. Брейквелл и Э. Мерц рассчитали минимальный радиус захвата, который всегда допускает перехват из произвольного начального состояния для заданного соотношения скоростей и радиусов поворота. В [42] был предложен новый критерий гарантии перехвата в пространстве состояний, основанный на геометрии барьера. Если начало системы координат связано с преследователем (ось ординат совмещена со скоростью преследователя) и поверхность барьера не пересекает положительную часть оси ординат, то преследователь может перехватить убегающего из любого начального состояния. Позднее М. Паштер и Т. Милох выявили новые области пространства параметров, в которых незамкнутый барьер геометрически отличался от изученных ранее типов барьера [97]. Синтез оптимального управления с обратной связью для игры двух автомобилей был представлен в [98; 99] Э.Н. Симаковой. Э.Н. Симакова исследовала функцию цены игры в [100] и барьер игры в [101]. Её результаты применимы лишь в частном случае, когда преследователь превосходит по всем параметрам убегающего. Кроме того, ею рассмотрены только область пространства состояний, где значение игры является гладкой функцией. В [102] произведено сравнение законов наведения, полученных из решения игры, с другими методами, такими как пропорциональное наведение. В [103] Н. Фарбер и Дж. Шинар описали методику получения приближенного решения для игры двух автомобилей и сравнили её с решением Симаковой. Вычислительный подход, основанный на дискретизации игры двух автомобилей, был исследован в [104, стр. 48–60]. В работе [44] исследованы и визуализированы сингулярные поверхности игры в широком диапазоне параметров. Всесторонний обзор игры двух автомобилей в контексте дифференциальных игр преследования-уклонения был представлен в [105].

Решение игры двух автомобилей может быть использовано для задачи избежания столкновений, где предполагается, что сотрудничество между игроками отсутствует, а убегающий должен использовать такую стратегию, использование которой приведёт к избежанию столкновения при любой стратегии преследователя. Предполагается, что убегающий выступает объектом управления,

а преследователь играет роль движущегося препятствия. Формальная постановка задачи остаётся прежней. Обычно параметры задачи уклонения от столкновения отличаются от параметров задачи преследования-уклонения тем, что у преследователя нет преимущества в скорости и манёвренности. В [106] Л. Мейер представил метод получения области захвата, когда эта область ограничена. Его метод был основан на анализе множеств достижимости: первоначально определяются множества достижимости игроков для заданного момента времени; затем, путём анализа этих геометрических мест точек для различных фиксированных моментов времени и фиксированного начального состояния область захвата определяется путём нахождения огибающих и пересечений множеств достижимости. В [107—109] Э. Мерц и др. рассмотрели кооперативную задачу предотвращения столкновений с уравнениями движения игры двух автомобилей. Кооперативное предотвращение столкновений подразумевает максимизацию расстояния между положениями наименьшего сближения обоих игроков, вместо максимизации времени до столкновения убегающим в игре преследования-уклонения. Далее, Т. Милох и С.Д. Шарма дополнили результаты Мерца и исследовали поверхность барьера для задачи предотвращения столкновений при кооперативных манёврах игроков [110; 111]. В [112; 113] Т.Л. Винсент и др. проанализировали задачу предотвращения столкновения двух транспортных средств при отсутствии взаимодействия между игроками. Основная идея анализа состояла в разделении пространства состояний на зоны уязвимости. «Красная» зона соответствует области победы преследователя в игре двух автомобилей. Следовательно, граница красной зоны является барьерной поверхностью для игры двух автомобилей. В работе [112] дано аналитическое описание барьера в случае превосходства убегающего по параметрам. В работе [114] те же авторы дополнили свой анализ рассмотрением стратегии пропорционального наведения для преследователя. В статьях [115; 116] рассматривалась проблема предотвращения столкновений для множеств захвата в виде линейных сегментов и эллипсов. В [117; 118] была рассмотрена расширенная кинематическая модель, учитывающая переменные скорости игроков. В [119] К.Х. Квик рассчитал манёвр избежания столкновения для убегающего в случае известного манёвра преследователя.

Игра двух идентичных автомобилей была впервые сформулирована и исследована Э. Мерцем в [120]. В этой игре полагается, что скорости и манёв-

ренные возможности двух игроков равны между собой. Таким образом, после выбора соответствующей системы координат, можно добиться того, что в игре есть всего один независимый параметр — радиус захвата. В работе [120] Мерц описал барьер этой игры, а также универсальную и рассеивающую поверхности. Игра с преследованием до линии жизни для двух идентичных автомобилей изучалась в [121]. Отличие от постановки игры двух идентичных автомобилей состоит в том, что игровое пространство лежит внутри терминальной поверхности и преследователь максимизирует, а убегающий минимизирует время до попадания на терминальную поверхность. В [122] Я. Митчелл использовал полученное Мерцем описание барьера для валидации предложенного решателя уравнения Гамильтона-Якоби. Кооперативная задача избежания столкновения для двух идентичных автомобилей полностью исследована Т. Тарнопольской и Н. Фэлтоном в [123]. Более того, ими было проанализировано несколько обобщающих случаев для более широких диапазонов параметров игры [124–129].

Не смотря на то, что игра двух идентичных автомобилей изучалась достаточно интенсивно, до сих пор существует ряд вопросов, который не исследован в должной мере. Аналитическое описание барьера, представленное в [120; 122], ограничено только параметрическим описанием уравнений поверхностей, которым принадлежит барьер. Эти работы не предоставляют явный вид ограничений на области изменения параметров, участвующих в описании поверхностей, которые содержат барьер. Таким образом, в литературе не представлено условий для отсечения лишних частей поверхностей, составляющих барьер. Аналогичное можно сказать об универсальной и рассеивающей поверхностях [120]. В дополнении к этому, Мерц отмечал неожиданный результат численного расчёта угловых срезов для рассеивающей поверхности для достаточно малых углов между скоростями игроков. Аналитический анализ этого явления также не приводится в известной литературе.

Центральную роль в данной работе занимает класс задач оптимального управления, которые могут быть интерпретированы как задачи наискорейшего перехвата цели, движущейся известным образом. Предполагается, что модель движения объекта управления достаточно проста и сохраняется возможность аналитического описания функции расстояния от произвольной точки до некоторой проекции множества достижимости этого объекта управления. Единственное ограничение, которое накладывается на траекторию движущейся

цели, состоит в том, что она должна быть липшиц-непрерывной функцией времени. С практической точки зрения это означает, что координаты движущейся цели меняются с ограниченной скоростью. Частные случаи такой постановки задачи широко известны по большому количеству работ. В настоящей работе используется идея построения всегда сходящегося алгоритма вычисления корня вещественного уравнения. Использование этой идеи осуществлено в рамках задачи оптимального управления с учётом специальных свойств функции расстояния до проекции множества достижимости объекта управления. Также в данной работе приведён исчерпывающий анализ поведения поверхности барьера в игре преследования-уклонения двух идентичных автомобилей и получены явные выражения для оптимальных управлений в форме синтеза для обоих игроков на поверхности барьера.

**Актуальность** данной работы обусловлена стремительно возрастающим мировым интересом в усовершенствовании систем автоматизации движения автономных устройств, а также в усовершенствовании систем предупреждения о столкновении.

**Объектом исследования** являются оптимальные по быстродействию траектории управляемых объектов, а **предметом исследования** выступают численно-аналитические методы и алгоритмы расчёта таких траекторий.

**Целью** данной работы является повышение эффективности построения опорных траекторий для динамических объектов управления путём разработки, математического обоснования и тестирования алгоритмов построения наискорейшей траектории перехвата движущейся цели, а также путём аналитического исследования некоторых конкретных моделей объектов управления (модели простых движений, модели Дубинса) в рамках поставленной задачи наискорейшего перехвата.

Для достижения поставленной цели необходимо было решить следующие **задачи**:

1. Исследовать свойства задачи оптимального управления с критерием быстродействия с изменяющимся во времени терминальным условием (движущейся целью) и выделить такие общие требования к уравнениям состояния динамической системы, чтобы сохранялась возможность конструирования всегда сходящихся универсальных алгоритмов находж-

- дения оптимального значения критерия (наименьшего времени перехвата).
2. Разработать алгоритмы и реализовать соответствующий комплекс программ, позволяющий гарантированно и эффективно находить наименьшее время перехвата и строить соответствующую оптимальную траекторию перехвата.
  3. Получить и исследовать аналитические решения для нескольких конкретных и практически значимых моделей движения объекта управления в задаче перехвата: модель простых движений, модель Дубинса.

**Степень научной разработанности темы** является достаточно высокой в связи с большим количеством опубликованных работ по заданной тематике. Большое количество работ посвящено задачам перехвата с конкретной моделью объекта управления: простые движения, модель Дубинса, модель Ридса-Шеппа, изотропная ракета и т. п. Модель движения цели в этих работах также варьируется: покой цели, равномерное движение цели по прямой, предписанное движение цели в классе непрерывных траекторий, непредсказуемое движение цели с ограничениями на динамику движений. Отдельные авторы представляли решения подобных задач перехвата в виде сходящихся алгоритмов вычисления наименьшего времени перехвата (с указанием на способы построения оптимальной траектории с помощью известного наименьшего времени перехвата). Чаще всего решения подобных задач представляются аналитически в неявном виде в качестве систем вещественных уравнений с несколькими неизвестными. В таком виде достаточно проблематично подобрать гарантированно сходящийся метод вычисления нужных корней таких уравнений. Подобный вид представления решения не лишён смысла, т. к. зачастую он позволяет получить новые представления о качественных свойствах объекта управления и оптимального закона управления в рамках задачи перехвата: понять, при каких значениях параметров перехват возможен, получить представления о различных классах оптимальных траекторий перехвата и т. п.

**Научная новизна:**

1. Впервые разработан, обоснован и протестирован алгоритм вычисления наименьшего времени перехвата на основе лучшей из универсальных оценок снизу для наименьшего времени перехвата. Также обоснована

- оптимальность (неулучшаемость по скорости сходимости) этого алгоритма в своём классе (удовл. п. 2, 3 пасп. спец. 1.2.2).
2. Впервые получены общие аналитические результаты для задачи наискорейшего перехвата машиной Дубинса цели, движущейся по произвольной, непрерывной и заранее известной траектории. Впервые получено аналитическое выражение в явном виде с использованием формул Кардано для функции расстояния от произвольной точки до плоского множества достижимости машины Дубинса. Впервые предложен, реализован и протестирован алгоритм нахождения наименьшего времени перехвата на основе функции универсального оценивания снизу в этой задаче. На основе указанных теоретических конструкций разработан комплекс проблемно-ориентированных программ, позволяющий эффективно рассчитывать оптимальную траекторию перехвата, проекцию плоского множества достижимости в заданный момент времени, оптимальное управление для перехвата и прочие параметры оптимального движения объекта управления. С помощью комплекса программ проведены численные эксперименты с конкретными траекториями движения цели (удовл. п. 2, 3, 7–9 пасп. спец. 1.2.2).
  3. Впервые получены общие аналитические результаты для задачи наискорейшего *бокового* перехвата машиной Дубинса цели, движущейся по произвольной непрерывной и заранее известной траектории. Впервые для этой задачи произведена полная классификация кандидатов в оптимальные траектории бокового перехвата, получены аналитические выражения для вычисления наименьшего времени перехвата, представлен алгоритм вычисления параметров оптимальной траектории перехвата по известному наименьшему времени перехвата (удовл. п. 2, 3, 7, 8 пасп. спец. 1.2.2).
  4. Впервые с помощью математического моделирования и вычислительного эксперимента найдено рубежное значение радиуса захвата для игры двух идентичных автомобилей, при котором геометрия барьера игры имеет качественно разный вид. Указанный эффект обоснован математически. Впервые получен явный вид аналитических формул вычисления оптимальных управлений игроков на барьере, а также разработана

устойчивая к ошибке округления процедура для использования описанных аналитических формул (удовл. п. 2, 3, 7, 8 пасп. спец. 1.2.2).

**Теоретическая и практическая значимость** заключается в том, что полученные результаты могут быть использованы для класса задач оптимального управления, для которых модель движения объекта управления достаточно проста (сохраняется возможность эффективного вычисления функции расстояния от произвольной точки до соответствующей проекции множества достижимости объекта управления). Класс таких задач содержит широкий спектр практически важных моделей (модель простых движений, модель Дубинса, модель изотропных ракет и др.), широко используемых для построения опорных траекторий в различных задачах техники.

**Методология исследования** заключается в использовании методов оптимального управления, анализа многозначных отображений, методов компьютерного моделирования и систем визуализации.

**Достоверность** полученных результатов обеспечивается внутренней непротиворечивостью и соответствию теоретических выводов результатам численного моделирования в конкретных примерах. Также результаты находятся в преемственном соответствии с общеизвестными результатами.

#### **Основные положения, выносимые на защиту:**

1. Метод и алгоритмы, вычисляющие наименьшее время перехвата для класса задач оптимального управления с критерием быстродействия и изменяющимся во времени терминальным условием (движущейся целью). Доказательство сходимости этих алгоритмов, а также оптимальности в своём классе по скорости сходимости алгоритма, основанного на лучшей из функций универсального оценивания снизу.
2. Численные методы и алгоритмы, реализованные в виде комплекса проблемно-ориентированных программ для построения траектории в задаче наискорейшего перехвата движущейся цели машиной Дубинса.
3. Математическая модель учёта желаемого значения угла вектора скорости в финальный момент времени для задачи наискорейшего бокового перехвата движущейся цели машиной Дубинса. Алгоритм и его реализация для построения траектории бокового перехвата.
4. Метод вычисления оптимальных синтезирующих управлений на барьере, определяющих оптимальные траектории преследования-уклонения



игроков, для игры двух идентичных автомобилей. Доказательство наличия геометрических различий в построении барьера для различных значений радиуса захвата.

**Апробация работы.** Основные результаты работы неоднократно докладывались на научных семинарах ИПУ им. В.А. Трапезникова РАН (семинары «Управление по неполным данным»), а также на отечественных конференциях: Ломоносовские чтения (2022), Мультиконференция по проблемам управления (2021, 2022, 2023), Ломоносов (2020), Управление большими системами (2023), Современные проблемы математики и её приложений (2020), Всероссийская научная конференция МФТИ (2020).

**Личный вклад.** Все результаты работы получены автором лично под научным руководством д.т.н., чл.-корр. РАН А.А. Галяева. В работах, написанных в соавторстве, вклад автора диссертации в полученные результаты в части аналитического исследования, математического моделирования, численных методов, разработки комплекса программ и проведении расчетов является определяющим.

**Публикации.** Основные результаты по теме диссертации изложены в 3 печатных изданиях, входящих в WoS/Scopus.

**Объём и структура работы.** Диссертация состоит из введения, трёх глав, заключения и приложения. Полный объём диссертации составляет 154 страницы с 31 рисунком и 4 таблицами. Список литературы содержит 131 наименование.

## Глава 1. Наискорейший перехват цели, движущейся известным образом

Эта глава посвящена формальной постановке задачи наискорейшего перехвата движущейся цели как задачи оптимального управления с критерием быстродействия. Также в главе изложены вспомогательные теоретические выкладки, необходимые для построения универсальных и всегда сходящихся алгоритмов вычисления наименьшего времени перехвата.

### 1.1 Постановка задачи перехвата движущейся цели

Пусть  $t \in \mathbb{R}_0^+$  обозначает переменную, отвечающую за время, а  $\mathbf{x} = \text{stack}(\mathbf{y}, \mathbf{z})$  обозначает переменную, отвечающую вектор-функции состояния рассматриваемой динамической системы. Здесь вектор  $\mathbf{x}(t) \in \mathcal{X} = \mathcal{Y} \times \mathcal{Z}$ . Множество  $\mathcal{X}$  является пространством состояний динамической системы. Пространство  $\mathcal{Y}$  является конечномерным нормированным пространством с нормой  $\|\cdot\| : \mathcal{Y} \rightarrow \mathbb{R}_0^+$ . Предполагается, что вектор  $\mathbf{y}(t) \in \mathcal{Y}$  отвечает только тем компонентам вектора состояния, которые важны при перехвате движущейся цели. Оставшиеся компоненты вектора состояния включены в вектор  $\mathbf{z}(t) \in \mathcal{Z}$  и могут быть произвольными при перехвате. Уравнения состояния (динамику системы) будем описывать с помощью следующих дифференциальных уравнений:

$$\dot{\mathbf{y}} = \mathbf{f}(\mathbf{x}, \mathbf{u}), \quad \dot{\mathbf{z}} = \mathbf{g}(\mathbf{x}, \mathbf{u}).$$

Здесь вектор  $\mathbf{u}(t) \in \mathcal{U}$  является значением функции управления в момент времени  $t \in \mathbb{R}_0^+$ , а множество  $\mathcal{U}$  является компактным множеством допустимых значений функции управления. Множество всех измеримых допустимых функций управления будем обозначать через  $\mathcal{A}$  (т. е. функция  $\mathbf{u} \in \mathcal{A}$ ). В пределах данной главы будем считать, что множество  $\mathcal{A}$  и уравнения состояния подчинены требованиям теоремы 2 из книги [130, стр. 265]. Также дополнительно потребуем, чтобы скорость объекта управления в пространстве координат  $\mathcal{Y}$  была

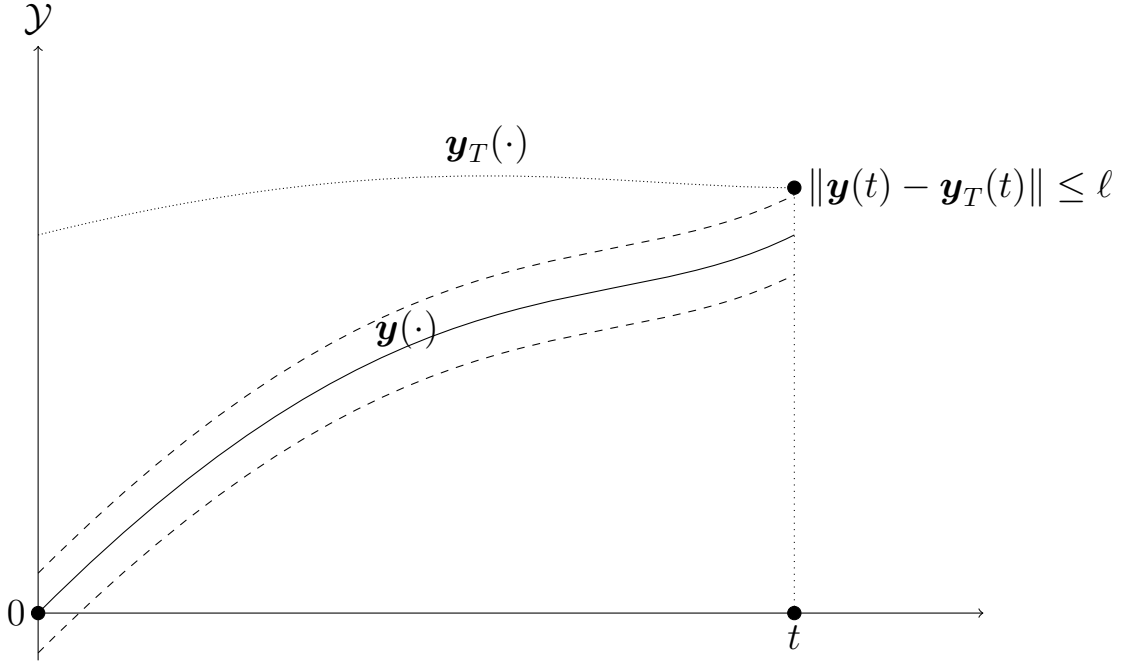


Рисунок 1.1 — Траектория перехвата (сплошная линия) для заданного движения цели (мелкий пунктир). Пунктирные линии вокруг траектории перехвата служат границей области захвата радиуса  $\ell$ . Цель попадает в область захвата в момент времени  $t$ . Пространство  $\mathcal{Y}$  изображено одномерным для простоты.

равномерно ограничена. Без потери общности можно считать, что  $\|\mathbf{f}(\mathbf{x}, \mathbf{u})\| \leq 1$  для всех векторов  $\mathbf{x} \in \mathcal{X}$  и  $\mathbf{u} \in \mathcal{U}$ <sup>1</sup>.

Пусть функция  $\mathbf{y}_T \in \text{Lip}_v(\mathbb{R}_0^+, \mathcal{Y})$ <sup>2</sup> описывает траекторию движения цели (рис. 1.1). Постоянная  $v \in \mathbb{R}_0^+$  по смыслу является максимально доступной для цели абсолютной величиной скорости её движения. Предполагается, что траектория движения цели известна априори, но в то же время алгоритмы получения решения должны работать с произвольными траекториями  $\mathbf{y}_T \in \text{Lip}_v(\mathbb{R}_0^+, \mathcal{Y})$  и опираться только на значение максимально доступной для цели абсолютной величины скорости её движения  $v \in \mathbb{R}_0^+$ .

Пусть начальные условия заданы с помощью вектора  $\mathbf{x}(0) = \mathbf{x}_0 \in \mathcal{X}$ . Без потери общности, будем считать, что вектор  $\mathbf{y}(0) = \mathbf{0} \in \mathcal{Y}$ . Если не оговорено иное, то будем считать, что вектор-функция  $\mathbf{x} = \text{stack}(\mathbf{y}, \mathbf{z})$  является абсолютно непрерывным решением уравнений состояния, отвечающим задан-

<sup>1</sup>В дальнейшем для ясности мы будем преимущественно использовать для функций курсив, а для точек не функциональных пространств прямой шрифт.

<sup>2</sup>Обозначение  $\text{Lip}_v(\mathcal{F}, \mathcal{G})$  используется для множества  $v$ -липшицевых функций. Если функция  $\mathbf{y} \in \text{Lip}_v(\mathcal{F}, \mathcal{G})$ , то  $\mathbf{y} : \mathcal{F} \rightarrow \mathcal{G}$  и  $\|\mathbf{y}(\mathbf{x}_2) - \mathbf{y}(\mathbf{x}_1)\|_{\mathcal{G}} \leq v \|\mathbf{x}_2 - \mathbf{x}_1\|_{\mathcal{F}}$  для всех точек  $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2 \in \mathcal{F}$ .

ной функции управления  $\mathbf{u} \in \mathcal{A}$  и начальному условию  $\mathbf{x}(0) = \mathbf{x}_0$ . Определим задачу наискорейшего перехвата движущейся цели как задачу поиска наименьшего значения следующего функционала:

$$J[\mathbf{u}; \mathbf{y}_T] \stackrel{\text{def}}{=} \min \{t \in \mathbb{R}_0^+ : \|\mathbf{y}(t) - \mathbf{y}_T(t)\| \leq \ell\} \rightarrow \inf_{\mathbf{u} \in \mathcal{A}}.$$

Здесь  $\ell \in \mathbb{R}_0^+$  является *радиусом захвата* движущейся цели. Под радиусом захвата можно понимать как размер самой цели, так и размер объекта управления. Основным смыслом радиуса захвата состоит в том, что это величина, на которую объект управления должен сблизиться с целью в *пространстве важных для перехвата координат*  $\mathcal{Y}$  в конечный момент времени  $t_f \in \mathbb{R}_0^+$ . Если  $\ell = 0$ , то под перехватом движущейся цели понимается совпадение соответствующих координат объекта управления и цели  $\mathbf{y}(t_f) = \mathbf{y}_T(t_f)$ .

В дальнейшем в рамках этой главы нам будет удобно по умолчанию формально считать, что  $\min \emptyset = +\infty$ .

## 1.2 Свойства проекций множества достижимости в задаче перехвата

*Множеством достижимости* в момент времени  $t \in \mathbb{R}_0^+$  называется множество всех точек из пространства состояний, которые могут быть достигнуты в момент времени  $t \in \mathbb{R}_0^+$  объектом управления из начального состояния  $\mathbf{x}_0 \in \mathcal{X}$  при помощи всех допустимых функций управления [16]. Далее главную роль для нас будет играть не само множество достижимости, а его проекция на пространство важных для перехвата координат  $\mathcal{Y}$  (рис. 1.2):

$$\mathcal{R}(t) \stackrel{\text{def}}{=} \left\{ \int_{[0,t]} \mathbf{f}(\mathbf{x}(\theta), \mathbf{u}(\theta)) d\theta : \mathbf{u} \in \mathcal{A} \right\}.$$

Отметим, что функция  $\mathcal{R} : \mathbb{R}_0^+ \rightarrow 2^{\mathcal{Y}}$  является многозначным отображением и её значение  $\mathcal{R}(t)$  является подмножеством пространства  $\mathcal{Y}$  для каждого момента времени  $t \in \mathbb{R}_0^+$ . Если  $\mathcal{Z} = \emptyset$ , то множество  $\mathcal{R}(t) \subset \mathcal{X} = \mathcal{Y}$  является

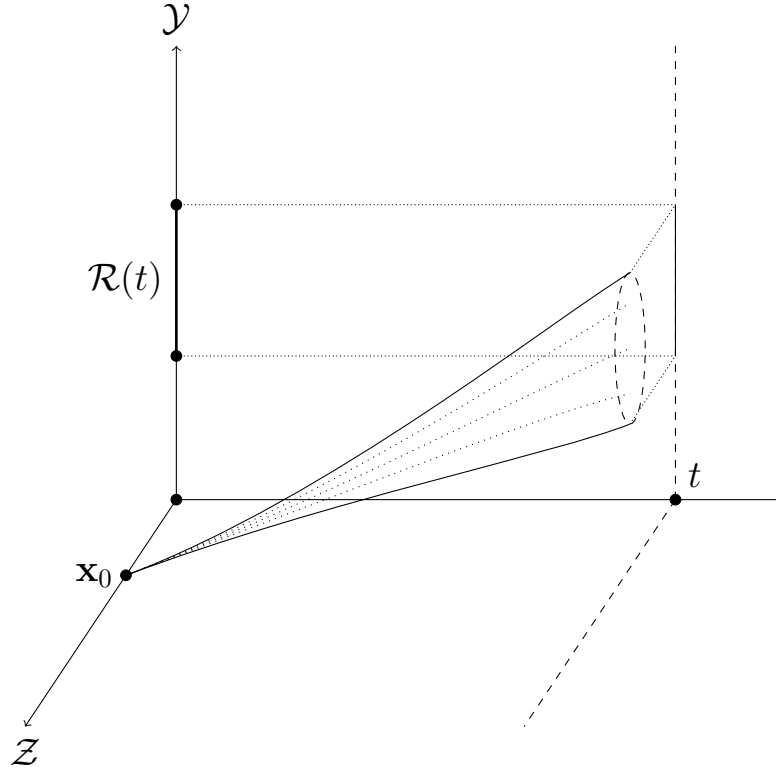


Рисунок 1.2 —  $\mathcal{R}(t)$  — это проекция множества достижимости (сплошная линия) в момент времени  $t$  (пунктирный эллипс) на пространство  $\mathcal{Y}$ .

множеством достижимости в обычном смысле этого термина. Согласно общим результатам теории оптимального управления множество  $\mathcal{R}(t)$  является компактным множеством [130, стр. 265] для всякого момента времени  $t \in \mathbb{R}_0^+$ . В дальнейшем нам понадобится функция расстояния от проекции множества достижимости  $\mathcal{R}(t)$  до точки  $\mathbf{y} \in \mathcal{Y}$ :

$$\rho(t, \mathbf{y}) \stackrel{\text{def}}{=} \min_{\boldsymbol{\eta} \in \mathcal{R}(t)} \|\boldsymbol{\eta} - \mathbf{y}\|.$$

Предполагается, что эта функция предоставлена аналитически в явном виде для рассматриваемого объекта управления, либо она может быть эффективно вычислена.

**Лемма 1.1.** *Функция  $\rho(\cdot, \mathbf{y}) \in \text{Lip}_1(\mathbb{R}_0^+, \mathbb{R}_0^+)$  для всех точек  $\mathbf{y} \in \mathcal{Y}$ .*

*Доказательство.* Рассмотрим произвольные моменты времени  $t_1, t_2 \in \mathbb{R}_0^+$ . Для всех точек  $\mathbf{y}_1 \in \mathcal{R}(t_1)$ ,  $\mathbf{y}_2 \in \mathcal{R}(t_2)$  по неравенству треугольника справедлива следующая оценка:

$$\rho(t_1, \mathbf{y}) = \min_{\boldsymbol{\eta} \in \mathcal{R}(t_1)} \|\boldsymbol{\eta} - \mathbf{y}\| \leq \|\mathbf{y}_1 - \mathbf{y}\| \leq \|\mathbf{y}_2 - \mathbf{y}_1\| + \|\mathbf{y} - \mathbf{y}_2\|. \quad (1.1)$$

Используя свойства проекции множества достижимости, можно утверждать, что для всякой точки  $\mathbf{y}_2 \in \mathcal{R}(t_2)$  существует такая функция управления  $\mathbf{u} \in \mathcal{A}$ , что

$$\tilde{\mathbf{y}} \stackrel{\text{def}}{=} \mathbf{y}_2 - \int_{[t_1, t_2]} \mathbf{f}(\mathbf{x}(t), \mathbf{u}(t)) dt \in \mathcal{R}(t_1).$$

В силу того, что неравенство (1.1) справедливо для всех точек  $\mathbf{y}_1 \in \mathcal{R}(t_1)$ , мы можем подставить в него значение  $\mathbf{y}_1 = \tilde{\mathbf{y}}$  и получить следующую серию оценок:

$$\rho(t_1, \mathbf{y}) \leq \left\| \int_{[t_1, t_2]} \mathbf{f}(\mathbf{x}(t), \mathbf{u}(t)) dt \right\| + \|\mathbf{y} - \mathbf{y}_2\| \leq |t_2 - t_1| + \|\mathbf{y} - \mathbf{y}_2\|.$$

Последнее неравенство следует из ограничения  $\|\mathbf{f}(\mathbf{x}(t), \mathbf{u}(t))\| \leq 1$ . В связи с тем, что это неравенство справедливо для всех точек  $\mathbf{y}_2 \in \mathcal{R}(t_2)$ , можно предположить, что точка

$$\mathbf{y}_2 \in \arg \min_{\boldsymbol{\eta} \in \mathcal{R}(t_2)} \|\boldsymbol{\eta} - \mathbf{y}\|.$$

Это приводит к оценке  $\rho(t_1, \mathbf{y}) - \rho(t_2, \mathbf{y}) \leq |t_2 - t_1|$ . Аналогичным образом можно получить оценку  $\rho(t_2, \mathbf{y}) - \rho(t_1, \mathbf{y}) \leq |t_2 - t_1|$ .  $\square$

**Лемма 1.2.** *Функция  $\rho(t, \cdot) \in \text{Lip}_1(\mathcal{Y}, \mathbb{R}_0^+)$  для всех моментов времени  $t \in \mathbb{R}_0^+$ .*

*Доказательство.* Для всех точек  $\mathbf{y}_1, \mathbf{y}_2 \in \mathcal{Y}$  справедлива следующая цепочка выражений:

$$\rho(t, \mathbf{y}_1) = \min_{\boldsymbol{\eta} \in \mathcal{R}(t)} \|\boldsymbol{\eta} - \mathbf{y}_1\| \leq \min_{\boldsymbol{\eta} \in \mathcal{R}(t)} \|\boldsymbol{\eta} - \mathbf{y}_2\| + \|\mathbf{y}_2 - \mathbf{y}_1\| = \rho(t, \mathbf{y}_2) + \|\mathbf{y}_2 - \mathbf{y}_1\|.$$

Таким образом, справедлива оценка  $\rho(t, \mathbf{y}_1) - \rho(t, \mathbf{y}_2) \leq \|\mathbf{y}_2 - \mathbf{y}_1\|$ . Аналогичным способом можно получить неравенство  $\rho(t, \mathbf{y}_2) - \rho(t, \mathbf{y}_1) \leq \|\mathbf{y}_2 - \mathbf{y}_1\|$ .  $\square$

Функция расстояния  $\rho : \mathbb{R}_0^+ \times \mathcal{Y} \rightarrow \mathbb{R}_0^+$  позволяет представить *наименьшее время перехвата* цели, движущейся по траектории  $\mathbf{y}_T \in \text{Lip}_v(\mathbb{R}_0^+, \mathcal{Y})$ , следующим образом:

$$T^*[\mathbf{y}_T] \stackrel{\text{def}}{=} \min \{t \in \mathbb{R}_0^+ : \rho(t, \mathbf{y}_T(t)) \leq \ell\} = \inf_{\mathbf{u} \in \mathcal{A}} J[\mathbf{u}; \mathbf{y}_T].$$

Если расстояние  $\rho(t, \mathbf{y}_T(t)) > \ell$  для всех моментов времени  $t \in \mathbb{R}_0^+$ , то будем формально считать, что наименьшее время перехвата  $T^*[\mathbf{y}_T] = +\infty$ . Таким

образом, наименьшее время перехвата — это первый момент времени, когда расстояние между положением движущейся цели и проекцией множества достижимости объекта управления стало не больше, чем радиус захвата.

**Теорема 1.1.** *Для всякой траектории цели  $\mathbf{y}_T \in \text{Lip}_v(\mathbb{R}_0^+, \mathcal{Y})$  если начальное расстояние  $\rho(0, \mathbf{y}_T(0)) \geq \ell$ , то наименьшее время перехвата*

$$T^*[\mathbf{y}_T] = \min \{t \in \mathbb{R}_0^+ : \rho(t, \mathbf{y}_T(t)) = \ell\}.$$

*Доказательство.* Применение лемм 1.1, 1.2 и определения липшиц-непрерывности траектории цели  $\mathbf{y}_T \in \text{Lip}_v(\mathbb{R}_0^+, \mathcal{Y})$  для всех моментов времени  $t_1, t_2 \in \mathbb{R}_0^+$  приводит к следующей серии оценок:

$$|\rho(t_2, \mathbf{y}_T(t_2)) - \rho(t_1, \mathbf{y}_T(t_1))| \leq |t_2 - t_1| + \|\mathbf{y}_T(t_2) - \mathbf{y}_T(t_1)\| \leq (1 + v)|t_2 - t_1|.$$

Отсюда следует, что функция  $\rho(\cdot, \mathbf{y}_T(\cdot))$  принадлежит классу  $\text{Lip}_{1+v}(\mathbb{R}_0^+, \mathcal{Y})$  и является непрерывной функцией времени. Пусть  $\rho(t, \mathbf{y}_T(t)) < \ell$  для момента времени  $t = T^*[\mathbf{y}_T] \in \mathbb{R}_0^+$ . Если  $\rho(0, \mathbf{y}_T(0)) = \ell$ , то наименьшее время перехвата  $t = 0$ . Если  $\rho(0, \mathbf{y}_T(0)) > \ell$ , то  $t > 0$ . Согласно теореме о прохождении непрерывной функцией всех промежуточных значений, существует такой момент времени  $t^* \in (0, t)$ , что  $\rho(t^*, \mathbf{y}_T(t^*)) = \ell$  и  $t^* < t = T^*[\mathbf{y}_T]$ . Последнее неравенство противоречит тому, что  $t = T^*[\mathbf{y}_T]$  является наименьшим временем перехвата.  $\square$

Теорема 1.1 утверждает, что наименьшее время перехвата является наименьшим неотрицательным корнем уравнения  $\rho(t, \mathbf{y}_T(t)) = \ell$ . Если траектория цели  $\mathbf{y}_T$  фиксирована, то мы можем использовать универсальный метод поиска корня вещественного уравнения заданный теоремой 2 из работы [31] для поиска наименьшего неотрицательного корня липшицевой функции

$$g(\cdot) = \rho(\cdot, \mathbf{y}_T(\cdot)) - \ell.$$

Далее будет показано как использовать особые свойства семейства функций вида  $g \in \text{Lip}_{1+v}(\mathbb{R}_0^+, \mathcal{Y})$ , параметризованное траекториями цели  $\mathbf{y}_T \in \text{Lip}_v(\mathbb{R}_0^+, \mathcal{Y})$ , чтобы получить наибольший размер шага для алгоритма поиска наименьшего корня рассматриваемого уравнения, который использует только константу

$v \in \mathbb{R}_0^+$  и гарантированно находит значение наименьшего времени перехвата для любой траектории цели  $\mathbf{y}_T \in \text{Lip}_v(\mathbb{R}_0^+, \mathcal{Y})$ .

### 1.3 Свойства универсальных оценок снизу для наименьшего времени перехвата

Если движущаяся цель не может быть перехвачена до момента времени  $t \in \mathbb{R}_0^+$  и при этом она находится в положении  $\mathbf{y}_T(t) \in \mathcal{Y}$ , то, имея некоторое правило  $\theta : \mathbb{R}_0^+ \times \mathcal{Y} \rightarrow \mathbb{R}_0^+$ , которое ставит в соответствие паре  $(t, \mathbf{y}_T(t))$  некоторый следующий момент времени  $\theta(t, \mathbf{y}_T(t)) \geq t$ , до которого движущаяся цель не может быть перехвачена при любой возможной траектории  $\mathbf{y}_T \in \text{Lip}_v(\mathbb{R}_0^+, \mathcal{Y})$ , можно получить последовательность *универсальных оценок снизу* для наименьшего времени перехвата, каждый элемент которой не дальше от наименьшего времени перехвата чем предыдущий элемент.

**Определение 1.1.** *Функцию  $\theta : \mathbb{R}_0^+ \times \mathcal{Y} \rightarrow \mathbb{R}_0^+$  будем называть функцией универсального оценивания снизу для наименьшего времени перехвата, если для всякого момента времени  $t \in \mathbb{R}_0^+$  и всякой точки  $\mathbf{y} \in \mathcal{Y}$ :*

1. *неравенство  $\rho(t, \mathbf{y}) \leq \ell$  влечёт равенство  $\theta(t, \mathbf{y}) = t$ ;*
2. *неравенство  $\rho(t, \mathbf{y}) > \ell$  влечёт неравенство  $\theta(t, \mathbf{y}) > t$ ;*
3. *неравенство  $\rho(t, \mathbf{y}) > \ell$  влечёт оценку  $\rho(\tau, \mathbf{y}_T(\tau)) > \ell$  для всех моментов времени  $\tau \in [t, \theta(t, \mathbf{y}))$  и всех траекторий цели  $\mathbf{y}_T \in \text{Lip}_v(\mathbb{R}_0^+, \mathcal{Y})$ , для которых  $\mathbf{y}_T(t) = \mathbf{y}$ .*

Такое определение функции универсального оценивания снизу не связано с конкретным видом траектории движущейся цели  $\mathbf{y}_T \in \text{Lip}_v(\mathbb{R}_0^+, \mathcal{Y})$ , но использует конкретное значение максимально доступной для цели абсолютной величины скорости её движения  $v \in \mathbb{R}_0^+$  и величину радиуса захвата  $\ell \in \mathbb{R}_0^+$ . Согласно третьему пункту определения, функция универсального оценивания снизу не переоценивает оптимальное время перехвата для любой траектории  $\mathbf{y}_T \in \text{Lip}_v(\mathbb{R}_0^+, \mathcal{Y})$ . Далее будут предложены две функции универсального оценивания снизу для наименьшего времени перехвата. Также будет показано, что соответствующие последовательности оценок снизу, получаемые с их помощью, всегда сходятся к наименьшему времени перехвата.



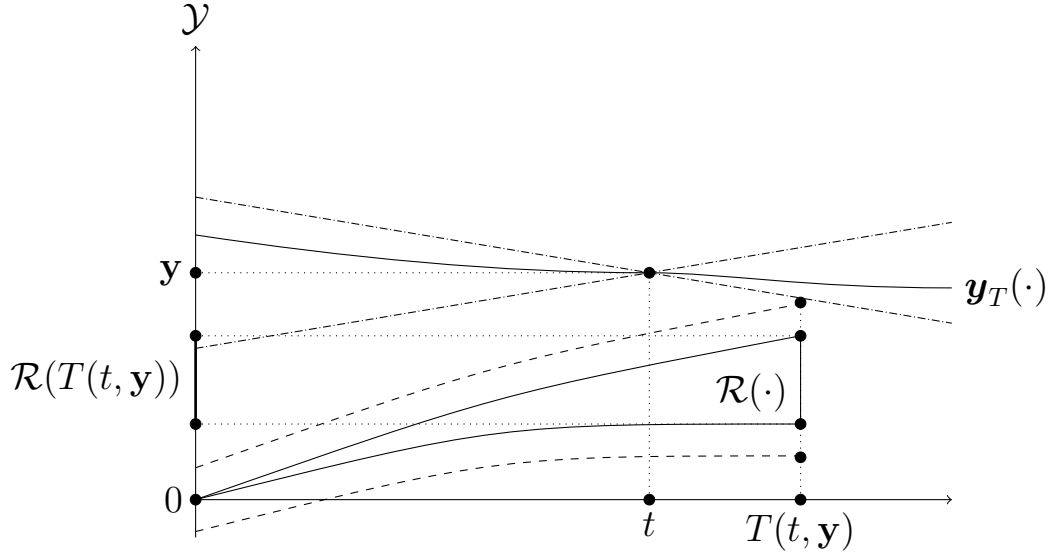


Рисунок 1.3 — Графическое вычисление  $T(t, \mathbf{y})$  для заданных  $t$  и  $\mathbf{y}$ .

Пространство  $\mathcal{Y}$  изображено одномерным. Отображение  $\mathcal{R}$  (сплошные линии) окружено областью захвата (пунктирные линии). Любая траектория цели  $\mathbf{y}_T$ , такая, что  $\mathbf{y}_T(t) = \mathbf{y}$ , лежит в соответствующем конусе (пунктир с точкой), т. к.  $\mathbf{y}_T \in \text{Lip}_v(\mathbb{R}^+, \mathcal{Y})$  (тангенс угла раствора конуса равен  $v$ ).

**Определение 1.2.** Лучшей из функций универсального оценивания снизу для наименьшего времени перехвата будем называть функцию  $T : \mathbb{R}_0^+ \times \mathcal{Y} \rightarrow \mathbb{R}_0^+$ , определённую следующим образом (рис. 1.3):

$$T(t, \mathbf{y}) \stackrel{\text{def}}{=} \inf_{\substack{\mathbf{y}_T \in \text{Lip}_v(\mathbb{R}_0^+, \mathcal{Y}) \\ \mathbf{y}_T(t) = \mathbf{y}}} \min \{ \tau \in \mathbb{R}_0^+ : \tau \geq t, \rho(\tau, \mathbf{y}_T(\tau)) \leq \ell \}.$$

Если неравенство  $\rho(\tau, \mathbf{y}_T(\tau)) > \ell$  справедливо для всех моментов времени  $\tau \in [t, +\infty)$  и всех траекторий цели  $\mathbf{y}_T \in \text{Lip}_v(\mathbb{R}_0^+, \mathcal{Y})$ , для которых  $\mathbf{y}_T(t) = \mathbf{y}$ , то будем формально считать, что  $T(t, \mathbf{y}) = +\infty$ .

Очевидно, что функция  $T : \mathbb{R}_0^+ \times \mathcal{Y} \rightarrow \mathbb{R}_0^+$  является функцией универсального оценивания снизу для наименьшего времени перехвата. Название «лучшая» ей подходит, т. к. если  $\theta : \mathbb{R}_0^+ \times \mathcal{Y} \rightarrow \mathbb{R}_0^+$  является некоторой произвольной функцией универсального оценивания снизу, то справедливо неравенство  $\theta(t, \mathbf{y}) \leq T(t, \mathbf{y})$  для всякого момента времени  $t \in \mathbb{R}_0^+$  и всякой точки  $\mathbf{y} \in \mathcal{Y}$ , но в то же время не существует такой траектории цели  $\mathbf{y}_T \in \text{Lip}_v(\mathbb{R}_0^+, \mathcal{Y})$ , проходящей через точку  $\mathbf{y} \in \mathcal{Y}$ , чтобы значение  $T(t, \mathbf{y})$  переоценивало наименьшее время перехвата  $T^*[\mathbf{y}_T]$ , если до момента времени  $t \in \mathbb{R}_0^+$  цель не могла быть

перехвачена. Таким образом, лучшая из функций универсального оценивания снизу порождает наибольшие оценки снизу для наименьшего времени перехвата среди всех функций универсального оценивания снизу для всякого момента времени  $t \in \mathbb{R}_0^+$  и всякой точки  $\mathbf{y} \in \mathcal{Y}$ .

**Лемма 1.3.** *Для всякого момента времени  $t \in \mathbb{R}_0^+$  и всякой точки  $\mathbf{y} \in \mathcal{Y}$  для лучшей из функций универсального оценивания снизу справедливо следующее выражение:*

$$T(t, \mathbf{y}) = \min \{ \tau \in \mathbb{R}_0^+ : \tau \geq t, \rho(\tau, \mathbf{y}) \leq v(\tau - t) + \ell \}.$$

Если неравенство  $\rho(\tau, \mathbf{y}) > v(\tau - t) + \ell$  справедливо для всех моментов времени  $\tau \in [t, +\infty)$ , то будем формально полагать, что правая часть уравнения равняется  $+\infty$ .

*Доказательство.* Сначала покажем, что значение  $T(t, \mathbf{y})$  равно

$$\min_{\boldsymbol{\eta} \in \mathcal{Y}} \min \{ \tau \in \mathbb{R}_0^+ : \tau \geq t, \rho(\tau, \boldsymbol{\eta}) \leq \ell, \|\boldsymbol{\eta} - \mathbf{y}\| \leq v(\tau - t) \}. \quad (1.2)$$

Рассмотрим произвольную точку  $\boldsymbol{\eta} \in \mathcal{Y}$  и произвольный момент времени  $\tau \in [t, +\infty)$  и положим

$$\mathbf{y}_T(\tau) = \begin{cases} \mathbf{y} + v \frac{\boldsymbol{\eta} - \mathbf{y}}{\|\boldsymbol{\eta} - \mathbf{y}\|} (\tau - t), & \boldsymbol{\eta} \neq \mathbf{y}; \\ \mathbf{y}, & \boldsymbol{\eta} = \mathbf{y}. \end{cases}$$

В связи с тем, что  $\mathbf{y}_T \in \text{Lip}_v(\mathbb{R}_0^+, \mathcal{Y})$  и  $\mathbf{y}_T(t) = \mathbf{y}$ , значение  $T(t, \mathbf{y})$ , заданное определением 1.2, не больше величины, заданной формулой (1.2). С другой стороны, неравенство  $\rho(\tau, \mathbf{y}_T(\tau)) \leq \ell$  следует из неравенства  $\rho(\tau, \boldsymbol{\eta}) \leq \ell$  и неравенства  $\|\boldsymbol{\eta} - \mathbf{y}\| \leq v(\tau - t)$ , если положить  $\boldsymbol{\eta} = \mathbf{y}_T(\tau)$ . Таким образом, величина  $T(t, \mathbf{y})$ , заданная определением 1.2, не меньше величины, заданной формулой (1.2), т. е., резюмируя, получим равенство величины  $T(t, \mathbf{y})$  и значения (1.2). Далее, для всякой точки  $\boldsymbol{\eta} \in \mathcal{Y}$  такой, что выполнены неравенства  $\|\boldsymbol{\eta} - \mathbf{y}\| \leq v(\tau - t)$ ,  $\rho(\tau, \boldsymbol{\eta}) \leq \ell$ , справедлива следующая серия оценок:

$$\rho(\tau, \mathbf{y}) \leq \min_{\tilde{\boldsymbol{\eta}} \in \mathcal{R}(\tau)} \|\tilde{\boldsymbol{\eta}} - \boldsymbol{\eta}\| + \|\boldsymbol{\eta} - \mathbf{y}\| = \rho(\tau, \boldsymbol{\eta}) + \|\boldsymbol{\eta} - \mathbf{y}\| \leq v(\tau - t) + \ell.$$

Значит справедлива оценка

$$T(t, \mathbf{y}) \geq \min \{ \tau \in \mathbb{R}_0^+ : \tau \geq t, \rho(\tau, \mathbf{y}) \leq v(\tau - t) + \ell \}.$$

Зафиксируем точку

$$\tilde{\boldsymbol{\eta}} \in \arg \min_{\boldsymbol{\eta} \in \mathcal{R}(\tau)} \|\boldsymbol{\eta} - \mathbf{y}\|.$$

Если неравенство  $\|\tilde{\boldsymbol{\eta}} - \mathbf{y}\| < \ell$  выполнено, то положим  $\boldsymbol{\eta} = \mathbf{y}$ . Легко проверить, что справедливы неравенства  $\rho(\tau, \boldsymbol{\eta}) \leq \ell$ ,  $\|\boldsymbol{\eta} - \mathbf{y}\| \leq v(\tau - t)$ , если момент времени  $\tau \geq t$ . Если выполнено неравенство  $\|\tilde{\boldsymbol{\eta}} - \mathbf{y}\| \geq \ell$ , то будем считать, что значение

$$\boldsymbol{\eta} = \mathbf{y} + (\tilde{\boldsymbol{\eta}} - \mathbf{y}) \left( 1 - \frac{\ell}{\|\tilde{\boldsymbol{\eta}} - \mathbf{y}\|} \right).$$

Теперь, если выполнены неравенства  $\tau \geq t$ ,  $\rho(\tau, \boldsymbol{\eta}) \leq v(\tau - t) + \ell$ , то справедлива оценка

$$\|\boldsymbol{\eta} - \mathbf{y}\| = \|\tilde{\boldsymbol{\eta}} - \mathbf{y}\| - \ell = \rho(\tau, \boldsymbol{\eta}) - \ell \leq v(\tau - t),$$

а также оценка

$$\rho(\tau, \boldsymbol{\eta}) = \min_{\tilde{\mathbf{y}} \in \mathcal{R}(\tau)} \|\boldsymbol{\eta} - \tilde{\mathbf{y}}\| \leq \|\boldsymbol{\eta} - \tilde{\boldsymbol{\eta}}\| = \ell.$$

Таким образом, справедлива и оценка

$$T(t, \mathbf{y}) \leq \min \{ \tau \in \mathbb{R}_0^+ : \tau \geq t, \rho(\tau, \mathbf{y}) \leq v(\tau - t) + \ell \}.$$

□

Теперь перейдем к вопросу о том, как вычислить значение  $T(t, \mathbf{y})$  в рамках задачи поиска корня вещественного уравнения.

**Теорема 1.2.** *Если момент времени  $t \in \mathbb{R}_0^+$  и точка  $\mathbf{y} \in \mathcal{Y}$  таковы, что справедливо неравенство  $\rho(t, \mathbf{y}) \geq \ell$ , то*

$$T(t, \mathbf{y}) = \min \{ \tau \in \mathbb{R}_0^+ : \tau \geq t, \rho(\tau, \mathbf{y}) = v(\tau - t) + \ell \}.$$

*Если неравенство  $\rho(\tau, \mathbf{y}) > v(\tau - t) + \ell$  выполнено для всех моментов времени  $\tau \in [t, +\infty)$ , то будем считать, что правая часть уравнения равняется  $+\infty$ .*

*Доказательство.* Случай равенства  $\rho(t, \mathbf{y}) = \ell$  очевиден. Предположим, что выполнено неравенство  $\rho(t, \mathbf{y}) > \ell$ . Пусть момент времени  $\tau \in [t, T(t, \mathbf{y}))$ . Ис-

пользуя лемму 1.3, можно получить неравенство  $\rho(\tau, \mathbf{y}) > v(\tau - t) + \ell$ . В связи с тем, что функция  $\rho(\cdot, \mathbf{y})$  является непрерывной функцией времени, для момента времени  $\tau \rightarrow T(t, \mathbf{y}) - 0$  мы получаем неравенство  $\rho(T(t, \mathbf{y}), \mathbf{y}) \geq v(T(t, \mathbf{y}) - t) + \ell$ . Лемма 1.3 также даёт неравенство  $\rho(T(t, \mathbf{y}), \mathbf{y}) \leq v(T(t, \mathbf{y}) - t) + \ell$ .  $\square$

Лучшая из функций универсального оценивания снизу порождает наибольшие оценки снизу для наименьшего времени перехвата, но вычисление значения  $T(t, \mathbf{y})$  требует возможности эффективного подсчёта наименьшего неотрицательного корня вещественного уравнения  $\rho(\tau, \mathbf{y}) = v(\tau - t) + \ell$ , что не всегда может быть эффективно осуществлено на практике и может даже оказаться процессом более трудоёмким, чем вычисление наименьшего неотрицательного корня вещественного уравнения  $\rho(t, \mathbf{y}_T(t)) = \ell$  для конкретного вида траектории цели  $\mathbf{y}_T \in \text{Lip}_v(\mathbb{R}_0^+, \mathcal{Y})$ . Далее будет описана *простая для вычисления* функция универсального оценивания снизу, значения которой могут быть легко вычислены, если есть возможность эффективно вычислить расстояние  $\rho(t, \mathbf{y})$ .

**Определение 1.3.** *Простой функцией универсального оценивания снизу наименьшего времени перехвата будем называть функцию  $\tau : \mathbb{R}_0^+ \times \mathcal{Y} \rightarrow \mathbb{R}_0^+$ , определённую следующим образом (рис. 1.4):*

$$\tau(t, \mathbf{y}) \stackrel{\text{def}}{=} \begin{cases} t + \frac{\rho(t, \mathbf{y}) - \ell}{1+v}, & \rho(t, \mathbf{y}) > \ell; \\ t, & \rho(t, \mathbf{y}) \leq \ell. \end{cases}$$

Докажем, что введённая функция действительно является функцией универсального оценивания снизу.

**Лемма 1.4.** *Оценка  $\tau(t, \mathbf{y}) \leq T(t, \mathbf{y})$  справедлива для всякого момента времени  $t \in \mathbb{R}_0^+$  и всякой точки  $\mathbf{y} \in \mathcal{Y}$ .*

*Доказательство.* Используя неравенство  $T(t, \mathbf{y}) \geq t$  и лемму 1.1, получим оценку

$$\rho(t, \mathbf{y}) - \rho(T(t, \mathbf{y}), \mathbf{y}) \leq T(t, \mathbf{y}) - t. \quad (1.3)$$

Согласно теореме 1.2, справедливо следующее выражение:

$$\rho(T(t, \mathbf{y}), \mathbf{y}) = v(T(t, \mathbf{y}) - t) + \ell. \quad (1.4)$$

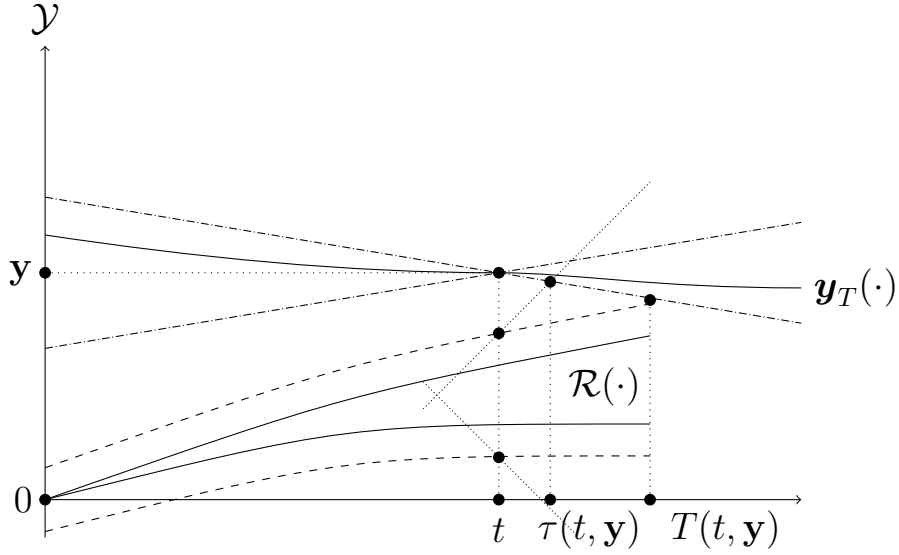


Рисунок 1.4 — Графическое вычисление  $\tau(t, \mathbf{y})$  для заданных  $t$  и  $\mathbf{y}$ .

Пространство  $\mathcal{Y}$  изображено одномерным. Отображение  $\mathcal{R}$  (сплошные линии) окружено областью захвата (пунктирные линии). Любая траектория цели  $\mathbf{y}_T$ , такая, что  $\mathbf{y}_T(t) = \mathbf{y}$ , лежит в соответствующем конусе (пунктир с точкой), т. к.  $\mathbf{y}_T \in \text{Lip}_v(\mathbb{R}^+, \mathcal{Y})$  (тангенс угла раствора конуса равен  $v$ ). Конус из линий с плотным пунктиром имеет тангенс угла раствора равный 1.

Подставляя (1.4) и значение  $\rho(t, \mathbf{y}) = (1 + v)(\tau(t, \mathbf{y}) - t) + \ell$  в неравенство (1.3), получаем оценку  $\tau(t, \mathbf{y}) \leq T(t, \mathbf{y})$ .  $\square$

**Лемма 1.5.** *Функция из определения 1.3 является функцией универсального оценивания снизу для наименьшего времени перехвата.*

*Доказательство.* 1. Если справедливо неравенство  $\rho(t, \mathbf{y}) \leq \ell$ , то непосредственные вычисления дают  $\tau(t, \mathbf{y}) = t$ . 2. Если выполнено неравенство  $\rho(t, \mathbf{y}) > \ell$ , то справедлива следующая оценка:

$$\tau(t, \mathbf{y}) - t = \frac{\rho(t, \mathbf{y}) - \ell}{1 + v} > \frac{\ell - \ell}{1 + v} = 0.$$

3. Лемма 1.4 гарантирует выполнение соответствующего свойства определения 1.1 рассматриваемой функции.  $\square$

## 1.4 Применение метода простой итерации в задаче перехвата

Теперь перейдем к вопросу изучения свойств метода простой итерации, использующего функцию универсального оценивания снизу для наименьшего времени перехвата. Мы будем говорить, что метод простой итерации основан на функции универсального оценивания снизу  $\theta : \mathbb{R}_0^+ \times \mathcal{Y} \rightarrow \mathbb{R}_0^+$ , если начальное приближение  $t_0 = 0$ , а шаг метода для вычисления следующего приближения на основе предыдущего  $t_n - t_{n-1} = \theta(t_{n-1}, \mathbf{y}_T(t_{n-1})) - t_{n-1}$  для всякой траектории цели  $\mathbf{y}_T \in \text{Lip}_v(\mathbb{R}_0^+, \mathcal{Y})$ .

**Определение 1.4.** *Метод простой итерации, основанный на функции универсального оценивания снизу  $\theta : \mathbb{R}_0^+ \times \mathcal{Y} \rightarrow \mathbb{R}_0^+$ , называется правильно сходящимся методом, если числовая последовательность  $\{t_n\}_{n=0}^\infty$ , где  $t_0 = 0$  и  $t_n = \theta(t_{n-1}, \mathbf{y}_T(t_{n-1}))$ , сходится к наименьшему времени перехвата  $T^*[\mathbf{y}_T]$  для любой траектории цели  $\mathbf{y}_T \in \text{Lip}_v(\mathbb{R}_0^+, \mathcal{Y})$ .*

**Замечание 1.1.** *Если движущаяся цель не может быть перехвачена объектом управления, то формально  $T^*[\mathbf{y}_T] = +\infty$  и от числовой последовательности  $\{t_n\}_{n=0}^\infty$  требуется неограниченное возрастание. В таком случае можно условиться называть последовательность  $\{t_n\}_{n=0}^\infty$  сходящейся к  $+\infty$ .*

**Лемма 1.6.** *Метод простой итерации, основанный на простой функции универсального оценивания снизу, является правильно сходящимся методом.*

*Доказательство.* Фиксируем траекторию цели  $\mathbf{y}_T \in \text{Lip}_v(\mathbb{R}_0^+, \mathcal{Y})$ . Из определения 1.3 следует, что шаг метода простой итерации вычисляется следующим образом:

$$t_n - t_{n-1} = \begin{cases} \frac{\rho(t_{n-1}, \mathbf{y}_T(t_{n-1})) - \ell}{1+v}, & \rho(t_{n-1}, \mathbf{y}_T(t_{n-1})) > \ell; \\ 0, & \rho(t_{n-1}, \mathbf{y}_T(t_{n-1})) \leq \ell. \end{cases}$$

Это значит, что числовая последовательность  $\{t_n\}_{n=0}^\infty$  является неубывающей последовательностью. Сначала рассмотрим случай конечного наименьшего времени перехвата  $T^*[\mathbf{y}_T] < +\infty$ . Предположим, что существует такой номер  $n \in \mathbb{N}$ , что выполнено неравенство  $t_n > T^*[\mathbf{y}_T]$ . Без потери общности можно

считать, что номер  $n \in \mathbb{N}$  является наименьшим таким номером и справедливо неравенство  $t_{n-1} \leq T^*[\mathbf{y}_T]$ . Если выполнено равенство  $t_{n-1} = T^*[\mathbf{y}_T]$ , то  $\rho(t_{n-1}, \mathbf{y}_T(t_{n-1})) \leq \ell$  и справедлива цепочка равенств

$$t_n = \rho(t_{n-1}, \mathbf{y}_T(t_{n-1})) = t_{n-1} = T^*[\mathbf{y}_T].$$

А если выполнено неравенство  $t_{n-1} < T^*[\mathbf{y}_T]$ , то  $\rho(t_{n-1}, \mathbf{y}_T(t_{n-1})) > \ell$ . В лемме 1.5 утверждается, что простая функция универсального оценивания снизу удовлетворяет определению 1.1. Согласно третьему пункту этого определения, значение  $t_n = \tau(t_{n-1}, \mathbf{y}_T(t_{n-1}))$  не может быть больше наименьшего времени перехвата  $T^*[\mathbf{y}_T]$ . Таким образом, справедлива оценка  $t_n \leq T^*[\mathbf{y}_T]$ , а значит

$$\lim_{n \rightarrow \infty} t_n = t^* \leq T^*[\mathbf{y}_T].$$

Предположим, что выполнено неравенство  $t^* < T^*[\mathbf{y}_T]$ . Оценка  $\rho(t^*, \mathbf{y}_T(t^*)) - \ell > 0$  является справедливой, т. к. значение  $T^*[\mathbf{y}_T]$  является наименьшим временем перехвата. Определим величину

$$\mu \stackrel{\text{def}}{=} \rho(t^*, \mathbf{y}_T(t^*)) - \ell.$$

Из определения непрерывности функции  $\rho(\cdot, \mathbf{y}_T(\cdot))$  следует, что существует такой номер  $N \in \mathbb{N}$ , что для всех номеров  $n > N$ :

$$\rho(t^*, \mathbf{y}_T(t^*)) - \rho(t_{n-1}, \mathbf{y}_T(t_{n-1})) < \frac{\mu}{2}.$$

Это, в свою очередь, влечёт цепочку выражений

$$\mu = \rho(t^*, \mathbf{y}_T(t^*)) - \ell < \rho(t_{n-1}, \mathbf{y}_T(t_{n-1})) + \frac{\mu}{2} - \ell = (1 + v)(t_n - t_{n-1}) + \frac{\mu}{2},$$

т. е. для всех номеров  $n > N$  справедлива оценка

$$t_n - t_{n-1} > \frac{\mu}{2(1 + v)},$$

что, в свою очередь, противоречит сходимости последовательности  $\{t_n\}_{n=0}^{\infty}$ .

Теперь рассмотрим случай, когда движущаяся цель не может быть перехвачена, т. е., формально, значение  $T^*[\mathbf{y}_T] = +\infty$ . Покажем, что для любого

момента времени  $t^* \in \mathbb{R}_0^+$  существует такой номер  $n \in \mathbb{N}$ , что  $t_n > t^*$ , т. е.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} t_n = T^*[\mathbf{y}_T] = +\infty.$$

Фиксируем  $t^* \in \mathbb{R}_0^+$  и определим величину

$$\mu \stackrel{\text{def}}{=} \min_{t \in [0, t^*]} \rho(t, \mathbf{y}_T(t)) - \ell.$$

Из того, что перехват невозможен, следует, что  $\mu > 0$ . Это значит, что

$$t_n - t_{n-1} = \frac{\rho(t_{n-1}, \mathbf{y}_T(t_{n-1})) - \ell}{1 + v} \geq \frac{\mu}{1 + v} > 0,$$

что, в свою очередь, даёт нам

$$t_n \geq \frac{n\mu}{1 + v}.$$

□

**Теорема 1.3.** *Метод простой итерации, основанный на лучшей из функций универсального оценивания снизу, является правильно сходящимся методом.*

*Доказательство.* Справедливость данной теоремы непосредственно следует из лемм 1.4, 1.6 и определения 1.2. □

Таким образом, лучшая и простая функции универсального оценивания снизу могут быть использованы для вычисления наименьшего времени перехвата  $T^*[\mathbf{y}_T]$  с помощью метода простой итерации. Если значение  $T(t, \mathbf{y})$  может быть эффективно посчитано из теоремы 1.2, то следует использовать универсальную оценку снизу  $T(t, \mathbf{y})$ , вместо оценки  $\tau(t, \mathbf{y})$ , т. к. соответствующий шаг метода простой итерации  $t_n - t_{n-1}$  является наибольшим шагом, гарантирующим не переоценку наименьшего времени перехвата. Стоит сказать, что не смотря на то, что подсчёт значения  $T(t, \mathbf{y})$  по теореме 1.2 может быть более трудоёмким процессом, чем подсчёт наименьшего неотрицательного корня уравнения  $\rho(t, \mathbf{y}_T(t)) = \ell$  для конкретного вида траектории цели  $\mathbf{y}_T \in \text{Lip}_v(\mathbb{R}_0^+, \mathcal{Y})$ , такой подсчёт не опирается на конкретный вид траектории цели, а использует лишь значение постоянной  $v \in \mathbb{R}_0^+$ . Поэтому открывается возможность заранее произвести приближенный расчёт значений  $T(t, \mathbf{y})$  на некоторой сетке в инте-



ресующей области пространства  $\mathbb{R}_0^+ \times \mathcal{Y}$ , интерполировать соответствующую сеточную функцию и эффективно вычислять приближенное значение  $T(t, \mathbf{y})$  в соответствующем методе простой итерации уже для любой траектории цели, проходящей через указанную область. Такой подход может давать преимущества в сравнении с использованием явно вычисляемого значения  $\tau(t, \mathbf{y})$  через  $\rho(t, \mathbf{y})$ , т. к. соответствующий размер шага может быть длиннее.

В качестве способа приближенного расчёта значений  $T(t, \mathbf{y})$  укажем следующий способ. Из теоремы 1.2 известно, что значение  $T(t, \mathbf{y})$  является наименьшим корнем уравнения

$$g(\theta) \stackrel{\text{def}}{=} \rho(\theta, \mathbf{y}) - v(\theta - t) - \ell = 0 \quad (1.5)$$

относительно неизвестной  $\theta \in [t, +\infty)$ . Пользуясь леммой 1.1, получим, что функция  $g \in \text{Lip}_{1+v}([t, +\infty), \mathbb{R})$ . Выберем начальное приближение  $T_0(t, \mathbf{y}) = t$ . Для поиска наименьшего корня вещественного уравнения с липшицевой функцией в левой части используем теорему 2 из работы [31]. Тогда на шаге  $n \in \mathbb{N}$  получим приближение

$$T_n(t, \mathbf{y}) = T_{n-1}(t, \mathbf{y}) + \frac{|g(T_{n-1}(t, \mathbf{y}))|}{1 + v}.$$

Пользуясь тем, что  $\rho(T_0(t, \mathbf{y}), \mathbf{y}) > \ell$ , и тем, что  $T_n(t, \mathbf{y}) \geq T_{n-1}(t, \mathbf{y}) \geq t$ , получим

$$\begin{aligned} T_n(t, \mathbf{y}) &= T_{n-1}(t, \mathbf{y}) + \frac{\rho(T_{n-1}(t, \mathbf{y}), \mathbf{y}) - v(T_{n-1}(t, \mathbf{y}) - t) - \ell}{1 + v} \\ &= \frac{\rho(T_{n-1}(t, \mathbf{y}), \mathbf{y}) + vt - \ell + T_{n-1}(t, \mathbf{y})}{1 + v}. \end{aligned}$$

В силу свойств теоремы 2 из работы [31] приближение  $T_n(t, \mathbf{y}) \leq T(t, \mathbf{y})$ , поэтому если вместо значения  $T(t, \mathbf{y})$  используется его приближение  $T_n(t, \mathbf{y})$ , то при решении задачи наискорейшего перехвата движущейся по траектории  $\mathbf{y}_T \in \text{Lip}_v(\mathbb{R}_0^+, \mathcal{Y})$  цели предложенный метод простой итерации всё ещё использует функцию универсального оценивания снизу, хоть и не дающую наибольший из гарантированных шаг. Отметим, что  $T_1(t, \mathbf{y}) = \tau(t, \mathbf{y})$ , т. е. уже приближение  $T_2(t, \mathbf{y}) \geq \tau(t, \mathbf{y})$  может давать больший в сравнении с оценкой снизу  $\tau(t, \mathbf{y})$  шаг. Расчёт значений  $T_n(t, \mathbf{y})$  для интересующей нас сетки в области пространства

$\mathbb{R}_0^+ \times \mathcal{Y}$  можно сделать явно с помощью приведённой итеративной формулы, затем произвести интерполяцию сеточной функции и далее использовать интерполирующую функцию для решения задачи наискорейшего перехвата цели, движущейся по любой траектории  $\mathbf{y}_T \in \text{Lip}(\mathbb{R}_0^+, \mathcal{Y})$  из соответствующей области, с помощью предложенного метода простой итерации.

Скорость сходимости метода простой итерации, основанного даже на лучшей из функций универсального оценивания снизу, может быть сколько угодно медленной или быстрой для конкретных траекторий движения цели  $\mathbf{y}_T \in \text{Lip}_v(\mathbb{R}_0^+, \mathcal{Y})$ . Если цель движется напрямую к оптимальной точке перехвата с наибольшей из доступных абсолютной скоростью  $v \in \mathbb{R}_0^+$ , то соответствующий метод простой итерации сойдётся к верному ответу за один шаг. Чтобы показать, что скорость сходимости может быть какой угодно медленной, рассмотрим следующий частный пример.

Пусть  $\mathcal{X} = \mathcal{Y} = \mathbb{R}$ . Пусть траектория движения цели описывается с помощью  $\mathbf{y}_T(t) = \ell + v\alpha(1 - t)$ , где функция  $\alpha \in \text{Lip}_1(\mathbb{R}_0^+, \mathbb{R}_0^+)$  и значение  $\alpha(0) = 0$ , а сама функция удовлетворяет условию  $\alpha(1 - t) > 0$  для каждого момента времени  $t \in [0, 1)$ . Пусть уравнения состояния описывают покой объекта управления  $\mathbf{f}(\mathbf{x}, \mathbf{u}) = 0$  для любых векторов  $\mathbf{x} \in \mathcal{X}$ ,  $\mathbf{u} \in \mathcal{U}$ , а начальное положение объекта управления  $\mathbf{x}_0 = 0$ . Не трудно показать, что  $T(t, \mathbf{y}) = t + (\mathbf{y} - \ell)/v$ . Таким образом,  $t_n = t_{n-1} + \alpha(1 - t_{n-1})$  и  $t_0 = 0$ . Шаг метода простой итерации  $t_n - t_{n-1} = \alpha(1 - t_{n-1})$  может быть сколько угодно малым, т. к. нет дополнительных ограничений на функцию  $\alpha$ . Подобный вывод может быть сделан и относительно всех других методов простой итерации, основанных на функции универсального оценивания снизу для наименьшего времени перехвата.

---

**Алгоритм 1** Вычисление наименьшего времени перехвата с помощью некоторой функции  $\theta$  универсального оценивания снизу

---

**Require:**  $\ell \in \mathbb{R}^+$ ,  $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$ ,  $v \in \mathbb{R}_0^+$ ,  $\mathbf{y}_T \in \text{Lip}_v(\mathbb{R}, \mathcal{Y})$

$t \leftarrow 0$

**while**  $\rho(t, \mathbf{y}_T(t)) > \ell(1 + \varepsilon)$  **do**

$t \leftarrow \theta(t, \mathbf{y}_T(t))$

**end while**

---

Таким образом, ценой универсальности предложенного метода является его возможная медленная скорость сходимости для некоторых классов движения цели. Но с практической точки зрения такие классы движения цели пред-

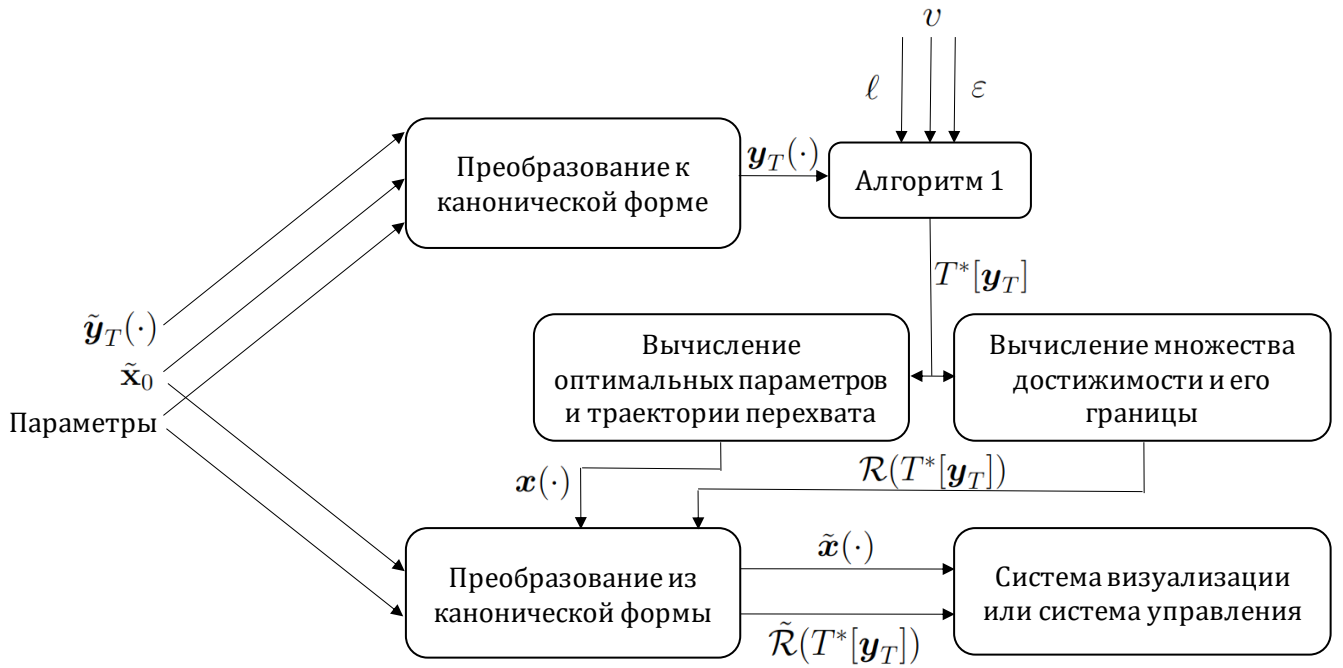


Рисунок 1.5 — Блок-схема использования алгоритма 1 в рамках комплекса программ для построения наискорейшей траектории перехвата. Волнистой линией (тильдой) отмечены символы, которые соответствуют представлению в исходной системе отсчёта

ставляют собой не более чем математическую аномалию, т. к. движущаяся цель должна гладко касаться границы проекции множества достижимости в этом случае. Борьба с этим эффектом можно полагая значение радиуса захвата  $\ell \in \mathbb{R}_0^+$  при расчётах немного меньшим, чем оно есть на самом деле, но такой способ борьбы, вообще говоря, открывает возможность пропуска верного ответа и делает метод простой итерации не гарантированным для истинного значения радиуса захвата.

Основываясь на изложенных выше результатах, опишем простой алгоритм вычисления оценки наименьшего времени перехвата (алгоритм 1). Величина  $\varepsilon$  задаёт допустимую относительную ошибку финального значения расстояния до множества захвата. Мы используем эту величину для конечности количества итераций, используемых алгоритмом. Если функция  $T$  может быть эффективно вычислена, то на месте функции  $\theta$  лучше использовать  $T$ . Графический пример работы алгоритма для  $\theta = T$  изображен на рис. 1.6. Общая блок-схема работы комплекса программ для построения опорной траектории на основе алгоритма 1 приведена на рис. 1.5.

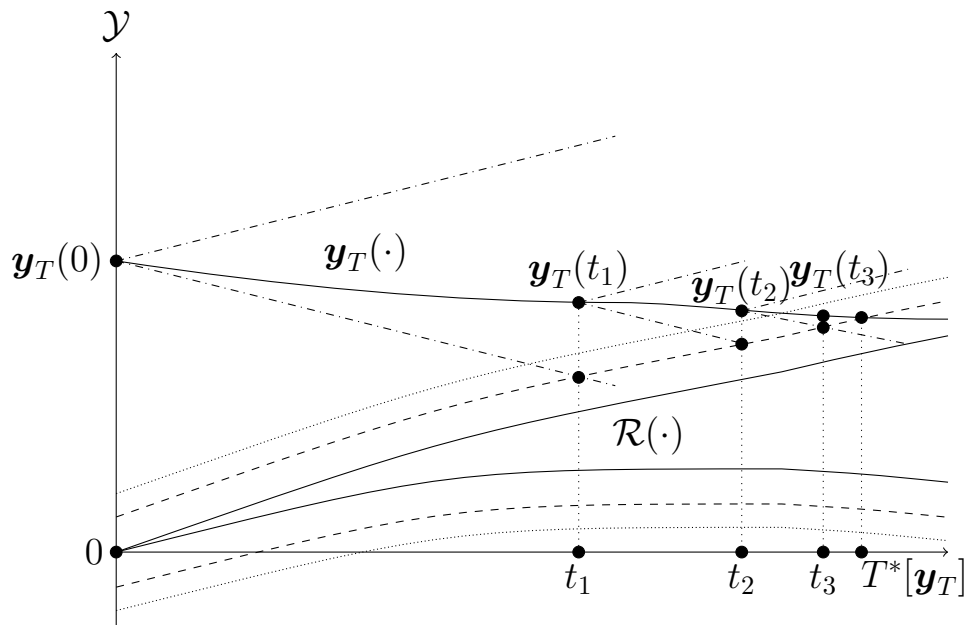


Рисунок 1.6 — Итерации алгоритма для случая  $\theta = T$  при заданной траектории цели  $\mathbf{y}_T$ . Отображение  $\mathcal{R}$  (сплошные линии) окружено областью захвата (пунктирные и плотно-пунктирные линии). Пунктирные линии соответствуют радиусу захвата  $\ell$ , а плотно-пунктирные — радиусу  $\ell(1 + \varepsilon)$ . Итерации останавливаются на шаге номер 3, т. к.  $\rho(t_3, \mathbf{y}_T(t_3)) \leq \ell(1 + \varepsilon)$  (точка пересечения лежит ниже плотно-пунктирной линии).

## 1.5 Пример вычислений для модели простых движений

Перейдём к иллюстрации техники использования изложенного выше метода на примере модели простых движений. Для наглядности будем считать, что пространство состояний является плоскостью и совпадает с пространством важных для перехвата координат  $\mathcal{X} = \mathcal{Y} = \mathbb{R}^2$  (для многомерного случая модели простых движений все выкладки аналогичны). Пространство оставшихся координат  $\mathcal{Z} = \emptyset$ . В качестве нормы в пространстве  $\mathcal{Y}$  будем использовать евклидову норму

$$\|\mathbf{y}\| = \sqrt{x^2 + y^2},$$

где  $\mathbf{y} = \begin{bmatrix} x & y \end{bmatrix}^\top \in \mathcal{Y}$ . В модели простых движений множество допустимых значений для функции управления выглядит так:

$$\mathcal{U} = \{\mathbf{u} \in \mathcal{Y} : \|\mathbf{u}\| \leq 1\}.$$

Уравнения состояния для модели простых движений задаются с помощью  $\mathbf{f}(\mathbf{x}, \mathbf{u}) = \mathbf{u}$ . Начальное состояние положим нулевым  $\mathbf{x}_0 = \mathbf{0}$ .

Множество достижимости в момент времени  $t \in \mathbb{R}_0^+$

$$\begin{aligned} \mathcal{R}(t) &= \left\{ \int_{[0,t]} \mathbf{f}(\mathbf{x}(\theta), \mathbf{u}(\theta)) d\theta : \mathbf{u} \in \mathcal{A} \right\} = \left\{ \int_{[0,t]} \mathbf{u}(\theta) d\theta : \mathbf{u} \in \mathcal{A} \right\} \\ &= \{\mathbf{y}(t) : \mathbf{y} \in \text{Lip}_1(\mathbb{R}_0^+, \mathcal{Y}), \mathbf{y}(0) = \mathbf{0}\} = \{\mathbf{y} \in \mathcal{Y} : \|\mathbf{y}\| \leq t\} \end{aligned}$$

является кругом с центром в точке  $\mathbf{0} \in \mathcal{Y}$  и радиусом  $t \in \mathbb{R}_0^+$ . Расстояние от точки  $\mathbf{y} \in \mathcal{Y}$  до множества достижимости в момент времени  $t \in \mathbb{R}_0^+$  вычисляется так:

$$\rho(t, \mathbf{y}) = \min_{\boldsymbol{\eta} \in \mathcal{R}(t)} \|\boldsymbol{\eta} - \mathbf{y}\| = \begin{cases} 0, & \|\mathbf{y}\| < t; \\ \|\mathbf{y}\| - t, & \|\mathbf{y}\| \geq t. \end{cases}$$

Таким образом, определение простой функции универсального оценивания снизу может быть переписано в следующем виде:

$$\tau(t, \mathbf{y}) = \begin{cases} \frac{\|\mathbf{y}\| + vt - \ell}{1+v}, & \|\mathbf{y}\| > t + \ell; \\ t, & \|\mathbf{y}\| \leq t + \ell. \end{cases}$$

Вещественное уравнение из теоремы 1.2 может быть решено аналитически в явном виде. Не трудно получить, что значение лучшей из функций универсального оценивания снизу  $T(t, \mathbf{y}) = \tau(t, \mathbf{y})$ . Согласно теореме 1.3 последовательность  $\{t_n\}_{n=0}^{\infty}$ , где  $t_0 = 0$  и  $t_n = T(t_{n-1}, \mathbf{y}_T(t_{n-1}))$ , сходится к наименьшему времени перехвата  $T^*[\mathbf{y}_T]$  для любой траектории цели  $\mathbf{y}_T \in \text{Lip}_v(\mathbb{R}_0^+, \mathcal{Y})$ . Более того, шаг метода простой итерации  $t_n - t_{n-1}$  наибольший из гарантирующих не переоценку наименьшего времени перехвата  $T^*[\mathbf{y}_T]$  для произвольной траектории цели  $\mathbf{y}_T \in \text{Lip}_v(\mathbb{R}_0^+, \mathcal{Y})$ . В следующей главе в таблице 4 содержатся результаты численных экспериментов для конкретных траекторий цели для модели простых движений и модели Дубинса.

## 1.6 Выводы по главе 1

В данной главе показано, что если функция расстояния от произвольной точки до соответствующей проекции множества достижимости может быть эффективно вычислена, то наименьшее время перехвата может быть вычислено как наименьший неотрицательный корень уравнения, в котором расстояние от проекции множества достижимости объекта управления до положение движущейся цели приравняется к радиусу захвата (теорема 1.1). Также предложено две функции (определения 1.2, 1.3), которые могут быть использованы в методе простой итерации, который всегда сходится к оптимальному решению (лемма 1.6, теорема 1.3). Функция, заданная определением 1.3, имеет явный аналитический вид, если функция расстояния до проекции множества достижимости задана аналитически в явном виде. В свою очередь, функция из определения 1.2 может быть вычислена как корень определённого вещественного уравнения (теорема 1.2). Также показано, что шаг метода простой итерации на

основе функции из определения 1.2 является наибольшим из тех, что можно сделать для произвольной траектории цели из класса липшицевых функций с гарантией не пропуска оптимального решения. Предложен алгоритм 1, который имеет конечное количество итераций для достижения заданной точности сближения объекта управления с целью в финальный момент времени.

## Глава 2. Наискорейший перехват известно движущейся цели машиной Дубинса

В данной главе задача перехвата движущейся по непрерывной и предписанной траектории цели машиной Дубинса исследуется аналитически как задача оптимального управления по критерию быстродействия с произвольным направлением скорости машины Дубинса при перехвате. Для использования методов из прошлой главы требуется описание функции расстояния от произвольной точки до границы плоского множества достижимости машины Дубинса. В этой главе будет получено детальное описание плоского множества достижимости и его границы, также будут получены уравнения, которым должно удовлетворять наименьшее время перехвата, а также будет описана процедура выбора оптимального управления для заданной траектории цели.

### 2.1 Постановка задачи перехвата непрерывно движущейся цели машиной Дубинса

Будем описывать динамику объекта управления ограниченной манёвренности с помощью модели Дубинса [14; 46]. Выберем единицы измерения длины и времени так, чтобы абсолютная скорость и наименьший радиус кривизны траектории машины Дубинса были равны единице. Придерживаясь обозначений из прошлой главы определим пространство состояний как  $\mathcal{X} = \mathbb{R}^2 \times \mathbb{S}$ . Здесь через  $\mathbb{S}$  обозначается пространство углов  $\varphi \in \mathbb{S}$ . Пространство углов является фактормножеством множества действительных чисел  $\mathbb{R}$  по отношению эквивалентности  $x \sim y$ , где  $x, y \in \mathbb{R}$  и существует такое число  $k \in \mathbb{Z}$ , что  $x = y + 2\pi k$ . Пространством важных для перехвата координат в задаче с не фиксированным углом перехвата является плоскость  $\mathcal{Y} = \mathbb{R}^2$ . Остальные координаты лежат в пространстве углов  $\mathcal{Z} = \mathbb{S}$ . Функции, отвечающие за компоненты вектора состояния, будем обозначать следующим образом:

$$\mathbf{x} = \text{stack}(\mathbf{y}, \mathbf{z}) = \begin{bmatrix} x & y & \varphi \end{bmatrix}^\top, \quad \mathbf{y} = \begin{bmatrix} x & y \end{bmatrix}^\top, \quad \mathbf{z} = \varphi.$$



Функция управления  $\mathbf{u} = u$  принимает значения из множества  $\mathcal{U} = [-1, +1]$ . Множество допустимых управлений по прежнему будем обозначать через  $\mathcal{A}$ . Уравнения состояния имеют следующий вид:

$$\dot{\mathbf{x}} = \begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \\ \dot{\varphi} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \varphi \\ \sin \varphi \\ u \end{bmatrix}, \quad (2.1)$$

т. е. в обозначениях предыдущей главы

$$\mathbf{f}(\mathbf{x}, \mathbf{u}) = \begin{bmatrix} \cos \varphi \\ \sin \varphi \end{bmatrix}, \quad \mathbf{g}(\mathbf{x}, \mathbf{u}) = u.$$

Здесь точка  $\mathbf{y}(t) = [x(t) \ y(t)]^\top \in \mathcal{Y}$  отвечает за положение машины Дубинса на декартовой плоскости (рис. 2.1), значение  $\mathbf{z}(t) = \varphi(t) \in \mathcal{Z}$  соответствует углу скорости машины (угол откладывается от оси абсцисс и отсчитывается против часовой стрелки), а величина  $\mathbf{u}(t) = u(t) \in \mathcal{U}$  является значением функции управления в момент времени  $t \in \mathbb{R}_0^+$ . При любых начальных условиях можно осуществить такой перенос и поворот системы координат, чтобы начальное значение вектора состояния

$$\mathbf{x}(0) = \mathbf{x}_0 = [0 \ 0 \ \pi/2]^\top \in \mathcal{X}, \quad (2.2)$$

т. е. чтобы начальное положение машины Дубинса совпадало с началом координат, а её начальная скорость была направлена вдоль оси ординат.

Пусть непрерывная<sup>1</sup> вектор-функция  $\mathbf{y}_T = [x_T \ y_T]^\top$  задаёт траекторию движения цели на плоскости  $\mathcal{Y}$ . Поставим задачу наискорейшего перехвата предписано движущейся цели как задачу поиска наименьшего значения следующего функционала:

$$J[\mathbf{u}; \mathbf{y}_T] \stackrel{\text{def}}{=} \min \{t \in \mathbb{R}_0^+ : \|\mathbf{y}(t) - \mathbf{y}_T(t)\| \leq \ell\} \rightarrow \inf_{\mathbf{u} \in \mathcal{A}}.$$

---

<sup>1</sup>Основная часть дальнейших выкладок в отличие от предыдущей главы будет использовать только свойство непрерывности траектории цели. Свойство липшицевости в данной главе понадобится только тогда, когда будет рассмотрен алгоритм вычисления наименьшего времени перехвата.

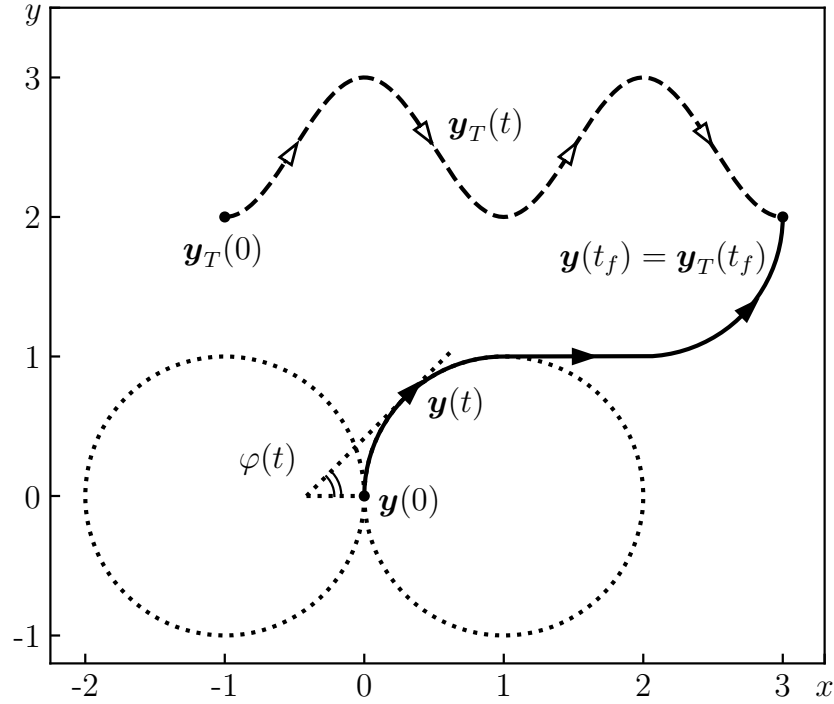


Рисунок 2.1 — Пути движения цели (пунктирная линия) и машины Дубинса (сплошная линия). Стрелки указывают направление скорости. В финальный момент времени  $t_f = \pi + 1$  происходит перехват с радиусом захвата  $\ell = 0$ .

Здесь  $\ell \in \mathbb{R}_0^+$  является радиусом захвата. Из теоремы 1 работы [63] следует, что свойство измеримости функций из  $\mathcal{A}$  можно заменить на кусочную-постоянность функций без потери общности<sup>2</sup>.

В этой и следующей главе мы будем использовать общераспространённые обозначения, относящиеся к модели Дубинса. По аналогии с работой [64] мы будем предполагать, что букве  $C$  соответствует движение по дуге окружности (circle arc) единичного радиуса; букве  $S$  — движение по отрезку (straight line segment). Тогда  $CS$  — это класс траекторий, состоящих из дуги окружности единичного радиуса и отрезка, а  $CC$  — это класс траекторий, состоящих из двух дуг разных окружностей единичного радиуса. Все стыки дуг и отрезков подразумеваются гладкими. В данной главе будет показано, что траекторий из классов  $CS$  и  $CC$  достаточно для осуществления наискорейшего перехвата. На месте буквы  $C$  может стоять буква  $L$  или  $R$  для указания направления разворота (левый и правый развороты соответственно). При движении по прямой  $u(t) = 0$ ; при  $L$ -развороте  $u(t) = +1$ ; при  $R$ -развороте  $u(t) = -1$ . Круги единич-

<sup>2</sup>Вообще говоря, такую замену всегда можно осуществить при формулировании необходимых условий оптимальности [2].

ного радиуса на плоскости  $\mathcal{Y}$ , касающиеся вектора скорости машины Дубинса в начальный момент времени, будем обозначать через  $\mathcal{D}_L$  и  $\mathcal{D}_R$ .

Как и в предыдущей главе будем обозначать через  $\mathcal{R}(t) \subset \mathcal{Y}$  плоское множество достижимости машины Дубинса в момент времени  $t \in \mathbb{R}_0^+$ , а через  $\mathcal{B}(t)$  обозначим границу этого множества. Решение задачи с неподвижной целью полностью исследовано в работах [14; 46; 63] и получено подробное описание множества  $\mathcal{R}(t)$  [63], поэтому вместо применения принципа максимума Понтрягина воспользуемся свойствами этого множества для получения оптимального управления в задаче с движущейся целью.

## 2.2 Описание границы плоского множества достижимости машины Дубинса

Рассмотрим управления, ведущие на границу  $\mathcal{B}(t)$  плоского множества достижимости  $\mathcal{R}(t)$ . В работе [63, с. 212] показано, что любая точка из множества  $\mathcal{B}(t)$  может быть достигнута по траектории длины  $t \in \mathbb{R}_0^+$  из классов  $CS$ ,  $CC$ . Управления, отвечающие этим траекториям, ведут на множество  $\mathcal{B}(t)$  и могут быть кратко описаны с помощью следующей леммы, которая естественным образом следует из теоремы 4 работы [63].

**Лемма 2.1.** *Каждая точка множества  $\mathcal{B}(t)$  в момент времени  $t \in \mathbb{R}_0^+$  может быть достигнута с помощью управления*

$$u(\theta) = \begin{cases} s, & \theta \in [0, \tau]; \\ -\sigma s, & \theta \in (\tau, t], \end{cases} \quad (2.3)$$

где  $s \in \mathbb{B} = \{-1, +1\}$ ,  $\sigma \in \{0, 1\}$ ,  $\tau \in [0, t]$ ,  $\tau \leq 2\pi$ .

Действительно, если параметр  $\sigma = 0$ , то управлению (2.3) отвечают траектории типа  $CS$ ; если параметр  $\sigma = 1$ , то траектории типа  $CC$ ; если  $s = +1$ , то начальный разворот направлен налево; если  $s = -1$ , то направо. Число  $\tau \in \mathbb{R}_0^+$  называется моментом переключения управления.

В дальнейшем через  $\mathcal{B}_\Lambda(t)$  будут обозначаться подмножества множества  $\mathcal{B}(t)$ , на которые в момент времени  $t \in \mathbb{R}_0^+$  можно попасть, используя траекто-

рию типа  $\Lambda \in \{LS, RS, LR, RL\}$ . Также обозначим  $\mathcal{B}_{CS}(t) = \mathcal{B}_{LS}(t) \cup \mathcal{B}_{RS}(t)$  и  $\mathcal{B}_{CC}(t) = \mathcal{B}_{LR}(t) \cup \mathcal{B}_{RL}(t)$ . Дальнейшее изложение текущего раздела существенно повторяет полученные в работе [63] результаты, но в более удобной для задачи перехвата форме, а также уточняет их.

Рассмотрим сначала управления, ведущие на множество  $\mathcal{B}_{CS}(t)$ . Проинтегрируем уравнения состояния (2.1) при заданных начальных условиях для управления (2.3) при  $\sigma = 0$ :

$$\begin{cases} sx(t) + 1 = -(t - \tau) \sin \tau + \cos \tau; \\ y(t) = (t - \tau) \cos \tau + \sin \tau. \end{cases} \quad (2.4)$$

Определим функцию знака для  $x \in \mathbb{R}$  следующим образом:

$$\operatorname{sgn} x \stackrel{\text{def}}{=} \begin{cases} +1, & x > 0; \\ 0, & x = 0; \\ -1, & x < 0. \end{cases}$$

Согласно работам [14; 46], для того чтобы  $\mathbf{y}(t) \in \mathcal{B}_{CS}(t)$ , требуется чтобы  $s = -\operatorname{sgn} x(t)$ , кроме случая, когда  $x(t) = 0$  и  $y(t) < 0$ , т. е. по какую сторону от оси ординат лежит точка  $\mathbf{y}(t)$ , туда же и должна поворачивать машина Дубинса в течение времени  $\tau < 2\pi$ . Если  $\mathbf{y}(t)$  лежит на отрицательной части оси ординат, то начальное направление поворота произвольно, т. е. параметр  $s \in \mathbb{B}$  произволен. Подставляя параметр  $s$  в первое равенство (2.4), получим уравнение

$$|x(t)| = (t - \tau) \sin \tau - (\cos \tau - 1) \geq 0,$$

которое при фиксированном  $t \in \mathbb{R}_0^+$  даёт ограничение на время переключения. Введём обозначения:

$$\mathbf{y}_{LS}(\tau, t) \stackrel{\text{def}}{=} \begin{bmatrix} x_{LS}(\tau, t) \\ y_{LS}(\tau, t) \end{bmatrix} \stackrel{\text{def}}{=} \begin{bmatrix} -(t - \tau) \sin \tau + (\cos \tau - 1) \\ (t - \tau) \cos \tau + \sin \tau \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{y}_{RS}(\tau, t) \stackrel{\text{def}}{=} \begin{bmatrix} x_{RS}(\tau, t) \\ y_{RS}(\tau, t) \end{bmatrix} \stackrel{\text{def}}{=} \begin{bmatrix} -x_{LS}(\tau, t) \\ y_{LS}(\tau, t) \end{bmatrix}.$$

С помощью этих обозначений можно выписать явное параметрическое описание для подмножеств множества  $\mathcal{B}_{CS}(t)$ :

$$\begin{aligned}\mathcal{B}_{LS}(t) &= \{\mathbf{y}_{LS}(\tau, t) : \tau \in [0, t], \tau < 2\pi, x_{LS}(\tau, t) \leq 0\}; \\ \mathcal{B}_{RS}(t) &= \{\mathbf{y}_{RS}(\tau, t) : \tau \in [0, t], \tau < 2\pi, x_{RS}(\tau, t) \geq 0\}.\end{aligned}$$

Далее рассмотрим траектории типа  $CC$ , ведущие на  $\mathcal{B}_{CC}(t)$ . Проинтегрируем уравнения состояния (2.1) при заданных начальных условиях для управления (2.3) при  $\sigma = 1$  и получим систему

$$\begin{cases} sx(t) + 1 = (2 - \cos(t - \tau)) \cos \tau - \sin(t - \tau) \sin \tau; \\ y(t) = (2 - \cos(t - \tau)) \sin \tau + \sin(t - \tau) \cos \tau. \end{cases} \quad (2.5)$$

Согласно работе [63, с. 211], для того чтобы  $\mathbf{y}(t) \in \mathcal{B}_{CC}(t)$ , требуется выполнение  $s = \operatorname{sgn} x(t)$  при  $x(t) \neq 0$ , т. е. по какую сторону точка  $\mathbf{y}(t)$  лежит от оси ординат, в противоположную ей сторону должна поворачивать машина Дубинса в течение времени  $\tau \leq \pi/2$ . Если же  $x(t) = 0$ , то направление первого поворота произвольно, т. е.  $s \in \mathbb{B}$ . Подставляя параметр  $s$  в первое равенство (2.5), получим уравнение

$$|x(t)| = (2 - \cos(t - \tau)) \cos \tau - \sin(t - \tau) \sin \tau - 1 \geq 0, \quad (2.6)$$

которое при фиксированном  $t \in \mathbb{R}_0^+$  даёт ограничение на время переключения.

По траектории типа  $CC$  можно попасть на границу плоского множества достижимости только при  $t < \mathcal{T}^* = 2\pi + \arccos(23/27)$  [63, стр. 215]. Множество  $\mathcal{B}_{CC}(t)$  «стягивается» в некоторую точку  $\mathbf{E}^* \in \mathcal{Y}$  в том смысле, что начиная с некоторого момента времени  $t \in \mathbb{R}_0^+$ , в произвольной  $\varepsilon$ -окрестности точки  $\mathbf{E}^*$  содержатся все точки из множества  $\mathcal{B}_{CC}(t)$ . В точку «стягивания» ведёт траектория типа  $CC$  с моментом переключения  $\tau = \arccos(1/3)$  [63, стр. 215]. Вычислить положение точки  $\mathbf{E}^*$  можно подставив  $\tau = \arccos(1/3)$  и  $t = \mathcal{T}^*$  в уравнения (2.5), что даст  $\mathbf{E}^* = \begin{bmatrix} 0 & 2\sqrt{2}/3 \end{bmatrix}^\top$ .

Введём обозначения:

$$\mathbf{y}_{LR}(\tau, t) \stackrel{\text{def}}{=} \begin{bmatrix} x_{LR}(\tau, t) \\ y_{LR}(\tau, t) \end{bmatrix} \stackrel{\text{def}}{=} \begin{bmatrix} (2 - \cos(t - \tau)) \cos \tau - \sin(t - \tau) \sin \tau - 1 \\ (2 - \cos(t - \tau)) \sin \tau + \sin(t - \tau) \cos \tau \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{y}_{RL}(\tau, t) \stackrel{\text{def}}{=} \begin{bmatrix} x_{RL}(\tau, t) \\ y_{RL}(\tau, t) \end{bmatrix} \stackrel{\text{def}}{=} \begin{bmatrix} -x_{LR}(\tau, t) \\ y_{LR}(\tau, t) \end{bmatrix}.$$

Согласно работе [63, стр. 214], при  $t > 2\pi$  границы внутренней полости состоят только из точек множества  $\mathcal{B}_{CC}(t)$ , поэтому точка с наименьшей ординатой из множества  $\mathcal{B}_{CC}(t)$  лежит не ниже, чем величина  $t - 2\pi$  на оси ординат (иначе в точку с наименьшей ординатой приводила бы траектория типа  $CS$  с  $\tau = 2\pi$ ). Теперь можно выписать явное параметрическое описание для подмножеств множества  $\mathcal{B}_{CC}(t)$  для моментов времени  $t < \mathcal{T}^*$ :

$$\begin{aligned} \mathcal{B}_{LR}(t) &= \{\mathbf{y}_{LR}(\tau, t) : \tau \in [0, t], \tau \leq \frac{\pi}{2}, x_{LR}(\tau, t) \geq 0, y_{LR}(\tau, t) \geq t - 2\pi\}; \\ \mathcal{B}_{RL}(t) &= \{\mathbf{y}_{RL}(\tau, t) : \tau \in [0, t], \tau \leq \frac{\pi}{2}, x_{RL}(\tau, t) \leq 0, y_{RL}(\tau, t) \geq t - 2\pi\}. \end{aligned}$$

В иных случаях полагаем  $\mathcal{B}_{CC}(t) = \emptyset$ . Иллюстрация изменения во времени границы плоского множества достижимости приведена на рис. 2.2.

Опишем множество точек  $\mathcal{B}_G(t) \subset \mathcal{B}(t)$ , в которые машина Дубинса попадает в момент времени  $t \in \mathbb{R}_0^+$  по линии кратчайшей длины (из классов  $CS$  и  $CC$ ). Согласно работам [11; 14], если конечная точка находится внутри кругов  $\mathcal{D}_L, \mathcal{D}_R$ , то такая линия кратчайшей длины принадлежит классу  $CC$ , а если она лежит вне этих кругов, то классу  $CS$ . Учитывая дополнительно, что все точки множества  $\mathcal{B}_{CS}(t)$  лежат вне кругов  $\mathcal{D}_L, \mathcal{D}_R$ , получаем, что

$$\mathcal{B}_G(t) = \mathcal{B}_{CS}(t) \cup \left\{ \begin{bmatrix} x & y \end{bmatrix}^\top \in \mathcal{B}_{CC}(t) : (|x| - 1)^2 + y^2 < 1 \right\}. \quad (2.7)$$

**Лемма 2.2.** *Момент времени  $\mathcal{T} = 2(\pi + \arctg \sqrt{3/125})$  является наименьшим моментом времени, для которого при любых значениях  $t \geq \mathcal{T}$  множество  $\mathcal{B}_G(t)$  состоит только из элементов множества  $\mathcal{B}_{CS}(t)$ .*

*Доказательство.* Согласно выражению (2.7) для  $\mathcal{B}_G(t)$ , достаточно показать, что

$$\left\{ \begin{bmatrix} x & y \end{bmatrix}^\top \in \mathcal{B}_{CC}(t) : (|x| - 1)^2 + y^2 < 1 \right\} = \emptyset$$

для всех моментов времени  $t \geq \mathcal{T}$ . В силу симметрии рассмотрим только случай правой полуплоскости. Ранее было отмечено, что время переключения  $\tau \leq \pi/2$  для траекторий, ведущих на множество  $\mathcal{B}_{CC}(t)$ . Если время переключения  $\tau > \pi/3$ , то вторая дуга траектории  $LR$  не пересечёт круг  $\mathcal{D}_R$  ни при каких  $t \in \mathbb{R}_0^+$ .

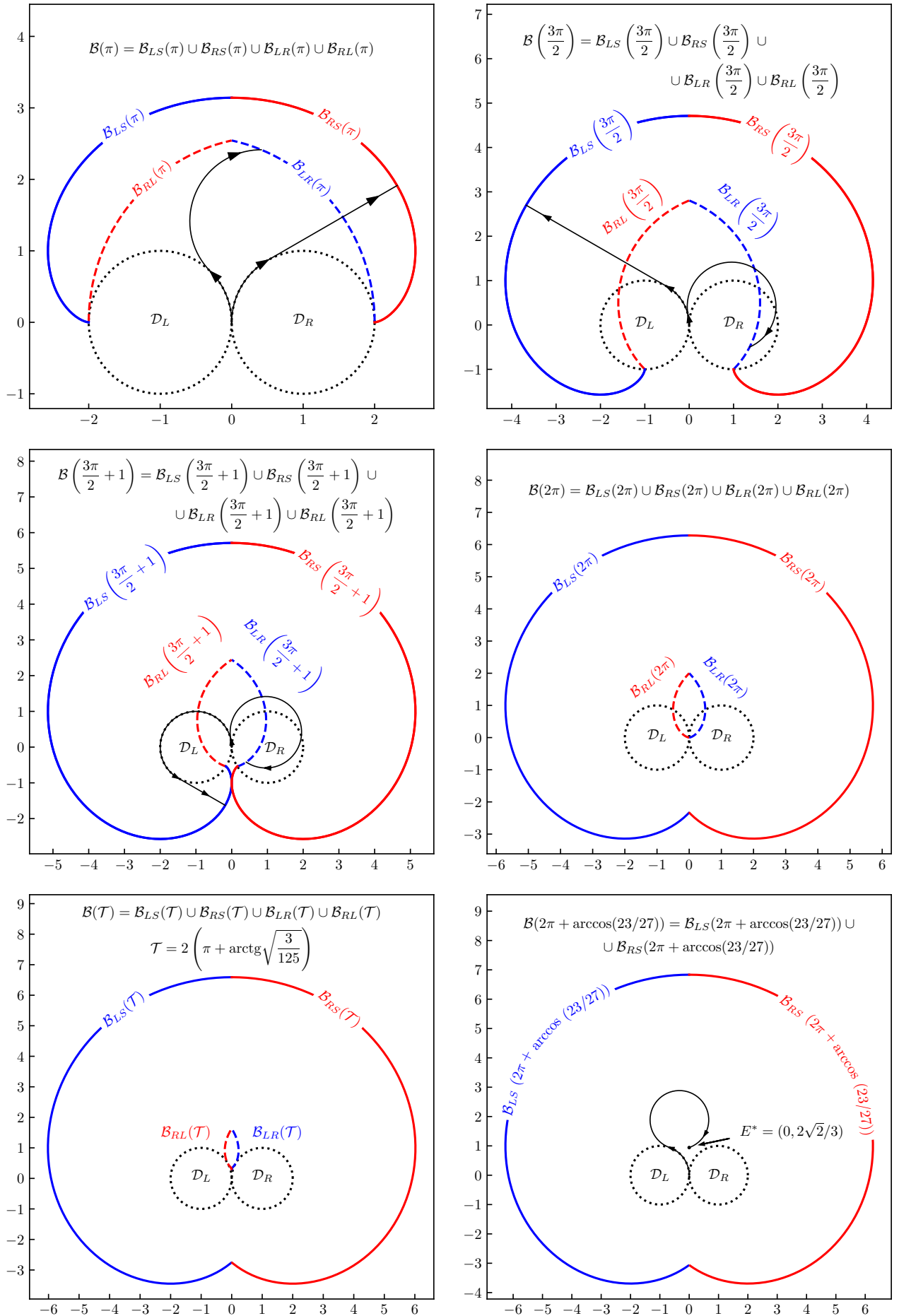


Рисунок 2.2 — Изменение границы плоского множества достижимости.

Значит всякая кратчайшая линия, ведущая в  $\mathcal{D}_R$ , имеет время переключения  $\tau \leq \pi/3$ . Подставим в

$$(|x(t)| - 1)^2 + y(t)^2 < 1$$

второе соотношение из (2.5) и соотношение (2.6). Получим неравенство

$$\chi(\tau, t) \stackrel{\text{def}}{=} 2(\cos \tau - 1) + \cos(t - \tau) - \cos(t - 2\tau) > 0. \quad (2.8)$$

Так как  $\mathcal{B}_{CC}(t) = \emptyset$  при  $t \geq \mathcal{T}^*$ , то нужно показать, что неравенство (2.8) не справедливо ни при каких временах переключения  $\tau \in [0, \pi/3]$  и моментов времени  $t \in [\mathcal{T}, \mathcal{T}^*]$ . Функция  $\chi(\tau, \cdot)$  монотонно убывает при любом времени переключения  $\tau \in (0, \pi/3]$ . Проанализируем график неявно заданной функции, определяемой уравнением  $\chi(\tau, t) = 0$  относительно неизвестной  $t$  (рис. 2.3). Эта неявная функция имеет единственный максимум на прямоугольнике  $\tau \in (0, \pi/3]$ ,  $t \in [2\pi, \mathcal{T}^*]$ . Положение этого максимума определяется решением системы уравнений

$$\begin{cases} 2(\cos \tau - 1) + \cos(t - \tau) = \cos(t - 2\tau); \\ -2 \sin \tau + \sin(t - \tau) = 2 \sin(t - 2\tau). \end{cases}$$

Ход решения этой системы на рассматриваемом прямоугольнике довольно громоздкий. Непосредственной подстановкой можно убедиться, что её решение — это пара значений  $\tau = 2 \arctg \sqrt{5/27}$ ,  $t = \mathcal{T}$ .

□

### 2.3 Вычисление положения оптимальной точки перехвата

Покажем, что в случае нулевого радиуса захвата  $\ell = 0$ , оптимальная точка перехвата движущейся цели лежит на границе  $\mathcal{B}(t)$  плоского множества достижимости  $\mathcal{R}(t)$  за исключением одного случая. Согласно работе [63, стр. 208], множество  $\mathcal{R}(t)$  замкнуто и ограничено для всех моментов времени  $t \in \mathbb{R}_0^+$ . Граница  $\mathcal{B}(t)$  плоского множества достижимости состоит из нескольких гладких частей. Эти части непрерывно связаны между собой не более чем в шести



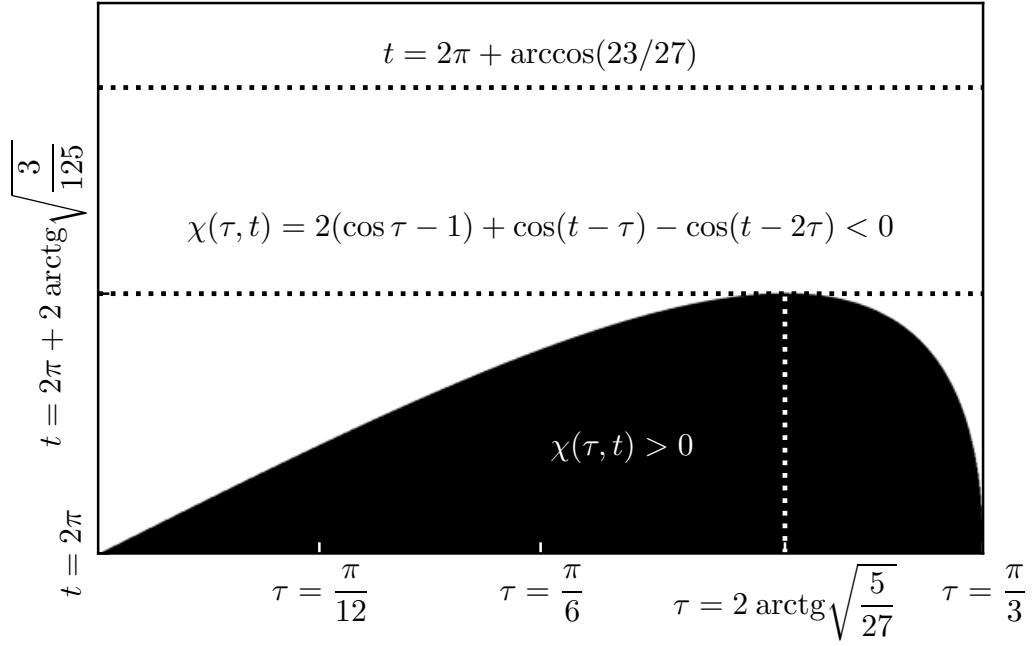


Рисунок 2.3 — Иллюстрация поведения неявно заданной функции  $\chi(\tau, t) = 0$ . Область, где  $\chi(\tau, t) > 0$ , закрашена чёрным, а область, где  $\chi(\tau, t) < 0$ , — белым.

точках в каждый момент времени  $t \in \mathbb{R}_0^+$  (рис. 2.4). Для времени  $t \in (0, 3\pi/2+1)$  таких точек четыре: (a), (b), (c) и (d); при времени  $t = 3\pi/2 + 1$  их пять: точка (e) совпадает с точкой (f); для времени  $t \in (3\pi/2 + 1, 2\pi)$  их шесть; для моментов времени  $t \in [2\pi, \mathcal{T}^*)$  их четыре: точки (c), (d) и (e) совпадают при  $t = 2\pi$ ; при значениях времени  $t \geq \mathcal{T}^*$  их две: (a) и (f).

Многозначное отображение  $\mathcal{B} : \mathbb{R}_0^+ \rightarrow 2^{\mathcal{Y}}$  называется полунепрерывным снизу в момент времени  $t_0 \in \mathbb{R}_0^+$ , если для всякого числа  $\varepsilon > 0$  и всякой точки  $\mathbf{y}_0 \in \mathcal{B}(t_0)$  существует такое число  $\delta > 0$ , что для любого момента времени  $t : |t - t_0| < \delta$ , существует такая точка  $\mathbf{y} \in \mathcal{B}(t)$ , что выполнено неравенство  $\|\mathbf{y} - \mathbf{y}_0\| < \varepsilon$ . Многозначное отображение  $\mathcal{B} : \mathbb{R}_0^+ \rightarrow 2^{\mathcal{Y}}$  полунепрерывно сверху в момент времени  $t_0 \in \mathbb{R}_0^+$ , если для всякого числа  $\varepsilon > 0$  существует такое число  $\delta > 0$ , что для любого момента времени  $t : |t - t_0| < \delta$  и любой точки  $\mathbf{y} \in \mathcal{B}(t)$  существует такая точка  $\mathbf{y}_0 \in \mathcal{B}(t_0)$ , что выполнено неравенство  $\|\mathbf{y} - \mathbf{y}_0\| < \varepsilon$ . Если многозначное отображение полунепрерывно снизу и сверху, то оно называется непрерывным.

**Лемма 2.3.** Многозначное отображение  $\mathcal{B} : \mathbb{R}_0^+ \rightarrow 2^{\mathcal{Y}}$ , задающее изменение во времени границы плоского множества достижимости, является непрерыв-

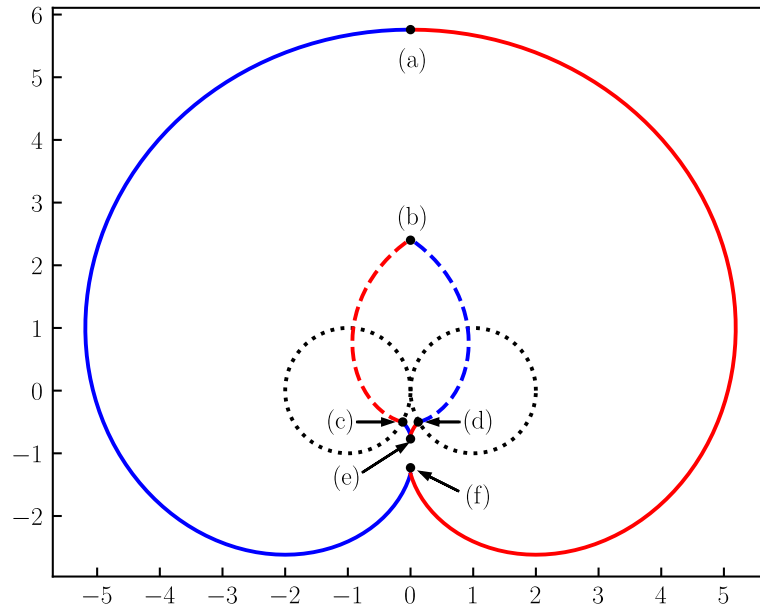


Рисунок 2.4 — Граница  $\mathcal{B}(t)$  плоского множества достижимости в момент времени  $t = 11\pi/6$ . В этот момент на границе присутствуют все шесть точек сшивания гладких границ.

ным в любой момент времени  $t > 0$ , кроме момента времени  $t = \mathcal{T}^*$ , где это отображение является полунепрерывным снизу.

*Доказательство.* Сначала покажем, что все точки множества  $\mathcal{B}(t_0)$ , кроме (a-f), имеют конечную скорость движения на плоскости для всякого  $t_0 > 0$ . Зафиксируем

$$\mathbf{y}_0 = \begin{bmatrix} x_0 & y_0 \end{bmatrix}^\top \in \mathcal{B}(t_0)$$

и рассмотрим два случая. В первом случае  $\mathbf{y}_0 \in \mathcal{B}_{CS}(t_0)$ , причём точка  $\mathbf{y}_0$  не совпадает с точками (a), (c-f). В соответствии с (2.4) имеет место система

$$\begin{cases} x_0 = s_0(-(t_0 - \tau_0) \sin \tau_0 + \cos \tau_0 - 1); \\ y_0 = (t_0 - \tau_0) \cos \tau_0 + \sin \tau_0. \end{cases}$$

Берём частные производные по  $t_0$  от первого и второго уравнения этой системы, возводим их в квадрат, суммируем и получаем уравнение

$$\left( \frac{\partial x_0}{\partial t_0} \right)^2 + \left( \frac{\partial y_0}{\partial t_0} \right)^2 = 1.$$

Во втором случае  $\mathbf{y}_0 \in \mathcal{B}_{CC}(t_0)$ , причём точка  $\mathbf{y}_0$  не совпадает с точками (b-d). В соответствии с (2.5) справедлива система

$$\begin{cases} x_0 = s_0((2 - \cos(t_0 - \tau_0)) \cos \tau_0 - \sin(t_0 - \tau_0) \sin \tau_0 - 1), \\ y_0 = (2 - \cos(t_0 - \tau_0)) \sin \tau_0 + \sin(t_0 - \tau_0) \cos \tau_0. \end{cases}$$

Снова берём частные производные по  $t_0$  от первого и второго уравнений этой системы, возводим их в квадрат, суммируем и получаем уравнение

$$\left(\frac{\partial x_0}{\partial t_0}\right)^2 + \left(\frac{\partial y_0}{\partial t_0}\right)^2 = 1.$$

При единичной скорости всегда найдётся число  $\delta = \varepsilon > 0$  и точка  $\mathbf{y} \in \mathcal{B}(t)$ , что при выполнении неравенства  $|t - t_0| < \delta$  имеет место оценка  $\|\mathbf{y} - \mathbf{y}_0\| \leq |t - t_0| < \delta = \varepsilon$ .

Теперь пусть точка  $\mathbf{y}_0$  является одной из точек (a-f). В силу того, что  $\mathbf{y}_0$  примыкает к непрерывным линиям множества  $\mathcal{B}(t_0)$ , для любых моментов времени  $t_0 \in \mathbb{R}_0^+$  найдётся такая отличная от (a-f) точка  $\mathbf{y}'_0 \in \mathcal{B}(t_0)$ , что выполнено неравенство  $\|\mathbf{y}_0 - \mathbf{y}'_0\| < \varepsilon/2$ , а для точки  $\mathbf{y}'_0$ , в связи с доказанным выше, найдётся  $\mathbf{y} \in \mathcal{B}(t)$ , причём справедлива оценка  $\|\mathbf{y} - \mathbf{y}'_0\| < \varepsilon/2$ . Пользуясь неравенством треугольника, получим неравенство  $\|\mathbf{y} - \mathbf{y}_0\| < \varepsilon$ , что доказывает полунепрерывность снизу.

Так как граница  $\mathcal{B}(t)$  плоского множества достижимости состоит из непрерывных частей, то для любой точки  $\mathbf{y} \in \mathcal{B}(t)$  найдётся точка  $\mathbf{y}' \in \mathcal{B}(t)$ , отличная от точек (a-f), причём справедлива оценка  $\|\mathbf{y} - \mathbf{y}'\| \leq \varepsilon/2$ . Если момент времени  $t_0 \neq \mathcal{T}^*$ , то, выбрав число  $\delta = \min(|\mathcal{T}^* - t_0|, \varepsilon/2)$ , для любого момента времени  $t : |t - t_0| < \delta$  и любой точки  $\mathbf{y} \in \mathcal{B}(t)$  найдётся такая точка  $\mathbf{y}_0 \in \mathcal{B}(t_0)$ , для которой выполняется цепочка неравенств

$$\|\mathbf{y} - \mathbf{y}_0\| \leq \|\mathbf{y} - \mathbf{y}'\| + \|\mathbf{y}' - \mathbf{y}_0\| \leq \varepsilon/2 + |t - t_0| < \varepsilon/2 + \delta \leq \varepsilon,$$

что доказывает полунепрерывность сверху для всех моментов времени  $t_0 > 0$ , кроме момента  $t_0 = \mathcal{T}^*$ . В момент времени  $t_0 = \mathcal{T}^*$  пропадает множество  $\mathcal{B}_{CC}(t_0)$ , которое обособленно от множества  $\mathcal{B}_{CS}(t_0)$ , поэтому полунепрерывности сверху в этот момент нет.  $\square$

**Утверждение 2.1.** При нулевом радиусе захвата  $\ell = 0$ , если наискорейший перехват цели, движущейся по непрерывной траектории  $\mathbf{y}_T$ , возможен в момент времени  $T^*[\mathbf{y}_T] < +\infty$ , то оптимальная точка перехвата лежит на множестве  $\mathcal{B}(T^*[\mathbf{y}_T])$ , кроме случая, когда оптимальная точка перехвата  $\mathbf{E}^* = \begin{bmatrix} 0 & 2\sqrt{2}/3 \end{bmatrix}^\top$ , а наименьшее время перехвата  $T^*[\mathbf{y}_T] = \mathcal{T}^*$ .

*Доказательство.* Если оптимальная точка перехвата  $\mathbf{y}_T(T^*[\mathbf{y}_T]) = \mathbf{E}^*$ , а наименьшее время перехвата  $T^*[\mathbf{y}_T] = \mathcal{T}^*$ , то наискорейший перехват осуществляется по траектории типа  $RL$  или  $LR$ , но происходит не на множестве  $\mathcal{B}(T^*[\mathbf{y}_T])$ , т. к. в силу приведённого в предыдущем разделе описания границы плоского множества достижимости  $\mathbf{E}^* \notin \mathcal{B}(\mathcal{T}^*)$ . Пусть теперь оптимальная точка перехвата  $\mathbf{y}_T(T^*[\mathbf{y}_T]) \neq \mathbf{E}^*$  или наименьшее время перехвата  $T^*[\mathbf{y}_T] \neq \mathcal{T}^*$ . Предположим, что точка  $\mathbf{y}_T(T^*[\mathbf{y}_T])$  является внутренней точкой для множества  $\mathcal{R}(T^*[\mathbf{y}_T])$ . Тогда найдётся шар  $\mathcal{O} \subset \mathcal{Y}$  с центром в точке  $\mathbf{y}_T(T^*[\mathbf{y}_T])$ , который полностью лежит внутри множества  $\mathcal{R}(T^*[\mathbf{y}_T])$  и каждая точка границы такого шара удалена от границы  $\mathcal{B}(T^*[\mathbf{y}_T])$  плоского множества достижимости не менее чем на расстояние  $\varepsilon > 0$ . В силу леммы 2.3 и «стягивания» множества  $\mathcal{B}_{CC}(t)$  к точке  $\mathbf{E}^* \neq \mathbf{y}_T(T^*[\mathbf{y}_T])$  при времени  $t \rightarrow \mathcal{T}^*$ , найдётся такое число  $\delta > 0$ , что для всех моментов времени  $t \in (T^*[\mathbf{y}_T] - \delta, T^*[\mathbf{y}_T] + \delta)$  точки границы  $\mathcal{B}(t)$  плоского множества достижимости не попадут в этот шар, поэтому  $\mathcal{O} \subset \mathcal{R}(t)$ . В силу непрерывности траектории цели  $\mathbf{y}_T$  можно выбрать число  $\delta \in \mathbb{R}_0^+$  настолько малым, чтобы выполнялось включение  $\mathbf{y}_T(t) \in \mathcal{O}$ . Значит  $\mathbf{y}_T(t) \in \mathcal{R}(t)$ , что противоречит тому, что время  $T^*[\mathbf{y}_T]$  — наименьшее время перехвата, а следовательно, оптимальная точка перехвата  $\mathbf{y}_T(T^*[\mathbf{y}_T])$  лежит на границе множества  $\mathcal{R}(T^*[\mathbf{y}_T])$ .  $\square$

Получим уравнения, которым удовлетворяет наименьшее время перехвата в случае нулевого радиуса захвата  $\ell = 0$ . Если наискорейший перехват осуществляется по траектории типа  $CS$ , то в соответствии с (2.4) оптимальный момент переключения  $\tau \in [0, t]$  ( $\tau \leq 2\pi$ ) и наименьшее время перехвата  $t \in \mathbb{R}_0^+$  определяются следующей системой:

$$\begin{cases} 1 - |x_T(t)| = -(t - \tau) \sin \tau + \cos \tau; \\ y_T(t) = (t - \tau) \cos \tau + \sin \tau. \end{cases} \quad (2.9)$$

Возведём выражения (2.9) в квадрат и просуммируем их, тогда, после нетрудных преобразований и учёта того, что  $t \geq \tau$ , получим

$$t - \tau = \sqrt{(1 - |x_T(t)|)^2 + y_T^2(t) - 1}. \quad (2.10)$$

Введём обозначения

$$\alpha_C(\mathbf{y}) \stackrel{\text{def}}{=} \frac{1 - |x| + y\sqrt{(1 - |x|)^2 + y^2 - 1}}{(1 - |x|)^2 + y^2},$$

$$\alpha_S(\mathbf{y}) \stackrel{\text{def}}{=} \frac{y - (1 - |x|)\sqrt{(1 - |x|)^2 + y^2 - 1}}{(1 - |x|)^2 + y^2},$$

тогда, после подстановки (2.10) в (2.9), решая систему (2.9) относительно неизвестной  $\tau \in [0, 2\pi)^3$ , получим

$$\tau = \theta_{CS}(\mathbf{y}_T(t)) \stackrel{\text{def}}{=} \begin{cases} \arccos \alpha_C(\mathbf{y}_T(t)), & \alpha_S(\mathbf{y}_T(t)) \geq 0; \\ 2\pi - \arccos \alpha_C(\mathbf{y}_T(t)), & \alpha_S(\mathbf{y}_T(t)) < 0. \end{cases}$$

Подставив значение  $\tau = \theta_{CS}(\mathbf{y}_T(t))$  в (2.10), получим уравнение для определения наименьшего времени перехвата. Таким образом, наименьшее время перехвата  $\mathcal{T}_{CS}[\mathbf{y}_T]$  является наименьшим неотрицательным корнем следующего уравнения относительно переменной  $t$ :

$$t - \theta_{CS}(\mathbf{y}_T(t)) - \sqrt{(1 - |x_T(t)|)^2 + y_T^2(t) - 1} = 0. \quad (2.11)$$

Если данное уравнение не имеет неотрицательных корней, то будем формально полагать, что  $\mathcal{T}_{CS}[\mathbf{y}_T] = +\infty$ . Для некоторых значений переменной  $t \in \mathbb{R}_0^+$  в левой части выражения (2.11) могут возникать некорректные операции: деление на ноль, извлечение корня из отрицательного числа и т. п. В таких случаях наискорейший перехват в момент времени  $t$  по траектории типа  $CS$  невозможен. Например, если предположить, что оптимальная точка перехвата лежит внутри кругов  $\mathcal{D}_L, \mathcal{D}_R$ , то наискорейший перехват не может быть осуществлён по траектории типа  $CS$ , т. к. при вычислении левой части (2.11) возникнет корень из отрицательного числа, поэтому в этом случае формально полагаем  $\mathcal{T}_{CS}[\mathbf{y}_T] = +\infty$ .

---

<sup>3</sup>Случай  $\tau = 2\pi$  отнесём к случаю траекторий типа  $CS$  и рассмотрим позднее.

Теперь проведём аналогичные рассуждения для случая наискорейшего перехвата по траектории типа  $CC$ . В соответствии с (2.5) оптимальный момент переключения  $\tau \in [0, t]$  ( $\tau \leq 2\pi$ ) и наименьшее время перехвата  $t \in \mathbb{R}_0^+$  определяются следующей системой:

$$\begin{cases} |x_T(t)| + 1 = (2 - \cos(t - \tau)) \cos \tau - \sin(t - \tau) \sin \tau, \\ y_T(t) = (2 - \cos(t - \tau)) \sin \tau + \sin(t - \tau) \cos \tau. \end{cases} \quad (2.12)$$

Возведём выражения (2.12) в квадрат и просуммируем их, тогда, после нетрудных преобразований, получим

$$\cos(t - \tau) = \frac{5 - (1 + |x_T(t)|)^2 - y_T^2(t)}{4} \stackrel{\text{def}}{=} \alpha(\mathbf{y}_T(t)). \quad (2.13)$$

После подстановки (2.13) в (2.12), решая систему (2.12) относительно неизвестной  $\tau \in [0, \pi/2]$ <sup>4</sup>, получим, вообще говоря, два решения:

$$\tau = \theta_{CC}^{\pm}(\mathbf{y}_T(t)) \stackrel{\text{def}}{=} \arccos \frac{(1 + |x_T(t)|)(2 - \alpha(\mathbf{y}_T(t))) \pm y_T(t) \sqrt{1 - \alpha^2(\mathbf{y}_T(t))}}{(1 + |x_T(t)|)^2 + y_T^2(t)}.$$

Можно показать, что если  $t \leq \pi$ , то момент переключения всегда определяется как  $\tau = \theta_{CC}^+(\mathbf{y}_T(t))$ , а если  $t \geq \pi + \arccos(1/3)$ , то момент переключения всегда определяется как  $\tau = \theta_{CC}^-(\mathbf{y}_T(t))$ .

Рассматривая отдельно случаи  $\tau = \theta_{CC}^+(\mathbf{y}_T(t))$  и  $\tau = \theta_{CC}^-(\mathbf{y}_T(t))$ , после подстановки найденного момента переключения в (2.13) и обращения косинуса с учётом того, что  $T - \tau \in [0, 2\pi]$ <sup>5</sup>, получим два уравнения для определения наименьшего времени перехвата:

$$\begin{aligned} t - \theta_{CC}^+(\mathbf{y}_T(t)) - \arccos \alpha(\mathbf{y}_T(t)) &= 0, \\ t - \theta_{CC}^-(\mathbf{y}_T(t)) - 2\pi + \arccos \alpha(\mathbf{y}_T(t)) &= 0. \end{aligned} \quad (2.14)$$

Наименьшие неотрицательные корни этих двух уравнений будем обозначать через  $\mathcal{T}_{CC}^+(\mathbf{y}_T)$ ,  $\mathcal{T}_{CC}^-(\mathbf{y}_T)$  соответственно. В случае отсутствия корней будем формально полагать, что  $\mathcal{T}_{CC}^{\pm}(\mathbf{y}_T) = +\infty$ . Как и в случае траекторий типа  $CS$ , при вычислении левой части какого-либо из уравнений (2.14) для некоторых

<sup>4</sup>Данное ограничение следует из описания границы плоского множества достижимости.

<sup>5</sup>Вторая арка траектории типа  $CC$  представляет собой не больше чем движение по петле.

$t \in \mathbb{R}_0^+$  могут возникать некорректные операции. Если некорректные операции возникают при вычислении сразу двух выражений, то наискорейший перехват в момент  $t$  по траектории типа  $CC$  невозможен. Если некорректные операции появляются при вычислении первого выражения, а второе выражение при подстановке  $t$  превращается в тождество, то наискорейший перехват осуществляется с моментом переключения  $\theta_{CC}^-(\mathbf{y}_T(t))$  и наоборот. Наименьшее время перехвата определяется выбором наименьшего времени из двух моментов времени:  $\mathcal{T}_{CC}[\mathbf{y}_T] = \min(\mathcal{T}_{CC}^+[\mathbf{y}_T], \mathcal{T}_{CC}^-[\mathbf{y}_T])$ . Оптимальный момент переключения при известном наименьшем времени перехвата  $t$  определяется следующим образом:

$$\tau = \theta_{CC}(\mathbf{y}_T(t)) \stackrel{\text{def}}{=} \begin{cases} \theta_{CC}^+(\mathbf{y}_T(t)), & \mathcal{T}_{CC}^+[\mathbf{y}_T] \leq \mathcal{T}_{CC}^-[\mathbf{y}_T]; \\ \theta_{CC}^-(\mathbf{y}_T(t)), & \mathcal{T}_{CC}^+[\mathbf{y}_T] > \mathcal{T}_{CC}^-[\mathbf{y}_T]. \end{cases}$$

Если перехват невозможен, то уравнения (2.11), (2.14) не имеют неотрицательных решений. Если перехват возможен, то хотя бы одно из уравнений (2.11), (2.14) имеет неотрицательное решение.

Если оптимальная точка перехвата лежит на оси ординат, то начальный знак управления может быть выбран произвольным (в силу симметрии задачи). В соответствии с леммой 2.1, если оптимальной траекторией является линия типа  $CS$ , то оптимальное управление выглядит так:

$$u(t) = u_{CS}^o(t) \stackrel{\text{def}}{=} \begin{cases} -\text{sgn } x_E(\mathcal{T}_{CS}[\mathbf{y}_T]), & t < \theta_{CS}(\mathcal{T}_{CS}[\mathbf{y}_T]), x_T(\mathcal{T}_{CS}[\mathbf{y}_T]) \neq 0; \\ \pm 1, & t < \theta_{CS}(\mathcal{T}_{CS}[\mathbf{y}_T]), x_T(\mathcal{T}_{CS}[\mathbf{y}_T]) = 0; \\ 0, & t \geq \theta_{CS}(\mathcal{T}_{CS}[\mathbf{y}_T]). \end{cases}$$

Если оптимальной траекторией является линия типа  $CC$ , то оптимальное управление выглядит так:

$$u(t) = u_{CC}^o(t) \stackrel{\text{def}}{=} \begin{cases} \text{sgn } x_T(\mathcal{T}_{CC}[\mathbf{y}_T]), & t < \theta_{CC}(\mathcal{T}_{CC}[\mathbf{y}_T]), x_T(\mathcal{T}_{CC}[\mathbf{y}_T]) \neq 0; \\ -\text{sgn } x_T(\mathcal{T}_{CC}[\mathbf{y}_T]), & t \geq \theta_{CC}(\mathcal{T}_{CC}[\mathbf{y}_T]), x_T(\mathcal{T}_{CC}[\mathbf{y}_T]) \neq 0; \\ \pm 1, & t < \theta_{CC}(\mathcal{T}_{CC}[\mathbf{y}_T]), x_T(\mathcal{T}_{CC}[\mathbf{y}_T]) = 0; \\ \mp 1, & t \geq \theta_{CC}(\mathcal{T}_{CC}[\mathbf{y}_T]), x_T(\mathcal{T}_{CC}[\mathbf{y}_T]) = 0. \end{cases}$$

Выбор знака  $\pm$  в приведённых выражениях может быть сделан произвольным образом.

Пусть время перехвата цели, движение которой заранее известно, является конечным. Тогда справедливо следующее утверждение.

**Утверждение 2.2.** *Оптимальное управление в задаче наискорейшего перехвата движущейся непрерывно цели машиной Дубинса имеет вид*

$$u(t) = u^o(t) \stackrel{\text{def}}{=} \begin{cases} u_{CS}^o(t), & \mathcal{T}_{CS}[\mathbf{y}_T] \leq \mathcal{T}_{CC}[\mathbf{y}_T], \\ u_{CC}^o(t), & \mathcal{T}_{CS}[\mathbf{y}_T] > \mathcal{T}_{CC}[\mathbf{y}_T]. \end{cases}$$

На основе описания множества  $\mathcal{B}_G(t)$  и утверждения 2.1 нетрудно сформулировать проверяемый численно критерий оптимальности перехвата по линии кратчайшей длины. Для этого необходимо и достаточно потребовать, чтобы оптимальная точка перехвата лежала на множестве  $\mathcal{B}_G(t)$ .

**Лемма 2.4.** *Оптимальная траектория перехвата является линией кратчайшей длины в том и только в том случае, когда  $\mathcal{T}_{CS}[\mathbf{y}_T] \leq \mathcal{T}_{CC}[\mathbf{y}_T]$  или  $(|x_T(\mathcal{T}_{CC}[\mathbf{y}_T])| - 1)^2 + y_T^2(\mathcal{T}_{CC}[\mathbf{y}_T]) < 1$ .*

Теорема 5 из работы [80] является частным случаем этого утверждения. Действительно, если оптимальный перехват возможен и  $\mathcal{T}_{CS}[\mathbf{y}_T] \leq \mathcal{T}_{CC}[\mathbf{y}_T]$ , то он осуществляется по траектории типа  $CS$  и заканчивается вне кругов  $\mathcal{D}_L$ ,  $\mathcal{D}_R$ . При этом требование к траектории цели по ненахождению её частей внутри кругов  $\mathcal{D}_L$ ,  $\mathcal{D}_R$  отпадает.

## 2.4 Иллюстрация использования полученных аналитических результатов для задачи перехвата

С помощью утверждения 2.2 и выражений (2.11), (2.14) можно построить наискорейшую траекторию перехвата движущейся цели. Опишем последовательность действий, которая позволяет сделать подобное построение. На первом шаге нужно найти три наименьших неотрицательных корня уравнений (2.11), (2.14). Если какое-либо уравнение не имеет корней, то считаем,



что его корень равен  $+\infty$ . В конце первого шага имеем три значения  $\mathcal{T}_{CS}[\mathbf{y}_T]$ ,  $\mathcal{T}_{CC}^+[\mathbf{y}_T]$ ,  $\mathcal{T}_{CC}^-[\mathbf{y}_T]$ . Если все три значения равны  $+\infty$ , то перехват невозможен. В противном случае трёх вычисленных значений достаточно, чтобы явно получить оптимальное управление при помощи утверждения 2.2.

Траектория движения цели может быть любой непрерывной линией. Для простоты иллюстрации будем полагать, что цель движется по прямой с постоянной скоростью. На рис. 2.5 изображено семь различных случаев перехвата. При  $i = 1$  цель начинает своё движение из круга  $\mathcal{D}_L$  с достаточно малой скоростью, которая позволяет цели избежать встречи на множестве  $\mathcal{B}_{CS}(t)$  и отсрочить перехват до момента попадания на  $\mathcal{B}_{CC}(t)$ . При  $i = 2$  траектория цели не проходит через круги  $\mathcal{D}_L$ ,  $\mathcal{D}_R$ , поэтому оптимальный перехват осуществляется по траектории типа  $CS$ . При  $i = 3$  цель начинает своё движение из  $\mathcal{D}_R$ , а оптимальный перехват, как и в случае  $i = 2$ , осуществляется по линии кратчайшей длины, т. к. выполнены условия леммы 2.4. При  $i = 4$  движение начинается из  $\mathcal{D}_R$ , а оптимальный перехват происходит внутри круга  $\mathcal{D}_L$ . Этот случай примечателен тем, что траектория цели может пересекать оптимальный путь машины Дубинса до момента перехвата. При  $i = 5$  движение цели начинается вне кругов  $\mathcal{D}_L$ ,  $\mathcal{D}_R$ , а оптимальный перехват происходит внутри  $\mathcal{D}_R$  по траектории типа  $CC$ . При  $i = 6$  и  $i = 7$  цель имеет скорость, которая выше или равна скорости машины, но машина, несмотря на это, способна перехватить цель. Отметим, что случаи  $i \in \{1, 2, 3, 6, 7\}$  иллюстрируют тот факт, что если оптимальная точка перехвата лежит вне кругов  $\mathcal{D}_L$ ,  $\mathcal{D}_R$ , то оптимальная траектория машины Дубинса может быть как из класса  $CC$  (при  $i \in \{1, 6, 7\}$ , например), так и из класса  $CS$  (при  $i \in \{2, 3\}$ ). Если же оптимальная точка перехвата лежит внутри кругов  $\mathcal{D}_L$ ,  $\mathcal{D}_R$ , то оптимальная траектория машины принадлежит только классу  $CC$ .

На рис. 2.6 проиллюстрированы случаи, когда цель движется по некоторой сложной криволинейной траектории. На этих рисунках видно, что оптимальный перехват происходит при первом попадании в плоское множество достижимости.

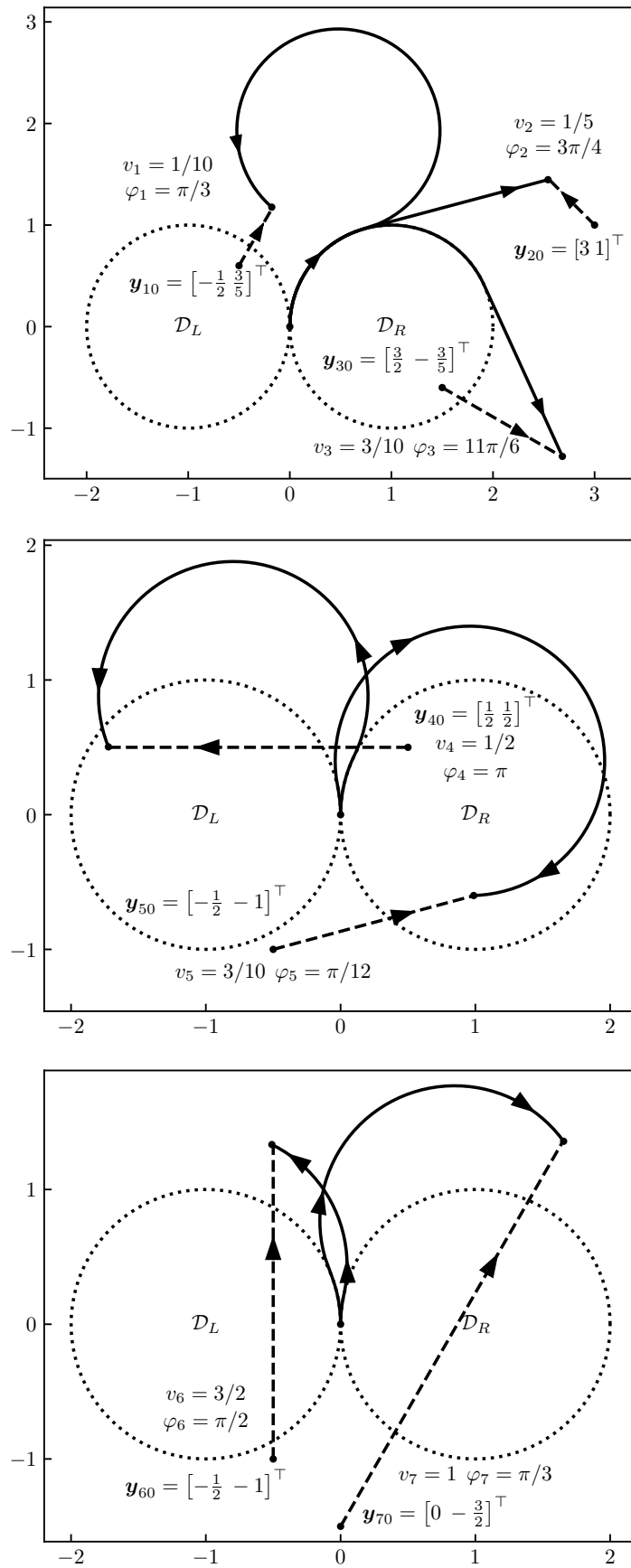


Рисунок 2.5 — Путь оптимального перехвата (сплошная линия) при семи различных вариантах движения цели (пунктирная линия).  $\mathbf{y}_T(t) = \mathbf{y}_{i0} + \mathbf{v}_i t$ , где  $\mathbf{v}_i = (v_i \cos \varphi_i, v_i \sin \varphi_i)$ ,  $i \in \{1, 2, \dots, 7\}$ .

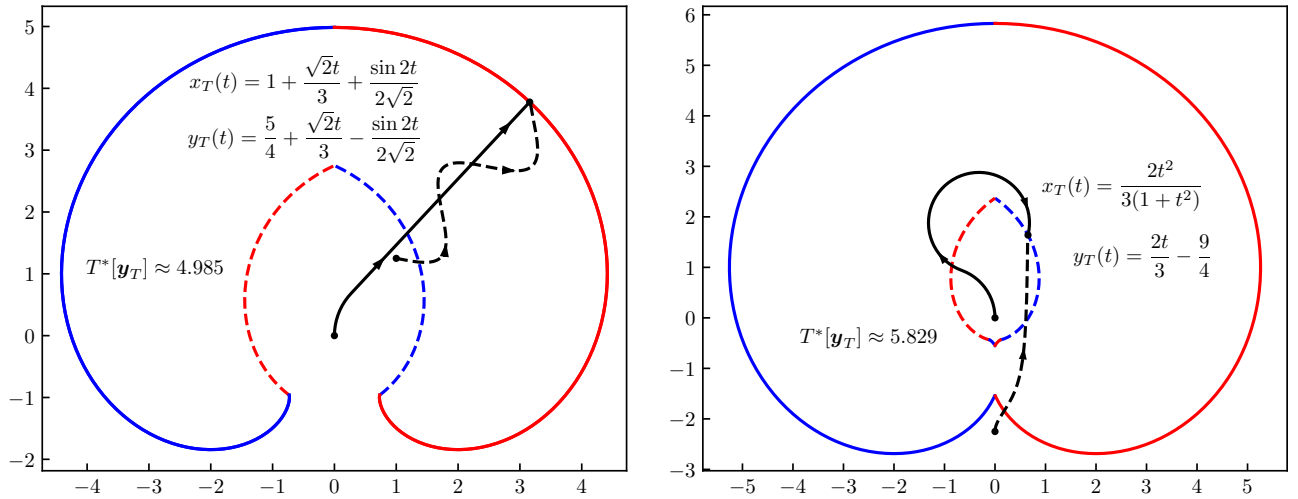


Рисунок 2.6 — Плоское множество достижимости при перехвате цели.

## 2.5 Схема вычисления наименьшего времени перехвата предписано движущейся цели машиной Дубинса

Теперь перейдем к непосредственному описанию схемы применения метода, изложенного в предыдущей главе. Для этого нам понадобится аналитическое описание функции расстояния от плоского множества достижимости до произвольной точки на плоскости. Как и прежде будем использовать обозначение  $\mathbf{y} = \begin{bmatrix} x & y \end{bmatrix}^\top$ . Далее нам понадобится немного модифицированное разбиение плоскости  $\mathcal{Y}$  на особые области из работы [65]:

$$\mathcal{D}_I \stackrel{\text{def}}{=} \{\mathbf{y} \in \mathcal{Y} : \alpha_{CS}(\mathbf{y}) < 0 \vee \mathbf{y} = \mathbf{0}\},$$

$$\mathcal{D}_{II} \stackrel{\text{def}}{=} \{\mathbf{y} \in \mathcal{Y} : \mathbf{y} \notin \mathcal{D}_I, \mathbf{y} \notin \mathcal{D}_{III}\},$$

$$\mathcal{D}_{III} \stackrel{\text{def}}{=} \{\mathbf{y} \in \mathcal{Y} : \alpha_{CC}(\mathbf{y}) > -1, y > 0, \mathbf{y} \notin \mathcal{D}_I\}.$$

Здесь<sup>6</sup>

$$\alpha_{CS}(\mathbf{y}) \stackrel{\text{def}}{=} (1 - |x|)^2 + y^2 - 1,$$

$$\alpha_{CC}(\mathbf{y}) \stackrel{\text{def}}{=} \frac{5 - (1 + |x|)^2 - y^2}{4}.$$

<sup>6</sup>Символ  $\vee$  в выражениях означает дизъюнктивную связку «или». Для конъюнктивной связки «и» используется запятая.

С помощью уравнений (2.11), (2.14) можно определить длины соответствующих путей машины Дубинса, ведущих на границу плоского множества достижимости. Обозначим эти длины через  $V_{CS}(\mathbf{y})$ ,  $V_{CC}^+(\mathbf{y})$ ,  $V_{CC}^-(\mathbf{y})$ . Собирая вместе полученные результаты и учитывая области определения соответствующих величин, получим:

$$\begin{aligned} V_{CS}(\mathbf{y}) &\stackrel{\text{def}}{=} \theta_{CS}(\mathbf{y}) + \sqrt{\alpha_{CS}(\mathbf{y})}, \quad \mathbf{y} \in \mathcal{D}_{II} \cup \mathcal{D}_{III} \text{ или } (\mathbf{y} = \mathbf{0}); \\ V_{CC}^+(\mathbf{y}) &\stackrel{\text{def}}{=} \theta_{CC}^+(\mathbf{y}) + \arccos \alpha_{CC}(\mathbf{y}), \quad \mathbf{y} \in \mathcal{D}_{III}; \\ V_{CC}^-(\mathbf{y}) &\stackrel{\text{def}}{=} \theta_{CC}^-(\mathbf{y}) + 2\pi - \arccos \alpha_{CC}(\mathbf{y}), \quad \mathbf{y} \in \mathcal{D}_I \cup \mathcal{D}_{III}. \end{aligned}$$

Здесь

$$\begin{aligned} \theta_{CS}(\mathbf{y}) &= \begin{cases} \arccos \frac{1-|x|+y\sqrt{\alpha_{CS}(\mathbf{y})}}{1+\alpha_{CS}(\mathbf{y})}, & y \geq (1-|x|)\sqrt{\alpha_{CS}(\mathbf{y})}; \\ 2\pi - \arccos \frac{1-|x|+y\sqrt{\alpha_{CS}(\mathbf{y})}}{1+\alpha_{CS}(\mathbf{y})}, & y < (1-|x|)\sqrt{\alpha_{CS}(\mathbf{y})}, \end{cases} \\ \theta_{CC}^\pm(\mathbf{y}) &= \arccos \frac{(1+|x|)(2-\alpha_{CC}(\mathbf{y})) \pm y\sqrt{1-\alpha_{CC}^2(\mathbf{y})}}{(1+|x|)^2 + y^2}. \end{aligned}$$

Явный вид описания плоского множества достижимости следует из анализа достижимости заданной точки  $\mathbf{y} \in \mathcal{Y}$  конкретными частями границы плоского множества достижимости. Если точка  $\mathbf{y} \in \mathcal{D}_{II}$ , то она попадает в плоское множество достижимости спустя время  $V_{CS}(\mathbf{y})$  и далее остаётся внутри него. Если точка  $\mathbf{y} \in \mathcal{D}_I$ , то она попадает в плоское множество достижимости спустя время  $V_{CC}^-(\mathbf{y})$  и далее остаётся внутри него. Если точка  $\mathbf{y} \in \mathcal{D}_{III}$ , то она сохраняется внутри плоского множества достижимости от момента времени  $V_{CS}(\mathbf{y})$  до  $V_{CC}^+(\mathbf{y})$  и потом снова попадает в плоское множество достижимости начиная с момента  $V_{CC}^-(\mathbf{y})$ . Таким образом,

$$\begin{aligned} \mathcal{R}(t) &= \{ \mathbf{y} \in \mathcal{Y} : (\mathbf{y} \in \mathcal{D}_{III}, t \geq V_{CS}(\mathbf{y}), (t \geq V_{CC}^-(\mathbf{y}) \vee V_{CC}^+(\mathbf{y}) \geq t)) \\ &\vee (\mathbf{y} \in \mathcal{D}_{II}, t \geq V_{CS}(\mathbf{y})) \vee (\mathbf{y} \in \mathcal{D}_I, t \geq V_{CC}^-(\mathbf{y})) \vee (t = 0, \mathbf{y} = \mathbf{0}) \}. \quad (2.15) \end{aligned}$$

Если точка  $\mathbf{y} \in \mathcal{Y} \setminus \mathcal{R}(t)$ , то ближайшая точка к  $\mathbf{y}$  лежит на границе плоского множества достижимости  $\mathcal{B}(t)$ , т. к. множество  $\mathcal{R}(t)$  является замкнутым множеством для каждого момента времени  $t \in \mathbb{R}_0^+$ . Граница плоского множества достижимости состоит из двух частей  $\mathcal{B}_{CS}(t)$ ,  $\mathcal{B}_{CC}(t)$ . Таким образом, рас-

стояние от точки  $\mathbf{y} \in \mathcal{Y} \setminus \mathcal{R}(t)$  до множества  $\mathcal{R}(t)$  можно вычислить следующим образом:

$$\rho(t, \mathbf{y}) = \min_{\boldsymbol{\eta} \in \mathcal{R}(t)} \|\boldsymbol{\eta} - \mathbf{y}\| = \min_{\boldsymbol{\eta} \in \mathcal{B}(t)} \|\boldsymbol{\eta} - \mathbf{y}\| = \min(\rho_{CS}(t, \mathbf{y}), \rho_{CC}(t, \mathbf{y})),$$

где

$$\rho_{CS}(t, \mathbf{y}) \stackrel{\text{def}}{=} \min_{\boldsymbol{\eta} \in \mathcal{B}_{CS}(t)} \|\boldsymbol{\eta} - \mathbf{y}\|, \quad \rho_{CC}(t, \mathbf{y}) \stackrel{\text{def}}{=} \min_{\boldsymbol{\eta} \in \mathcal{B}_{CC}(t)} \|\boldsymbol{\eta} - \mathbf{y}\|.$$

**Лемма 2.5.** Для всякого момента времени  $t \in \mathbb{R}_0^+$  если точка  $\mathbf{y} \in \mathcal{Y} \setminus \mathcal{R}(t)$ , то

$$\rho(t, \mathbf{y}) = \begin{cases} V_{CS}(\mathbf{y}) - t, & (\mathbf{y} \in \mathcal{D}_{II} \vee (\mathbf{y} \in \mathcal{D}_{III}, V_{CS}(\mathbf{y}) \geq t)), \theta_{CS}(\mathbf{y}) \leq t; \\ \rho_{CC}(t, \mathbf{y}), & \text{в иных случаях.} \end{cases}$$

Здесь

$$\rho_{CC}(t, \mathbf{y}) = \min_{\substack{\tau \in \{0, \tau_1(t, \mathbf{y}), \tau_2(t, \mathbf{y}), \tau_3(t, \mathbf{y})\} \\ 0 \leq \tau \leq \min(t, \frac{\pi}{2})}} \sqrt{(|x| - x_{LR}(\tau, t))^2 + (y - y_{LR}(\tau, t))^2},$$

$$x_{LR}(\tau, t) \stackrel{\text{def}}{=} 2 \cos \tau - \cos(t - 2\tau) - 1, \quad y_{LR}(\tau, t) \stackrel{\text{def}}{=} 2 \sin \tau + \sin(t - 2\tau),$$

$$\tau_i(t, \mathbf{y}) \stackrel{\text{def}}{=} \left( \frac{t}{3} - 2 \arctan \xi_i(t, \mathbf{y}) \right) \bmod 2\pi, \quad i \in \{1, 2, 3\},$$

и  $\xi_1(t, \mathbf{y})$ ,  $\xi_2(t, \mathbf{y})$ ,  $\xi_3(t, \mathbf{y})$  являются вещественными<sup>7</sup> корнями следующего кубического уравнения

$$\begin{aligned} - \left( y + \sin \frac{t}{3} \right) \xi^3 + \left( 3 + 3|x| + \cos \frac{t}{3} \right) \xi^2 \\ + \left( 3y - \sin \frac{t}{3} \right) \xi + \cos \frac{t}{3} - (1 + |x|) = 0. \end{aligned}$$

*Доказательство.* Представленные выражения можно получить, решая задачу поиска наименьшего значения вещественной функции и используя аналитическое описание множеств  $\mathcal{B}_{CS}(t)$ ,  $\mathcal{B}_{CC}(t)$ .  $\square$

Теперь перейдём к получению свойств функций универсального оценивания снизу, заданных определениями 1.2, 1.3.

<sup>7</sup>Если соответствующий корень комплексный, то он отбрасывается и не участвует в рассмотрении.

**Лемма 2.6.** Пусть время  $t \in \mathbb{R}_0^+$ , точка  $\mathbf{y} \in \mathcal{Y} \setminus \mathcal{R}(t)$ ,  $\rho(t, \mathbf{y}) > \ell$  и  $\theta_{CS}(\mathbf{y}) \leq t$ . Если также точка  $\mathbf{y} \in \mathcal{D}_{II}$  или  $\mathbf{y} \in \mathcal{D}_{III}$  и  $V_{CS}(\mathbf{y}) \geq t$ , то

$$T(t, \mathbf{y}) = \tau(t, \mathbf{y}) = t + \frac{V_{CS}(\mathbf{y}) - t - \ell}{1 + v}.$$

*Доказательство.* Используя симметрию проблемы, проведём доказательство только для случая, когда точка  $\mathbf{y}$  лежит на правой полуплоскости. Согласно системе (2.9), точка

$$\boldsymbol{\eta} = \begin{bmatrix} (t - \theta_{CS}(\mathbf{y})) \sin \theta_{CS}(\mathbf{y}) - \cos \theta_{CS}(\mathbf{y}) + 1 \\ (t - \theta_{CS}(\mathbf{y})) \cos \theta_{CS}(\mathbf{y}) + \sin \theta_{CS}(\mathbf{y}) \end{bmatrix}$$

может быть достигнута по траектории типа  $CS$  с терминальной скоростью

$$\dot{\mathbf{y}}(t) = \begin{bmatrix} \sin \theta_{CS}(\mathbf{y}(t)) & \cos \theta_{CS}(\mathbf{y}(t)) \end{bmatrix}^\top.$$

Здесь  $\mathbf{y}(t) = \mathbf{y}$ . Направление этой скорости совпадает с направлением вектора  $\mathbf{y} - \boldsymbol{\eta}$ , т. к.

$$\mathbf{y} = \begin{bmatrix} (V_{CS}(\mathbf{y}) - \theta_{CS}(\mathbf{y})) \sin \theta_{CS}(\mathbf{y}) - \cos \theta_{CS}(\mathbf{y}) + 1 \\ (V_{CS}(\mathbf{y}) - \theta_{CS}(\mathbf{y})) \cos \theta_{CS}(\mathbf{y}) + \sin \theta_{CS}(\mathbf{y}) \end{bmatrix}.$$

Модуль скорости движения машины Дубинса постоянен  $\|\dot{\mathbf{y}}(t)\| = 1$ . Таким образом, цель может быть перехвачена как минимум спустя  $(\|\mathbf{y} - \boldsymbol{\eta}\| - \ell)/(1 + v)$  единиц времени.  $\square$

Согласно лемме 1.6, последовательность  $\{t_n\}_{n=0}^\infty$ , где  $t_0 = 0$  и  $t_n = \tau(t_{n-1}, \mathbf{y}_T(t_{n-1}))$ , сходится к наименьшему времени перехвата  $T^*[\mathbf{y}_T]$  для любой траектории цели  $\mathbf{y}_T \in \text{Lip}_v(\mathbb{R}_0^+, \mathcal{Y})$ . Более того, длина шага  $t_n - t_{n-1}$  является наибольшей из гарантированных, если момент времени  $t = t_{n-1}$  и точка  $\mathbf{y} = \mathbf{y}_T(t_{n-1})$  удовлетворяют требованиям леммы 2.6.

Опишем ещё несколько численных методов вычисления наименьшего времени перехвата. Если дополнительно известно время  $T_0 \in \mathbb{R}^+$ , при котором точка  $\mathbf{y}_T(T_0)$  заведомо принадлежит плоскому множеству достижимости, причём первый раз попав внутрь плоского множества достижимости цель не покидала его до этого момента времени, то можно применить известные алгоритмы,

которые имеют как минимум первый порядок сходимости. Один из них — это алгоритм бисекции индикатора принадлежности к плоскому множеству достижимости. Индикатор принадлежности явно описывается с помощью (2.15) и принимает значение  $+1$ , если заданная точка принадлежит множеству достижимости и значение  $-1$  в иных случаях.

Группу других численных методов можно использовать, введя функцию псевдорасстояния до границы плоского множества достижимости. Псевдорасстоянием  $\rho_\psi(t, \mathbf{y})$  от точки  $\mathbf{y} \in \mathcal{Y}$  до границы плоского множества достижимости в момент времени  $t \in \mathbb{R}_0^+$  будем называть такое значение, что оно равно расстоянию до границы плоского множества достижимости, взятым со знаком плюс, если  $\mathbf{y}$  лежит вне плоского множества достижимости, и со знаком минус — если  $\mathbf{y}$  лежит внутри плоского множества достижимости. Для поиска нуля псевдорасстояния будем использовать общеизвестные алгоритмы поиска нуля непрерывной функции: алгоритм Брэнта-Дэккера, алгоритм Ridder, алгоритм TOMS748.

Другой алгоритм использует идею коррекции по статическому положению (алгоритм 2). Суть процедуры состоит в следующем. На каждой  $n$ -й итерации на входе у этого алгоритма есть нижняя и верхняя границы времени перехвата,  $T$  и  $\bar{T}$ , и где-то между этими границами находится оптимальное время перехвата. Рассмотрим две промежуточные величины  $T'$  и  $\bar{T}'$ , которые равны временам прибытия в положение цели в моменты  $T$  и  $\bar{T}$ , соответственно, т.е. они были бы оптимальными временами перехвата, если бы цель покоилась. Далее из этих двух моментов времени оставим только те, которые попадают внутрь интервала от  $T$  до  $\bar{T}$ . Затем для  $n + 1$  итерации передвинем границы так, чтобы момент переключения индикатора принадлежности плоскому множеству достижимости оставался внутри интервала от  $T$  до  $\bar{T}$ . Может так случиться, что оба штрихованных момента не попадают в интервал от  $T$  до  $\bar{T}$ . В этом случае будем сужать интервал как в алгоритме бисекции индикатора принадлежности. Название «коррекция по статическому положению» выбрано таким потому, что если цель покоится, то алгоритм сойдётся за одну итерацию к искомому результату.

Сравнивать описанные алгоритмы будем по количеству вызовов «основной» функции в зависимости от требуемой точности сближения на расстояние не большее чем  $\varepsilon$ . Радиус захвата будем полагать нулевым:  $\ell = 0$ . Для метода

---

**Алгоритм 2** Коррекция по статическому положению
 

---

**Require:**  $T_0 \in \mathbb{R}^+$ ,  $\ell \in \mathbb{R}^+$ ,  $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$ ,  $v \in \mathbb{R}_0^+$ ,  $\mathbf{y}_T \in \text{Lip}_v(\mathbb{R}, \mathcal{Y})$ 
 $T \leftarrow 0$ 
 $\bar{T} \leftarrow T_0$ 
 $t \leftarrow \frac{T+\bar{T}}{2}$ 
**while**  $\rho(t, \mathbf{y}_T(t)) > \varepsilon$  **do**

$$T' \leftarrow \begin{cases} V_{CS}(\mathbf{y}_T(T)), & \mathbf{y}_T(T) \in \mathcal{D}_{III}, V_{CS}(\mathbf{y}_T(T)) \geq T; \\ V_{CS}(\mathbf{y}_T(T)), & \mathbf{y}_T(T) \notin \mathcal{D}_{III} \cup \mathcal{D}_I; \\ V_{CC}^-(\mathbf{y}_T(T)), & \text{otherwise.} \end{cases}$$

$$\bar{T}' \leftarrow \begin{cases} V_{CS}(\mathbf{y}_T(\bar{T})), & \mathbf{y}_T(\bar{T}) \in \mathcal{D}_{III}, \bar{T} \leq \pi; \\ V_{CS}(\mathbf{y}_T(\bar{T})), & \mathbf{y}_T(\bar{T}) \notin \mathcal{D}_{III} \cup \mathcal{D}_I; \\ V_{CC}^-(\mathbf{y}_T(\bar{T})), & \text{otherwise.} \end{cases}$$
 $(T'', \bar{T}'') \leftarrow (\min(T', \bar{T}'), \max(T', \bar{T}'))$ 
**if**  $T < T''$  &  $\bar{T}'' < \bar{T}$  **then**
**if**  $\mathbf{y}_T(\bar{T}'') \in \mathcal{R}(\bar{T}'')$  **then**
 $T \leftarrow \bar{T}''$ 
**else**
**if**  $\mathbf{y}_T(T'') \in \mathcal{R}(T'')$  **then**
 $\bar{T} \leftarrow T''$ 
**else**
 $T \leftarrow T''$ 
 $\bar{T} \leftarrow \bar{T}''$ 
**end if**
**end if**
**else**
**if**  $\mathbf{y}_T(t) \in \mathcal{R}(t)$  **then**
 $\bar{T} \leftarrow t$ 
**else**
 $T \leftarrow t$ 
**end if**
**end if**
 $t \leftarrow \frac{T+\bar{T}}{2}$ 
**end while**


---



$\varepsilon$	$\tau$	бисекция	корр. ст.	brentQ	brentH	ridder	toms748
$10^{-1}$	4	5	7	8	8	12	10
$10^{-3}$	9	12	15	12	10	16	14
$10^{-6}$	16	22	26	14	14	20	14
$10^{-9}$	22	32	36	16	14	24	18
$10^{-12}$	29	42	46	16	16	28	22
$10^{-15}$	36	52	56	16	16	32	22

Таблица 1 — Количество вызовов «основной» функции у разных алгоритмов вычисления наименьшего времени перехвата для примера:  $x_E(t) = 3$ ,  $y_E(t) = 3 - 4t/(4 + \pi)$ ,  $T^*[\mathbf{y}_T] = 2 + \pi/2$ ,  $T_0 = 4$ ,  $v = 4/(4 + \pi)$

$\varepsilon$	$\tau$	бисекция	корр. ст.	brentQ	brentH	ridder	toms748
$10^{-1}$	9	7	2	10	10	16	10
$10^{-3}$	16	13	4	10	10	16	14
$10^{-6}$	28	23	6	12	12	20	14
$10^{-9}$	40	33	8	14	14	24	16
$10^{-12}$	52	43	10	14	14	24	16
$10^{-15}$	64	53	12	14	14	24	16

Таблица 2 — Количество вызовов «основной» функции у разных алгоритмов вычисления наименьшего времени перехвата для примера:  $x_E(t) = 0$ ,  $y_E(t) = 4 + 6t/(5 + 5t)$ ,  $T^*[\mathbf{y}_T] = 5$ ,  $T_0 = 6$ ,  $v = 6/5$

простых итераций на основе простой функции универсального оценивания снизу «основной» функцией является функция расстояния до плоского множества достижимости. Для группы методов, использующих псевдорасстояние — это сама функция псевдорасстояния. Для алгоритма бисекции и алгоритма коррекции по статическому положению — индикатор принадлежности множеству достижимости. В таблицах 1, 2, 3 приведены три примера движения цели:  $\tau$  — метод простых итераций на основе простой функции универсального оценивания снизу; корр. ст. — алгоритм коррекции по статическому положению; brentQ — метод Брэнта-Дэккера на основе обратной квадратичной интерполяции; brentH — метод Брэнта-Дэккера на основе гиперболической экстраполяции.

Анализ показывает, что метод простой итерации на основе простой функции универсального оценивания снизу производит вызов основной функции схожее с остальными методами количество раз, особенно при больших значениях  $\varepsilon$ . Напомним, что этот алгоритм является более универсальным, т. к. он не требует для своей работы знания времени  $T_0$ .

$\varepsilon$	$\tau$	бисекция	копп. ст.	brentQ	brentH	ridder	toms748
$10^{-1}$	8	6	2	12	12	16	10
$10^{-3}$	11	13	9	14	14	20	14
$10^{-6}$	15	22	19	16	16	28	18
$10^{-9}$	19	32	29	18	18	28	18
$10^{-12}$	23	42	39	18	18	32	18
$10^{-15}$	27	52	48	18	18	36	22

Таблица 3 — Количество вызовов «основной» функции у разных алгоритмов вычисления наименьшего времени перехвата для примера:

$$x_E(t) = -1 + 2t/T^*[\mathbf{y}_T], y_E(t) = 0, T^*[\mathbf{y}_T] = 2\pi - \arccos(1/4) + \arccos(7/8), \\ T_0 = 6, v = 2/T^*[\mathbf{y}_T]$$

Теперь перейдем к отдельным численным экспериментам, использующим метод простых итераций на основе простой функции универсального оценивания снизу. Зависимость количества итераций, которое должно быть сделано для получения заданной точности оценки наименьшего времени перехвата, представлена в таблице 4. Слева в таблице представлены результаты для модели простых движений, справа — для модели Дубинса. Строки этой таблицы содержат описание примеров траектории движения цели  $\mathbf{y}_T \in \text{Lip}_v(\mathbb{R}_0^+, \mathcal{Y})$ . Желаемая точность  $\delta \in \{10^{-3}, 10^{-6}, 10^{-9}\}$  размещена в колонках. Ячейки таблицы содержат количество итераций  $n \in \mathbb{N}$ , которое необходимо сделать для заданной траектории цели и заданного объекта управления, чтобы получить желаемую точность  $T^*[\mathbf{y}_T] - t_n < \delta$ . Итерации делаются методом простой итерации, основанным на функции универсального оценивания снизу, заданной определением 1.3. Согласно полученным результатам, в случае простых движений эта функция совпадает с функцией, заданной определением 1.2, как и в случае модели Дубинса для некоторого диапазона параметров (лемма 2.6). Не трудно увидеть, что чем лучше точность, тем больше итераций нужно сделать. Как правило, если цель движется в направлении плоского множества достижимости, то количество итераций меньше. С другой стороны, если цель движется в противоположную сторону от плоского множества достижимости, то требуемое количество итераций растёт тем сильнее, чем выше скорость цели.

		$\ell = \frac{1}{10}$	Простые движения Модель Дубинса					
			$v$	$10^{-3}$	$10^{-6}$	$10^{-9}$	$10^{-3}$	$10^{-6}$
$\begin{bmatrix} \xi + vt \cos \varphi \\ \eta + vt \sin \varphi \end{bmatrix}$	$\xi = 0$	1/4	5	10	15	5	10	15
	$\eta = 1$	1/2	10	19	29	11	23	34
	$\varphi = 0$	3/4	22	43	65	48	93	137
	$\xi = 1$	1/4	8	15	21	7	14	20
	$\eta = 1$	1/2	17	33	48	17	32	47
	$\varphi = \pi/2$	3/4	49	90	131	49	89	130
	$\xi = -1$	1/2	3	5	7	11	18	25
	$\eta = -2$	3/4	3	5	8	12	20	28
	$\varphi = \pi/4$	1	3	6	9	14	23	33
	$\xi = -2$	1/2	5	9	13	19	25	30
	$\eta = 0$	3/4	6	12	18	12	31	51
	$\varphi = \pi/4$	1	9	18	27	5	10	15
$\begin{bmatrix} \xi + v/\omega_x \sin \omega_x t \\ \eta + v/\omega_y \sin \omega_y t \end{bmatrix}$	$\xi = 1$	1/2	5	8	11	6	9	13
	$\eta = 1$	1	5	7	9	7	11	16
	$\omega_x = 1$	3/2	5	7	8	10	20	29
	$\omega_y = \sqrt{2}$	2	5	7	9	28	46	64
	$\xi = -1$	1/2	12	26	40	5	8	11
	$\eta = -2$	1	9	21	33	6	8	10
	$\omega_x = 1$	3/2	7	17	26	7	10	12
	$\omega_y = \sqrt{2}$	2	8	20	33	9	13	16
	$\xi = -1$	1/2	11	21	30	13	23	32
	$\eta = -2$	1	16	26	36	19	29	39
	$\omega_x = 1$	3/2	18	26	33	21	28	36
	$\omega_y = 2$	2	20	26	31	25	31	36
$\mathbf{y}_T(t)$	$\xi = 0$	1/2	3	6	9	9	14	18
	$\eta = -1$	1	6	12	19	12	17	22
	$\omega_x = 2$	3/2	17	37	57	17	22	27
	$\omega_y = 1$	2	21	36	51	9	16	23

Таблица 4 — Количество итераций необходимых для получения желаемой точности вычисления наименьшего времени перехвата, делаемых методом простой итерации на основе простой функции универсального оценивания снизу

## 2.6 Выводы по главе 2

В данной главе получены неявные аналитические выражения (2.11), (2.14), позволяющие определить наименьшее время перехвата. С помощью леммы 2.3 показано, что многозначное отображение, описывающее изменение границы плоского множества достижимости во времени, является непрерывным, кроме одного момента времени. Теоремы 2.1, 2.2 позволяют определить положение оптимальной точки перехвата и вид оптимального управления. Приведённые выражения позволяют решить задачу наискорейшего перехвата при произвольной, непрерывной и наперед заданной траектории движения цели. Выражения (2.11), (2.14) могут быть упрощены и оптимальное время перехвата может быть выражено явно, если класс траекторий цели уже класса непрерывных линий (например, точка, если цель покоится). Лемма 2.5 позволяет эффективно рассчитать функцию расстояния до плоского множества достижимости машины Дубинса, а лемма 2.6 показывает, когда метод простой итерации на основе функции из определения 1.3 имеет наибольший из гарантированно не пропускающих решение шаг. Также произведены вычислительные эксперименты с использованием разработанного комплекса программ с конкретными траекториями движения цели для модели простых движений и модели Дубинса (таблица 4).

### Глава 3. Наискорейший боковой перехват движущейся цели машиной Дубинса

В этой главе аналитически исследуется задача наискорейшего перехвата цели машиной Дубинса с фиксированным углом перехвата. Движение цели описывается с помощью двух скалярных функций изменения координат на плоскости и одной функции изменения угла. Каждая из функций предполагается известной заранее и непрерывной. Изложенный в первой главе аппарат решения задачи перехвата не может быть применён непосредственно к данной задаче, т. к. пространство «важных» при перехвате координат не является нормированным (и линейным). Однако, это пространство является метризуемым и это обстоятельство можно использовать для получения соответствующих аналитических результатов.

#### 3.1 Постановка задачи бокового перехвата непрерывно движущейся цели машиной Дубинса

Как и прежде будем полагать, что пространство состояний  $\mathcal{X} = \mathbb{R}^2 \times \mathbb{S}$ . Пространство значимых для перехвата координат совпадает с пространством состояний  $\mathcal{Y} = \mathcal{X}$ , но теперь оно не является нормированным, а представляет собой пространство с метрикой

$$d(\mathbf{y}, \boldsymbol{\eta}) = \sqrt{(x - \xi)^2 + (y - \eta)^2 + |\varphi - \chi|^2},$$

где

$$\mathbf{y} = \begin{bmatrix} x & y & \varphi \end{bmatrix}^\top \in \mathcal{Y}, \quad \boldsymbol{\eta} = \begin{bmatrix} \xi & \eta & \chi \end{bmatrix}^\top \in \mathcal{Y},$$

а абсолютное значение угла  $\varphi \in \mathbb{S}$  может быть посчитано<sup>1</sup> следующим образом:

$$|\varphi| = \min(\text{mod}(\varphi, 2\pi), 2\pi - \text{mod}(\varphi, 2\pi)).$$

---

<sup>1</sup>Функция  $\text{mod}$  вычисляется с помощью взятия остатка от деления:  $\text{mod}(a, b) = a - b[a/b]$ .

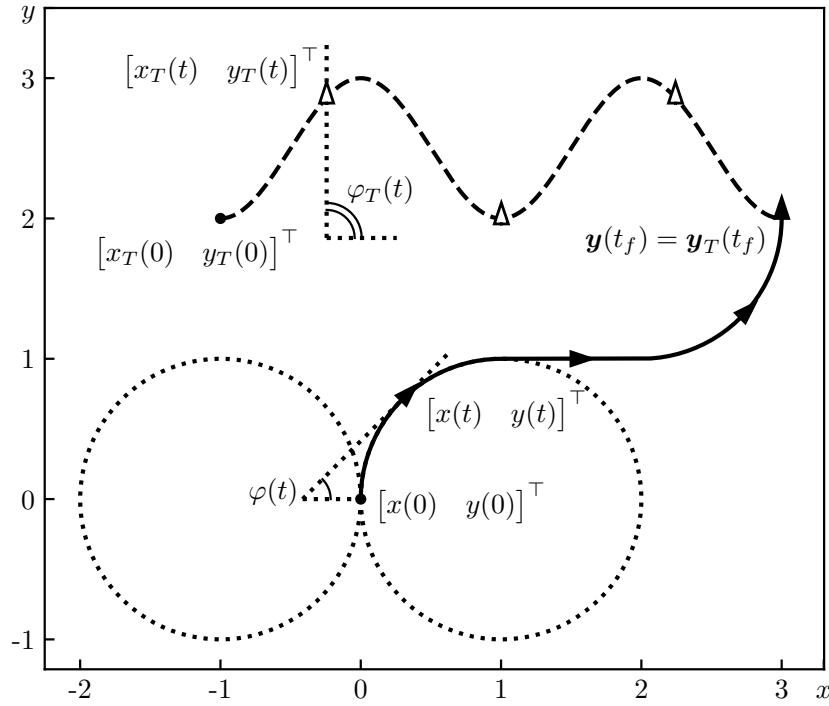


Рисунок 3.1 — Пути движения цели (пунктирная линия) и машины Дубинса (сплошная линия). Стрелки указывают направление скорости машины Дубинса (на пунктирной линии — желаемое направление скорости при перехвате). В финальный момент времени  $t_f = \pi + 1$  происходит боковой перехват.

Система координат (рис. 3.1), функция управления  $\mathbf{u} = u$  и уравнения состояния (2.1) остаются такими же как в предыдущей главе. Как и прежде, начальное состояние  $\mathbf{x}_0 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \pi/2 \end{bmatrix}^\top$ .

Траекторию цели будем описывать с помощью непрерывной функции  $\mathbf{y}_T = \begin{bmatrix} x_T & y_T & \varphi_T \end{bmatrix}^\top$ . Первые две координаты отвечают за положение цели на декартовой плоскости, а значение  $\varphi_T(t) \in \mathbb{S}$  определяет желаемое значение вектора скорости машины Дубинса при перехвате в момент  $t \in \mathbb{R}_0^+$ . Вообще говоря, величина  $\varphi_T(t) \in \mathbb{S}$  может быть не связана с направлением вектора скорости движения цели. Более того, понятие вектора скорости может быть некорректным, т. к. функции  $x_T, y_T$  могут быть не дифференцируемыми в точке  $t \in \mathbb{R}_0^+$ . Такое описание траектории цели позволяет учитывать достаточно специфические случаи, такие как случай неподвижной вращающейся точки  $\mathbf{y}_T(t) = \begin{bmatrix} x_0 & y_0 & \alpha t \end{bmatrix}^\top$ , где  $x_0, y_0, \alpha \in \mathbb{R}$ .

Задачу наискорейшего бокового перехвата движущейся цели машиной Дубинса будем рассматривать как задачу быстрогодействия с критерием

$$J[\mathbf{u}; \mathbf{y}_T] \stackrel{\text{def}}{=} \min \{t \in \mathbb{R}_0^+ : d(\mathbf{y}(t), \mathbf{y}_T(t)) = 0\} \rightarrow \inf_{\mathbf{u} \in \mathcal{A}}.$$

Как и в прошлой главе в этой задаче достаточно ограничиться классом кусочно-постоянных функций управления. Для определённости будем считать управления непрерывными справа функциями времени [16].

Через  $\mathcal{R}(t)$  будем обозначать множество достижимости машины Дубинса в момент времени  $t \in \mathbb{R}_0^+$ , а через  $\mathcal{B}(t)$  его границу. Согласно результатам, полученным в работе [16], траекторий типа *CSC* и *CCC* достаточно, чтобы попасть в любую точку множества  $\mathcal{B}(t)$  в момент времени  $t \in \mathbb{R}_0^+$ . Но не все траектории типа *CSC*, *CCC* ведут на границу множества достижимости. Некоторые из них ведут внутрь множества достижимости. Через  $\mathcal{E}(t)$  будем обозначать множество всех возможных окончаний траекторий типа *CSC* и *CCC* в момент времени  $t \in \mathbb{R}_0^+$ . Из сказанного выше следует, что

$$\mathcal{B}(t) \subset \mathcal{E}(t) \subset \mathcal{R}(t)$$

в каждый момент времени  $t \in \mathbb{R}_0^+$ . Далее мы будем использовать разбиение  $\mathcal{E}(t) = \mathcal{E}_{CSC}(t) \cup \mathcal{E}_{CCC}(t)$ , где множество  $\mathcal{E}_{CSC}(t)$  соответствует окончаниям траекторий типа *CSC*, а множество  $\mathcal{E}_{CCC}(t)$  состоит из окончаний *CCC*-траекторий.

### 3.2 Вычисление положения оптимальной точки перехвата и оптимального угла перехвата

Перейдем к изучению свойств отображений  $\mathcal{B}$ ,  $\mathcal{E}$ ,  $\mathcal{R}$  и получению аналитического описания отображения  $\mathcal{E}$ . В дальнейшем эти свойства будут использованы для определения положения оптимальной точки перехвата и сокращения количества подозрительных на оптимальность траекторий.

Прежде всего нужно компактно описать функции управления, которые позволяют достичь точки из множества  $\mathcal{E}(t)$  в момент времени  $t \in \mathbb{R}_0^+$ . Как

и раньше будем обозначать через  $\mathbb{B}$  множество, состоящее из двух элементов  $\{-1, +1\}$ .

**Лемма 3.1.** Пусть  $s, \sigma \in \mathbb{B}$ ,  $\tau_1 \in [0, 2\pi)$ ,  $\tau_2 \in [\tau_1, +\infty)$ . Тогда каждая точка из множества  $\mathcal{E}_{CSC}(t)$  может быть достигнута в момент времени  $t \in \mathbb{R}_0^+$  с помощью управления

$$u_{CSC}^{s,\sigma}(\theta; \tau_1, \tau_2) = \begin{cases} s, & \theta \in [0, \tau_1), \\ 0, & \theta \in [\tau_1, \tau_2), \\ \sigma, & \theta \in [\tau_2, +\infty), \end{cases} \quad (3.1)$$

а каждая точка из множества  $\mathcal{E}_{CCC}(t)$  — с помощью управления

$$u_{CCC}^s(\theta; \tau_1, \tau_2) = \begin{cases} s, & \theta \in [0, \tau_1), \\ -s, & \theta \in [\tau_1, \tau_2), \\ s, & \theta \in [\tau_2, +\infty), \end{cases} \quad (3.2)$$

где  $\tau_2 - \tau_1 \in [0, 2\pi)$  в случае движения по  $CCC$ -траектории.

Моменты времени  $\tau_1$  и  $\tau_2$  называются первым и вторым моментом переключения соответственно. Двоичные переменные  $s$ ,  $\sigma$  характеризуют направление поворота машины Дубинса. Например, величины  $s = +1$ ,  $\sigma = -1$  для управления (3.1) соответствуют траектории типа  $LSR$ , а  $s = -1$  для управления (3.2) отвечает траектории типа  $RLR$ . В связи с тем, что машина Дубинса движется со скоростью по модулю равной единице, величины  $\tau_1$ ,  $\tau_2 - \tau_1$  равны длинам первой и второй частей соответствующих путей.

*Доказательство.* Сначала предположим, что  $CSC$ -траектория, оканчивающаяся в некоторой точке  $\mathbf{y} \in \mathcal{E}_{CSC}(t)$ , имеет циклы<sup>2</sup> на первой арке. Рассмотрим новую траекторию, полученную из старой сдвигом этих циклов на последнюю арку. Управление вида (3.1) соответствует новой траектории, причём окончание этой траектории также лежит в точке  $\mathbf{y}$ . Аналогичные рассуждения можно провести и для траекторий типа  $CCC$ . Возможные циклы нужно сдвинуть с первой и второй арок на третью. Получившаяся траектория соответствует

---

<sup>2</sup>Циклом называется круговой участок траектории, в начале и конце которого машина Дубинса имеет одинаковое состояние.



управлению (3.2) и оканчивается в той же точке, где и изначальная траектория.  $\square$

Лемма 3.1 позволяет получить явное параметрическое описание множества  $\mathcal{E}(t)$ . Так, для любой точки  $\mathbf{y}_{CSC}^{s;\sigma}(t; \tau_1, \tau_2) \in \mathcal{E}_{CSC}(t)$ , существует такое управление (3.1), что соответствующая траектория оканчивается именно в этой точке. Проинтегрируем систему (2.1), используя начальные условия и функцию управления (3.1). Это даст нам

$$\mathbf{y}_{CSC}^{s;\sigma}(t; \tau_1, \tau_2) = \begin{bmatrix} s(\cos \tau_1 - 1 - (\tau_2 - \tau_1) \sin \tau_1) \\ \sin \tau_1 + (\tau_2 - \tau_1) \cos \tau_1 \\ \pi/2 + s\tau_1 + \sigma(t - \tau_2) \end{bmatrix}. \quad (3.3)$$

Таким образом, используя области изменения параметров  $s, \sigma, \tau_1, \tau_2$ , получаем

$$\mathcal{E}_{CSC}(t) = \{\mathbf{y}_{CSC}^{s;\sigma}(t; \tau_1, \tau_2) : \tau_1 \in [0, 2\pi), \tau_2 \in [\tau_1, t], s \in \mathbb{B}, \sigma \in \mathbb{B}\}.$$

Такие же рассуждения справедливы и для получения явного параметрического описания множества  $\mathcal{E}_{CCC}(t)$ . Пусть точка  $\mathbf{y}_{CCC}^s(t; \tau_1, \tau_2) \in \mathcal{E}_{CCC}(t)$ . Тогда интегрирование системы (2.1) с управлением (3.2) приводит к

$$\mathbf{y}_{CCC}^s(t; \tau_1, \tau_2) = \begin{bmatrix} s(2 \cos \tau_1 - 1 - 2 \cos(2\tau_1 - \tau_2) + \cos(2\tau_1 - 2\tau_2 + t)) \\ 2 \sin \tau_1 - 2 \sin(2\tau_1 - \tau_2) + \sin(2\tau_1 - 2\tau_2 + t) \\ \pi/2 + s(2\tau_1 - 2\tau_2 + t) \end{bmatrix}. \quad (3.4)$$

Используя области изменения параметров  $s, \tau_1, \tau_2$ , получаем

$$\mathcal{E}_{CCC}(t) = \{\mathbf{y}_{CCC}^s(t; \tau_1, \tau_2) : \tau_1 \in [0, 2\pi), \tau_2 \in [\tau_1, t], \tau_2 - \tau_1 \in [0, 2\pi), s \in \mathbb{B}\}.$$

**Лемма 3.2.** *множество  $\mathcal{E}(t)$  является замкнутым множеством в каждый момент времени  $t \in \mathbb{R}_0^+$ .*

*Доказательство.* В связи с тем, что величины  $\mathbf{y}_{CSC}^{s;\sigma}(t; \tau_1, \tau_2), \mathbf{y}_{CCC}^s(t; \tau_1, \tau_2)$  зависят непрерывно от параметров  $\tau_1, \tau_2$ , только строгие неравенства в описаниях множеств  $\mathcal{E}_{CSC}(t), \mathcal{E}_{CCC}(t)$  могут нарушать замкнутость множества  $\mathcal{E}(t)$ . Дока-

жем, что множество  $\mathcal{E}_{CSC}(t)$  является замкнутым. Строгое неравенство используется только для параметра  $\tau_1 \in [0, 2\pi)$  в явном выражении для множества  $\mathcal{E}_{CSC}(t)$ . Пусть  $\tau_1 = 2\pi$ ,  $\tau_2 \in [\tau_1, t]$ ,  $t \geq 2\pi$ . Тогда непосредственная проверка даёт

$$\mathbf{y}_{CSC}^{s,\sigma}(t; 2\pi, \tau_2) = \mathbf{y}_{CSC}^{s,\sigma}(t; 0, \tau_2 - 2\pi) \in \mathcal{E}_{CSC}(t).$$

Теперь покажем, что множество  $\mathcal{E}_{CCC}(t)$  является замкнутым. Строгие неравенства используются только для параметра  $\tau_1 \in [0, 2\pi)$  и  $\tau_2 - \tau_1 \in [0, 2\pi)$  в явном описании множества  $\mathcal{E}_{CCC}(t)$ . Если  $\tau_1 = 2\pi$ ,  $\tau_2 \in [\tau_1, t]$ ,  $\tau_2 - \tau_1 \in [0, 2\pi)$ ,  $t \geq 2\pi$ , то

$$\mathbf{y}_{CCC}^s(t; 2\pi, \tau_2) = \mathbf{y}_{CCC}^s(t; 0, \tau_2 - 2\pi) \in \mathcal{E}_{CCC}(t).$$

Если  $\tau_1 = 2\pi$ ,  $\tau_2 \in [\tau_1, t]$ ,  $\tau_2 - \tau_1 = 2\pi$ ,  $t \geq 4\pi$ , то

$$\mathbf{y}_{CCC}^s(t; 2\pi, 4\pi) = \mathbf{y}_{CCC}^s(t; 0, 0) \in \mathcal{E}_{CCC}(t).$$

Если  $\tau_1 \in [0, 2\pi)$ ,  $\tau_2 \in [\tau_1, t]$ ,  $\tau_2 - \tau_1 = 2\pi$ ,  $t \geq \tau_1 + 2\pi$ , то

$$\mathbf{y}_{CCC}^s(t; \tau_1, \tau_1 + 2\pi) = \mathbf{y}_{CCC}^s(t; \tau_1, \tau_1) \in \mathcal{E}_{CCC}(t).$$

□

Далее нам понадобятся общеизвестные определения, касающиеся замкнутых многозначных отображений.

**Определение 3.1.** *Замкнутое многозначное отображение  $\mathcal{M} : \mathbb{R}_0^+ \rightarrow 2^{\mathcal{Y}}$  называется полунепрерывным снизу в момент времени  $t_0 \in \mathbb{R}_0^+$ , когда для любого достаточно малого числа  $\varepsilon > 0$  и любой точки  $\mathbf{y}_0 \in \mathcal{M}(t_0)$  существует такое число  $\delta > 0$ , что для всякого момента времени  $t : |t - t_0| < \delta$  существует такая точка  $\mathbf{y} \in \mathcal{M}(t)$ , что  $d(\mathbf{y}, \mathbf{y}_0) < \varepsilon$ .*

**Определение 3.2.** *Замкнутое многозначное отображение  $\mathcal{M} : \mathbb{R}_0^+ \rightarrow 2^{\mathcal{Y}}$  называется полунепрерывным сверху в момент времени  $t_0 \in \mathbb{R}_0^+$ , когда для любого достаточно малого числа  $\varepsilon > 0$  существует такое число  $\delta > 0$ , что для любого момента времени  $t : |t - t_0| < \delta$  и любой точки  $\mathbf{y} \in \mathcal{M}(t)$  существует такая точка  $\mathbf{y}_0 \in \mathcal{M}(t_0)$ , что  $d(\mathbf{y}, \mathbf{y}_0) < \varepsilon$ .*

**Определение 3.3.** Если замкнутое многозначное отображение  $\mathcal{M} : \mathbb{R}_0^+ \rightarrow 2^{\mathcal{Y}}$  является полунепрерывным снизу и сверху в момент времени  $t_0 \in \mathbb{R}_0^+$ , то его называют непрерывным в этот момент времени.

Непрерывность многозначного отображения  $\mathcal{R}$  доказана в книге [130]. Отметим, что некоторое многозначное отображение  $\mathcal{M} : \mathbb{R}_0^+ \rightarrow 2^{\mathcal{Y}}$  может не быть непрерывным, даже если в каждый момент времени  $t \in \mathbb{R}_0^+$  выполняется  $\mathcal{M}(t) \subset \mathcal{R}(t)$ . Например, многозначное отображение, отвечающее за изменение границы плоского множества достижимости машины Дубинса, теряет свою непрерывность в один из моментов времени (утверждение 2.1).

**Лемма 3.3.** Многозначное отображение  $\mathcal{E} : \mathbb{R}_0^+ \rightarrow 2^{\mathcal{Y}}$  является непрерывным в любой момент времени  $t_0 \in \mathbb{R}_0^+$ .

*Доказательство.* Сначала докажем, что это отображение является полунепрерывным снизу. Для всякой точки  $\mathbf{y}_0 = \mathbf{y}_{CSC}^{s,\sigma}(t_0; \tau_1, \tau_2) \in \mathcal{E}_{CSC}(t_0)$  предположим, что если  $\tau_2 < t_0$ , то  $\mathbf{y} = \mathbf{y}_{CSC}^{s,\sigma}(t; \tau_1, \tau_2)$ ; если  $\tau_2 = t_0$  и  $\tau_1 < \tau_2$ , то точка  $\mathbf{y} = \mathbf{y}_{CSC}^{s,\sigma}(t; \tau_1, t)$ ; если  $\tau_2 = \tau_1 = t_0$ , то  $\mathbf{y} = \mathbf{y}_{CSC}^{s,\sigma}(t; t, t)$ . Теперь положим  $\delta = \varepsilon/\sqrt{2}$ , где  $\varepsilon > 0$  — произвольное число. Таким образом, если  $\tau_2 < t_0$  или  $\tau_2 = \tau_1 = t_0$ , то

$$d(\mathbf{y}, \mathbf{y}_0) \leq \sqrt{2 - 2 \cos(t - t_0) + (t - t_0)^2} \leq \sqrt{2}|t - t_0| < \delta\sqrt{2} = \varepsilon,$$

а если  $\tau_2 = t_0$  и  $\tau_1 < \tau_2$ , то

$$d(\mathbf{y}, \mathbf{y}_0) \leq |t - t_0| < \delta < \varepsilon.$$

Для всех точек  $\mathbf{y}_0 = \mathbf{y}_{CCC}^s(t_0; \tau_1, \tau_2) \in \mathcal{E}_{CCC}(t_0)$  предположим, что если  $\tau_2 < t_0$ , то  $\mathbf{y} = \mathbf{y}_{CCC}^s(t; \tau_1, \tau_2)$ ; если  $\tau_2 = t_0$  и  $\tau_1 < \tau_2$ , то  $\mathbf{y} = \mathbf{y}_{CCC}^s(t; \tau_1, t)$ ; если  $\tau_2 = \tau_1 = t_0$ , то  $\mathbf{y} = \mathbf{y}_{CCC}^s(t; t, t)$ . Таким образом, получим

$$d(\mathbf{y}, \mathbf{y}_0) \leq \sqrt{2 - 2 \cos(t - t_0) + (t - t_0)^2} \leq \sqrt{2}|t - t_0| < \delta\sqrt{2} = \varepsilon.$$

Теперь покажем, что рассматриваемое отображение является полунепрерывным сверху многозначным отображением. Выберем  $\delta = \varepsilon/\sqrt{2}$ . Для каждого момента времени  $t : |t - t_0| < \delta$  и каждой точки  $\mathbf{y} = \mathbf{y}_{CSC}^{s,\sigma}(t; \tau_1, \tau_2) \in \mathcal{E}_{CSC}(t)$  будем предполагать, что если  $\tau_2 < t$ , то  $\mathbf{y}_0 = \mathbf{y}_{CSC}^{s,\sigma}(t_0; \tau_1, \tau_2)$ ; если  $\tau_2 = t$  и

$\tau_1 < \tau_2$ , то  $\mathbf{y}_0 = \mathbf{y}_{CSC}^{s,\sigma}(t_0; \tau_1, t_0)$ ; если  $\tau_2 = \tau_1 = t$ , то  $\mathbf{y}_0 = \mathbf{y}_{CSC}^{s,\sigma}(t_0; t_0, t_0)$ . Для всякой точки  $\mathbf{y} = \mathbf{y}_{CCC}^s(t; \tau_1, \tau_2) \in \mathcal{E}_{CCC}(t)$  будем полагать, что если  $\tau_2 < t$ , то  $\mathbf{y}_0 = \mathbf{y}_{CCC}^s(t_0; \tau_1, \tau_2)$ ; если  $\tau_2 = t$  и  $\tau_1 < \tau_2$ , то  $\mathbf{y}_0 = \mathbf{y}_{CCC}^s(t_0; \tau_1, t_0)$ ; если  $\tau_2 = \tau_1 = t$ , то  $\mathbf{y}_0 = \mathbf{y}_{CCC}^s(t_0; t_0, t_0)$ . Аналогичным образом можно заключить, что  $d(\mathbf{y}, \mathbf{y}_0) < \varepsilon$ .  $\square$

Полученные выше свойства отображения  $\mathcal{E} : \mathbb{R}_0^+ \rightarrow 2^{\mathcal{Y}}$  позволяют сформулировать и доказать утверждение о положении оптимальной точки перехвата.

**Утверждение 3.1.** *Если наискорейший боковой перехват движущейся цели машиной Дубинса возможен, т. е.  $T^*[\mathbf{y}_T] < +\infty$ , то оптимальная точка перехвата  $\mathbf{y}_T(T^*[\mathbf{y}_T])$  принадлежит множеству*

$$\tilde{\mathcal{B}}(T^*[\mathbf{y}_T]) \stackrel{\text{def}}{=} \{\boldsymbol{\eta} \in \mathcal{E}(T^*[\mathbf{y}_T]) : \lim_{\theta \rightarrow T^*[\mathbf{y}_T]-0} \min_{\mathbf{y} \in \mathcal{B}(\theta)} d(\mathbf{y}, \boldsymbol{\eta}) = 0\}.$$

*Доказательство.* Для произвольного многозначного отображения  $\mathcal{M} : \mathbb{R}_0^+ \rightarrow 2^{\mathcal{Y}}$  такого, что  $\mathcal{M}(t)$  является замкнутым множеством в любой момент времени  $t \in \mathbb{R}_0^+$ , определим функцию

$$\rho_{\mathcal{M}}(t) \stackrel{\text{def}}{=} \min_{\mathbf{y} \in \mathcal{M}(t)} d(\mathbf{y}, \mathbf{y}_T(t)).$$

Если замкнутое отображение  $\mathcal{M} : \mathbb{R}_0^+ \rightarrow 2^{\mathcal{Y}}$  является непрерывным многозначным отображением, то из непрерывности траектории цели  $\mathbf{y}_T$  следует непрерывность функции  $\rho_{\mathcal{M}} : \mathbb{R}_0^+ \rightarrow \mathbb{R}_0^+$ . Таким образом,  $\rho_{\mathcal{R}}$ ,  $\rho_{\mathcal{E}}$  являются непрерывными функциями, но функция  $\rho_{\mathcal{B}}$  не обязательно непрерывна. Из  $\mathcal{B}(t) \subset \mathcal{E}(t) \subset \mathcal{R}(t)$  следует, что

$$\rho_{\mathcal{R}}(t) \leq \rho_{\mathcal{E}}(t) \leq \rho_{\mathcal{B}}(t).$$

Согласно определению наискорейшего времени перехвата  $T^*[\mathbf{y}_T]$ , для любого момента времени  $t \in [0, T^*[\mathbf{y}_T])$ ,  $\mathbf{y}_T(t) \notin \mathcal{R}(t)$  и  $\mathbf{y}_T(T^*[\mathbf{y}_T]) \in \mathcal{R}(T^*[\mathbf{y}_T])$ . Отсюда следует, что  $\rho_{\mathcal{R}}(t) > 0$  для любого момента времени  $t \in [0, T^*[\mathbf{y}_T])$ , а  $\rho_{\mathcal{R}}(T^*[\mathbf{y}_T]) = 0$ . Из того, что множество  $\mathcal{R}(t)$  является замкнутым множеством, точка  $\mathbf{y}_T(t) \notin \mathcal{R}(t)$ , а множество  $\mathcal{B}(t)$  является границей множества  $\mathcal{R}(t)$ , следует, что значение  $\rho_{\mathcal{R}}(t) = \rho_{\mathcal{B}}(t)$  в любой момент времени  $t \in [0, T^*[\mathbf{y}_T])$ . Поэтому

$$\lim_{t \rightarrow T^*[\mathbf{y}_T]-0} \rho_{\mathcal{E}}(t) \leq \lim_{t \rightarrow T^*[\mathbf{y}_T]-0} \rho_{\mathcal{B}}(t) = \lim_{t \rightarrow T^*[\mathbf{y}_T]-0} \rho_{\mathcal{R}}(t) = 0.$$

Из непрерывности функции  $\rho_{\mathcal{E}}$  следует, что значение  $\rho_{\mathcal{E}}(T^*[\mathbf{y}_T]) = 0$ , т. е.  $\mathbf{y}_T(T^*[\mathbf{y}_T]) \in \mathcal{E}(T^*[\mathbf{y}_T])$ . Согласно определению множества  $\tilde{\mathcal{B}}(T^*[\mathbf{y}_T])$  получаем, что оптимальная точка перехвата  $\mathbf{y}_T(T^*[\mathbf{y}_T]) \in \tilde{\mathcal{B}}(T^*[\mathbf{y}_T])$ , т. к. предельное значение  $\rho_{\mathcal{B}}(T^*[\mathbf{y}_T] - 0) = 0$ .  $\square$

Таким образом, явное аналитическое описание  $\mathcal{E}(T^*[\mathbf{y}_T]) \supset \tilde{\mathcal{B}}(T^*[\mathbf{y}_T])$  предоставляет желаемые уравнения, решение которых определяют параметры оптимального управления. Однако всё ещё возможно сузить классы подозрительных на оптимальность управлений. Для этого нам понадобится следующее отображение:

$$S_{\tau}(\mathbf{y}) = \mathbf{y} + \begin{bmatrix} \tau \cos \varphi & \tau \sin \varphi & 0 \end{bmatrix}^{\top}.$$

Отметим, что если машина Дубинса расположена в точке  $\mathbf{y}_0 \in \mathcal{R}(t_0)$  в момент времени  $t_0 \in \mathbb{R}_0^+$ , а значение функции управления  $u(t) = 0$  для всех последующих моментов времени  $t \geq t_0$ , то машина Дубинса будет расположена в точке  $S_{t-t_0}(\mathbf{y}_0) \in \mathcal{R}(t)$  в момент времени  $t$ .

**Лемма 3.4.** *Если точка  $\mathbf{y}_0 \in \mathcal{Y}$  является внутренней точкой множества достижимости  $\mathcal{R}(t_0)$  в момент времени  $t_0 \in \mathbb{R}_0^+$ , то для любого момента времени  $t > t_0$  существует такое число  $\delta_0 > 0$ , что для любого числа  $\delta \in [0, \delta_0)$  точка  $S_{t-t_0}(\mathbf{y}_0)$  является внутренней точкой множества  $\mathcal{R}(t - \delta)$ .*

*Доказательство.* В связи с тем, что точка  $\mathbf{y}_0$  является внутренней для множества  $\mathcal{R}(t_0)$ , существует шар  $B_{\delta_0}(\mathbf{y}_0) = \{\mathbf{y} \in \mathcal{Y} : d(\mathbf{y}, \mathbf{y}_0) < \delta_0\}$ , который лежит целиком внутри  $\mathcal{R}(t_0)$ . Потребуем, чтобы  $\delta_0 < t - t_0$  и зафиксируем произвольное значение  $\delta \in [0, \delta_0)$ . Согласно свойствам отображения  $S_{t-t_0-\delta}$ :

$$S_{t-t_0-\delta}(B_{\delta_0}(\mathbf{y}_0)) \subset \mathcal{R}(t - \delta).$$

Очевидно, что  $S_{\delta}(\mathbf{y}_0) \in B_{\delta_0}(\mathbf{y}_0)$ , т. к.

$$d(S_{\delta}(\mathbf{y}_0), \mathbf{y}_0) = \delta < \delta_0.$$

Более того, точка  $S_{\delta}(\mathbf{y}_0)$  является внутренней точкой шара  $B_{\delta_0}(\mathbf{y}_0)$ . Отображение  $S_{t-t_0-\delta}$  является открытым. Таким образом, множество  $S_{t-t_0-\delta}(B_{\delta_0}(\mathbf{y}_0)) \subset \mathcal{R}(t - \delta)$  является открытым и точка  $S_{t-t_0-\delta}(S_{\delta}(\mathbf{y}_0)) = S_{t-t_0}(\mathbf{y}_0)$  является внутренней точкой соответствующего образа.  $\square$

**Лемма 3.5.** Пусть  $t - \tau_2 \geq 2\pi$  и  $\tau_2 - \tau_1 > 0$ . Если выполнено  $\tau_1 > 0$  или  $t - \tau_2 > 2\pi$ , то  $\mathbf{y}_{CSC}^{s,\sigma}(t; \tau_1, \tau_2) \notin \tilde{\mathcal{B}}(t)$ .

*Доказательство.* Согласно определению множества  $\tilde{\mathcal{B}}(t)$  достаточно доказать, что существует такое число  $\delta_0 \in \mathbb{R}_0^+$ , что для любого числа  $\delta \in [0, \delta_0)$ , точка  $\mathbf{y}_{CSC}^{s,\sigma}(t; \tau_1, \tau_2)$  сохраняется внутренней точкой множества  $\mathcal{R}(t - \delta)$ . Положим  $\tau = (\tau_2 - \tau_1)/2$  и рассмотрим точку

$$\mathbf{y}_{CSC}^{s,\sigma}(t - \tau; \tau_1, \tau_2 - \tau) \in \mathcal{R}(t - \tau).$$

Эта точка может быть достигнута по траектории, которая содержит цикл. Этот цикл может быть сдвинут на любую часть траектории и, согласно лемме 4 из работы [16], точка  $\mathbf{y}_{CSC}^{s,\sigma}(t - \tau; \tau_1, \tau_2 - \tau)$  является внутренней точкой множества  $\mathcal{R}(t - \tau)$ . Таким образом, согласно лемме 3.4 мы можем заключить, что точка  $\mathbf{y}_{CSC}^{s,\sigma}(t; \tau_1, \tau_2)$  сохраняется внутренней точкой для множества  $\mathcal{R}(t - \delta)$ , т. к.

$$S_\tau(\mathbf{y}_{CSC}^{s,\sigma}(t - \tau; \tau_1, \tau_2 - \tau)) = \mathbf{y}_{CSC}^{s,\sigma}(t; \tau_1, \tau_2).$$

□

Следующая лемма позволяет не рассматривать любые случаи траекторий, содержащих два и более цикла, при рассмотрении задачи наискорейшего бокового перехвата.

**Лемма 3.6.**  $\mathbf{x}_0 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \pi/2 \end{bmatrix}^\top \notin \tilde{\mathcal{B}}(4\pi)$ .

*Доказательство.* Согласно определению множества  $\tilde{\mathcal{B}}(4\pi)$ , достаточно доказать, что существует такое число  $\delta_0 \in \mathbb{R}_0^+$ , что для любого числа  $\delta \in [0, \delta_0)$  начальное состояние  $\mathbf{x}_0$  является внутренней точкой множества  $\mathcal{R}(4\pi - \delta)$ . Рассмотрим управление, заданное с помощью следующего выражения:

$$u(t) = \begin{cases} 0, & t \in [0, \pi/2 + \chi), \\ 2/3 + \xi, & t \in [\pi/2 + \chi, 2\pi + \chi), \\ 0, & t \in [2\pi + \chi, 5\pi/2 + \chi), \\ 2/3 + \eta, & t \in [5\pi/2 + \chi, +\infty). \end{cases}$$

Здесь  $\xi, \eta, \chi \in \mathbb{R}$ . Интегрирование системы (2.1) с такой функцией управления и начальным состоянием  $\mathbf{x}_0$  приводит к решению:

$$x(t) = \frac{(\eta - \xi) \cos(\pi(1 + \frac{3\xi}{2}))}{(\frac{2}{3} + \xi)(\frac{2}{3} + \eta)} - \frac{\pi}{2} \sin\left(\pi\left(1 + \frac{3\xi}{2}\right)\right) + \frac{\cos(\pi(1 + \frac{3\xi}{2}) + (\frac{2}{3} + \eta)(t - \frac{5\pi}{2} - \chi))}{\frac{2}{3} + \eta} - \frac{1}{\frac{2}{3} + \xi},$$

$$y(t) = \frac{(\eta - \xi) \sin(\pi(1 + \frac{3\xi}{2}))}{(\frac{2}{3} + \xi)(\frac{2}{3} + \eta)} + \frac{\pi}{2} \cos\left(\pi\left(1 + \frac{3\xi}{2}\right)\right) + \frac{\sin(\pi(1 + \frac{3\xi}{2}) + (\frac{2}{3} + \eta)(t - \frac{5\pi}{2} - \chi))}{\frac{2}{3} + \eta} + \frac{\pi}{2} + \chi,$$

$$\varphi(t) = \frac{3\pi}{2}(1 + \xi) + \left(\frac{2}{3} + \eta\right)\left(t - \frac{5\pi}{2} - \chi\right),$$

$$\mathbf{y}(t) = \begin{bmatrix} x(t) & y(t) & \varphi(t) \end{bmatrix}^\top,$$

для моментов времени  $t \geq 5\pi/2 + \chi$ . Если  $t = 4\pi$ ,  $\xi = 0$ ,  $\eta = 0$ ,  $\chi = 0$ , то

$$\mathbf{y}(4\pi) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 5\pi/2 \end{bmatrix}^\top = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \pi/2 \end{bmatrix}^\top \in \mathcal{R}(4\pi).$$

Обозначим  $\boldsymbol{\eta} = \begin{bmatrix} \xi & \eta & \chi \end{bmatrix}^\top \in \mathcal{Y}$ . Вычисление определителя матрицы Якоби приводит к следующему значению:

$$\left| \frac{\partial \mathbf{y}(t)}{\partial \boldsymbol{\eta}} \right|_{\substack{\xi=0 \\ \eta=0 \\ \chi=0 \\ t=4\pi}} = \begin{vmatrix} \frac{18+3\pi^2}{4} & -\frac{9}{2} & 0 \\ \frac{9\pi}{2} & \frac{9\pi}{2} & 0 \\ \frac{3\pi}{2} & \frac{3\pi}{2} & -\frac{2}{3} \end{vmatrix} = -\frac{27\pi}{2} - \frac{9\pi^3}{8} \neq 0.$$

В связи с тем, что данная величина не равна нулю и соответствующее отображение  $\boldsymbol{\eta} \mapsto \mathbf{y}(t)$  является непрерывным, для достаточно малых  $\delta_0 \in \mathbb{R}_0^+$  в любой момент времени  $t \in (4\pi - \delta_0, 4\pi + \delta_0)$  это отображение преобразует любую достаточно малую окрестность точки  $\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}^\top$  в окрестность точки  $\mathbf{x}_0$ . Приведённое управление является допустимым и полностью определяется заданием  $\boldsymbol{\eta}$ . Из этого следует, что полученная окрестность точки  $\mathbf{x}_0$  является подмножеством множества  $\mathcal{R}(t)$  в любой момент времени  $t \in (4\pi - \delta_0, 4\pi + \delta_0)$ .

Таким образом, точка  $\mathbf{x}_0$  является внутренней точкой множества  $\mathcal{R}(4\pi - \delta)$  для любого числа  $\delta \in [0, \delta_0)$ .  $\square$

Полученные результаты позволяют сформулировать и доказать обобщение леммы 2 из работы [54]. Согласно лемме 3.6 и утверждению 3.1, начальное состояние  $\mathbf{x}_0 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \pi/2 \end{bmatrix}^\top$  ни при какой траектории цели не является оптимальной точкой перехвата в момент  $t = 4\pi$ . Более того, лемма 3.5 исключает некоторый класс траекторий с циклами. Это обстоятельство будет использовано в следующем утверждении, уменьшающей количество кандидатов в оптимальные управления.

**Утверждение 3.2.** *Для достижения точки  $\mathbf{y}_0 \in \tilde{\mathcal{B}}(t_0)$  в момент времени  $t_0 \in \mathbb{R}_0^+$  достаточно использовать управления вида (3.1) и (3.2) с  $t_0 - \tau_2 \in [0, 2\pi)$  или управления вида (3.1) и (3.2) с  $\tau_1 = 0, t_0 - \tau_2 = 2\pi$ .*

*Доказательство.* Предположим, что управления вида (3.1) и (3.2) с  $t_0 - \tau_2 \geq 4\pi$  ведут в точку  $\mathbf{y}_0 \in \tilde{\mathcal{B}}(t_0)$ . Согласно принципу Беллмана, эти управления остаются оптимальными от момента времени  $t_0 - 4\pi$  до момента  $t_0$ . Решение новой задачи наискорейшего перехвата, начинающейся с момента времени  $t_0 - 4\pi$ , приводит к противоречию с содержанием леммы 3.6 и утверждения 3.1, т. к. оптимальная точка перехвата новой задачи находится в точке  $\mathbf{x}_0$  в момент времени  $t = 4\pi$ . Таким образом, управления вида (3.1) и (3.2) с  $t_0 - \tau_2 \geq 4\pi$  являются избыточными.

Теперь предположим, что управление вида (3.1) с  $t_0 - \tau_2 \geq 2\pi$  приводит в точку  $\mathbf{y}_0 = \mathbf{y}_{CSC}^{s,\sigma}(t_0; \tau_1, \tau_2) \in \tilde{\mathcal{B}}(t_0)$ . Сейчас мы не будем рассматривать случай  $\tau_2 - \tau_1 = 0$ , т. к. он будет отнесён к  $CSC$ -траекториям далее. Если выполнены условия леммы 3.5, то  $\mathbf{y}_0 \notin \tilde{\mathcal{B}}(t_0)$ , а иначе  $\tau_1 = 0$  и  $t_0 - \tau_2 = 2\pi$ .

Теперь предположим, что управление вида (3.2) с  $t_0 - \tau_2 \geq 2\pi$  приводит в точку  $\mathbf{y}_0 = \mathbf{y}_{CCC}^s(t_0; \tau_1, \tau_2) \in \tilde{\mathcal{B}}(t_0)$ . Рассмотрим случай  $\tau_1 > 0$ . Согласно лемме 2 из работы [16], если

$$\tau_1 + (t_0 - \tau_2) > \tau_2 - \tau_1,$$

то точка  $\mathbf{y}_0$  является внутренней точкой множества  $\mathcal{R}(t_0)$ . Используя эту лемму для конечной точки в момент  $t \in (t_0 - \tau_1/2, t_0]$ , получим, что конечная точка остаётся внутренней и для множества  $\mathcal{R}(t)$ , т. к.

$$\tau_1 + t - \tau_2 > \tau_1 + t_0 - \frac{\tau_1}{2} - \tau_2 = \frac{\tau_1}{2} + t_0 - \tau_2 > 2\pi > \tau_2 - \tau_1.$$



Таким образом,  $\mathbf{y}_0 \notin \tilde{\mathcal{B}}(t_0)$ . Теперь предположим, что  $\tau_1 = 0$  и  $\tau_2 - \tau_1 > 0$ . Рассмотрим новое управление  $u_{CSC}^{-s}(\cdot; \tau'_1, \tau'_2)$  с  $\tau'_1 = \tau_2$ ,  $\tau'_2 - \tau'_1 = t_0 - \tau_2 - 2\pi$ , ведущее в ту же самую точку  $\mathbf{y}_0$ . Для произвольных моментов времени  $t \in (t_0 - \tau'_1/2, t_0]$  соответствующая конечная точка также остаётся внутренней для  $\mathcal{R}(t)$ , т. к.

$$\tau'_1 + t - \tau'_2 > \frac{\tau'_1}{2} + t_0 - \tau'_2 = \frac{\tau'_1}{2} + 2\pi > 2\pi > \tau'_2 - \tau'_1.$$

Если  $\tau_1 = 0$  и  $\tau_2 - \tau_1 = 0$ , то управление  $u_{CSC}^{-s}(\cdot; \tau'_1, \tau'_2)$  с  $\tau'_1 = 0$ ,  $t_0 - \tau'_2 = 2\pi$  приводит в точку  $\mathbf{y}_0$ .  $\square$

### 3.3 Вычисление параметров оптимального управления в задаче бокового перехвата

Теперь установим уравнения, решения которых полностью определяют параметры оптимального управления. Для этого нужно рассмотреть все возможные качественно различные ситуации перехвата. Начнём со случая наискорейшего перехвата по  $CSC$ -траектории. Согласно утверждению 3.1 оптимальная точка перехвата  $\mathbf{y}_T(t) \in \tilde{\mathcal{B}}(t) \subset \mathcal{E}(t)$ . Предположим, что оптимальный перехват происходит по траектории типа  $CSC$ . Тогда решение системы

$$\mathbf{y}_T(t) = \mathbf{y}_{CSC}^{s,\sigma}(t; \tau_1, \tau_2)$$

определяет параметры оптимального управления. Используя (3.3), получим<sup>3</sup>

$$\begin{aligned} \xi_{CSC}^{s,\sigma}(\mathbf{y}_T(t)) &= (1 - s\sigma) \cos \tau_1 - (\tau_2 - \tau_1) \sin \tau_1, \\ \eta_{CSC}^{\sigma}(\mathbf{y}_T(t)) &= (1 - s\sigma) \sin \tau_1 + (\tau_2 - \tau_1) \cos \tau_1, \\ \varphi_T(t) &= \frac{\pi}{2} + s\tau_1 + \sigma(t - \tau_2) + 2\pi k, \quad k \in \mathbb{Z}, \end{aligned} \tag{3.5}$$

где

$$\begin{aligned} \xi_{CSC}^{s,\sigma}(\mathbf{y}_T(t)) &\stackrel{\text{def}}{=} s x_T(t) + 1 - s\sigma \sin \varphi_T(t), \\ \eta_{CSC}^{\sigma}(\mathbf{y}_T(t)) &\stackrel{\text{def}}{=} y_T(t) + \sigma \cos \varphi_T(t). \end{aligned}$$

<sup>3</sup>Последнее уравнение понимается как равенство вещественных чисел из  $\mathbb{R}$ , а не углов из  $\mathbb{S}$ .

Введём вспомогательную функцию

$$\rho_{CSC}^{2,s,\sigma}(\mathbf{y}_T(t)) \stackrel{\text{def}}{=} (\xi_{CSC}^{s,\sigma}(\mathbf{y}_T(t)))^2 + (\eta_{CSC}^\sigma(\mathbf{y}_T(t)))^2 = (1 - s\sigma)^2 + (\tau_2 - \tau_1)^2.$$

В соответствии с леммой 3.1, потребуем, чтобы  $\tau_2 \geq \tau_1$ . Тогда можно получить следующее уравнение:

$$\tau_2 - \tau_1 = \sqrt{\rho_{CSC}^{2,s,\sigma}(\mathbf{y}_T(t)) - (1 - s\sigma)^2}.$$

Теперь подставим значение  $\tau_2 - \tau_1$  в первое и второе уравнение из (3.5) и после упрощений получим

$$C_{CSC}^{s,\sigma}(\mathbf{y}_T(t)) = \cos \tau_1, \quad S_{CSC}^{s,\sigma}(\mathbf{y}_T(t)) = \sin \tau_1,$$

где

$$C_{CSC}^{s,\sigma}(\mathbf{y}_T(t)) \stackrel{\text{def}}{=} \frac{(1 - s\sigma)\xi_{CSC}^{s,\sigma}(\mathbf{y}_T(t))}{\rho_{CSC}^{2,s,\sigma}(\mathbf{y}_T(t))} + \frac{\eta_{CSC}^\sigma(\mathbf{y}_T(t))}{\rho_{CSC}^{2,s,\sigma}(\mathbf{y}_T(t))} \sqrt{\rho_{CSC}^{2,s,\sigma}(\mathbf{y}_T(t)) - (1 - s\sigma)^2},$$

$$S_{CSC}^{s,\sigma}(\mathbf{y}_T(t)) \stackrel{\text{def}}{=} \frac{(1 - s\sigma)\eta_{CSC}^\sigma(\mathbf{y}_T(t))}{\rho_{CSC}^{2,s,\sigma}(\mathbf{y}_T(t))} - \frac{\xi_{CSC}^{s,\sigma}(\mathbf{y}_T(t))}{\rho_{CSC}^{2,s,\sigma}(\mathbf{y}_T(t))} \sqrt{\rho_{CSC}^{2,s,\sigma}(\mathbf{y}_T(t)) - (1 - s\sigma)^2}.$$

Далее нам понадобится функция

$$\arctan_2(y, x) \stackrel{\text{def}}{=} \begin{cases} \arccos \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}, & y \geq 0, \\ 2\pi - \arccos \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}, & y < 0. \end{cases}$$

Предыдущие уравнения и учёт того, что время переключения  $\tau_1 \in [0, 2\pi)$ , приводят к

$$\tau_1 = \theta_{CSC}^{1,s,\sigma}(\mathbf{y}_T(t)) \stackrel{\text{def}}{=} \arctan_2(S_{CSC}^{s,\sigma}(\mathbf{y}_T(t)), C_{CSC}^{s,\sigma}(\mathbf{y}_T(t))),$$

$$\tau_2 = \theta_{CSC}^{2,s,\sigma}(\mathbf{y}_T(t)) \stackrel{\text{def}}{=} \theta_{CSC}^{1,s,\sigma}(\mathbf{y}_T(t)) + \sqrt{\rho_{CSC}^{2,s,\sigma}(\mathbf{y}_T(t)) - (1 - s\sigma)^2}.$$

Третье уравнение из (3.5) и условие  $t \geq \tau_2$  приводят к следующей задаче:

$$\begin{cases} \varphi_T(t) - \frac{\pi}{2} - s\theta_{CSC}^{1,s,\sigma}(\mathbf{y}_T(t)) - \sigma(t - \theta_{CSC}^{2,s,\sigma}(\mathbf{y}_T(t))) = 2\pi k, \\ t \geq \theta_{CSC}^{2,s,\sigma}(\mathbf{y}_T(t)), \quad k \in \mathbb{Z}. \end{cases}$$

Дополнительные условия из утверждения 3.2 ограничивают величину  $t - \tau_2 < 2\pi$  в случае отсутствия циклов. Таким образом, оптимальное время перехвата удовлетворяет уравнению

$$F_{CSC}^{s,\sigma}(t) \stackrel{\text{def}}{=} V_{CSC}^{s,\sigma}(\mathbf{y}_T(t)) - t = 0, \quad (3.6)$$

где

$$V_{CSC}^{s,\sigma}(\mathbf{y}_T(t)) \stackrel{\text{def}}{=} \theta_{CSC}^{2,s,\sigma}(\mathbf{y}_T(t)) + \text{mod} \left( \sigma \left( \varphi_T(t) - \frac{\pi}{2} \right) - s\sigma\theta_{CSC}^{1,s,\sigma}(\mathbf{y}_T(t)), 2\pi \right).$$

Таким образом, получается четыре уравнения (3.6), т. к. параметры траектории  $s, \sigma \in \mathbb{B}$  не определены. Для всех возможных значений параметров  $s, \sigma \in \mathbb{B}$  нужно найти наименьший неотрицательный корень  $T_{CSC}^{s,\sigma}[\mathbf{y}_T]$  уравнения (3.6), которое в общем случае неразрешимо в явном виде. Если это уравнение не имеет корней для некоторой пары параметров  $s, \sigma \in \mathbb{B}$ , то будем формально считать, что  $T_{CSC}^{s,\sigma}[\mathbf{y}_T] = +\infty$ . Оптимальное управление  $u_{CSC}^{s,\sigma}(\cdot; \tau_1, \tau_2)$ , заданное с помощью (3.1), имеет следующие параметры

$$\begin{aligned} (s, \sigma) &\in \arg \min_{(\tilde{s}, \tilde{\sigma}) \in \mathbb{B}^2} T_{CSC}^{\tilde{s}, \tilde{\sigma}}[\mathbf{y}_T], \\ \tau_1 &= \theta_{CSC}^{1,s,\sigma}(T_{CSC}^{s,\sigma}[\mathbf{y}_T]), \quad \tau_2 = \theta_{CSC}^{2,s,\sigma}(T_{CSC}^{s,\sigma}[\mathbf{y}_T]), \end{aligned} \quad (3.7)$$

в случае оптимальности перехвата по траектории типа  $CSC$ . Для оптимальных значений  $s, \sigma \in \mathbb{B}$  наименьшее время перехвата  $T_{CSC}[\mathbf{y}_T] = T_{CSC}^{s,\sigma}[\mathbf{y}_T]$  в случае отсутствия циклов у оптимальной  $CSC$ -траектории.

Если у оптимальной  $CSC$ -траектории есть цикл и  $S$ -часть этой траектории не нулевая, то  $\tau_1 = 0$ ,  $T - \tau_2 = 2\pi$ , согласно утверждению 3.2. В этом случае наименьшее время перехвата удовлетворяет уравнению

$$F_{SC}(t) \stackrel{\text{def}}{=} d \left( \mathbf{y}_T(t), \left[ 0 \quad t - 2\pi \quad \pi/2 \right]^\top \right) = 0. \quad (3.8)$$

Чтобы найти наименьшее время перехвата нужно найти наименьший корень  $T_{SC}[\mathbf{y}_T] \geq 2\pi$  уравнения (3.8). Если это уравнение не имеет решения  $T_{SC}[\mathbf{y}_T] \geq 2\pi$ , то будем формально полагать, что  $T_{SC}[\mathbf{y}_T] = +\infty$ . Оптимальным управлением является функция  $u_{CSC}^{s,\sigma}(\cdot; \tau_1, \tau_2)$  в этом случае, причём параметры  $s, \sigma \in \mathbb{B}$  могут быть произвольными, а времена переключения  $\tau_1 = 0$ ,  $\tau_2 = T_{SC}[\mathbf{y}_T] - 2\pi$ .

Если  $S$ -часть оптимальной  $CSC$ -траектории обнуляется, то будем относить этот случай к  $CCC$ -траектории.

Теперь предположим, что оптимальный перехват происходит по траектории типа  $CCC$ . Схема рассуждений здесь будет аналогичная случаю оптимальности  $CSC$ -траектории. Система

$$\mathbf{y}_T(t) = \mathbf{y}_{CCC}^s(t; \tau_1, \tau_2)$$

позволяет определить параметры оптимальной  $CCC$ -траектории. Используя (3.4), получим

$$\begin{aligned} \xi_{CCC}^s(\mathbf{y}_T(t)) &= (1 - \cos(\tau_2 - \tau_1)) \cos \tau_1 - \sin(\tau_2 - \tau_1) \sin \tau_1, \\ \eta_{CCC}^s(\mathbf{y}_T(t)) &= (1 - \cos(\tau_2 - \tau_1)) \sin \tau_1 + \sin(\tau_2 - \tau_1) \cos \tau_1, \\ \varphi_T(t) &= \pi/2 + s(2\tau_1 - 2\tau_2 + t) + 2\pi k, \quad k \in \mathbb{Z}, \end{aligned} \quad (3.9)$$

где

$$\begin{aligned} \xi_{CCC}^s(\mathbf{y}_T(t)) &\stackrel{\text{def}}{=} \frac{sx_T(t) + 1 - \sin \varphi_T(t)}{2}, \\ \eta_{CCC}^s(\mathbf{y}_T(t)) &\stackrel{\text{def}}{=} \frac{y_T(t) + s \cos \varphi_T(t)}{2}. \end{aligned}$$

Введём вспомогательную функцию

$$\rho_{CCC}^{2,s}(\mathbf{y}_T(t)) \stackrel{\text{def}}{=} (\xi_{CCC}^s(\mathbf{y}_T(t)))^2 + (\eta_{CCC}^s(\mathbf{y}_T(t)))^2 = 2 - 2 \cos(\tau_2 - \tau_1).$$

Нетрудные преобразования приводят к следующим выражениям:

$$\begin{aligned} \cos(\tau_2 - \tau_1) &= 1 - \frac{\rho_{CCC}^{2,s}(\mathbf{y}_T(t))}{2}, \\ \sin(\tau_2 - \tau_1) &= \mu \sqrt{1 - \left(1 - \frac{\rho_{CCC}^{2,s}(\mathbf{y}_T(t))}{2}\right)^2}, \end{aligned}$$

где введён новый параметр  $\mu \in \mathbb{B}$ . В соответствии с леммой 3.1, будем полагать, что  $\tau_2 - \tau_1 \in [0, 2\pi)$ . Если параметр  $\mu = +1$ , то длина второй арки  $CCC$ -траектории равна  $\tau_2 - \tau_1 \in [0, \pi]$ . В противном случае, если  $\mu = -1$ , то

$\tau_2 - \tau_1 \in (\pi, 2\pi)$ . Таким образом,

$$\tau_2 = \tau_1 - \pi(\mu - 1) + \mu \arccos \left( 1 - \frac{\rho_{CCC}^{2,s}(\mathbf{y}_T(t))}{2} \right).$$

Теперь подставим значения  $\cos(\tau_2 - \tau_1)$ ,  $\sin(\tau_2 - \tau_1)$  в первое и второе уравнения из (3.9) и после ряда преобразований получим:

$$C_{CCC}^{s,\mu}(\mathbf{y}_T(t)) = \cos \tau_1, \quad S_{CCC}^{s,\mu}(\mathbf{y}_T(t)) = \sin \tau_1,$$

где

$$C_{CCC}^{s,\mu}(\mathbf{y}_T(t)) \stackrel{\text{def}}{=} \frac{\xi_{CCC}^s(\mathbf{y}_T(t))}{2} + \mu \frac{\eta_{CCC}^s(\mathbf{y}_T(t))}{\rho_{CCC}^{2,s}(\mathbf{y}_T(t))} \sqrt{1 - \left( 1 - \frac{\rho_{CCC}^{2,s}(\mathbf{y}_T(t))}{2} \right)^2},$$

$$S_{CCC}^{s,\mu}(\mathbf{y}_T(t)) \stackrel{\text{def}}{=} \frac{\eta_{CCC}^s(\mathbf{y}_T(t))}{2} - \mu \frac{\xi_{CCC}^s(\mathbf{y}_T(t))}{\rho_{CCC}^{2,s}(\mathbf{y}_T(t))} \sqrt{1 - \left( 1 - \frac{\rho_{CCC}^{2,s}(\mathbf{y}_T(t))}{2} \right)^2}.$$

С помощью предыдущих выражений и условия  $\tau_1 \in [0, 2\pi)$  можно получить времена переключений

$$\tau_1 = \theta_{CCC}^{1,s,\mu}(\mathbf{y}_T(t)) \stackrel{\text{def}}{=} \arctan_2(S_{CCC}^{s,\mu}(\mathbf{y}_T(t)), C_{CCC}^{s,\mu}(\mathbf{y}_T(t))),$$

$$\tau_2 = \theta_{CCC}^{2,s,\mu}(\mathbf{y}_T(t)) \stackrel{\text{def}}{=} \theta_{CCC}^{1,s,\mu}(\mathbf{y}_T(t)) - \pi(\mu - 1) + \mu \arccos \left( 1 - \frac{\rho_{CCC}^{2,s}(\mathbf{y}_T(t))}{2} \right).$$

Учитывая третье уравнение из (3.9) и ограничение  $t \geq \tau_2$ , получаем следующую задачу:

$$\begin{cases} \varphi_T(t) - \frac{\pi}{2} - 2s\theta_{CCC}^{1,s,\mu}(\mathbf{y}_T(t)) + 2s\theta_{CCC}^{2,s,\mu}(\mathbf{y}_T(t)) - st = 2\pi k, \\ t \geq \theta_{CCC}^{2,s,\mu}(\mathbf{y}_T(t)), \quad k \in \mathbb{Z}. \end{cases}$$

Дополнительные условия из утверждения 3.2 ограничивают величину  $T - \tau_2 < 2\pi$  в случае отсутствия циклов. Таким образом, наименьшее время перехвата должно удовлетворять уравнению

$$F_{CCC}^{s,\mu}(t) \stackrel{\text{def}}{=} V_{CCC}^{s,\mu}(\mathbf{y}_T(t)) - t = 0, \quad (3.10)$$

где

$$V_{CCC}^{s,\mu}(\mathbf{y}_T(t)) \stackrel{\text{def}}{=} \theta_{CCC}^{2,s,\mu}(\mathbf{y}_T(t)) + \text{mod} \left( s \left( \varphi_T(t) - \frac{\pi}{2} \right) - 2\theta_{CCC}^{1,s,\mu}(\mathbf{y}_T(t)) + \theta_{CCC}^{2,s,\mu}(\mathbf{y}_T(t)), 2\pi \right).$$

В конечном итоге получается четыре уравнения (3.10), т. к. параметры траектории  $s, \mu \in \mathbb{B}$  не определены. Для всех возможных значений  $s, \mu \in \mathbb{B}$  нужно найти наименьший неотрицательный корень  $T_{CCC}^{s,\mu}[\mathbf{y}_T]$  уравнения (3.10), которое в общем случае неразрешимо в явном виде. Если это уравнение не имеет корней для некоторой пары параметров  $s, \mu \in \mathbb{B}$ , то будем формально считать, что  $T_{CCC}^{s,\mu}[\mathbf{y}_T] = +\infty$ . Оптимальное управление  $u_{CCC}^s(\cdot; \tau_1, \tau_2)$ , заданное с помощью (3.2), имеет параметры

$$(s, \mu) \in \arg \min_{(\tilde{s}, \tilde{\mu}) \in \mathbb{B}^2} T_{CCC}^{\tilde{s}, \tilde{\mu}}[\mathbf{y}_T], \quad (3.11)$$

$$\tau_1 = \theta_{CCC}^{1,s,\mu}(T_{CCC}^{s,\mu}[\mathbf{y}_T]), \quad \tau_2 = \theta_{CCC}^{2,s,\mu}(T_{CCC}^{s,\mu}[\mathbf{y}_T])$$

в случае оптимальности перехвата по траектории типа  $CCC$ . Для оптимальных значений параметров  $s, \mu \in \mathbb{B}$  наименьшее время перехвата  $T_{CCC}[\mathbf{y}_T] = T_{CCC}^{s,\mu}[\mathbf{y}_T]$  в случае отсутствия циклов у оптимальной  $CCC$ -траектории.

Если у оптимальной  $CCC$ -траектории есть цикл, то  $\tau_1 = 0$  и  $t - \tau_2 = 2\pi$ , согласно утверждению 3.2. В этом случае оптимальное время перехвата  $t$  удовлетворяет уравнению

$$F_{CC}(t) \stackrel{\text{def}}{=} d \left( \mathbf{y}_T(t), \left[ (1 - \cos t) \operatorname{sgn} x_T(t) \quad \sin t \quad \pi/2 - t \operatorname{sgn} x_T(t) \right]^\top \right) = 0. \quad (3.12)$$

Чтобы найти оптимальное время перехвата нужно найти наименьший корень  $T_{CC}[\mathbf{y}_T] \geq 2\pi$  уравнения (3.12). Если это уравнение не имеет решения  $T_{CC}[\mathbf{y}_T] \geq 2\pi$ , то будем формально полагать, что  $T_{CC}[\mathbf{y}_T] = +\infty$ . Оптимальным управлением является функция  $u_{CCC}^s(\cdot; \tau_1, \tau_2)$  в этом случае, причём  $s = \operatorname{sgn} x_T(T_{CC}[\mathbf{y}_T])$ ,  $\tau_1 = 0$ ,  $\tau_2 = T_{CC}[\mathbf{y}_T] - 2\pi$ .

Определение множества  $\tilde{\mathcal{B}}(t)$  позволяет считать, что каждая точка множества  $\tilde{\mathcal{B}}(t)$  может быть достигнута с использованием только двух типов траекторий:  $CSC$  и  $CCC$ . Опишем схему перебора, который нужно осуществить для

поиска оптимального управления. Эта схема подразумевает, что соответствующие уравнения для определения параметров, представленные в предыдущем разделе, каким-либо образом решены и остаётся лишь сравнить времена перехвата и выбрать соответствующее наискорейшему перехвату время.

Предположим, что наименьший неотрицательный корень  $T_{CSC}^{s,\sigma}[\mathbf{y}_T]$  уравнения (3.6) найден с помощью некоторой процедуры поиска корней для всех значений  $s, \sigma \in \mathbb{B}$ . Соответствующая  $CSC$ -траектория без циклов определяется параметрами (3.7) и временем перехвата  $T_{CSC}[\mathbf{y}_T]$ . Если  $T_{CSC}[\mathbf{y}_T] = +\infty$ , то уравнение (3.6) не имеет неотрицательных корней для всех  $s, \sigma \in \mathbb{B}$ . Это значит, что наискорейший перехват вдоль  $CSC$ -траекторий без циклов невозможен.  $CSC$ -траектория с циклом и ненулевой  $S$ -частью проверяется в случае, когда корень  $T_{SC}[\mathbf{y}_T] \geq 2\pi$  уравнения (3.8) определён и конечен. Если  $T_{CCC}^{s,\mu}[\mathbf{y}_T]$  является наименьшим неотрицательным корнем уравнения (3.10), найденным с помощью некоторой процедуры поиска корней для всех значений  $s, \mu \in \mathbb{B}$ , то соответствующая  $CCC$ -траектория без циклов определяется параметрами (3.11) и временем перехвата  $T_{CCC}[\mathbf{y}_T]$ . Если  $T_{CCC}[\mathbf{y}_T] = +\infty$ , тогда уравнение (3.10) не имеет неотрицательных корней для всех  $s, \mu \in \mathbb{B}$ .  $CCC$ -траектория с циклом проверяется в случае, когда есть корень  $T_{CC}[\mathbf{y}_T] \geq 2\pi$  уравнения (3.12). Финальный этап выбора оптимальной траектории заключается в сравнении величин  $T_{CSC}[\mathbf{y}_T]$ ,  $T_{SC}[\mathbf{y}_T]$ ,  $T_{CCC}[\mathbf{y}_T]$ ,  $T_{CC}[\mathbf{y}_T]$ . Если как минимум одна из них конечна, то перехват машиной Дубинса возможен. Выбор оптимального управления в таком случае определяется следующим утверждением.

**Утверждение 3.3.** Пусть боковой перехват цели, движущейся по непрерывной траектории  $\mathbf{y}_T$ , возможен, тогда наименьшее время перехвата

$$T^*[\mathbf{y}_T] = \min(T_{CSC}[\mathbf{y}_T], T_{SC}[\mathbf{y}_T], T_{CCC}[\mathbf{y}_T], T_{CC}[\mathbf{y}_T]).$$

Если  $T^*[\mathbf{y}_T] = T_{CSC}[\mathbf{y}_T]$ , то функция  $u = u_{CSC}^{s,\sigma}(\cdot; \tau_1, \tau_2)$  является оптимальным управлением, причём параметры  $s, \sigma, \tau_1, \tau_2$  определяются согласно (3.7). Если  $T^*[\mathbf{y}_T] = T_{SC}[\mathbf{y}_T]$ , то функция  $u = u_{CSC}^{s,\sigma}(\cdot; \tau_1, \tau_2)$  является оптимальным управлением, причём  $s, \sigma \in \mathbb{B}$ ,  $\tau_1 = 0$ ,  $\tau_2 = T_{SC}[\mathbf{y}_T] - 2\pi$ . Если  $T^*[\mathbf{y}_T] = T_{CCC}[\mathbf{y}_T]$ , то функция  $u = u_{CCC}^s(\cdot; \tau_1, \tau_2)$  является оптимальным управлением, причём параметры  $s, \tau_1, \tau_2$  определяются согласно (3.11). Ес-

ли  $T^*[\mathbf{y}_T] = T_{CC}[\mathbf{y}_T]$ , то функция  $u = u_{CCC}^s(\cdot; \tau_1, \tau_2)$  является оптимальным управлением, причём  $s = \text{sgn } x_T(T_{CC}[\mathbf{y}_T])$ ,  $\tau_1 = 0$ ,  $\tau_2 = T_{CC}[\mathbf{y}_T] - 2\pi$ .

### 3.4 Иллюстрация использования полученных аналитических результатов для задачи бокового перехвата

В этом разделе рассмотрено несколько примеров наискорейшего бокового перехвата. Главная цель этих примеров состоит в подчёркивании необходимости рассматривания всех десяти уравнений, корнем одного из которых является наименьшее время перехвата. Также будет показано как применять приведённую схему перебора.

Множество достижимости машины Дубинса имеет симметрию относительно оси абсцисс. Если оптимальна  $CSC$ -траектория и траектория цели задана как  $\mathbf{y}_T = [x_T \ y_T \ \varphi_T]^\top$ , а оптимальное управление —  $u_{CSC}^{s,\sigma}(\cdot; \tau_1, \tau_2)$ , то некоторая другая цель с траекторией движения

$$\mathbf{y}_T^* = [-x_T \ y_T \ \pi - \varphi_T]^\top \quad (3.13)$$

может быть оптимально перехвачена с помощью «зеркальной» функции управления  $u_{CSC}^{-s,-\sigma}(\cdot; \tau_1, \tau_2)$ . Аналогичная ситуация справедлива и для случая  $CCC$ -траекторий, когда  $u_{CCC}^s(\cdot; \tau_1, \tau_2)$  является оптимальным управлением. Цель с траекторией  $\mathbf{y}_T^*$  может быть оптимально перехвачена с помощью управления  $u_{CCC}^{-s}(\cdot; \tau_1, \tau_2)$ . Эта симметрия позволяет привести шесть примеров для демонстрации того, что необходимо искать корни каждого из десяти уравнений для определения наименьшего времени перехвата в общем случае.

На всех приводимых далее рисунках требуемый угол перехвата нарисован белой стрелкой на пути движения цели, а скорость машины Дубинса отмечается закрашенной чёрной стрелкой. В момент перехвата чёрная стрелка накладывается на белую. Сплошная линия является оптимальной траекторией перехвата.

Рассмотрим случай движения цели по окружности (рис. 3.2). Анализ уравнений (3.6), (3.10) представлен на рис. 3.3. По этим графикам можно увидеть, что момент времени  $t = \pi + 1$  является наименьшим моментом времени, когда



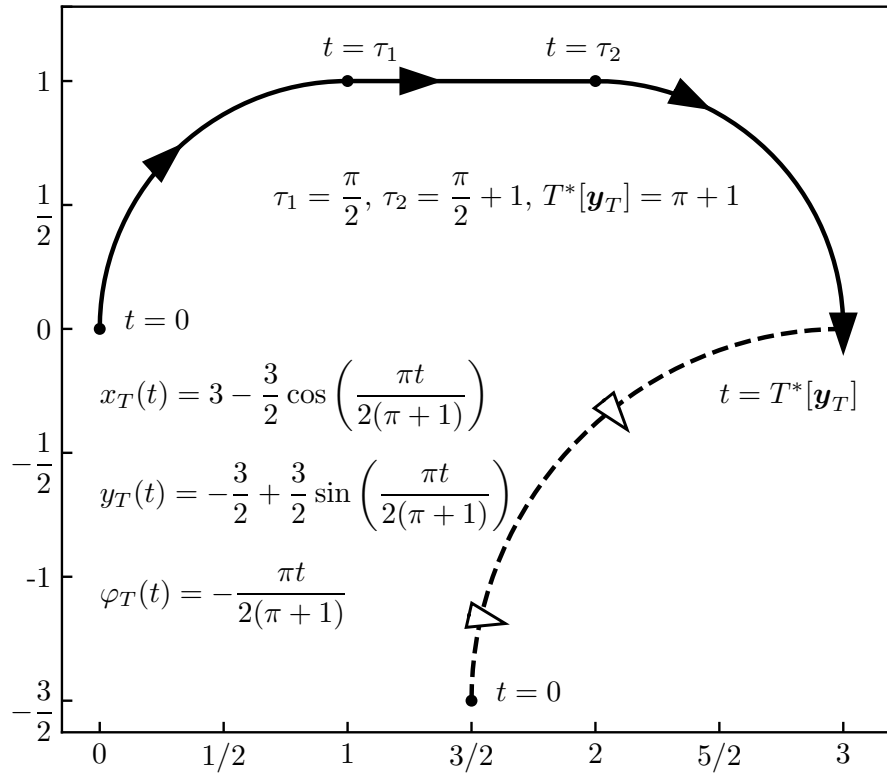


Рисунок 3.2 — Оптимальная *RSR*-траектория ( $s = -1, \sigma = -1$ ).

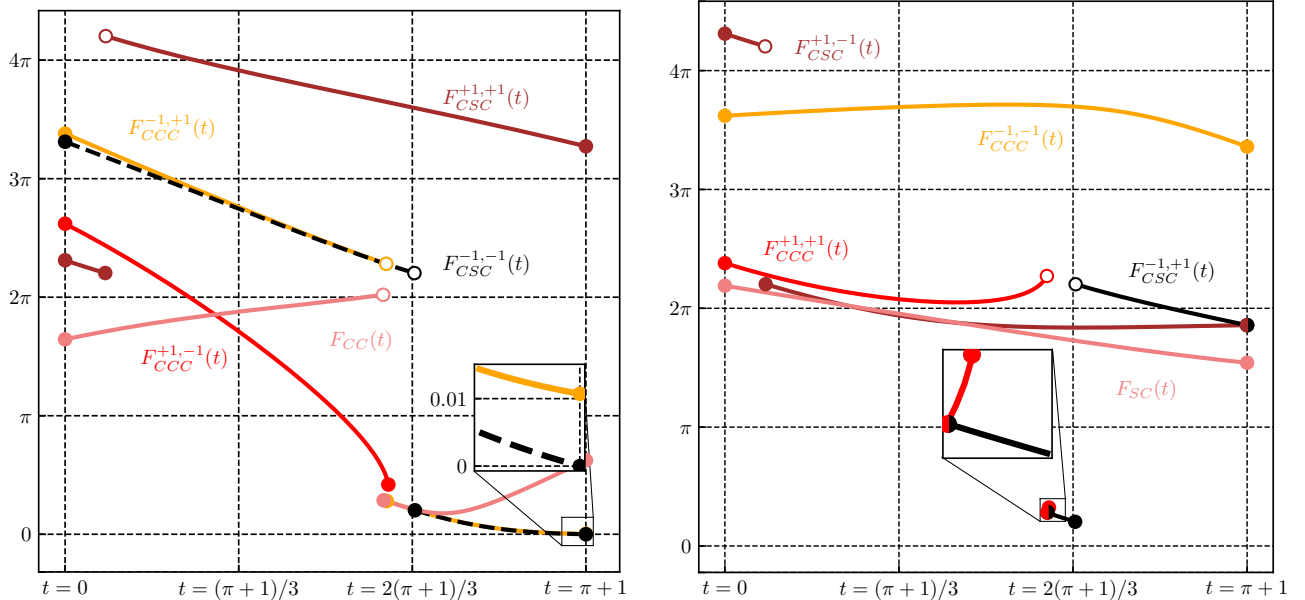


Рисунок 3.3 — Графики функций  $F_{CSC}^{+1,+1}$ ,  $F_{CSC}^{-1,-1}$ ,  $F_{CCC}^{-1,+1}$ ,  $F_{CCC}^{+1,-1}$ ,  $F_{CSC}^{+1,-1}$ ,  $F_{CSC}^{-1,+1}$ ,  $F_{CCC}^{+1,+1}$ ,  $F_{CCC}^{-1,-1}$ : оптимальность *RSR*-траектории.

функция  $F_{CSC}^{-1,-1}$  становится равной нулю. Другие графики функций на этом рисунке не пересекают нуля на сегменте  $[0, \pi + 1]$ . В связи с тем, что момент времени  $t = \pi + 1 < 2\pi$ , нам не приходится включать в рассмотрение случаи воз-

возможного наличия циклов у оптимальной траектории перехвата. В этом случае  $RSR$ -траектория ( $s = -1, \sigma = -1$ ) является оптимальной. Зеркальная симметрия позволяет утверждать, что  $LSL$ -траектория ( $s = +1, \sigma = +1$ ) может быть оптимальной для соответствующей траектории цели  $\mathbf{y}_T^*$ .

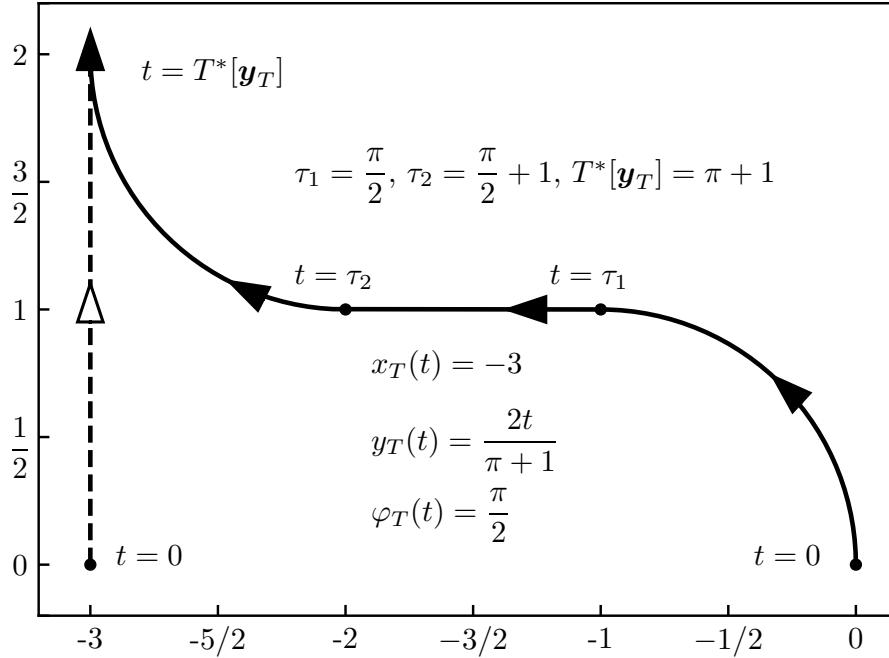


Рисунок 3.4 — Оптимальная  $LSR$ -траектория ( $s = +1, \sigma = -1$ ).

Теперь рассмотрим случай равномерного и прямолинейного движения цели (рис. 3.4). Анализ уравнений (3.6), (3.10) на рис. 3.5 показывает, что функция  $F_{CS}^{+1,-1}$  становится равной нулю в момент времени  $t = \pi + 1$ , а остальные функции не достигают нуля до этого момента времени. В связи с тем, что  $t = \pi + 1 < 2\pi$ , можно опять не рассматривать случай наличия циклов у траекторий. Таким образом,  $LSR$ -траектория ( $s = +1, \sigma = -1$ ) является оптимальной траекторией перехвата. Зеркальная симметрия снова позволяет утверждать, что  $RSL$ -траектория ( $s = -1, \sigma = +1$ ) также может быть оптимальной траекторией перехвата некоторой цели, движущейся по «зеркальной» траектории  $\mathbf{y}_T^*$ .

Перейдём к случаю движения цели по окружности, как указано на рис. 3.6. Анализ уравнений (3.6), (3.8), (3.10), (3.12) на рис. 3.7 показывает, что функция  $F_{SC}$  становится равной нулю в момент времени  $t = 2\pi + 1$ , а другие функции не обнуляются раньше этого момента. В этом случае необходимо проанализировать все десять уравнений, т. к.  $t = 2\pi + 1 > 2\pi$ . Как видно по

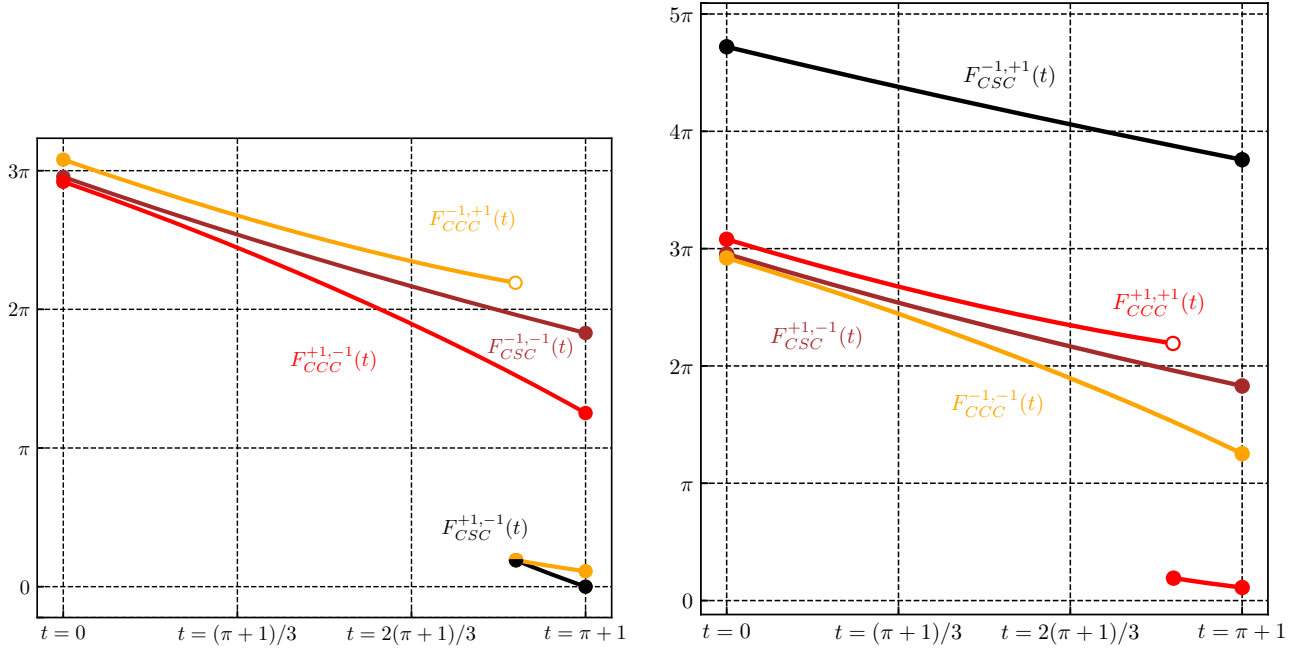


Рисунок 3.5 — Графики функций  $F_{CCC}^{-1,+1}$ ,  $F_{CSC}^{-1,-1}$ ,  $F_{CCC}^{+1,-1}$ ,  $F_{CSC}^{+1,-1}$ ,  $F_{CSC}^{-1,+1}$ ,  $F_{CCC}^{+1,+1}$ ,  $F_{CSC}^{+1,-1}$ ,  $F_{CCC}^{-1,-1}$ : оптимальность  $LSR$ -траектории.

рис. 3.6, оптимальная траектория машины Дубинса содержит цикл, причём направление поворота при этом цикле может быть произвольным, т. е. параметры  $s, \sigma \in \mathbb{B}$  произвольны.

Рассмотрим представленный на рис. 3.8 случай равномерного и прямолинейного движения цели. Анализ уравнений (3.6), (3.10) на рис. 3.9 показывает, что функция  $F_{CCC}^{-1,-1}$  становится равной нулю в момент времени  $t = 2\pi$ , а другие функции не равны нулю до этого момента. Из того, что цель не находится в точке  $\mathbf{x}_0 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \pi/2 \end{bmatrix}^\top$  в момент времени  $t = 2\pi$ , следует, что можно не рассматривать возможность наличия циклов у оптимальной траектории. Таким образом,  $RLR$ -траектория ( $s = -1, \mu = -1$ ) является оптимальной в данном случае. Зеркальная симметрия позволяет говорить, что  $LRL$ -траектория ( $s = +1, \mu = -1$ ) может быть оптимальной для случая движения цели по траектории  $\mathbf{y}_T^*$ .

Теперь рассмотрим случай прямолинейного равномерного движения цели на рис. 3.10. Требуемый угол перехвата  $\varphi_T(t)$  равномерно крутится по часовой стрелке начиная со значения  $\varphi_T(0) = \pi/2$ . Анализ уравнений (3.6), (3.10) на рис. 3.11 показывает, что функция  $F_{CCC}^{-1,+1}$  становится равной нулю в момент времени  $t = 5\pi/4$ , а другие функции не обнуляются до этого момента времени. В связи с тем, что  $t = 5\pi/4 < 2\pi$ , можно исключить рассмотрение траекто-

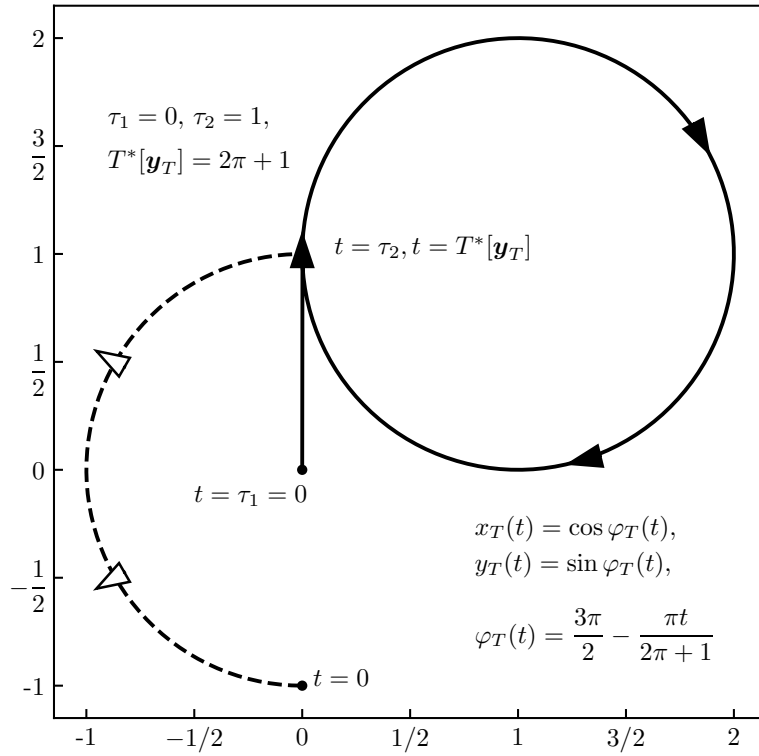


Рисунок 3.6 — Оптимальная  $SC$ -траектория ( $\sigma = -1$ ).

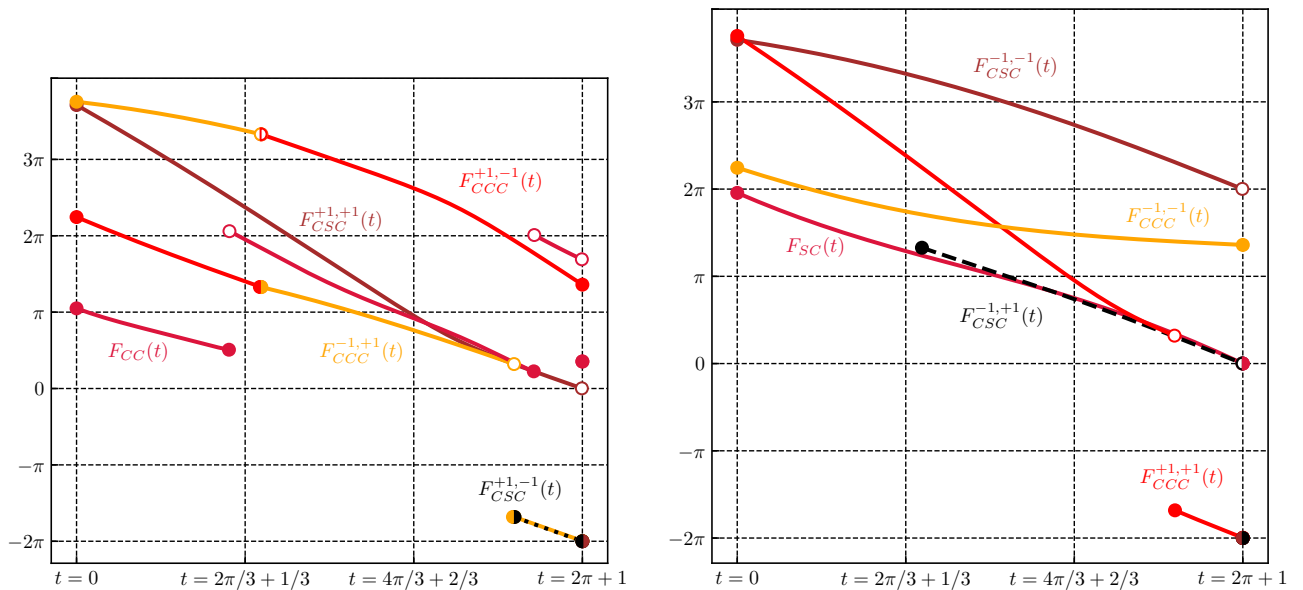


Рисунок 3.7 — Графики функций  $F_{CCC}^{+1,-1}$ ,  $F_{CSC}^{+1,+1}$ ,  $F_{CC}$ ,  $F_{CCC}^{-1,+1}$ ,  $F_{CSC}^{+1,-1}$ ,  $F_{CSC}^{-1,-1}$ ,  $F_{CCC}^{-1,-1}$ ,  $F_{SC}$ ,  $F_{CSC}^{-1,+1}$ ,  $F_{CCC}^{+1,+1}$ : оптимальность  $SC$ -траектории.

рий с циклами. Таким образом,  $RLR$ -траектория ( $s = -1, \mu = +1$ ) является оптимальной в этом случае. Зеркальная симметрия позволяет говорить, что

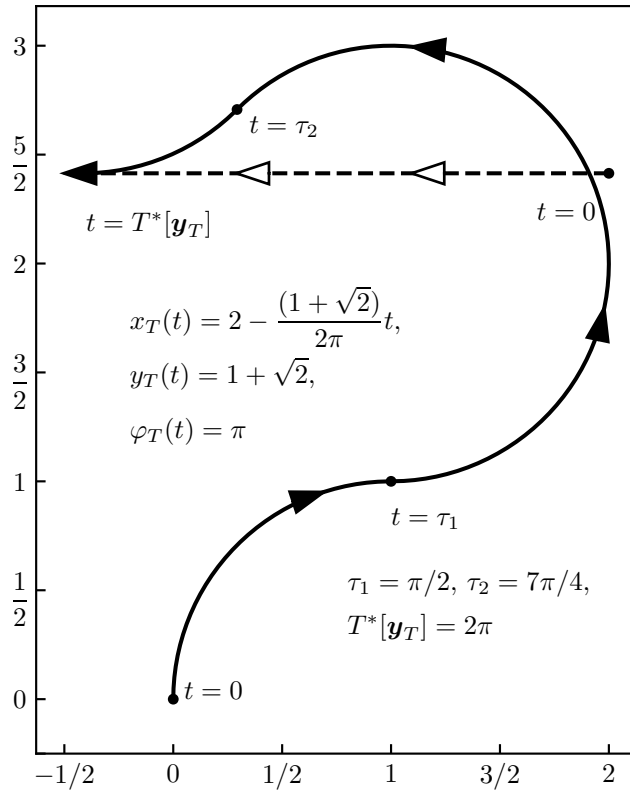


Рисунок 3.8 — Оптимальная  $RLR$ -траектория ( $s = -1, \mu = -1$ ).

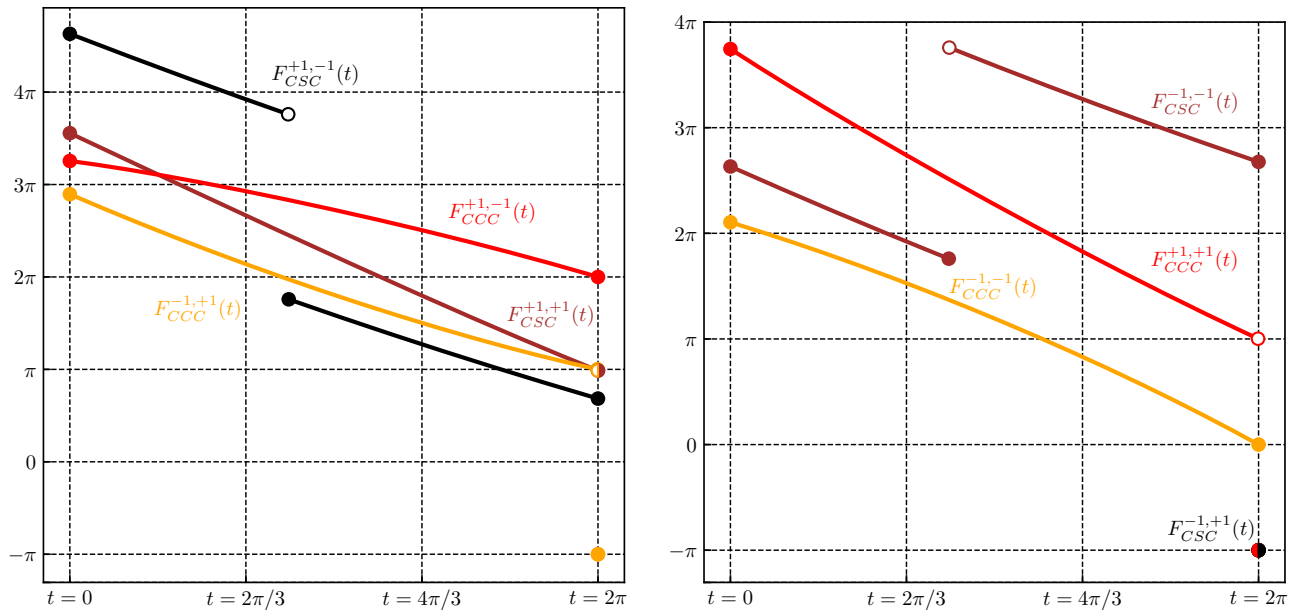


Рисунок 3.9 — Графики функций  $F_{CSC}^{+1,-1}$ ,  $F_{CCC}^{+1,-1}$ ,  $F_{CCC}^{-1,+1}$ ,  $F_{CSC}^{+1,+1}$ ,  $F_{CSC}^{-1,-1}$ ,  $F_{CCC}^{+1,+1}$ ,  $F_{CCC}^{-1,-1}$ ,  $F_{CSC}^{-1,+1}$ : оптимальность  $RLR$ -траектории ( $\mu = -1$ ).

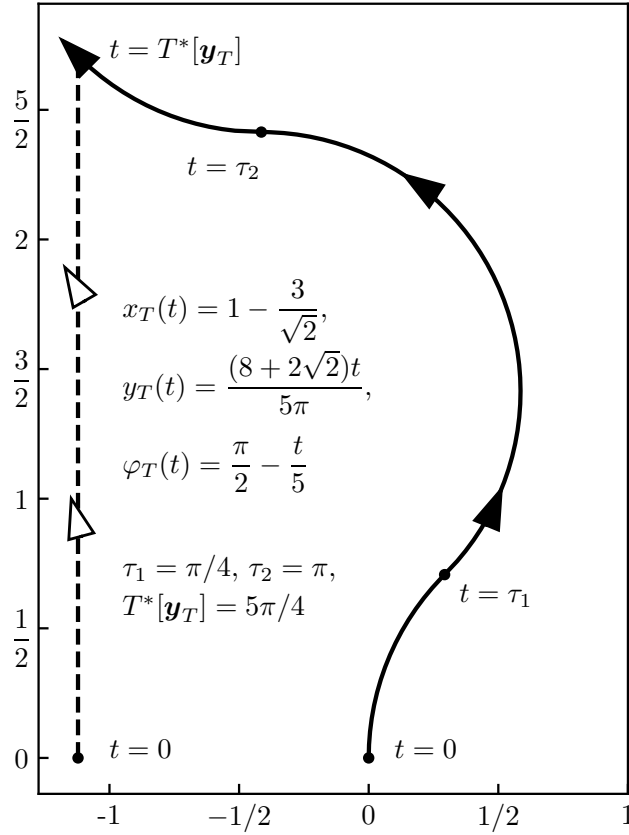


Рисунок 3.10 — Оптимальная  $RLR$ -траектория ( $s = -1, \mu = +1$ ).

$LRL$ -траектория ( $s = +1, \mu = +1$ ) может быть оптимальной для случая движения цели по траектории  $\mathbf{y}_T^*$ .

Последним рассмотрим представленный на рис. 3.12 случай равномерного и прямолинейного движения цели. Анализ уравнений (3.6), (3.8), (3.10), (3.12) на рис. 3.13 показывает, что функция  $F_{CC}$  становится равной нулю в момент времени  $t = 9\pi/4$ , а другие функции не обнуляются до этого момента времени.

### 3.5 Выводы по главе 3

В данной главе аналитически проанализирована задача наискорейшего бокового перехвата движущейся цели машиной Дубинса. В результате анализа получен ряд утверждений, которые дают представление об аналитическом решении задачи перехвата. Утверждение 3.1 позволяет локализовать возможные положения оптимальных точек перехвата. Утверждение 3.2 существенно

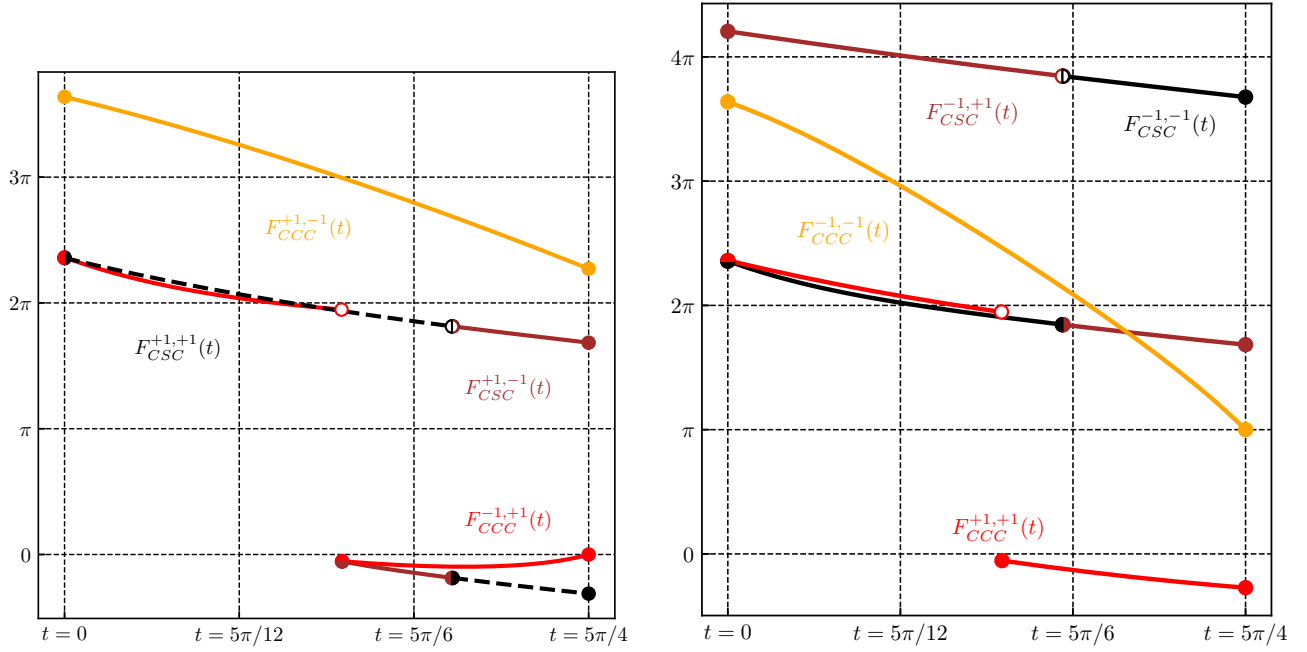


Рисунок 3.11 — Графики функций  $F_{CCC}^{+1,-1}$ ,  $F_{CSC}^{+1,+1}$ ,  $F_{CSC}^{+1,-1}$ ,  $F_{CCC}^{-1,+1}$ ,  $F_{CSC}^{-1,+1}$ ,  $F_{CSC}^{-1,-1}$ ,  $F_{CCC}^{-1,-1}$ ,  $F_{CCC}^{+1,+1}$ : оптимальность  $RLR$ -траектории ( $\mu = +1$ ).

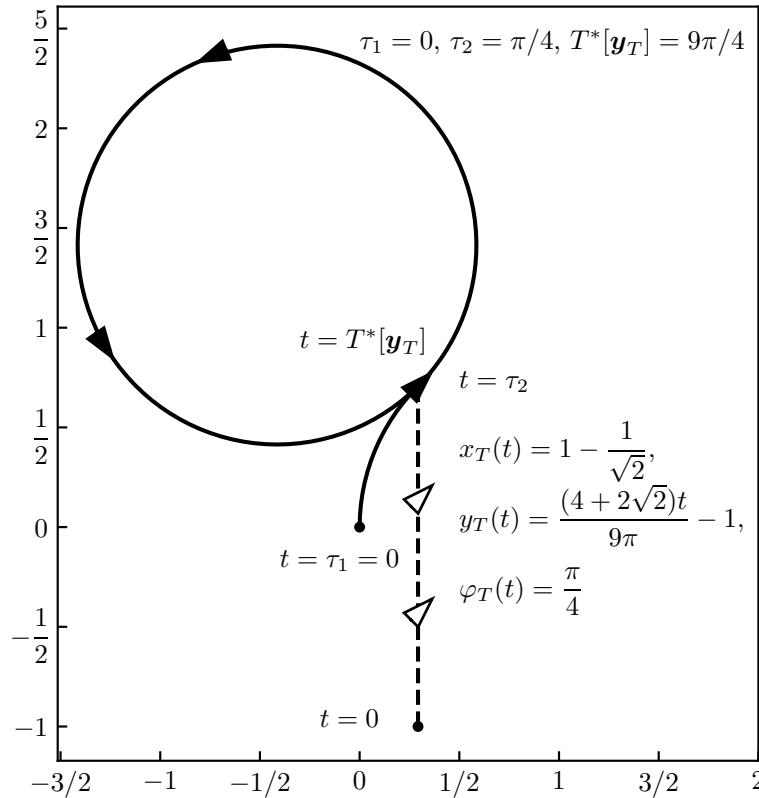


Рисунок 3.12 — Оптимальная  $CC$ -траектория ( $s = +1$ ).

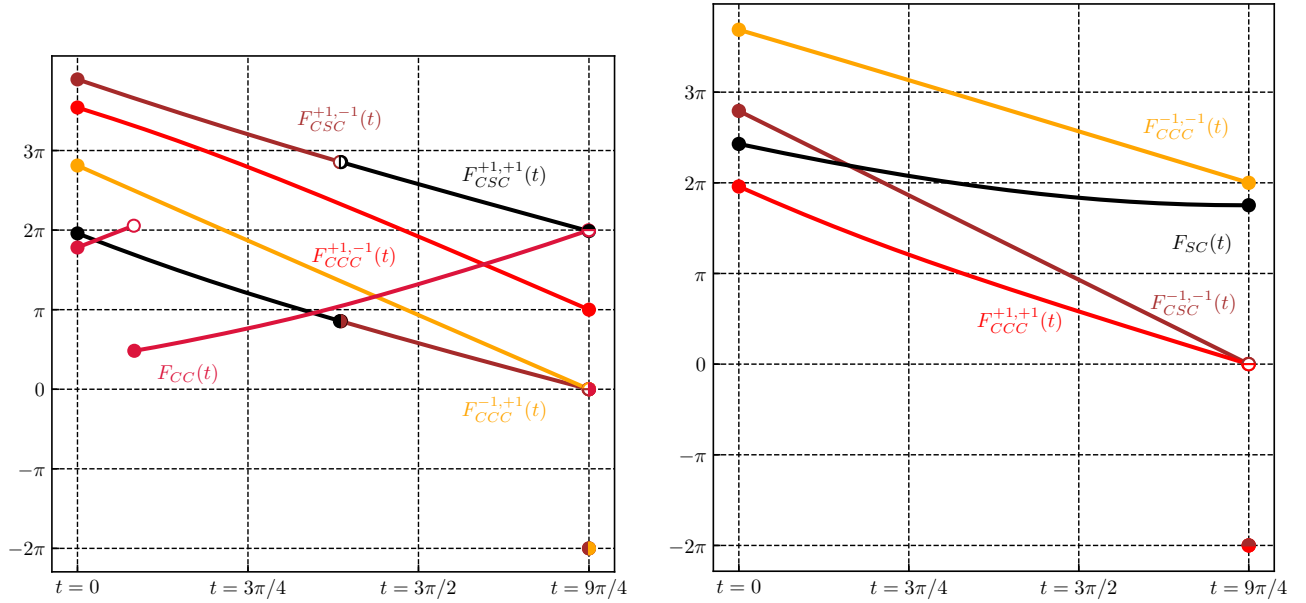


Рисунок 3.13 — Графики функций  $F_{CSC}^{+1,-1}$ ,  $F_{CSC}^{+1,+1}$ ,  $F_{CCC}^{+1,-1}$ ,  $F_{CC}$ ,  $F_{CCC}^{-1,+1}$ ,  $F_{CCC}^{-1,-1}$ ,  $F_{SC}$ ,  $F_{CSC}^{-1,-1}$ ,  $F_{CCC}^{-1,+1}$ : оптимальность  $CC$ -траектории.

уменьшает количество функций-кандидатов в оптимальные управления. Утверждение 3.3 определяет порядок выбора оптимального управления на основе решения десяти вещественных уравнений одной неизвестной. Также описана процедура выбора оптимальных параметров траектории (времен переключений и значений управлений) по известному наименьшему времени бокового перехвата. Подобранные примеры и численные эксперименты показывают, что в общем случае нужно анализировать все десять приведённых вещественных уравнений, для установления параметров оптимальной траектории наискорейшего бокового перехвата.



## Глава 4. Игра двух идентичных автомобилей: аналитическое описание барьера

В этой главе строится решение задачи перехвата цели, движения которой заранее не известны. Также решается вспомогательная задача по построению управления, которое позволяет избежать столкновения. Объекты управления имеют динамику машины Дубинса.

### 4.1 Игровая постановка задачи о двух идентичных автомобилях

Будем использовать обозначение  $\mathbf{z} = [x \ y \ \theta]^\top \in \mathbb{R}^2 \times \mathbb{S}$  для задания конфигурации в пространстве состояний. Такая конфигурация описывает положение на плоскости и ориентацию. В рамках данного раздела индексы  $P$  и  $E$  относятся к конфигурациям преследователя и убегающего соответственно.

В игре двух идентичных автомобилей кинематика игроков описывается с помощью модели Дубинса. Согласно этой модели в *естественном пространстве состояний* конфигурации игроков можно описать с помощью  $[x_P \ y_P \ \theta_P]^\top$  и  $[x_E \ y_E \ \theta_E]^\top$ , (см. рис. 4.1). Все углы отсчитываются в направлении движения часовой стрелки от оси ординат. В *редуцированном пространстве состояний* мы жёстко связываем систему координат с положением преследователя и ориентируем ось ординат вдоль направления его скорости. *Уравнения движения* в игре двух идентичных автомобилей задаются следующим образом:

$$\dot{\mathbf{z}} = \begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \\ \dot{\theta} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -uy + \sin \theta \\ -1 + ux + \cos \theta \\ v - u \end{bmatrix} \stackrel{\text{def}}{=} \mathbf{f}(\mathbf{z}, \mathbf{u}, \mathbf{v}). \quad (4.1)$$

Здесь *управления* преследователя и убегающего соответствуют следующим функциям:

$$u(\mathbf{z}) \stackrel{\text{def}}{=} \mathbf{u}(\mathbf{z}) \in \mathcal{U} \stackrel{\text{def}}{=} [-1, +1], \quad v(\mathbf{z}) \stackrel{\text{def}}{=} \mathbf{v}(\mathbf{z}) \in \mathcal{V} \stackrel{\text{def}}{=} [-1, +1],$$

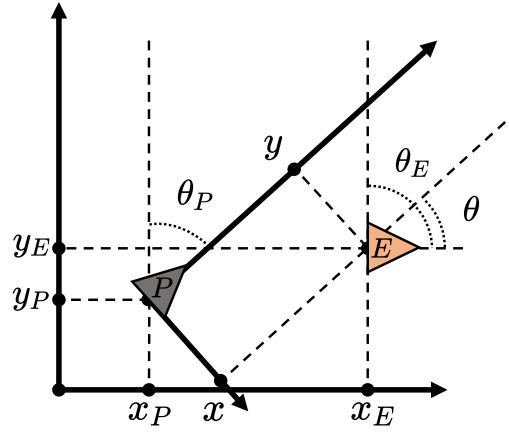


Рисунок 4.1 — Положения игроков в естественном пространстве состояний  $\begin{bmatrix} x_P & y_P & \theta_P & x_E & y_E & \theta_E \end{bmatrix}^\top$  и в редуцированном пространстве  $\begin{bmatrix} x & y & \theta \end{bmatrix}^\top$ .

где  $\mathcal{U}$  и  $\mathcal{V}$  являются *ограничивающими множествами* значений для управлений игроков.

Множество всех состояний, в которых может оказаться игра (*игровое пространство*), задаётся с помощью

$$\mathcal{S} \stackrel{\text{def}}{=} \{z \in \mathbb{R}^2 \times \mathbb{S} : x^2 + y^2 \geq \ell^2\},$$

где  $\ell \in \mathbb{R}^+$  является *радиусом захвата*. При этом *терминальная поверхность*, т. е. множество состояний, в которых игра считается оконченной, выглядит так:  $\mathcal{C} = \partial\mathcal{S}$ . Будем полагать, что *начальное состояние* игры  $z_0 \in \mathcal{S}$  в начальный момент времени  $t = 0$ , а *текущее состояние* игры  $z(t) = \begin{bmatrix} x(t) & y(t) & \theta(t) \end{bmatrix}^\top$ , зависящее от управлений игроков, задаётся как решение динамических уравнений (4.1). Игра оканчивается, если состояние попадает на терминальную поверхность в некоторый финальный момент времени  $t_f \in \mathbb{R}_0^+$ . В дальнейшем мы будем использовать индекс  $f$  для некоторых финальных конфигураций. Если терминальное множество не может быть достигнуто при заданных управлениях, то формально будем считать, что  $t_f = +\infty$ .

Терминальное состояние  $z(t_f)$  на терминальной поверхности  $\mathcal{C}$  может быть представлено в более удобной форме. Пусть  $s = \begin{bmatrix} \varphi_f & \theta_f \end{bmatrix}^\top \in \mathbb{S}^2$ . Тогда термини-

нальная поверхность параметризуется так:

$$\mathcal{C} = \{\mathbf{z}_C(\mathbf{s}) : \mathbf{s} \in \mathbb{S}^2\}, \text{ где } \mathbf{z}_C(\mathbf{s}) \stackrel{\text{def}}{=} \begin{bmatrix} \ell \sin \varphi_f & \ell \cos \varphi_f & \theta_f \end{bmatrix}^\top.$$

Полярный угол  $\varphi_f$  фиксирует значение финального положения на терминальной поверхности.

В качестве *оптимизируемого функционала* в игре двух идентичных автомобилей рассматривается

$$J[\mathbf{u}(\cdot), \mathbf{v}(\cdot); \mathbf{z}_0] \stackrel{\text{def}}{=} \int_0^{t_f} L(\mathbf{z}(t), \mathbf{u}(\mathbf{z}(t)), \mathbf{v}(\mathbf{z}(t))) dt + G(\mathbf{z}(t_f)),$$

где  $L(\mathbf{z}, \mathbf{u}, \mathbf{v}) = 1$  и  $G(\mathbf{z}) = 0$ . Преследователь стремится минимизировать этот функционал, а убегающий — максимизировать. Для синтезирующих оптимальных управлений  $\mathbf{u}^*(\cdot)$ ,  $\mathbf{v}^*(\cdot)$  и для любых других допустимых управлений  $\mathbf{u}(\cdot)$ ,  $\mathbf{v}(\cdot)$  выполняется следующая цепочка неравенств:

$$J[\mathbf{u}^*(\cdot), \mathbf{v}(\cdot); \mathbf{z}_0] \leq V(\mathbf{z}_0) \stackrel{\text{def}}{=} J[\mathbf{u}^*(\cdot), \mathbf{v}^*(\cdot); \mathbf{z}_0] \leq J[\mathbf{u}(\cdot), \mathbf{v}^*(\cdot); \mathbf{z}_0].$$

Величина  $V(\mathbf{z}_0)$  также называется *значением игры*. В игре двух идентичных автомобилей эта величина имеет смысл времени завершения игры при оптимальном поведении обоих игроков.

Очевидно, что существует множество состояний, из которых убегающий сможет избежать перехвата при любом поведении преследователя. Например, если векторы скоростей игроков сонаправлены и убегающий находится спереди от преследователя, то управление убегающего  $\mathbf{v}(\mathbf{z}) = 0$  гарантирует избежание захвата. Таким образом, множество состояний  $\mathcal{F} \subset \mathcal{S}$ , из которых можно избежать захват, является не пустым. Обозначим через  $\mathcal{W} \subset \mathcal{S}$  множество состояний, в которых нельзя избежать захвата при оптимальной игре преследователя. Поверхность, разделяющая множества  $\mathcal{F}$  и  $\mathcal{W}$ , является *барьером*  $\mathcal{B} \subset \mathcal{S}$ . Далее мы опишем поверхность  $\mathcal{B}$  аналитически. В дополнении мы получим явные выражения для синтезирующих оптимальных управлений  $\mathbf{u}^*(\mathbf{z})$  и  $\mathbf{v}^*(\mathbf{z})$  для  $\mathbf{z} \in \mathcal{B}$ .

## 4.2 Уравнение Айзекса для игры двух идентичных автомобилей

Если начальное состояние игры лежит на поверхности барьера и оба игрока используют оптимальные стратегии, то вектор состояния не покидает барьер. Это значит, что убегающий должен мочь выбрать управление таким образом, что вектор состояния не проникнет внутрь множества  $\mathcal{W}$  в дальнейшие моменты времени, а преследователь — таким образом, что вектор состояния не проникнет в  $\mathcal{F}$ . Свойство предотвращения проникновения вглубь данных множеств описывает понятие *полупроницаемости* поверхности.

Пусть  $\nu_z = [\nu_x \ \nu_y \ \nu_\theta]^\top \in \mathbb{R}^3$  обозначает *опорный вектор* к поверхности барьера  $\mathcal{B}$  в некоторой точке. Длина вектора  $\nu_z$  не обязательно равна единице. Согласно уравнению Айзекса [4, стр. 205–210], условие полупроницаемости  $\mathcal{B}$  записывается следующим образом:

$$\min_{u \in \mathcal{U}} \max_{v \in \mathcal{V}} (\nu_z, \mathbf{f}(z, u, v)) = 0 \quad (4.2)$$

для всех  $z \in \mathcal{B}$ . В частном случае игры двух идентичных автомобилей правая часть уравнений движения может быть представлена следующим образом:

$$\mathbf{f}(z, u, v) = \mathbf{f}_P(z, u) + \mathbf{f}_E(z, v) + \mathbf{g}(z).$$

Здесь используются следующие обозначения:

$$\mathbf{f}_P(z, u) \stackrel{\text{def}}{=} \begin{bmatrix} -uy \\ ux \\ -u \end{bmatrix}, \quad \mathbf{f}_E(z, v) \stackrel{\text{def}}{=} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ v \end{bmatrix}, \quad \mathbf{g}(z) \stackrel{\text{def}}{=} \begin{bmatrix} \sin \theta \\ -1 + \cos \theta \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Функции  $\mathbf{f}_P(\cdot)$ ,  $\mathbf{f}_E(\cdot)$  являются линейными по управлениям игроков. Из уравнения Айзекса (4.2) следует, что дальнейший анализ можно проводить используя функции переключения [131, стр. 147–148]. Обозначим через

$$s_P(z, \nu_z) \stackrel{\text{def}}{=} y\nu_x - x\nu_y + \nu_\theta, \quad s_E(z, \nu_z) \stackrel{\text{def}}{=} \nu_\theta$$

функции переключения преследователя и убегающего. Уравнение Айзекса (4.2) помогает определить функции-кандидаты в оптимальные управления игроков,

зависящие от состояния  $\mathbf{z}$  и опорного вектора  $\nu_z$ :

$$\tilde{u}(\mathbf{z}, \nu_z) \stackrel{\text{def}}{=} \arg \min_{u \in \mathcal{U}} (\nu_z, \mathbf{f}_P(\mathbf{z}, \mathbf{u})), \quad \tilde{v}(\mathbf{z}, \nu_z) \stackrel{\text{def}}{=} \arg \max_{v \in \mathcal{V}} (\nu_z, \mathbf{f}_E(\mathbf{z}, \mathbf{v})). \quad (4.3)$$

Используя определения функций переключения, получим

$$(\nu_z, \mathbf{f}_P(\mathbf{z}, \mathbf{u})) = -u s_P(\mathbf{z}, \nu_z), \quad (\nu_z, \mathbf{f}_E(\mathbf{z}, \mathbf{v})) = v s_E(\mathbf{z}, \nu_z). \quad (4.4)$$

Построение полупроницаемой поверхности можно произвести, используя уравнения динамики для опорного вектора  $\nu_z$  [131, стр. 113–114]. *Сопряжённая система* динамических уравнений выглядит следующим образом:

$$\dot{\nu}_z \stackrel{\text{def}}{=} \begin{bmatrix} \dot{\nu}_x \\ \dot{\nu}_y \\ \dot{\nu}_\theta \end{bmatrix} = -\frac{\partial \mathbf{f}(\mathbf{z}, \mathbf{u}, \mathbf{v})}{\partial \mathbf{z}} \nu_z = \begin{bmatrix} -u \nu_y \\ u \nu_x \\ -\nu_x \cos \theta + \nu_y \sin \theta \end{bmatrix}. \quad (4.5)$$

Эти уравнения справедливы вдоль траекторий, лежащих на барьере. Пусть  $\nu_z(t) = [\nu_x(t) \ \nu_y(t) \ \nu_\theta(t)]^\top$  обозначает решение этих уравнений в момент времени  $t$ .

**Лемма 4.1.** *В игре двух идентичных автомобилей функции-кандидаты в оптимальные управления  $\tilde{u}(\cdot)$ ,  $\tilde{v}(\cdot)$  можно вычислить следующим образом:*

$$\tilde{u}(\mathbf{z}, \nu_z) = \begin{cases} \operatorname{sgn} s_P(\mathbf{z}, \nu_z), & s_P(\mathbf{z}, \nu_z) \neq 0; \\ \operatorname{sgn} \nu_x, & s_P(\mathbf{z}, \nu_z) = 0, \nu_x \neq 0; \\ 0, & s_P(\mathbf{z}, \nu_z) = 0, \nu_x = 0, \nu_y < 0; \\ u \in \{-1, 0, +1\}, & \text{в иных случаях,} \end{cases}$$

$$\tilde{v}(\mathbf{z}, \nu_z) = \begin{cases} \operatorname{sgn} s_E(\mathbf{z}, \nu_z), & s_E(\mathbf{z}, \nu_z) \neq 0; \\ \operatorname{sgn}(\nu_x \cos \theta - \nu_y \sin \theta), & s_E(\mathbf{z}, \nu_z) = 0, \nu_y \sin \theta \neq \nu_x \cos \theta; \\ 0, & s_E(\mathbf{z}, \nu_z) = 0, \nu_y \sin \theta = \nu_x \cos \theta, \nu_x \sin \theta < -\nu_y \cos \theta; \\ v \in \{-1, 0, +1\}, & \text{в иных случаях.} \end{cases}$$

*Доказательство.* Эти уравнения получены в работе [120]. □

В заключении данного раздела приведём решения динамических уравнений (4.1), (4.5) для фиксированных значений  $u, v$  управлений игроков [120; 122]. Решения этих уравнений необходимы для построения барьера путём попятного счёта от терминальной поверхности решения уравнения Айзекса вдоль характеристик (расчёт *проистекания* барьера из границ терминальной поверхности). Для исследования проистекания барьера удобно использовать обратный счёт времени, задаваемый переменной  $\tau = t_f - t$ . Пусть  $\tilde{\mathbf{z}} = [\tilde{x} \ \tilde{y} \ \tilde{\theta}]^\top \in \mathbb{R}^2 \times \mathbb{S}$ . Интегрирование системы (4.1) для постоянных значений  $u \in \mathcal{U}, v \in \mathcal{V}$  и терминального условия  $\mathbf{z}(t_f) = \tilde{\mathbf{z}}$  приводит к следующим решениям:

$$\begin{aligned} \mathbf{z}_{u,v}(\tau; \tilde{\mathbf{z}}) &\stackrel{\text{def}}{=} \mathbf{z}(t_f - \tau) \\ &= \begin{bmatrix} \tilde{x} \cos u\tau + \tilde{y} \sin u\tau + \frac{u\tau^2}{2} \text{sinc}^2 \frac{u\tau}{2} - \tau \text{sinc} \frac{v\tau}{2} \sin \left( \tilde{\theta} + \left(u - \frac{v}{2}\right) \tau \right) \\ \tilde{y} \cos u\tau - \tilde{x} \sin u\tau + \tau \text{sinc} \frac{u\tau}{2} - \tau \text{sinc} \frac{v\tau}{2} \cos \left( \tilde{\theta} + \left(u - \frac{v}{2}\right) \tau \right) \\ \tilde{\theta} + (u - v)\tau \end{bmatrix}. \end{aligned} \quad (4.6)$$

Расстояние между игроками на плоскости в таком случае можно определить так:

$$r_{u,v}(\tau; \tilde{\mathbf{z}}) \stackrel{\text{def}}{=} \sqrt{(\mathbf{z}_{u,v}(\tau; \tilde{\mathbf{z}}), \mathbf{I}_{XY} \mathbf{z}_{u,v}(\tau; \tilde{\mathbf{z}}))}, \text{ где } \mathbf{I}_{XY} \stackrel{\text{def}}{=} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}. \quad (4.7)$$

Пусть  $\tilde{\nu}_{\mathbf{z}} = [\tilde{\nu}_x \ \tilde{\nu}_y \ \tilde{\nu}_\theta]^\top \in \mathbb{R}^3$  и  $\nu_{\mathbf{z}}(t_f) = \tilde{\nu}_{\mathbf{z}}$ , тогда интегрирование (4.5) приводит к следующим выражениям:

$$\nu_{\mathbf{z}}^{u,v}(\tau; \tilde{\mathbf{z}}, \tilde{\nu}_{\mathbf{z}}) \stackrel{\text{def}}{=} \nu_{\mathbf{z}}(t_f - \tau) = \begin{bmatrix} \tilde{\nu}_x \cos u\tau + \tilde{\nu}_y \sin u\tau \\ \tilde{\nu}_y \cos u\tau - \tilde{\nu}_x \sin u\tau \\ \tilde{\nu}_\theta + \tau \text{sinc} \frac{v\tau}{2} \left( \tilde{\nu}_x \cos \left( \tilde{\theta} - \frac{v\tau}{2} \right) - \tilde{\nu}_y \sin \left( \tilde{\theta} - \frac{v\tau}{2} \right) \right) \end{bmatrix}.$$

Это решение также требует, чтобы значения управлений игроков были постоянными.

### 4.3 Проистекание барьера игры двух идентичных автомобилей

Первым шагом в построении барьера является определение *допустимой области* ( $\mathcal{UP}$ ) и её границы. По определению, допустимая область — это такая часть терминальной поверхности, что преследователь может гарантировать завершение игры в следующий момент времени (обеспечить проникновение состояния вглубь терминальной поверхности), не смотря на поведение убегающего [131, стр. 39–40]. Направим единичную нормаль к терминальной поверхности  $\mathcal{C}$  внутрь множества  $\mathcal{S}$  для точек  $\mathbf{z}_C(\mathbf{s})$  при  $\mathbf{s} \in \mathbb{S}^2$ . Обозначим эту нормаль через  $\mathbf{n}_C(\mathbf{s}) = [\sin \varphi_f \ \cos \varphi_f \ 0]^\top \in \mathbb{R}^3$ . Преследователь может гарантировать завершение игры, когда скорость изменения состояния направлена вглубь терминального цилиндра  $\mathcal{C}$ . Таким образом,

$$\begin{aligned} \mathcal{UP} &\stackrel{\text{def}}{=} \left\{ \mathbf{z}_C(\mathbf{s}) : \mathbf{s} \in \mathbb{S}^2, \min_{\mathbf{u} \in \mathcal{U}} \max_{\mathbf{v} \in \mathcal{V}} (\mathbf{n}_C(\mathbf{s}), \mathbf{f}(\mathbf{z}_C(\mathbf{s}), \mathbf{u}, \mathbf{v})) < 0 \right\} \\ &= \left\{ \mathbf{z}_C(\mathbf{s}) : \theta_f \in (0, 2\pi), \varphi_f \in \left( \frac{\theta_f}{2} - \pi, \frac{\theta_f}{2} \right) \right\}. \end{aligned}$$

Граница *допустимой области* ( $\mathcal{BUP}$ ) является геометрическим местом точек начала проистекания барьера в обратном времени. Согласно определению,  $\mathcal{BUP} = \partial \mathcal{UP}$ . Для игры двух идентичных автомобилей граница допустимой области состоит из трёх линий:  $\mathcal{BUP} = \mathcal{BUP}_0 \cup \mathcal{BUP}_{-1} \cup \mathcal{BUP}_{+1}$ . Линия  $\mathcal{BUP}_0$  соответствует значению  $\theta_f = 0_{\mathbb{S}}$ .

$$\mathcal{BUP}_0 \stackrel{\text{def}}{=} \{ \mathbf{z}_{\mathcal{BUP}_0}(\varphi_f) : \varphi_f \in \mathbb{S} \} = \{ \mathbf{z} \in \mathbb{R}^2 \times \mathbb{S} : \theta = 0_{\mathbb{S}}, \ell = \sqrt{x^2 + y^2} \},$$

где

$$\mathbf{z}_{\mathcal{BUP}_0}(\varphi_f) \stackrel{\text{def}}{=} \mathbf{z}_C(\varphi_f, 0_{\mathbb{S}}) = [\ell \sin \varphi_f \ \ell \cos \varphi_f \ 0_{\mathbb{S}}]^\top.$$

Для дальнейших целей нам понадобится единичная нормаль на терминальной поверхности вдоль линии  $\mathcal{BUP}_0$ :

$$\mathbf{n}_{\mathcal{BUP}_0}(\varphi_f) \stackrel{\text{def}}{=} \mathbf{n}_C(\varphi_f, 0_{\mathbb{S}}).$$

Оставшиеся две части множества  $\mathcal{BUP}$  соответствуют случаям  $\varphi_f = \theta_f/2 - \pi$  и  $\varphi_f = \theta_f/2$ . Обозначим<sup>1</sup> через  $\mathcal{BUP}_v$  эти две линии для  $v \in \mathbb{B}$ . Параметрическое описание этих линий имеет следующий вид:

$$\mathcal{BUP}_v \stackrel{\text{def}}{=} \{z_{\mathcal{BUP}_v}(\theta_f) : \theta_f \in (0, 2\pi)\},$$

где

$$z_{\mathcal{BUP}_v}(\theta_f) \stackrel{\text{def}}{=} z_c \left( \frac{(1+v)\pi + \theta_f}{2}, \theta_f \right) = \left[ -v\ell \sin \frac{\theta_f}{2} \quad -v\ell \cos \frac{\theta_f}{2} \quad \theta_f \right]^\top.$$

Единичная нормаль к терминальной поверхности на линии  $\mathcal{BUP}_v$  задаётся следующим способом:

$$\mathbf{n}_{\mathcal{BUP}_v}(\theta_f) \stackrel{\text{def}}{=} \mathbf{n}_c \left( \frac{(1+v)\pi + \theta_f}{2}, \theta_f \right).$$

Проистекание поверхности барьера определяется с помощью функций-кандидатов в оптимальные управления  $\tilde{u}(\cdot)$ ,  $\tilde{v}(\cdot)$  из леммы 4.1. Т. к. эти величины могут быть не заданы однозначно, все возможные сценарии неоднозначности должны быть исследованы при анализе. Начальные условия проистекания в обратном времени задаются с помощью  $\mathbf{z}(t_f) = \mathbf{z}_c(\mathbf{s}) \in \mathcal{BUP}$  и  $\nu_z(t_f) = \mathbf{n}_c(\mathbf{s})$ . Мы рассмотрим отдельно проистекание из  $\mathcal{BUP}$  для  $\mathcal{BUP}_0$  и  $\mathcal{BUP}_v$ .

Для  $\mathcal{BUP}_v$  функции-кандидаты в оптимальные управления  $\tilde{u}(\cdot)$ ,  $\tilde{v}(\cdot)$  определяются единственным образом согласно лемме 4.1:

$$\tilde{u}(z_{\mathcal{BUP}_v}(\theta_f), \mathbf{n}_{\mathcal{BUP}_v}(\theta_f)) = -v, \quad \tilde{v}(z_{\mathcal{BUP}_v}(\theta_f), \mathbf{n}_{\mathcal{BUP}_v}(\theta_f)) = v, \quad (4.8)$$

где  $\theta_f \in (0, 2\pi)$ . Обозначение  $\mathcal{B}_p^v$  будем связывать с частью барьера  $\mathcal{B}$ , которая проистекает из  $\mathcal{BUP}_v$  (напомним, что  $v \in \mathbb{B}$ ). Т. к. не все поверхности, проистекающие из границы допустимой области, входят в барьер, мы используем волну в обозначении соответствующих частей. Таким образом,  $\tilde{\mathcal{B}}_p^v$  проистекает из  $\mathcal{BUP}_v$  и  $\mathcal{B}_p^v = \tilde{\mathcal{B}}_p^v \cap \mathcal{B}$  является валидной частью барьера. Избыточный кусок  $\tilde{\mathcal{B}}_p^v \setminus \mathcal{B}_p^v$  будет определён и отсечён позднее. Используя (4.8) вместе с решениями

<sup>1</sup>В рамках данной главы множество  $\mathbb{B}$  обозначает пару чисел  $\{-1, +1\}$ . Дополнительно мы будем использовать букву  $v$  (упсилон) для обозначения двоичной переменной из этого множества. Эта буква выглядит как обозначение для управления убегающего  $v$  и на самом деле играет роль этого управления.



уравнений движения для фиксированных значений управлений (4.6), получим

$$\begin{aligned} \mathbf{z}_{\mathcal{B}_p^v}(\tau, \theta_f) &\stackrel{\text{def}}{=} \mathbf{z}_{-v, v}(\tau; \mathbf{z}_{\mathcal{BUP}_v}(\theta_f)) \\ &= \begin{bmatrix} -v\ell \sin\left(\frac{\theta_f}{2} - v\tau\right) - v(1 - \cos\tau + \cos(\theta_f - 2v\tau) - \cos(\theta_f - v\tau)) \\ -v\ell \cos\left(\frac{\theta_f}{2} - v\tau\right) + \sin\tau + v(\sin(\theta_f - 2v\tau) - \sin(\theta_f - v\tau)) \\ \theta_f - 2v\tau \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Опорный вектор к  $\tilde{\mathcal{B}}_p^v$  в точке  $\mathbf{z}_{\mathcal{B}_p^v}(\tau, \theta_f)$  вычисляется так:

$$\nu_{\mathbf{z}, \mathcal{B}_p^v}(\tau, \theta_f) \stackrel{\text{def}}{=} \nu_{\mathbf{z}}^{-v, v}(\tau; \mathbf{z}_{\mathcal{BUP}_v}(\theta_f), \mathbf{n}_{\mathcal{BUP}_v}(\theta_f)).$$

Область изменений обратного времени  $\tau$  для  $\tilde{\mathcal{B}}_p^v$  начинается от  $\tau = 0$  и оканчивается в некоторый неопределённый момент времени. Этот момент времени может быть определён как наименьший момент времени, при котором либо происходит зануление одной из функций переключения, либо при котором поверхность  $\tilde{\mathcal{B}}_p^v$  пересекает некоторую другую часть  $\mathcal{B}$ . Второй вариант не доступен для непосредственной проверки, т. к. поверхность  $\mathcal{B}$  не определена ещё полностью. Подсчёт минимального времени переключения одной из функций переключения связан с поиском наименьшего положительного корня следующих уравнений:

$$\begin{aligned} s_P(\mathbf{z}_{\mathcal{B}_p^v}(\tau, \theta_f), \nu_{\mathbf{z}, \mathcal{B}_p^v}(\tau, \theta_f)) &= \cos\frac{\theta_f}{2} - \cos\left(\frac{\theta_f}{2} - v\tau\right) = 0, \\ s_E(\mathbf{z}_{\mathcal{B}_p^v}(\tau, \theta_f), \nu_{\mathbf{z}, \mathcal{B}_p^v}(\tau, \theta_f)) &= \cos\left(\frac{\theta_f}{2} - v\tau\right) - \cos\frac{\theta_f}{2} = 0. \end{aligned}$$

Непосредственной проверкой можно убедиться, что этот корень задан так:  $\tau = (1-v)\pi + v\theta_f$  для  $\theta_f \in (0, 2\pi)$ . Третья компонента вектора  $\mathbf{z}_{\mathcal{B}_p^v}(\tau, \theta_f)$  обнуляется впервые, когда

$$\tau = \frac{(1-v)\pi + v\theta_f}{2}, \quad \theta_f \in (0, 2\pi),$$

т. е. обнуление происходит раньше, чем происходит переключение у функций переключения. Т. к. убегающий может избежать столкновения в случае  $\theta = 0_{\mathbb{S}}$  просто дублируя стратегию преследователя, то заданное состояние не принадлежит барьеру  $\mathcal{B}$  и лежит на избыточной части поверхности  $\tilde{\mathcal{B}}_p^v$ . Подытоживая

сказанное, получим

$$\tilde{\mathcal{B}}_p^v \stackrel{\text{def}}{=} \left\{ \mathbf{z}_{\mathcal{B}_p^v}(\tau, \theta_f) : \theta_f \in (0, 2\pi), \tau \in \left( 0, \frac{(1-v)\pi + v\theta_f}{2} \right) \right\}.$$

В дальнейшем нам понадобится более удобная параметризация поверхности  $\tilde{\mathcal{B}}_p^v$ , заданная через новую переменную  $\vartheta = (1-v)\pi + v\theta_f - 2\tau$ .

$$\tilde{\mathcal{B}}_p^v = \left\{ \bar{\mathbf{z}}_{\mathcal{B}_p^v}(\tau, \vartheta) : \vartheta \in (0, 2\pi), \tau \in \left( 0, \pi - \frac{\vartheta}{2} \right) \right\},$$

где

$$\begin{aligned} \bar{\mathbf{z}}_{\mathcal{B}_p^v}(\tau, \vartheta) &\stackrel{\text{def}}{=} \mathbf{z}_{\mathcal{B}_p^v}(\tau, (1-v)\pi + v\vartheta + 2v\tau) \\ &= \begin{bmatrix} -v \left( \ell \sin \frac{\vartheta}{2} + \cos \vartheta - \cos(\tau + \vartheta) + 1 - \cos \tau \right) \\ -\ell \cos \frac{\vartheta}{2} + \sin \vartheta - \sin(\tau + \vartheta) + \sin \tau \\ (1-v)\pi + v\vartheta \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Такая параметризация более удобна, т. к. третья компонента состояния зависит только от  $\vartheta$ .

Теперь перейдём к расчёту проистекания барьера из  $\mathcal{BUP}_0$ . Функции-кандидаты в оптимальные управления  $\tilde{u}(\cdot)$ ,  $\tilde{v}(\cdot)$  вычисляются так:

$$\begin{aligned} \tilde{u}(\mathbf{z}_{\mathcal{BUP}_0}(\varphi_f), \mathbf{n}_{\mathcal{BUP}_0}(\varphi_f)) &= \begin{cases} \text{sgn} \sin \varphi_f, & \varphi_f \neq 0_{\mathbb{S}}; \\ u \in \{-1, 0, +1\}, & \varphi_f = 0_{\mathbb{S}}, \end{cases} \\ \tilde{v}(\mathbf{z}_{\mathcal{BUP}_0}(\varphi_f), \mathbf{n}_{\mathcal{BUP}_0}(\varphi_f)) &= \begin{cases} \text{sgn} \sin \varphi_f, & \varphi_f \neq 0_{\mathbb{S}}; \\ v \in \{-1, 0, +1\}, & \varphi_f = 0_{\mathbb{S}}. \end{cases} \end{aligned} \quad (4.9)$$

Если  $\varphi_f \neq 0_{\mathbb{S}}$ , то заданные управления равны друг другу. Подставляя  $u = v = v \in \mathbb{B}$  и  $\tilde{\mathbf{z}} = \mathbf{z}_{\mathcal{BUP}_0}(\varphi_f)$  в (4.7), получим  $r_{v,v}(\tau; \mathbf{z}_{\mathcal{BUP}_0}(\varphi_f)) = \ell$ . Это означает, что состояние системы сохраняет своё положение на  $\mathcal{BUP}_0$ , а значит проистекания в этом случае не происходит.

Дальше, если  $\varphi_f = 0_{\mathbb{S}}$ , то, согласно (4.9), нужно проанализировать девять сценариев  $u, v \in \{-1, 0, +1\}$ . Используя формулу Тейлора для выражения (4.7),

получим следующее выражение для расстояния между игроками

$$r_{u,v}(\tau; \mathbf{z}_{\mathcal{BUP}_0}(0_{\mathbb{S}})) = \ell + \frac{v^2 - u^2}{6}\tau^3 + \frac{(u - v)^2}{8\ell}\tau^4 + o(\tau^4). \quad (4.10)$$

Если  $u = v \in \{-1, 0, +1\}$ , как в предыдущем случае, то  $r_{v,v}(\tau; \mathbf{z}_{\mathcal{BUP}_0}(0_{\mathbb{S}})) = \ell$ .

Если  $u \in \mathbb{B}$  и  $v = 0$ , то, согласно (4.10), расстояние становится меньше чем радиус захвата в начале проистекания. Область внутри терминальной поверхности не принадлежит игровому пространству  $\mathcal{S}$ , а значит этот случай можно не рассматривать.

Теперь, пусть  $v = -u = v \in \mathbb{B}$ . По аналогии с обозначениями  $\mathcal{B}_{\mathcal{P}}^v$ ,  $\tilde{\mathcal{B}}_{\mathcal{P}}^v$ , обозначения  $\mathcal{B}_{\mathcal{P}\mathcal{L}}^v$ ,  $\tilde{\mathcal{B}}_{\mathcal{P}\mathcal{L}}^v$  будем ассоциировать с частью барьера  $\mathcal{B}$ , которая проистекает из точки  $\begin{bmatrix} 0 & \ell & 0_{\mathbb{S}} \end{bmatrix}^{\top} \in \mathcal{BUP}_0$ .  $\tilde{\mathcal{B}}_{\mathcal{P}\mathcal{L}}^v$  является линией, в то время как  $\mathcal{B}_{\mathcal{P}\mathcal{L}}^v$  является поверхностью. Аналогичным образом можно описать линию  $\tilde{\mathcal{B}}_{\mathcal{P}\mathcal{L}}^v$ :

$$\mathbf{z}_{\mathcal{B}_{\mathcal{P}\mathcal{L}}^v}(\tau) \stackrel{\text{def}}{=} \mathbf{z}_{-v,v}(\tau; \mathbf{z}_{\mathcal{BUP}_0}(0_{\mathbb{S}})) = \begin{bmatrix} -v(\ell \sin \tau - 2 \cos \tau + 1 + \cos 2\tau) \\ \ell \cos \tau + 2 \sin \tau - \sin 2\tau \\ (1 + v)\pi - 2v\tau \end{bmatrix}$$

и соответствующий опорный вектор

$$\nu_{\mathbf{z}, \mathcal{B}_{\mathcal{P}\mathcal{L}}^v}(\tau) \stackrel{\text{def}}{=} \nu_{\mathbf{z}}^{-v,v}(\tau; \mathbf{z}_{\mathcal{BUP}_0}(0_{\mathbb{S}}), \mathbf{n}_{\mathcal{BUP}_0}(0_{\mathbb{S}})).$$

Анализ функций переключения

$$s_P(\mathbf{z}_{\mathcal{B}_{\mathcal{P}\mathcal{L}}^v}(\tau), \nu_{\mathbf{z}, \mathcal{B}_{\mathcal{P}\mathcal{L}}^v}(\tau)) = v(\cos \tau - 1) = 0,$$

$$s_E(\mathbf{z}_{\mathcal{B}_{\mathcal{P}\mathcal{L}}^v}(\tau), \nu_{\mathbf{z}, \mathcal{B}_{\mathcal{P}\mathcal{L}}^v}(\tau)) = v(1 - \cos \tau) = 0$$

даёт минимальное время переключения  $\tau = 2\pi$ . Третья компонента состояния  $\mathbf{z}_{\mathcal{B}_{\mathcal{P}\mathcal{L}}^v}(\tau)$  обнуляется при  $\tau = \pi$ . Таким образом, можно заключить, что

$$\tilde{\mathcal{B}}_{\mathcal{P}\mathcal{L}}^v \stackrel{\text{def}}{=} \{\mathbf{z}_{\mathcal{B}_{\mathcal{P}\mathcal{L}}^v}(\tau) : \tau \in (0, \pi)\}. \quad (4.11)$$

Используя новую параметризацию  $\tau = \pi - \vartheta/2$ , можно переписать (4.11) так:

$$\tilde{\mathcal{B}}_{\mathcal{P}\mathcal{L}}^v = \{\bar{\mathbf{z}}_{\mathcal{B}_{\mathcal{P}\mathcal{L}}^v}(\vartheta) : \vartheta \in (0, 2\pi)\},$$

где

$$\bar{\mathbf{z}}_{\mathcal{B}_{\mathcal{P}\mathcal{L}}^v}(\vartheta) \stackrel{\text{def}}{=} \mathbf{z}_{\mathcal{B}_{\mathcal{P}\mathcal{L}}^v} \left( \pi - \frac{\vartheta}{2} \right) = \begin{bmatrix} -v \left( \ell \sin \frac{\vartheta}{2} + 2 \cos \frac{\vartheta}{2} + 1 + \cos \vartheta \right) \\ -\ell \cos \frac{\vartheta}{2} + 2 \sin \frac{\vartheta}{2} + \sin \vartheta \\ (1-v)\pi + v\vartheta \end{bmatrix}.$$

Простая проверка показывает, что  $\bar{\mathbf{z}}_{\mathcal{B}_{\mathcal{P}}^v}(\vartheta, \pi - \vartheta/2) = \bar{\mathbf{z}}_{\mathcal{B}_{\mathcal{P}\mathcal{L}}^v}(\vartheta)$  для всех  $\vartheta \in (0, 2\pi)$ , из чего следует, что  $\tilde{\mathcal{B}}_{\mathcal{P}\mathcal{L}}^v$  является частью границы поверхности  $\tilde{\mathcal{B}}_{\mathcal{P}}^v$ .

В заключении рассмотрим случай  $u = 0$ ,  $v = v \in \mathbb{B}$ . Далее будет показано, что в этом случае из допустимой области проистекает *универсальная линия* барьера. Свяжем обозначения  $\mathcal{B}_{\mathcal{U}\mathcal{L}}^v$ ,  $\tilde{\mathcal{B}}_{\mathcal{U}\mathcal{L}}^v$  с соответствующим проистечением универсальной линии. Точки на линии  $\tilde{\mathcal{B}}_{\mathcal{U}\mathcal{L}}^v$  описываются так:

$$\mathbf{z}_{\mathcal{B}_{\mathcal{U}\mathcal{L}}^v}(\tau) \stackrel{\text{def}}{=} \mathbf{z}_{0,v}(\tau; \mathbf{z}_{\mathcal{B}\mathcal{U}\mathcal{P}_0}(0_{\mathbb{S}})) = \begin{bmatrix} v(1 - \cos \tau) \\ \ell + \tau - \sin \tau \\ (1+v)\pi - v\tau \end{bmatrix}.$$

Опорный вектор вычисляется следующим образом:

$$\nu_{\mathbf{z}, \mathcal{B}_{\mathcal{U}\mathcal{L}}^v}(\tau) \stackrel{\text{def}}{=} \nu_{\mathbf{z}}^{0,v}(\tau; \mathbf{z}_{\mathcal{B}\mathcal{U}\mathcal{P}_0}(0_{\mathbb{S}}), \mathbf{n}_{\mathcal{B}\mathcal{U}\mathcal{P}_0}(0_{\mathbb{S}})) = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ v(1 - \cos \tau) \end{bmatrix}. \quad (4.12)$$

Анализ функций переключения для  $\tilde{\mathcal{B}}_{\mathcal{U}\mathcal{L}}^v$  приводит к

$$s_{\mathcal{P}}(\mathbf{z}_{\mathcal{B}_{\mathcal{U}\mathcal{L}}^v}(\tau), \nu_{\mathbf{z}, \mathcal{B}_{\mathcal{U}\mathcal{L}}^v}(\tau)) = 0, \quad s_{\mathcal{E}}(\mathbf{z}_{\mathcal{B}_{\mathcal{U}\mathcal{L}}^v}(\tau), \nu_{\mathbf{z}, \mathcal{B}_{\mathcal{U}\mathcal{L}}^v}(\tau)) = v(1 - \cos \tau).$$

Т. к. первая компонента (4.12) равна нулю, а вторая компонента неотрицательна, то проистечения с  $u \in \{-1, 0, +1\}$  не происходит для  $\tilde{\mathcal{B}}_{\mathcal{U}\mathcal{L}}^v$  (согласно лемме 4.1). Минимальное время переключения для убегающего  $\tau = 2\pi$ . Таким образом,

$$\tilde{\mathcal{B}}_{\mathcal{U}\mathcal{L}}^v \stackrel{\text{def}}{=} \{\mathbf{z}_{\mathcal{B}_{\mathcal{U}\mathcal{L}}^v}(\tau) : \tau \in (0, 2\pi)\}.$$

Для однообразия обозначений определим  $\bar{\mathbf{z}}_{\mathcal{B}_{\mathcal{U}\mathcal{L}}^v}(\vartheta) = \mathbf{z}_{\mathcal{B}_{\mathcal{U}\mathcal{L}}^v}(\vartheta)$ .

Таким образом, первичное проистечение траекторий из  $\mathcal{B}\mathcal{U}\mathcal{P}$  исчерпывается двумя поверхностями  $\tilde{\mathcal{B}}_{\mathcal{P}}^v$  и четырьмя линиями  $\tilde{\mathcal{B}}_{\mathcal{P}\mathcal{L}}^v$ ,  $\tilde{\mathcal{B}}_{\mathcal{U}\mathcal{L}}^v$  ( $v \in \mathbb{B}$ ). В то же время, каждая линия  $\tilde{\mathcal{B}}_{\mathcal{P}\mathcal{L}}^v$  является границей поверхности  $\tilde{\mathcal{B}}_{\mathcal{P}}^v$ . Далее мы

опишем притоки линии  $\tilde{\mathcal{B}}_{u\mathcal{L}}^v$ , которые состоят из ретроградных траекторий (характеристик), истекающих из этой линии.

Исследуем истечение притоков к  $\tilde{\mathcal{B}}_{u\mathcal{L}}^v$  для двух возможных сценариев  $u \in \mathbb{W}$ . В первом сценарии будем полагать, что управления игроков равны, и поворот происходит в одном направлении. Во втором сценарии игроки поворачивают в разных направлениях, т.е. управления игроков различаются.

Свяжем обозначения  $\mathcal{B}_{\mathcal{T}\mathcal{S}}^v$ ,  $\tilde{\mathcal{B}}_{\mathcal{T}\mathcal{S}}^v$  с истечением притоков из  $\tilde{\mathcal{B}}_{u\mathcal{L}}^v$  с равными управлениями игроков. Подставляя  $u = v = v \in \mathbb{W}$  в решения уравнений движения для фиксированных величин управления, получим

$$\mathbf{z}_{\mathcal{B}_{\mathcal{T}\mathcal{S}}^v}(\tau_1, \tau_2) \stackrel{\text{def}}{=} \mathbf{z}_{v,v}(\tau_2; \mathbf{z}_{\mathcal{B}_{u\mathcal{L}}^v}(\tau_1)) = \begin{bmatrix} v((\ell + \tau_1) \sin \tau_2 + 1 - \cos \tau_1) \\ (\ell + \tau_1) \cos \tau_2 - \sin \tau_1 \\ (1 + v)\pi - v\tau_1 \end{bmatrix}.$$

Здесь  $\tau_1 \in (0, 2\pi)$  является временем, потраченным на движение по  $\tilde{\mathcal{B}}_{u\mathcal{L}}^v$ , а  $\tau_2$  — это время, потраченное на движение в притоке к  $\tilde{\mathcal{B}}_{u\mathcal{L}}^v$ . Опорный вектор вычисляется так:

$$\nu_{\mathbf{z}, \mathcal{B}_{\mathcal{T}\mathcal{S}}^v}(\tau_1, \tau_2) \stackrel{\text{def}}{=} \nu_{\mathbf{z}}^{v,v}(\tau_2; \mathbf{z}_{\mathcal{B}_{u\mathcal{L}}^v}(\tau_1), \nu_{\mathbf{z}, \mathcal{B}_{u\mathcal{L}}^v}(\tau_1)).$$

Вычисляя функции переключения на  $\tilde{\mathcal{B}}_{\mathcal{T}\mathcal{S}}^v$ , получим

$$\begin{aligned} s_P(\mathbf{z}_{\mathcal{B}_{\mathcal{T}\mathcal{S}}^v}(\tau_1, \tau_2), \nu_{\mathbf{z}, \mathcal{B}_{\mathcal{T}\mathcal{S}}^v}(\tau_1, \tau_2)) &= v(1 - \cos \tau_2) = 0, \\ s_E(\mathbf{z}_{\mathcal{B}_{\mathcal{T}\mathcal{S}}^v}(\tau_1, \tau_2), \nu_{\mathbf{z}, \mathcal{B}_{\mathcal{T}\mathcal{S}}^v}(\tau_1, \tau_2)) &= v(1 - \cos(\tau_1 + \tau_2)) = 0. \end{aligned}$$

Минимальное положительное решение этих уравнений  $\tau_2 = 2\pi - \tau_1$  соответствует нулю функции переключения убегающего. Таким образом:

$$\tilde{\mathcal{B}}_{\mathcal{T}\mathcal{S}}^v \stackrel{\text{def}}{=} \{ \mathbf{z}_{\mathcal{B}_{\mathcal{T}\mathcal{S}}^v}(\tau_1, \tau_2) : \tau_1 \in (0, 2\pi), \tau_2 \in (0, 2\pi - \tau_1) \}.$$

Используя новую параметризацию  $\tau_1 = \vartheta$ ,  $\tau_2 = \tau - \vartheta$ , можно переписать выражения выше так:

$$\tilde{\mathcal{B}}_{\mathcal{T}\mathcal{S}}^v = \{ \bar{\mathbf{z}}_{\mathcal{B}_{\mathcal{T}\mathcal{S}}^v}(\tau, \vartheta) : \vartheta \in (0, 2\pi), \tau \in (\vartheta, 2\pi) \},$$

где

$$\bar{\mathbf{z}}_{\mathcal{B}_{\tau_S}^v}(\tau, \vartheta) \stackrel{\text{def}}{=} \mathbf{z}_{\mathcal{B}_{\tau_S}^v}(\vartheta, \tau - \vartheta) = \begin{bmatrix} v((\ell + \vartheta) \sin(\tau - \vartheta) + 1 - \cos \vartheta) \\ (\ell + \vartheta) \cos(\tau - \vartheta) - \sin \vartheta \\ (1 + v)\pi - v\vartheta \end{bmatrix}.$$

Отметим, что  $\tau = \tau_1 + \tau_2$  имеет смысл времени до прибытия на  $\mathcal{BUP}_0$  (суммарное время движение вдоль притока и вдоль универсальной линии на барьере).

Далее, свяжем обозначения  $\mathcal{B}_{\tau_D}^v$ ,  $\tilde{\mathcal{B}}_{\tau_D}^v$  с проистечением притоков из универсальной линии с различными значениями управлений игроков. Подставляя  $v = -u = v \in \mathbb{B}$  в решение уравнений движения, получим

$$\begin{aligned} \mathbf{z}_{\mathcal{B}_{\tau_D}^v}(\tau_1, \tau_2) &\stackrel{\text{def}}{=} \mathbf{z}_{-v, v}(\tau_2; \mathbf{z}_{\mathcal{B}_{u_C}^v}(\tau_1)) \\ &= \begin{bmatrix} v(-(\ell + \tau_1) \sin \tau_2 + 2 \cos \tau_2 - \cos(\tau_1 + 2\tau_2) - 1) \\ (\ell + \tau_1) \cos \tau_2 + 2 \sin \tau_2 - \sin(\tau_1 + 2\tau_2) \\ (1 + v)\pi - v(\tau_1 + 2\tau_2) \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Переменные  $\tau_1$ ,  $\tau_2$  имеют тот же смысл, что и в предыдущем случае. Опорный вектор вычисляется так:

$$\nu_{\mathbf{z}, \mathcal{B}_{\tau_D}^v}(\tau_1, \tau_2) \stackrel{\text{def}}{=} \nu_{\mathbf{z}}^{-v, v}(\tau_2; \mathbf{z}_{\mathcal{B}_{u_C}^v}(\tau_1), \nu_{\mathbf{z}, \mathcal{B}_{u_C}^v}(\tau_1)).$$

Вычисление функций переключения даёт:

$$\begin{aligned} s_P(\mathbf{z}_{\mathcal{B}_{\tau_D}^v}(\tau_1, \tau_2), \nu_{\mathbf{z}, \mathcal{B}_{\tau_D}^v}(\tau_1, \tau_2)) &= v(\cos \tau_2 - 1) = 0, \\ s_E(\mathbf{z}_{\mathcal{B}_{\tau_D}^v}(\tau_1, \tau_2), \nu_{\mathbf{z}, \mathcal{B}_{\tau_D}^v}(\tau_1, \tau_2)) &= v(1 - \cos(\tau_1 + \tau_2)) = 0. \end{aligned}$$

Наименьший положительный корень  $\tau_2 = 2\pi - \tau_1$  также соответствует обнулению функции переключения убегающего, но третья компонента состояния  $\mathbf{z}_{\mathcal{B}_{\tau_D}^v}(\tau_1, \tau_2)$  обнуляется раньше, при  $\tau_2 = \pi - \tau_1/2$ . Таким образом,

$$\tilde{\mathcal{B}}_{\tau_D}^v \stackrel{\text{def}}{=} \left\{ \mathbf{z}_{\mathcal{B}_{\tau_D}^v}(\tau_1, \tau_2) : \tau_1 \in (0, 2\pi), \tau_2 \in \left(0, \pi - \frac{\tau_1}{2}\right) \right\}.$$

Новая параметризация  $\tau_1 = 2\tau - \vartheta$ ,  $\tau_2 = \vartheta - \tau$  задаёт

$$\tilde{\mathcal{B}}_{\tau_D}^v = \left\{ \bar{\mathbf{z}}_{\mathcal{B}_{\tau_D}^v}(\tau, \vartheta) : \vartheta \in (0, 2\pi), \tau \in \left(\frac{\vartheta}{2}, \vartheta\right) \right\},$$

где

$$\begin{aligned} \bar{z}_{\mathcal{B}_{TD}^v}(\tau, \vartheta) &\stackrel{\text{def}}{=} z_{\mathcal{B}_{TD}^v}(2\tau - \vartheta, \vartheta - \tau) \\ &= \begin{bmatrix} v((\ell + 2\tau - \vartheta) \sin(\tau - \vartheta) + 2 \cos(\tau - \vartheta) - 1 - \cos \vartheta) \\ (\ell + 2\tau - \vartheta) \cos(\tau - \vartheta) - 2 \sin(\tau - \vartheta) - \sin \vartheta \\ (1 + v)\pi - v\vartheta \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Простые вычисления показывают, что  $\bar{z}_{\mathcal{B}_{TD}^v}(\vartheta/2, \vartheta) = \bar{z}_{\mathcal{B}_{\mathcal{L}}^v}(2\pi - \vartheta)$  для всех  $\vartheta \in (0, 2\pi)$ , доказывая, что линия  $\tilde{\mathcal{B}}_{\mathcal{L}}^v$  является частью границы поверхности  $\tilde{\mathcal{B}}_{TD}^v$ .

#### 4.4 Отсечение лишних частей поверхностей, содержащих барьер игры двух идентичных автомобилей

Теперь исследуем вопрос взаимных пересечений описанных проистекающих поверхностей, содержащих барьер. Описание, представленное выше, является удобной формой изложения результатов, описанных в [120; 122]. Дальнейший анализ уточняет эти результаты и приводит к явным выражениям для синтезирующих оптимальных управлений на барьере.

Перейдём к вопросу определения избыточных частей полученных полупроницаемых поверхностей. Эти избыточные части являются полупроницаемыми, но они не входят в описание барьера  $\mathcal{B}$ . Игра двух идентичных автомобилей имеет симметрию  $(x, y, \theta, u, v) \leftrightarrow (-x, y, 2\pi - \theta, -u, -v)$ , т. е. уравнения движения (4.1) и терминальная поверхность  $\mathcal{C}$  не изменяются, когда мы используем указанную замену переменных. Это обстоятельство позволяет исследовать игру двух идентичных автомобилей без потери общности для  $\theta \in (0, \pi]$ . Для остальных значений  $\theta \in (\pi, 2\pi)$  мы можем использовать эту симметрию для обобщения результатов.

Графический анализ  $\theta$ -сечений проистекающих поверхностей (см. рис. 4.2) показывает, что для достаточно малых величин радиуса захвата  $\ell$  (например, для  $\ell = 1/2$ ), поверхность  $\tilde{\mathcal{B}}_{\mathcal{P}}^v$  пересекает поверхность  $\tilde{\mathcal{B}}_{TD}^v$ , но поверхность  $\tilde{\mathcal{B}}_{TD}^v$  не пересекает  $\tilde{\mathcal{B}}_{TS}^v$ . Однако, в то же время, для достаточно больших значений

радиуса захвата  $\ell$  (например, для  $\ell = 1$ ), наблюдается противоположное поведение. Это обстоятельство позволяет предположить, что существует промежуточное значение  $\ell = \ell_J$ , при котором поверхность  $\tilde{\mathcal{B}}_{\mathcal{P}}^v$  не пересекает поверхность  $\tilde{\mathcal{B}}_{\mathcal{T}\mathcal{D}}^{-v}$ , и также поверхность  $\tilde{\mathcal{B}}_{\mathcal{T}\mathcal{D}}^v$  не пересекает поверхность  $\tilde{\mathcal{B}}_{\mathcal{T}\mathcal{S}}^{-v}$ , но границы всех этих поверхностей имеют общую точку пересечения для некоторого  $\theta = (1 - v)\pi + v\vartheta_J$ , где  $\vartheta_J \in (0, \pi)$  (см. рис. 4.3).

**Лемма 4.2.** *Существует единственное значение радиуса захвата  $\ell = \ell_J$ , при котором линия  $\tilde{\mathcal{B}}_{\mathcal{P}\mathcal{L}}^v$  пересекает линию  $\tilde{\mathcal{B}}_{\mathcal{U}\mathcal{L}}^{-v}$ .*

Для дальнейших целей нам понадобится следующая матрица поворотов:

$$\mathbf{R}_v(\alpha) \stackrel{\text{def}}{=} \begin{bmatrix} -v \cos \alpha & \sin \alpha & 0 \\ v \sin \alpha & \cos \alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad \alpha \in \mathbb{S}, \quad v \in \mathbb{B}.$$

Отметим, что для всех  $v \in \mathbb{B}$ ,  $\alpha \in \mathbb{S}$  эта матрица является невырожденной. Также мы будем дополнительно использовать следующие функции:

$$\xi_\ell(\alpha) \stackrel{\text{def}}{=} (\ell + \alpha) \sin \frac{\alpha}{2} + 2 \cos \frac{\alpha}{2}, \quad \eta_\ell(\alpha) \stackrel{\text{def}}{=} (\ell + \alpha) \cos \frac{\alpha}{2} - 2 \sin \frac{\alpha}{2}.$$

*Доказательство.* Сначала докажем, что система

$$\bar{\mathbf{z}}_{\mathcal{B}_{\mathcal{U}\mathcal{L}}^{-v}}(\vartheta) - \bar{\mathbf{z}}_{\mathcal{B}_{\mathcal{P}\mathcal{L}}^v}(\vartheta) = \mathbf{0}, \quad \vartheta \in (0, 2\pi), \quad \ell \in \mathbb{R}^+$$

имеет единственное решение для каждого  $v \in \mathbb{B}$ . Используя матрицу поворота  $\mathbf{R}_v(\vartheta/2)$ , можно переписать систему уравнений так:

$$\mathbf{R}_v \left( \frac{\vartheta}{2} \right) \left( \bar{\mathbf{z}}_{\mathcal{B}_{\mathcal{U}\mathcal{L}}^{-v}}(\vartheta) - \bar{\mathbf{z}}_{\mathcal{B}_{\mathcal{P}\mathcal{L}}^v}(\vartheta) \right) = \begin{bmatrix} \xi_\ell(\vartheta) - 2 - 4 \cos \frac{\vartheta}{2} \\ \eta_\ell(\vartheta) + \ell \\ 0_{\mathbb{S}} \end{bmatrix} = \mathbf{0}.$$

Исключая переменную  $\ell$  из системы уравнений, получим

$$\vartheta - 4 \left( 1 + \cos \frac{\vartheta}{2} \right) \operatorname{ctg} \frac{\vartheta}{2} = 0, \quad \vartheta \in (0, 2\pi). \quad (4.13)$$



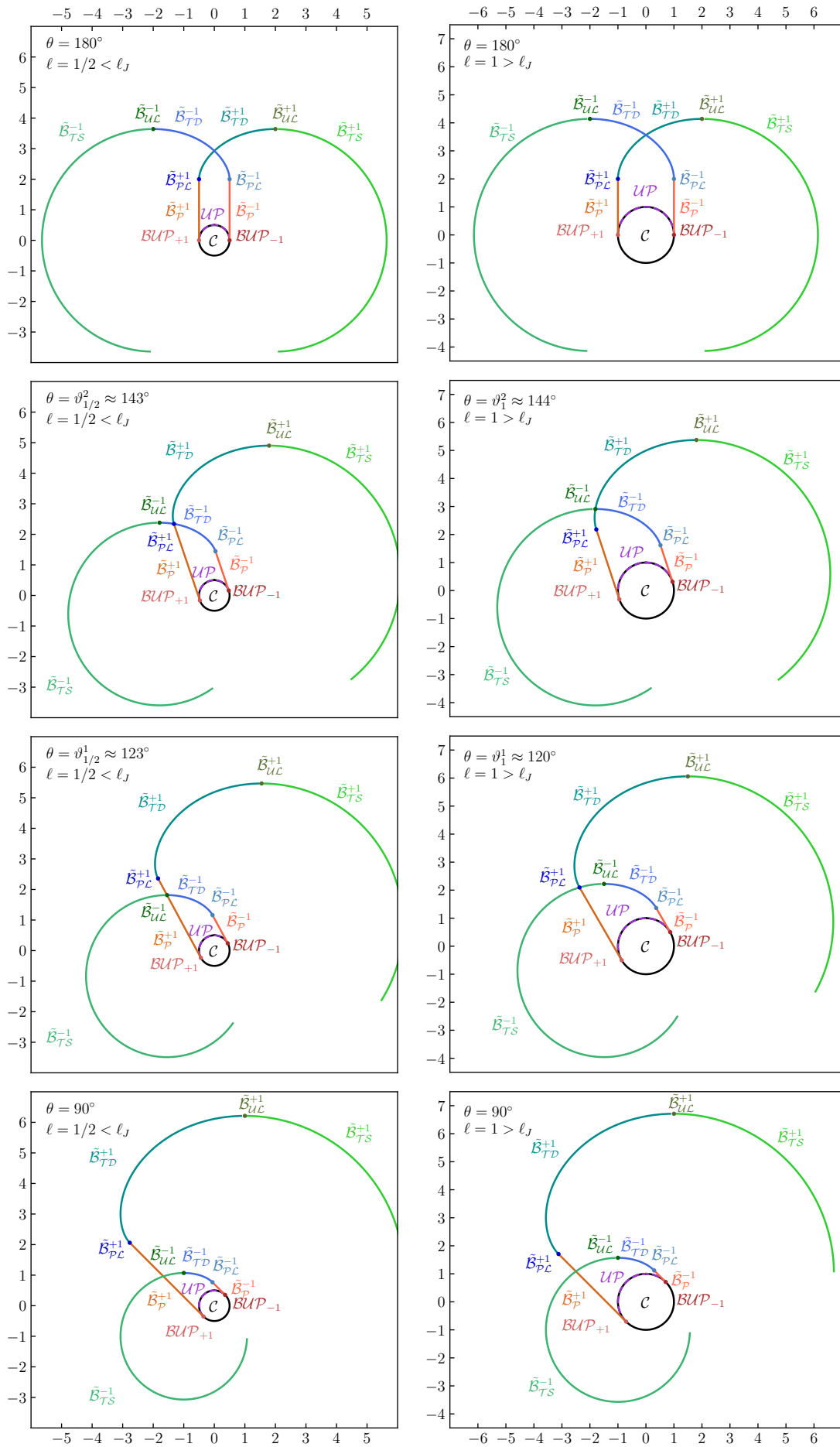


Рисунок 4.2 — Сечения проистекающих поверхностей для малого и большого радиусов захвата.

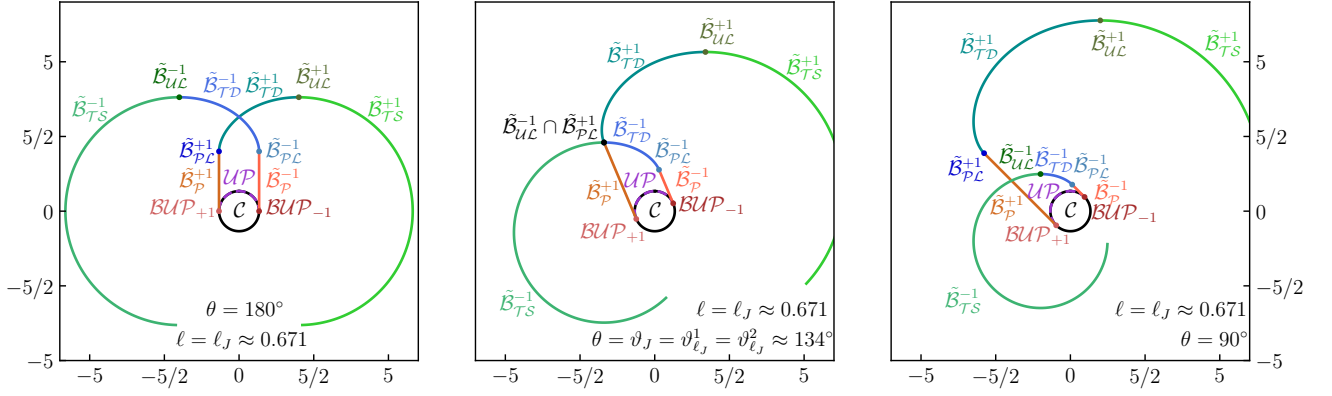


Рисунок 4.3 — Сечения проистекающих поверхностей для среднего радиуса захвата  $\ell = \ell_J$ .

Левая часть уравнения (4.13) стремится к  $-\infty$ , при  $\vartheta \rightarrow +0$ , и к  $2\pi$ , при  $\vartheta \rightarrow 2\pi - 0$ . Производная левой части равна

$$1 + 2 \left( \cos \frac{\vartheta}{2} + \frac{1 + \cos \frac{\vartheta}{2}}{\sin^2 \frac{\vartheta}{2}} \right) = \frac{(1 + \cos \frac{\vartheta}{2})^2 (3 - 2 \cos \frac{\vartheta}{2})}{\sin^2 \frac{\vartheta}{2}} > 0, \quad \vartheta \in (0, 2\pi).$$

Таким образом, левая часть уравнения (4.13) является непрерывной и монотонной функцией, причём она имеет противоположные знаки для  $\vartheta \rightarrow +0$  и  $\vartheta \rightarrow 2\pi - 0$ . Значит уравнение (4.13) имеет единственный корень.  $\square$

Применение метода Ньютона даёт следующую численную оценку  $\vartheta_J \approx 2.343 \approx 134^\circ$ . Соответствующий радиус захвата при этом

$$\ell_J \stackrel{\text{def}}{=} -2 \frac{\cos \frac{\vartheta_J}{2} + \cos \vartheta_J}{\sin \frac{\vartheta_J}{2}} \approx 0.671.$$

Наличие пересечения полупроницаемых поверхностей, образующих барьер, свидетельствует о наличии рассеивающей линии на барьере. Анализ  $\theta$ -срезов на рис. 4.2–4.3 показывает, что рассеивающая линия строится различным образом, в зависимости от значения радиуса захвата  $\ell$ . В то же время, для значений  $\theta$  близких к  $0_S$  для всех значений радиуса захвата рассеивающая линия состоит из пересечения  $\tilde{\mathcal{B}}_P^v \cap \tilde{\mathcal{B}}_{TS}^{-v}$ , а для значений  $\theta$  близких к  $\pi$  — из пересечения  $\tilde{\mathcal{B}}_{TD}^v \cap \tilde{\mathcal{B}}_{TD}^{-v}$ . Будем использовать обозначение  $\mathcal{B}_{DL}$  для рассеивающей линии. Принимая во внимание сказанное выше, выделим три случая построения рассеивающей линии:

– случай *малых* значений радиуса  $\ell \in (0, \ell_J)$ :

$$\mathcal{B}_{D\mathcal{L}} \stackrel{\text{def}}{=} \bigcup_{v \in \mathbb{B}} \left[ \left( \tilde{\mathcal{B}}_{\mathcal{P}}^v \cap \tilde{\mathcal{B}}_{\mathcal{T}\mathcal{S}}^{-v} \right) \cup \left( \tilde{\mathcal{B}}_{\mathcal{P}}^v \cap \tilde{\mathcal{B}}_{\mathcal{U}\mathcal{L}}^{-v} \right) \cup \left( \tilde{\mathcal{B}}_{\mathcal{P}}^v \cap \tilde{\mathcal{B}}_{\mathcal{T}\mathcal{D}}^{-v} \right) \right. \\ \left. \cup \left( \tilde{\mathcal{B}}_{\mathcal{P}\mathcal{L}}^v \cap \tilde{\mathcal{B}}_{\mathcal{T}\mathcal{D}}^{-v} \right) \cup \left( \tilde{\mathcal{B}}_{\mathcal{T}\mathcal{D}}^v \cap \tilde{\mathcal{B}}_{\mathcal{T}\mathcal{D}}^{-v} \right) \right];$$

– случай *среднего* значения радиуса  $\ell = \ell_J$ :

$$\mathcal{B}_{D\mathcal{L}} \stackrel{\text{def}}{=} \bigcup_{v \in \mathbb{B}} \left[ \left( \tilde{\mathcal{B}}_{\mathcal{P}}^v \cap \tilde{\mathcal{B}}_{\mathcal{T}\mathcal{S}}^{-v} \right) \cup \left( \tilde{\mathcal{B}}_{\mathcal{P}\mathcal{L}}^v \cap \tilde{\mathcal{B}}_{\mathcal{U}\mathcal{L}}^{-v} \right) \cup \left( \tilde{\mathcal{B}}_{\mathcal{T}\mathcal{D}}^v \cap \tilde{\mathcal{B}}_{\mathcal{T}\mathcal{D}}^{-v} \right) \right];$$

– случай *больших* значений радиуса  $\ell \in (\ell_J, +\infty)$ :

$$\mathcal{B}_{D\mathcal{L}} \stackrel{\text{def}}{=} \bigcup_{v \in \mathbb{B}} \left[ \left( \tilde{\mathcal{B}}_{\mathcal{P}}^v \cap \tilde{\mathcal{B}}_{\mathcal{T}\mathcal{S}}^{-v} \right) \cup \left( \tilde{\mathcal{B}}_{\mathcal{P}\mathcal{L}}^v \cap \tilde{\mathcal{B}}_{\mathcal{T}\mathcal{S}}^{-v} \right) \cup \left( \tilde{\mathcal{B}}_{\mathcal{T}\mathcal{D}}^v \cap \tilde{\mathcal{B}}_{\mathcal{T}\mathcal{S}}^{-v} \right) \right. \\ \left. \cup \left( \tilde{\mathcal{B}}_{\mathcal{T}\mathcal{D}}^v \cap \tilde{\mathcal{B}}_{\mathcal{U}\mathcal{L}}^{-v} \right) \cup \left( \tilde{\mathcal{B}}_{\mathcal{T}\mathcal{D}}^v \cap \tilde{\mathcal{B}}_{\mathcal{T}\mathcal{D}}^{-v} \right) \right].$$

Чтобы определить при каком диапазоне изменений  $\theta$  имеет место пересечение  $\tilde{\mathcal{B}}_{\mathcal{P}}^v \cap \tilde{\mathcal{B}}_{\mathcal{T}\mathcal{S}}^{-v}$  в случае малых значений  $\ell$ , мы должны найти критическое значение угла, при котором универсальная линия  $\tilde{\mathcal{B}}_{\mathcal{U}\mathcal{L}}^{-v}$  пересекает поверхность  $\tilde{\mathcal{B}}_{\mathcal{P}}^v$ . Если значения  $\ell$  большие, то критическое значение угла соответствует пересечению линии  $\tilde{\mathcal{B}}_{\mathcal{P}\mathcal{L}}^v$  с поверхностью  $\tilde{\mathcal{B}}_{\mathcal{T}\mathcal{S}}^{-v}$ . Для среднего значения  $\ell$  критический угол равен  $(1 - v)\pi + v\vartheta_J$ . Обозначим через  $\vartheta_\ell^1$  критическое значение угла в зависимости от радиуса захвата  $\ell$  при  $v = +1$ . Если  $v = -1$ , то это значение угла равно  $2\pi - \vartheta_\ell^1$  в силу симметрии задачи. Покажем как явно вычислить перечисленные пересечения.

Пересечение линии  $\tilde{\mathcal{B}}_{\mathcal{U}\mathcal{L}}^{-v}$  с  $\tilde{\mathcal{B}}_{\mathcal{P}}^v$  задаётся следующей системой уравнений с ограничениями на параметры:

$$\bar{z}_{\mathcal{B}_{\mathcal{U}\mathcal{L}}^{-v}}(\vartheta) = \bar{z}_{\mathcal{B}_{\mathcal{P}}^v}(\tau, \vartheta), \quad \vartheta \in (0, 2\pi), \quad \tau \in \left(0, \pi - \frac{\vartheta}{2}\right), \quad \ell \in (0, \ell_J).$$

Единственное решение этой системы для заданных диапазонов  $\vartheta$  и  $\tau$  выглядит так:

$$\tau = -\frac{w_\ell}{2} + \arccos \left( 2 \cos \frac{w_\ell}{2} - \frac{\sqrt{(\ell + w_\ell)^2 - \ell^2 + 4}}{2} \right), \quad \vartheta = w_\ell,$$

где  $w_\ell$  является корнем следующего трансцендентного уравнения:

$$\eta_\ell(w) + \ell = 0, \quad w \in (0, 2\pi), \quad \ell \in (0, \ell_J).$$

Пересечение  $\tilde{\mathcal{B}}_{\mathcal{P}\mathcal{L}}^v$  с  $\tilde{\mathcal{B}}_{\mathcal{T}\mathcal{S}}^{-v}$  определяется следующей системой:

$$\bar{z}_{\mathcal{B}_{\mathcal{T}\mathcal{S}}^{-v}}(\tau, \vartheta) = \bar{z}_{\mathcal{B}_{\mathcal{P}\mathcal{L}}^v}(\vartheta), \quad \vartheta \in (0, 2\pi), \quad \tau \in (\vartheta, 2\pi), \quad \ell \in (\ell_J, +\infty).$$

Единственное решение этой системы для заданных диапазонов  $\vartheta$  и  $\tau$  выглядит так:

$$\tau = \pi - \arccos \frac{\ell \cos \frac{m_\ell}{2} + 2 \sin \frac{m_\ell}{2}}{\ell + m_\ell}, \quad \vartheta = m_\ell.$$

Здесь  $m_\ell$  — это корень трансцендентного уравнения

$$(\ell + m)^2 - \left(2 \sin \frac{m}{2} - \ell\right)^2 - \left(2 + 2 \cos \frac{m}{2}\right)^2 = 0, \quad m \in (0, 2\pi), \quad \ell \in (\ell_J, +\infty).$$

Объединяя полученные результаты, получим выражение для критического значения угла

$$\vartheta_\ell^1 \stackrel{\text{def}}{=} \begin{cases} w_\ell, & \ell \in (0, \ell_J), \\ \vartheta_J, & \ell = \ell_J, \\ m_\ell, & \ell \in (\ell_J, +\infty). \end{cases}$$

Аналогичным образом мы можем определить диапазон изменения  $\theta$  соответствующий пересечению  $\tilde{\mathcal{B}}_{\mathcal{T}\mathcal{D}}^v \cap \tilde{\mathcal{B}}_{\mathcal{T}\mathcal{D}}^{-v}$ . Теперь нужно найти критическое значение угла, определяемое пересечением линии  $\tilde{\mathcal{B}}_{\mathcal{P}\mathcal{L}}^v$  с поверхностью  $\tilde{\mathcal{B}}_{\mathcal{T}\mathcal{D}}^{-v}$ , если  $\ell$  мало. Если  $\ell$  большое, то критическое значение угла соответствует пересечению универсальной линии  $\tilde{\mathcal{B}}_{\mathcal{U}\mathcal{L}}^{-v}$  и поверхности  $\tilde{\mathcal{B}}_{\mathcal{T}\mathcal{D}}^v$ . Для среднего значения  $\ell$  критическое значение угла  $(1 - v)\pi + v\vartheta_J$ . Аналогичным образом обозначим через  $\vartheta_\ell^2$  зависимость критического значения угла для заданного радиуса захвата  $\ell$  для  $v = +1$ . Если  $v = -1$ , то этот угол равен  $2\pi - \vartheta_\ell^2$ .

Пересечение  $\tilde{\mathcal{B}}_{\mathcal{P}\mathcal{L}}^v$  с  $\tilde{\mathcal{B}}_{\mathcal{T}\mathcal{D}}^{-v}$  задаётся системой

$$\bar{z}_{\mathcal{B}_{\mathcal{T}\mathcal{D}}^{-v}}(\tau, \vartheta) = \bar{z}_{\mathcal{B}_{\mathcal{P}\mathcal{L}}^v}(\vartheta), \quad \vartheta \in (0, 2\pi), \quad \tau \in \left(\frac{\vartheta}{2}, \vartheta\right), \quad \ell \in (0, \ell_J).$$

Единственное решение этой системы для заданных диапазонов  $\vartheta$  и  $\tau$  в явном виде выглядит так:

$$\tau = \frac{w_\ell}{2} + \arccos \frac{\sqrt{(\ell + w_\ell)^2 - \ell^2 + 4} - 2}{4}, \quad \vartheta = 2 \arccos \frac{\sqrt{(\ell + w_\ell)^2 - \ell^2 + 4} - 2}{4}.$$

Пересечение  $\tilde{\mathcal{B}}_{\mathcal{U}\mathcal{L}}^{-v}$  с  $\tilde{\mathcal{B}}_{\mathcal{T}\mathcal{D}}^v$  определяется следующей системой:

$$\bar{\mathbf{z}}_{\mathcal{B}_{\mathcal{U}\mathcal{L}}^{-v}}(\vartheta) = \bar{\mathbf{z}}_{\mathcal{B}_{\mathcal{T}\mathcal{D}}^v}(\tau, 2\pi - \vartheta), \quad \vartheta \in (0, 2\pi), \quad \tau \in \left(\pi - \frac{\vartheta}{2}, 2\pi - \vartheta\right), \quad \ell \in (\ell_J, +\infty).$$

Единственное решение этой системы для заданных диапазонов  $\vartheta$  и  $\tau$  выглядит так:

$$\tau = \pi - \frac{\ell + n_\ell}{2} + \frac{\sqrt{(\ell + n_\ell - 2 \sin n_\ell)^2 - 4 \sin^2 n_\ell}}{2}, \quad \vartheta = n_\ell.$$

Здесь  $n_\ell$  является корнем трансцендентного уравнения

$$\eta_\ell \left( \sqrt{(\ell + n - 2 \sin n)^2 - 4 \sin^2 n} - \ell \right) + \eta_\ell(n) = 0, \quad n \in (0, 2\pi), \quad \ell \in (\ell_J, +\infty).$$

Собирая результаты вместе, получим следующее выражение для критического угла:

$$\vartheta_\ell^2 \stackrel{\text{def}}{=} \begin{cases} 2 \arccos \frac{\sqrt{(\ell + w_\ell)^2 - \ell^2 + 4} - 2}{4}, & \ell \in (0, \ell_J); \\ \vartheta_J, & \ell = \ell_J; \\ n_\ell, & \ell \in (\ell_J, +\infty). \end{cases}$$

Критические значения углов  $\vartheta_\ell^1, \vartheta_\ell^2$  задают диапазон изменений  $\theta$  для пересечения поверхностей  $\tilde{\mathcal{B}}_{\mathcal{P}}^v \cap \tilde{\mathcal{B}}_{\mathcal{T}\mathcal{S}}^{-v}$  и  $\tilde{\mathcal{B}}_{\mathcal{T}\mathcal{D}}^v \cap \tilde{\mathcal{B}}_{\mathcal{T}\mathcal{D}}^{-v}$  соответственно. Более того, для  $v = +1$  интервал  $(\vartheta_\ell^1, \vartheta_\ell^2)$  определяет диапазон углов  $\theta$ , в котором поверхность  $\tilde{\mathcal{B}}_{\mathcal{P}}^v$  пересекает  $\tilde{\mathcal{B}}_{\mathcal{T}\mathcal{D}}^{-v}$  если  $\ell$  мало, а если  $\ell$  велико, то в этом диапазоне углов поверхность  $\tilde{\mathcal{B}}_{\mathcal{T}\mathcal{D}}^v$  пересекает  $\tilde{\mathcal{B}}_{\mathcal{T}\mathcal{S}}^{-v}$  (см. рис. 4.2). Для  $v = -1$  этот интервал выглядит так:  $(2\pi - \vartheta_\ell^2, 2\pi - \vartheta_\ell^1)$ .

Поверхность  $\tilde{\mathcal{B}}_{\mathcal{T}\mathcal{S}}^{-v}$  пересекает  $\tilde{\mathcal{B}}_{\mathcal{P}}^v$ , когда  $\vartheta \in (0, \vartheta_\ell^1)$ . Будем использовать обозначение  $\tau'$  для параметризации  $\tilde{\mathcal{B}}_{\mathcal{T}\mathcal{S}}^{-v}$ , вместо  $\tau$ , чтобы отличать этот параметр от параметра  $\tau$  для  $\tilde{\mathcal{B}}_{\mathcal{P}}^v$ . Рассматриваемое пересечение задаётся следующей системой:

$$\bar{\mathbf{z}}_{\mathcal{B}_{\mathcal{T}\mathcal{S}}^{-v}}(\tau', \vartheta) = \bar{\mathbf{z}}_{\mathcal{B}_{\mathcal{P}}^v}(\tau, \vartheta), \quad \vartheta \in (0, \vartheta_\ell^1), \quad \tau \in \left(0, \pi - \frac{\vartheta}{2}\right), \quad \tau' \in (\vartheta, 2\pi).$$

Для  $\vartheta \in (0, \vartheta_\ell^1)$  единственное решение заданной системы для указанных диапазонов изменения  $\tau$  и  $\tau'$  выглядит так:

$$\begin{aligned}\tau &= -\frac{\vartheta}{2} + \arccos \left( \cos \frac{\vartheta}{2} - \frac{1}{2} \sqrt{(\ell + \vartheta)^2 - \left( \ell - 2 \sin \frac{\vartheta}{2} \right)^2} \right), \\ \tau' &= \frac{\vartheta}{2} + \arccos \frac{2 \sin \frac{\vartheta}{2} - \ell}{\ell + \vartheta}.\end{aligned}\quad (4.14)$$

Аналогичным образом пересечение  $\tilde{\mathcal{B}}_{\mathcal{T}\mathcal{D}}^v$  и  $\tilde{\mathcal{B}}_{\mathcal{T}\mathcal{D}}^{-v}$  задаётся следующей системой:

$$\begin{aligned}\bar{z}_{\mathcal{B}_{\mathcal{T}\mathcal{D}}^{-v}}(\tau, \vartheta) &= \bar{z}_{\mathcal{B}_{\mathcal{T}\mathcal{D}}^v}(\tau', 2\pi - \vartheta), \quad \vartheta \in (\vartheta_\ell^2, 2\pi - \vartheta_\ell^2), \\ \tau &\in \left( \frac{\vartheta}{2}, \vartheta \right), \quad \tau' \in \left( \pi - \frac{\vartheta}{2}, 2\pi - \vartheta \right).\end{aligned}$$

Параметр  $\tau$  относится к  $\tilde{\mathcal{B}}_{\mathcal{T}\mathcal{D}}^{-v}$ , а  $\tau'$  к  $\tilde{\mathcal{B}}_{\mathcal{T}\mathcal{D}}^v$ . Для  $\vartheta \in (\vartheta_\ell^2, 2\pi - \vartheta_\ell^2)$  единственное решение для заданных диапазонов  $\tau, \tau'$  выглядит так:

$$\tau = \frac{\vartheta + p_\ell(\vartheta)}{2}, \quad \tau' = \pi - \frac{\ell + \vartheta}{2} + \frac{1}{2} \sqrt{\left( \xi_\ell(p_\ell(\vartheta)) - 4 \cos \frac{\vartheta}{2} \right)^2 + \eta_\ell^2(p_\ell(\vartheta)) - 4}, \quad (4.15)$$

где  $p_\ell(\vartheta)$  является корнем следующего трансцендентного уравнения:

$$\begin{aligned}\eta_\ell(p) + \eta_\ell \left( \sqrt{\left( \xi_\ell(p) - 4 \cos \frac{\vartheta}{2} \right)^2 + \eta_\ell^2(p) - 4 - \ell} \right) &= 0, \\ p &\in (0, \vartheta), \quad \vartheta \in (\vartheta_\ell^2, 2\pi - \vartheta_\ell^2).\end{aligned}$$

Как отмечено ранее, поверхность  $\tilde{\mathcal{B}}_{\mathcal{T}\mathcal{D}}^{-v}$  пересекает  $\tilde{\mathcal{B}}_{\mathcal{P}}^v$  только если  $\ell \in (0, \ell_J)$ . Свяжем параметр  $\tau$  с  $\tilde{\mathcal{B}}_{\mathcal{P}}^v$ , а параметр  $\tau'$  с  $\tilde{\mathcal{B}}_{\mathcal{T}\mathcal{D}}^{-v}$ . Рассмотрим систему

$$\bar{z}_{\mathcal{B}_{\mathcal{T}\mathcal{D}}^{-v}}(\tau', \vartheta) = \bar{z}_{\mathcal{B}_{\mathcal{P}}^v}(\tau, \vartheta), \quad \vartheta \in (\vartheta_\ell^1, \vartheta_\ell^2), \quad \tau \in \left( 0, \pi - \frac{\vartheta}{2} \right), \quad \tau' \in \left( \frac{\vartheta}{2}, \vartheta \right), \quad \ell \in (0, \ell_J).$$

Для  $\vartheta \in (\vartheta_\ell^1, \vartheta_\ell^2)$  единственное решение этой системы для заданных диапазонов  $\tau$  и  $\tau'$  выглядит так:

$$\tau = -\frac{\vartheta}{2} + \arccos \left( 2 \cos \frac{\vartheta}{2} - \frac{\sqrt{(\ell + w_\ell)^2 - \ell^2 + 4}}{2} \right), \quad \tau' = \frac{w_\ell + \vartheta}{2}. \quad (4.16)$$

Поверхность  $\tilde{\mathcal{B}}_{\mathcal{T}\mathcal{D}}^v$  пересекает  $\tilde{\mathcal{B}}_{\mathcal{T}\mathcal{S}}^{-v}$  только если  $\ell \in (\ell_J, +\infty)$ . Как это делалось ранее, свяжем параметры  $\tau$ ,  $\tau'$  с  $\tilde{\mathcal{B}}_{\mathcal{T}\mathcal{S}}^{-v}$ ,  $\tilde{\mathcal{B}}_{\mathcal{T}\mathcal{D}}^v$  соответственно. Рассмотрим систему

$$\begin{aligned} \bar{z}_{\tilde{\mathcal{B}}_{\mathcal{T}\mathcal{S}}^{-v}}(\tau, \vartheta) &= \bar{z}_{\tilde{\mathcal{B}}_{\mathcal{T}\mathcal{D}}^v}(\tau', 2\pi - \vartheta), \\ \vartheta &\in (\vartheta_\ell^1, \vartheta_\ell^2), \quad \tau \in (\vartheta, 2\pi), \quad \tau' \in \left( \pi - \frac{\vartheta}{2}, 2\pi - \vartheta \right), \quad \ell \in (\ell_J, +\infty). \end{aligned}$$

Для  $\vartheta \in (\vartheta_\ell^1, \vartheta_\ell^2)$  единственное решение для заданных диапазонов изменения  $\tau$ ,  $\tau'$  выглядит так:

$$\tau = \pi - \arcsin \frac{(\ell + \vartheta)^2 - (\ell + q_\ell(\vartheta))^2}{4(\ell + \vartheta)}, \quad \tau' = \pi + \frac{q_\ell(\vartheta) - \vartheta}{2}, \quad (4.17)$$

где  $q_\ell(\vartheta)$  является корнем следующего трансцендентного уравнения:

$$\begin{aligned} (\ell + \vartheta)^2 - \left( 2 + 2 \cos \frac{q - \vartheta}{2} \right)^2 - \left( \ell + q + 2 \sin \frac{q - \vartheta}{2} \right)^2 &= 0, \\ q \in (0, 2\pi - \vartheta), \quad \vartheta &\in (\vartheta_\ell^1, \vartheta_\ell^2), \quad \ell \in (\ell_J, +\infty). \end{aligned} \quad (4.18)$$

Теперь, когда все условия пересечений получены, мы можем определить те куски полупроницаемых поверхностей, которые принадлежат барьеру  $\mathcal{B}$ . Сначала опишем поверхность  $\mathcal{B}_p^v = \tilde{\mathcal{B}}_p^v \cap \mathcal{B}$ .  $\theta$ -срезы этой поверхности не пусты для всех  $\vartheta \in (0, 2\pi)$  (см. рис. 4.2–4.3). Для всех значений  $\ell$  если  $\vartheta \in (0, \vartheta_\ell^1]$ , то пересечение определяется с помощью (4.14). Если  $\ell \in (0, \ell_J)$ , то поверхность  $\tilde{\mathcal{B}}_p^v$  пересекает  $\tilde{\mathcal{B}}_{\mathcal{T}\mathcal{D}}^{-v}$  и максимальное значение параметра  $\tau$  задаётся с помощью (4.16). Подытоживая, можно заключить, что

$$\mathcal{B}_p^v \stackrel{\text{def}}{=} \left\{ \bar{z}_{\tilde{\mathcal{B}}_p^v}(\tau, \vartheta) : \vartheta \in (0, 2\pi), \tau \in (0, \tau_{\mathcal{B}_p, \ell}^{\max}(\vartheta)) \right\}, \quad (4.19)$$

где

$$\tau_{\mathcal{B}_{\mathcal{P},\ell}^{\max}}(\vartheta) \stackrel{\text{def}}{=} \begin{cases} \arccos \left( \cos \frac{\vartheta}{2} - \frac{\sqrt{(\ell+\vartheta)^2 + (\ell - 2 \sin \frac{\vartheta}{2})^2}}{2} \right) - \frac{\vartheta}{2}, & \vartheta \in (0, \vartheta_\ell^1], \\ \arccos \left( 2 \cos \frac{\vartheta}{2} - \frac{\sqrt{(\ell+w_\ell)^2 - \ell^2 + 4}}{2} \right) - \frac{\vartheta}{2}, & \vartheta \in [\vartheta_\ell^1, \vartheta_\ell^{21}], \\ \pi - \frac{\vartheta}{2}, & \vartheta \in [\vartheta_\ell^{21}, 2\pi) \end{cases}$$

и

$$\vartheta_\ell^{21} \stackrel{\text{def}}{=} \begin{cases} \vartheta_\ell^2 & \ell \in (0, \ell_J], \\ \vartheta_\ell^1, & \ell \in [\ell_J, +\infty). \end{cases}$$

Далее опишем поверхность  $\mathcal{B}_{\mathcal{T}\mathcal{S}}^v = \tilde{\mathcal{B}}_{\mathcal{T}\mathcal{S}}^v \cap \mathcal{B}$ .  $\theta$ -срезы этой поверхности существуют только для  $\vartheta \in (0, \vartheta_\ell^1)$ , при  $\ell \in (0, \ell_J]$ , и для  $\vartheta \in (0, \vartheta_\ell^2)$ , при  $\ell \in (\ell_J, +\infty)$  (см. рис. 4.2–4.3). Максимальное время до попадания на терминальную поверхность  $\tau$  определяется параметром  $\tau'$  из (4.14) и параметром  $\tau$  из (4.17). Таким образом,

$$\mathcal{B}_{\mathcal{T}\mathcal{S}}^v \stackrel{\text{def}}{=} \{ \bar{z}_{\mathcal{B}_{\mathcal{T}\mathcal{S}}^v}(\tau, \vartheta) : \vartheta \in (0, \vartheta_\ell^{12}), \tau \in (\vartheta, \tau_{\mathcal{B}_{\mathcal{T}\mathcal{S},\ell}^{\max}}(\vartheta)) \}, \quad (4.20)$$

где

$$\vartheta_\ell^{12} \stackrel{\text{def}}{=} \begin{cases} \vartheta_\ell^1, & \ell \in (0, \ell_J], \\ \vartheta_\ell^2, & \ell \in [\ell_J, +\infty) \end{cases}$$

и

$$\tau_{\mathcal{B}_{\mathcal{T}\mathcal{S},\ell}^{\max}}(\vartheta) \stackrel{\text{def}}{=} \begin{cases} \frac{\vartheta}{2} + \arccos \frac{2 \sin \frac{\vartheta}{2} - \ell}{\ell + \vartheta}, & \vartheta \in (0, \vartheta_\ell^1], \\ \pi - \arcsin \frac{(\ell+\vartheta)^2 - (\ell+q_\ell(\vartheta))^2}{4(\ell+\vartheta)}, & \vartheta \in [\vartheta_\ell^1, \vartheta_\ell^{12}]. \end{cases}$$

**Лемма 4.3.** Неравенства  $0 < \tau_{\mathcal{B}_{\mathcal{T}\mathcal{S},\ell}^{\max}}(\vartheta) < \vartheta + \pi$  справедливы для всех  $\vartheta \in (0, \vartheta_\ell^{12}]$ .

*Доказательство.* Для  $\vartheta \in (0, \vartheta_\ell^1]$  (или  $\ell \leq \ell_J$ ), эта лемма очевидна, т. к.

$$\tau_{\mathcal{B}_{\mathcal{T}\mathcal{S},\ell}^{\max}}(\vartheta) - \vartheta = -\frac{\vartheta}{2} + \arccos \frac{2 \sin \frac{\vartheta}{2} - \ell}{\ell + \vartheta} < \arccos \frac{2 \sin \frac{\vartheta}{2} - \ell}{\ell + \vartheta} \leq \pi.$$

Для  $\vartheta \in (\vartheta_\ell^1, \vartheta_\ell^{12}]$  (и  $\ell > \ell_J$ ) доказательства того, что  $q_\ell(\vartheta) < \vartheta$ , достаточно, т. к.

$$\tau_{\mathcal{B}_{\mathcal{T}\mathcal{S},\ell}^{\max}}(\vartheta) - \vartheta < \tau_{\mathcal{B}_{\mathcal{T}\mathcal{S},\ell}^{\max}}(\vartheta) = \pi - \arcsin \frac{(\vartheta - q_\ell(\vartheta))(2\ell + \vartheta + q_\ell(\vartheta))}{4(\ell + \vartheta)} < \pi.$$



Предположим противное, что  $q_\ell(\vartheta) \geq \vartheta$ . Преобразуем (4.18) до

$$(\ell + \vartheta)^2 - (\ell + q_\ell(\vartheta))^2 = 8 \left( 1 + \cos \frac{q_\ell(\vartheta) - \vartheta}{2} \right) + 4(\ell + q_\ell(\vartheta)) \sin \frac{q_\ell(\vartheta) - \vartheta}{2}.$$

Согласно (4.18) значение  $q_\ell(\vartheta)$  меньше, чем  $2\pi - \vartheta$ , из чего следует  $0 \leq (q_\ell(\vartheta) - \vartheta)/2 < \pi$ . Следовательно левая часть приведённого уравнения не положительна, а правая часть — положительна.  $\square$

Теперь получим описание  $\mathcal{B}_{\mathcal{T}\mathcal{D}}^v = \tilde{\mathcal{B}}_{\mathcal{T}\mathcal{D}}^v \cap \mathcal{B}$ .  $\theta$ -срезы этой поверхности существуют только для  $\vartheta \in (0, 2\pi - \vartheta_\ell^2)$ , если  $\ell \in (0, \ell_J]$ , и для  $\vartheta \in (0, 2\pi - \vartheta_\ell^1)$ , при  $\ell \in [\ell_J, +\infty)$  (см. рис. 4.2-4.3). Максимальное значение времени до прибытия на терминальную поверхность  $\tau$  определяется с помощью  $\tau'$  из (4.16),  $\tau'$  из (4.17) и  $\tau$ ,  $\tau'$  из (4.15). Следовательно

$$\mathcal{B}_{\mathcal{T}\mathcal{D}}^v \stackrel{\text{def}}{=} \left\{ \bar{\mathbf{z}}_{\mathcal{B}_{\mathcal{T}\mathcal{D}}}^v(\tau, \vartheta) : \vartheta \in (0, 2\pi - \vartheta_\ell^{21}), \quad \tau \in \left( \frac{\vartheta}{2}, \tau_{\mathcal{B}_{\mathcal{T}\mathcal{D}}, \ell}^{\max}(\vartheta) \right) \right\}, \quad (4.21)$$

где

$$\tau_{\mathcal{B}_{\mathcal{T}\mathcal{D}}, \ell}^{\max}(\vartheta) \stackrel{\text{def}}{=} \begin{cases} \vartheta, & \vartheta \in (0, \vartheta_\ell^{12}], \\ \frac{w_\ell + \vartheta}{2}, & \vartheta \in [\vartheta_\ell^1, \vartheta_\ell^2], \quad \ell \in (0, \ell_J], \\ \frac{p_\ell(\vartheta) + \vartheta}{2}, & \vartheta \in [\vartheta_\ell^2, 2\pi - \vartheta_\ell^2], \\ \frac{q_\ell(2\pi - \vartheta) + \vartheta}{2}, & \vartheta \in [2\pi - \vartheta_\ell^2, 2\pi - \vartheta_\ell^1], \quad \ell \in [\ell_J, +\infty). \end{cases}$$

В заключении получим выражения для  $\mathcal{B}_{\mathcal{P}\mathcal{L}}^v = \tilde{\mathcal{B}}_{\mathcal{P}\mathcal{L}}^v \cap \mathcal{B}$  и  $\mathcal{B}_{\mathcal{U}\mathcal{L}}^v = \tilde{\mathcal{B}}_{\mathcal{U}\mathcal{L}}^v \cap \mathcal{B}$ , используя то обстоятельство, что эти линии являются границами уже описанных поверхностей:

$$\mathcal{B}_{\mathcal{P}\mathcal{L}}^v \stackrel{\text{def}}{=} \{ \bar{\mathbf{z}}_{\mathcal{B}_{\mathcal{P}\mathcal{L}}}^v(\vartheta) : \vartheta \in (\vartheta_\ell^{21}, 2\pi) \}, \quad \mathcal{B}_{\mathcal{U}\mathcal{L}}^v \stackrel{\text{def}}{=} \{ \bar{\mathbf{z}}_{\mathcal{B}_{\mathcal{U}\mathcal{L}}}^v(\vartheta) : \vartheta \in (0, \vartheta_\ell^{12}] \}. \quad (4.22)$$

Для полноты изложения приведём также параметрическое описание рассеивающей линии на барьере  $\mathcal{B}_{\mathcal{D}\mathcal{L}}$ . Для этого описания нам понадобится следующая функция:

$$\gamma_\theta \stackrel{\text{def}}{=} \begin{cases} -1, & \theta \in (0, \pi], \\ +1, & \theta \in [\pi, 2\pi). \end{cases}$$

Для всех значений радиуса захвата  $\ell$  и всех  $\theta$ -срезов рассеивающая линия является частью границы поверхности  $\mathcal{B}_{TS}^u$  или  $\mathcal{B}_{TD}^u$ . Используя это обстоятельство, получим

$$\mathcal{B}_{D\mathcal{L}} \stackrel{\text{def}}{=} \{z_{\mathcal{B}_{D\mathcal{L}}}(\theta) : \theta \in (0, 2\pi)\}, \quad (4.23)$$

где

$$z_{\mathcal{B}_{D\mathcal{L}}}(\theta) \stackrel{\text{def}}{=} \begin{cases} \bar{z}_{\mathcal{B}_{TD}^{\gamma\theta}}(\tau_{\mathcal{B}_{TD}^{\gamma\theta}}^{\max}(\pi - |\pi - \theta|), \pi - |\pi - \theta|), & \theta \in [\vartheta_\ell^{12}, 2\pi - \vartheta_\ell^{12}], \\ \bar{z}_{\mathcal{B}_{TS}^{\gamma\theta}}(\tau_{\mathcal{B}_{TS}^{\gamma\theta}}^{\max}(\pi - |\pi - \theta|), \pi - |\pi - \theta|), & \text{в иных случаях.} \end{cases}$$

Визуализация поверхностей  $\mathcal{B}_P^u$ ,  $\mathcal{B}_{TS}^u$ ,  $\mathcal{B}_{TD}^u$  и линий  $\mathcal{B}_{P\mathcal{L}}^u$ ,  $\mathcal{B}_{U\mathcal{L}}^u$  для различных значений радиуса захвата  $\ell$  представлена на рис. 4.4. Эти иллюстрации показывают  $\theta$ -срезы трёхмерной поверхности барьера  $\mathcal{B}$ . Цвета линий и точек соответствуют цветам надписей с наименованиями линий и поверхностей. На рис. 4.5 видна разница между случаями малого, среднего и большого радиуса захвата. Если радиус захвата мал, то  $\mathcal{B}_P^{+1}$  и  $\mathcal{B}_{TD}^{-1}$  имеют общую часть границы. Для больших радиусов захвата общую часть границы имеют уже поверхности  $\mathcal{B}_{TS}^{-1}$ ,  $\mathcal{B}_{TD}^{+1}$ . Для среднего значения радиуса захвата описанные общие части вырождаются в точку, в которой встречаются поверхности  $\mathcal{B}_P^{+1}$ ,  $\mathcal{B}_{TD}^{-1}$ ,  $\mathcal{B}_{TS}^{-1}$ ,  $\mathcal{B}_{TD}^{+1}$ .

#### 4.5 Синтез оптимальных управлений на барьере для игры двух идентичных автомобилей

В предыдущем разделе было получено явное параметрическое описание всех кусков, составляющих барьер, с соответствующими ограничениями на области значений параметров. Т. к. значения оптимальных управлений для всех состояний на этих кусках известны, то, проверяя какому из кусков принадлежит состояние, мы можем вычислить значения оптимальных управлений для обоих игроков. Для полученных параметризаций (4.19)–(4.22) такая проверка усложняется необходимостью дополнительно рассчитывать параметры  $\tau$  и  $\vartheta$ . Только для рассеивающей линии  $\mathcal{B}_{D\mathcal{L}}$  параметризация (4.23) позволяет непосредственно проверить принадлежит ли состояние  $z = \begin{bmatrix} x & y & \theta \end{bmatrix}^\top$  рассеивающей линии.

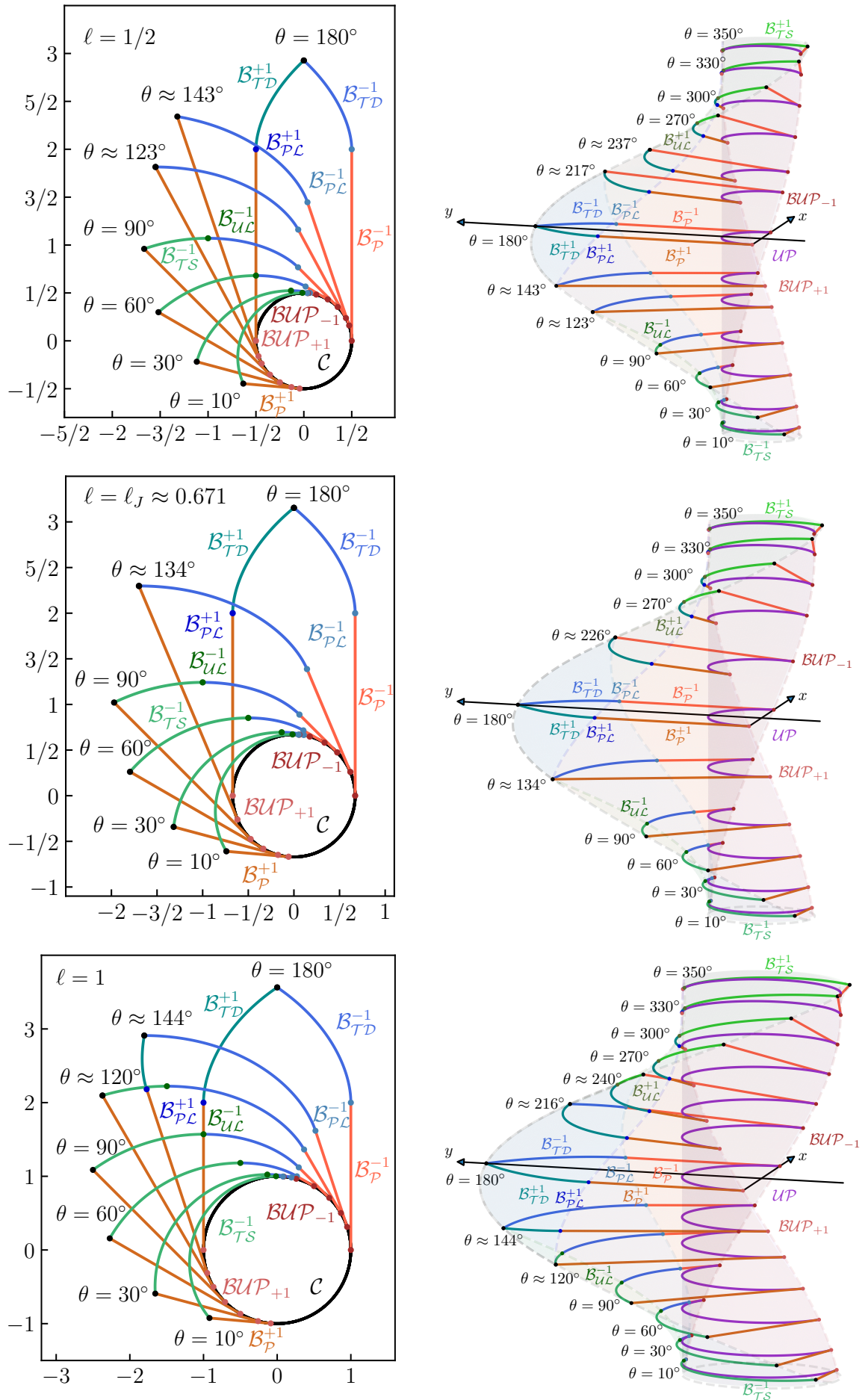


Рисунок 4.4 — Срезы барьера для малого, среднего и большого радиуса захвата.

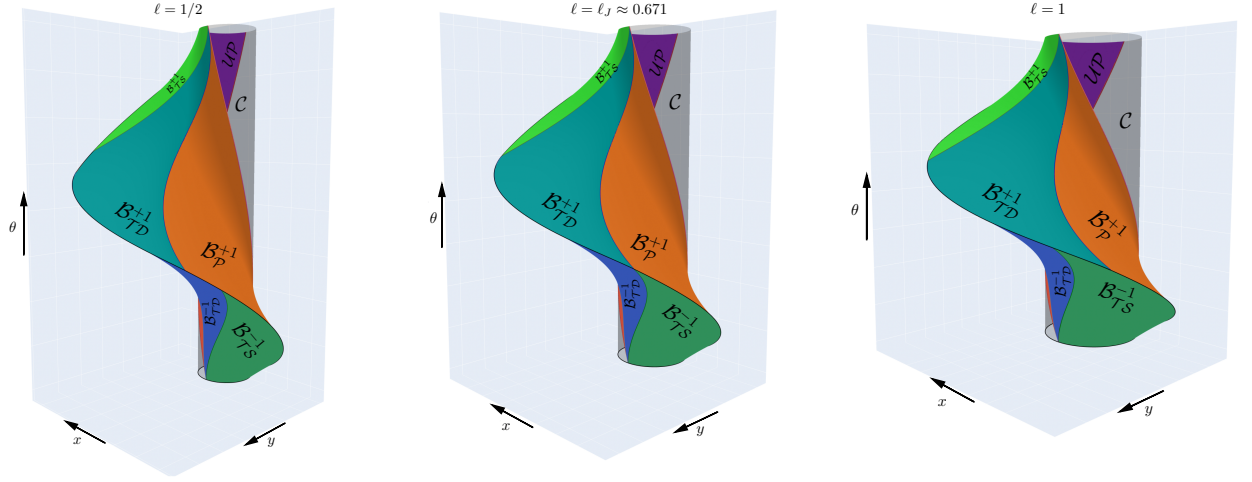


Рисунок 4.5 — Разница между случаями малого  $\ell \in (0, \ell_J)$  (слева), среднего  $\ell = \ell_J$  (в центре) и большого  $\ell \in (\ell_J, +\infty)$  (справа) радиуса захвата.

В этом разделе мы получим удобную параметризацию для (4.19)–(4.22), использующую вектор состояния  $\mathbf{z}$ .

Для игры двух идентичных автомобилей мы покажем, что каждый кусок (обозначаемый через  $\mathcal{P}$ ), который входит в состав барьера, может быть параметризован в следующем виде:

$$\mathcal{P} = \{\mathbf{z} \in \mathcal{F}_{\mathcal{P}}^{\ell} : \ell = \ell_{\mathcal{P}}(\mathbf{z})\}. \quad (4.24)$$

Здесь множество  $\mathcal{F}_{\mathcal{P}}^{\ell} \subset \mathbb{R}^2 \times \mathbb{S}$  задаёт рамочные ограничения для состояния, которые соответствуют ограничениям на параметры  $\tau$  и  $\vartheta$ .

Для получения желаемого параметрического описания для  $\mathcal{B}_{\mathcal{P}}^v$  мы должны исключить параметры  $\tau$ ,  $\vartheta$  из системы уравнений

$$\bar{\mathbf{z}}_{\mathcal{B}_{\mathcal{P}}^v}(\tau, \vartheta) = \mathbf{z}, \quad \vartheta \in (0, 2\pi), \quad \tau \in (0, \tau_{\mathcal{B}_{\mathcal{P}, \ell}^{\max}}^{\max}(\vartheta)).$$

Применяя преобразование  $\mathbf{R}_v(\vartheta/2)$ , получим

$$\begin{cases} 2 \cos \frac{\vartheta}{2} - 2 \cos \left( \tau + \frac{\vartheta}{2} \right) = -vx \cos \frac{\vartheta}{2} + y \sin \frac{\vartheta}{2}, \\ -\ell = vx \sin \frac{\vartheta}{2} + y \sin \frac{\vartheta}{2}, \\ (1-v)\pi + v\vartheta = \theta, \quad \vartheta \in (0, 2\pi), \quad \tau \in (0, \tau_{\mathcal{B}_{\mathcal{P}, \ell}^{\max}}^{\max}(\vartheta)). \end{cases}$$

Исключая  $\vartheta$  из второго уравнения, получим

$$\ell = -v \left( x \sin \frac{\theta}{2} + y \cos \frac{\theta}{2} \right) \stackrel{\text{def}}{=} \ell_{\mathcal{B}_p^v}(\mathbf{z}).$$

Беря во внимание, что  $0 < \tau_{\mathcal{B}_p, \ell}^{\max}(\vartheta) < \pi - \vartheta/2$ , преобразуем  $\tau \in (0, \tau_{\mathcal{B}_p, \ell}^{\max}(\vartheta))$  в

$$-2 \cos \frac{\vartheta}{2} < -2 \cos \left( \tau + \frac{\vartheta}{2} \right) < -2 \cos \left( \tau_{\mathcal{B}_p, \ell}^{\max}(\vartheta) + \frac{\vartheta}{2} \right).$$

Подставляя  $\vartheta$  в первое уравнение и используя полученные неравенства, можно заключить, что

$$\mathcal{F}_{\mathcal{B}_p^v}^{\ell} \stackrel{\text{def}}{=} \left\{ \mathbf{z} \in \mathbb{R}^2 \times \mathbb{S} : 0 < -x \cos \frac{\theta}{2} + y \sin \frac{\theta}{2} < 2v \left( \cos \frac{\theta}{2} - \cos \left( \tau_{\mathcal{B}_p, \ell}^{\max}(\theta) + \frac{v\theta}{2} \right) \right), 0 < \theta < 2\pi \right\},$$

где  $\tau_{\mathcal{B}_p, \ell}^{\max}(\theta) = \tau_{\mathcal{B}_p, \ell}^{\max}((1-v)\pi + v\theta)$ .

Чтобы получить аналогичное параметрическое описание поверхности  $\mathcal{B}_{\mathcal{T}\mathcal{S}}^v$  мы должны решить систему

$$\bar{\mathbf{z}}_{\mathcal{B}_{\mathcal{T}\mathcal{S}}^v}(\tau, \vartheta) = \mathbf{z}, \quad \vartheta \in (0, \vartheta_{\ell}^{12}), \quad \tau \in (\vartheta, \tau_{\mathcal{B}_{\mathcal{T}\mathcal{S}}, \ell}^{\max}(\vartheta)).$$

Выражая  $\sin(\tau - \vartheta)$  и  $\cos(\tau - \vartheta)$  из выписанной системы, получим

$$\sin(\tau - \vartheta) = \frac{vx - 1 + \cos \vartheta}{\ell + \vartheta}, \quad \cos(\tau - \vartheta) = \frac{y + \sin \vartheta}{\ell + \vartheta}.$$

Для фиксированного  $\vartheta \in (0, \vartheta_{\ell}^{12})$  приведённые выражения соответствуют параметрическому описанию окружности на плоскости  $xy$ , где  $\tau$  является параметром. Используя  $\tau > \vartheta$  и лемму 4.3, получим

$$\sin(\tau - \vartheta) > 0, \quad \cos(\tau - \vartheta) > \cos(\tau_{\mathcal{B}_{\mathcal{T}\mathcal{S}}, \ell}^{\max}(\vartheta) - \vartheta).$$

Выражая  $\vartheta$  и подставляя в эти неравенства, получим

$$\mathcal{F}_{\mathcal{B}_{TS}^v}^\ell \stackrel{\text{def}}{=} \{z \in \mathbb{R}^2 \times \mathbb{S} : 0 < (1+v)\pi - v\theta < \vartheta_\ell^{12}, 1 - \cos \theta < vx, \\ (\ell + (1+v)\pi - v\theta) \cos(\tau_{\mathcal{B}_{TS}^v, \ell}^{\max}(\theta) + v\theta) < y - v \sin \theta\},$$

где  $\tau_{\mathcal{B}_{TS}^v, \ell}^{\max}(\theta) = \tau_{\mathcal{B}_{TS, \ell}^{\max}}((1+v)\pi - v\theta)$ . Исключая  $\tau$  из параметрического описания окружности и выражая  $\ell$ , получим

$$\ell = -(1+v)\pi + v\theta + \sqrt{(vx - 1 + \cos \theta)^2 + (y - v \sin \theta)^2} \stackrel{\text{def}}{=} \ell_{\mathcal{B}_{TS}^v}(z).$$

Для получения желаемого параметрического описания для  $\mathcal{B}_{TD}^v$  нужно исключить  $\tau$  и  $\vartheta$  из следующей системы уравнений:

$$\bar{z}_{\mathcal{B}_{TD}^v}(\tau, \vartheta) = z, \quad \vartheta \in (0, 2\pi - \vartheta_\ell^{21}), \quad \tau \in (\vartheta/2, \tau_{\mathcal{B}_{TD, \ell}^{\max}}(\vartheta)).$$

Выражая  $\sin(\tau - \vartheta)$  и  $\cos(\tau - \vartheta)$  из этой системы, получим

$$\sin(\tau - \vartheta) = \frac{(vx + 1 + \cos \vartheta)(\ell + 2\tau - \vartheta) - 2(y + \sin \vartheta)}{(\ell + 2\tau - \vartheta)^2 + 4}, \\ \cos(\tau - \vartheta) = \frac{2(vx + 1 + \cos \vartheta) + (y + \sin \vartheta)(\ell + 2\tau - \vartheta)}{(\ell + 2\tau - \vartheta)^2 + 4}.$$

Сумма квадратов выписанных величин и учёт того, что  $\ell + 2\tau - \vartheta > 0$ , дают

$$\ell + 2\tau - \vartheta = \sqrt{(vx + 1 + \cos \vartheta)^2 + (y + \sin \vartheta)^2 - 4}. \quad (4.25)$$

Из  $\tau - \vartheta \in (-\vartheta/2, \tau_{\mathcal{B}_{TD, \ell}^{\max}}(\vartheta) - \vartheta) \subset (-\pi, 0)$  следует, что значение  $\sin(\tau - \vartheta)$  должно быть отрицательным. Обращая  $\cos(\tau - \vartheta)$ , получим

$$\tau - \vartheta = -\arccos \frac{2(vx + 1 + \cos \vartheta) + (y + \sin \vartheta)(\ell + 2\tau - \vartheta)}{(\ell + 2\tau - \vartheta)^2 + 4}. \quad (4.26)$$

Используя (4.25) и (4.26), а также  $\vartheta = (1 + v)\pi - v\theta$ , получим

$$\begin{aligned} \ell = & \sqrt{(vx + 1 + \cos \theta)^2 + (y - v \sin \theta)^2 - 4} - (1 + v)\pi + v\theta \\ & + 2 \arccos \left( \frac{2(vx + 1 + \cos \theta)}{(vx + 1 + \cos \theta)^2 + (y - v \sin \theta)^2} \right) \\ & + \frac{(y - v \sin \theta) \sqrt{(vx + 1 + \cos \theta)^2 + (y - v \sin \theta)^2 - 4}}{(vx + 1 + \cos \theta)^2 + (y - v \sin \theta)^2} \stackrel{\text{def}}{=} \ell_{\mathcal{B}_{TD}^v}(\mathbf{z}). \end{aligned}$$

Собирая всё вместе, выпишем

$$\begin{aligned} \mathcal{F}_{\mathcal{B}_{TD}^v}^\ell \stackrel{\text{def}}{=} \{ \mathbf{z} \in \mathbb{R}^2 \times \mathbb{S} : & 0 < (1 + v)\pi - v\theta < 2\pi - \vartheta_\ell^{21}, \\ & 0 < -\ell + \sqrt{(vx + 1 + \cos \theta)^2 + (y - v \sin \theta)^2 - 4} \\ & < 2\tau_{\mathcal{B}_{TD}^v, \ell}^{\max}(\theta) - (1 + v)\pi + v\theta, \\ & (vx + 1 + \cos \theta) \sqrt{(vx + 1 + \cos \theta)^2 + (y - v \sin \theta)^2 - 4} < 2(y - v \sin \theta) \}, \end{aligned}$$

где  $\tau_{\mathcal{B}_{TD}^v, \ell}^{\max}(\theta) = \tau_{\mathcal{B}_{TD}, \ell}^{\max}((1 + v)\pi - v\theta)$ .

Параметрические описания (4.22) линий  $\mathcal{B}_{\mathcal{PL}}^v$ ,  $\mathcal{B}_{\mathcal{UL}}^v$  содержат только параметр  $\vartheta$ , который может быть выражен через  $\theta$  в обоих случаях. Таким образом,

$$\begin{aligned} \mathcal{B}_{\mathcal{PL}}^v &= \{ \mathbf{z} \in \mathbb{R}^2 \times \mathbb{S} : \bar{\mathbf{z}}_{\mathcal{B}_{\mathcal{PL}}^v}((1 - v)\pi + v\theta) = \mathbf{z}, \vartheta_\ell^{21} < (1 - v)\pi + v\theta < 2\pi \}, \\ \mathcal{B}_{\mathcal{UL}}^v &= \{ \mathbf{z} \in \mathbb{R}^2 \times \mathbb{S} : \bar{\mathbf{z}}_{\mathcal{B}_{\mathcal{UL}}^v}((1 + v)\pi - v\theta) = \mathbf{z}, 0 < (1 + v)\pi - v\theta \leq \vartheta_\ell^{12} \}. \end{aligned}$$

**Утверждение 4.1.** *Оптимальные управления на барьере в форме синтеза для преследователя и убегающего в игре двух идентичных автомобилей выглядят так:*

$$\begin{aligned} u^*(\mathbf{z}) &= \begin{cases} 0, & \mathbf{z} \in \mathcal{B}_{\mathcal{UL}}^{-1} \cup \mathcal{B}_{\mathcal{UL}}^{+1}; \\ +1, & \mathbf{z} \in \mathcal{B}_{\mathcal{P}}^{-1} \cup \mathcal{B}_{\mathcal{PL}}^{-1} \cup \mathcal{B}_{\mathcal{TS}}^{+1} \cup \mathcal{B}_{\mathcal{TD}}^{-1} \cup \mathcal{BUP}_{-1} \cup \mathcal{B}_{\mathcal{DL}}; \\ -1, & \mathbf{z} \in \mathcal{B}_{\mathcal{P}}^{+1} \cup \mathcal{B}_{\mathcal{PL}}^{+1} \cup \mathcal{B}_{\mathcal{TS}}^{-1} \cup \mathcal{B}_{\mathcal{TD}}^{+1} \cup \mathcal{BUP}_{+1} \cup \mathcal{B}_{\mathcal{DL}}; \\ \text{sgn } x, & \mathbf{z} \in \mathcal{BUP}_0, \end{cases} \\ v^*(\mathbf{z}) &= \begin{cases} +1, & \mathbf{z} \in \mathcal{B}_{\mathcal{P}}^{+1} \cup \mathcal{B}_{\mathcal{PL}}^{+1} \cup \mathcal{B}_{\mathcal{TS}}^{+1} \cup \mathcal{B}_{\mathcal{TD}}^{+1} \cup \mathcal{B}_{\mathcal{UL}}^{+1} \cup \mathcal{BUP}_{+1} \cup \mathcal{B}_{\mathcal{DL}}; \\ -1, & \mathbf{z} \in \mathcal{B}_{\mathcal{P}}^{-1} \cup \mathcal{B}_{\mathcal{PL}}^{-1} \cup \mathcal{B}_{\mathcal{TS}}^{-1} \cup \mathcal{B}_{\mathcal{TD}}^{-1} \cup \mathcal{B}_{\mathcal{UL}}^{-1} \cup \mathcal{BUP}_{-1} \cup \mathcal{B}_{\mathcal{DL}}; \\ \text{sgn } x, & \mathbf{z} \in \mathcal{BUP}_0. \end{cases} \end{aligned}$$

Утверждение 4.1 предоставляет оптимальные управления в форме синтеза для обоих игроков. Все куски барьера, участвующие в описании оптимальных управлений, получены явно с использованием аналитических выражений, вычисляемых для заданного состояния. Таким образом, задача подсчёта синтезирующих управлений на барьере является математически полностью решённой. Отметим, что процедура отсеечения лишних частей проистекающих полупроницаемых поверхностей, описанная в предыдущем разделе, предоставила аналитические выражения для диапазонов изменений параметров. Эти аналитические выражения использовались для получения рамочных множеств  $\mathcal{F}_{\mathcal{P}}^{\ell}$ , что в свою очередь помогло явно описать соответствующие куски, составляющие барьер.

Прямой машинный подсчёт для чисел с плавающей точкой почти всегда будет приводить к тому, что трёхмерный вектор состояния не будет принадлежать поверхности барьера. Естественный метод преодоления этой проблемы состоит в том, чтобы проверять принадлежность не к куску барьера, а к слою

$$\mathcal{P}' = \left\{ \mathbf{z} \in \mathcal{F}_{\mathcal{P}}^{\ell_{\mathcal{P}}(\mathbf{z})} : \ell \leq \ell_{\mathcal{P}}(\mathbf{z}) \leq \ell(1 + \delta) \right\},$$

примыкающему к соответствующему куску  $\mathcal{P}$  барьера, заданному через (4.24). Здесь  $\delta \in \mathbb{R}^+$  обозначает относительную ширину слоя. Если вычисления математически точны, то убегающий может гарантировать избежание столкновения с минимальным расстоянием сближения преследователя  $\ell(1 + \delta)$ .

## 4.6 Выводы по главе 4

В данной главе произведено аналитическое построение барьера для игры двух идентичных автомобилей. С помощью попятной процедуры решения уравнения Айзекса аналитически описаны все полупроницаемые поверхности, содержащие барьер ( $\tilde{\mathcal{B}}_{\mathcal{P}}^v$ ,  $\tilde{\mathcal{B}}_{\mathcal{T}\mathcal{S}}^v$ ,  $\tilde{\mathcal{B}}_{\mathcal{T}\mathcal{D}}^v$ ). Произведено численное моделирование, с помощью которого установлено, что существует рубежное значение радиуса захвата  $\ell = \ell_J$ , по разную сторону от которого барьер имеет различную геометрическую форму. Существование подобного значения математически обосновано в лемме 4.2. Произведена процедура отсеечения лишних частей полупроницаемых поверхностей, которые не входят в состав барьера. Эта процедура задаёт



ограничения на диапазоны изменения параметров в параметрическом описании соответствующих поверхностей и линий (формулы (4.19), (4.20), (4.21), (4.22)). Получена удобная для вычисления синтезирующих управлений на барьере параметризация соответствующих поверхностей через вектор состояния. С помощью данной параметризации предложена схема вычисления синтезирующих оптимальных управлений (утверждение 4.1), которая может быть сделана устойчивой к ошибкам округления входных данных.

## Заключение

На основе анализа свойств множеств достижимости изучена задача наискорейшего перехвата цели, движущейся известным образом. В работе показано, что если функция расстояния от произвольной точки до соответствующей проекции множества достижимости может быть эффективно вычислена, то наименьшее время перехвата может быть вычислено как наименьший неотрицательный корень уравнения, в котором расстояние от проекции множества достижимости объекта управления до положение движущейся цели приравнивается к радиусу захвата. В работе предложено две функции (простая и лучшая из функций универсального оценивания снизу), которые могут быть использованы в методе простой итерации, который всегда сходится к оптимальному решению. Простая функция универсального оценивания снизу имеет явный аналитический вид, если функция расстояния до проекции множества достижимости задана аналитически в явном виде. В свою очередь, лучшая из функций универсального оценивания снизу может быть вычислена как корень определённого вещественного уравнения. На практике может получиться так, что это вещественное уравнение решить даже сложнее, чем исходную задачу перехвата. Однако, если есть способ эффективного подсчёта корня этого уравнения, то шаг метода простой итерации на основе лучшей из функций универсального оценивания снизу является наибольшим из тех, что можно сделать для произвольной траектории цели из класса липшицевых функций с гарантией не переоценки оптимального решения. Применение разработанного алгоритма выглядит перспективным для решения задач построения опорных траекторий на основе динамических моделей объектов управления с описываемым аналитически множеством достижимости (например, для перехвата изотропной ракетой).

В качестве содержательного примера использования представленного метода получено решение задачи наискорейшего перехвата движущейся цели машиной Дубинса. В частности, получены неявные аналитические выражения, позволяющие определить наименьшее время перехвата, оптимальную траекторию перехвата и оптимальное управление; в явном виде получена функция расстояния до плоского множества достижимости, позволяющая конструктивно использовать всегда сходящийся алгоритм на основе универсальной оценки снизу.

Этот алгоритм и процедуры получения оптимальных траекторий, управлений и положений перехвата реализованы в виде комплекса проблемно-ориентированных программ, которые позволили провести вычислительные эксперименты с конкретными траекториями движения цели. В сравнении с известными результатами по данной задаче предложенный алгоритм работает с более широким классом траекторий движения цели и с гарантией получения верного приближения к правильному ответу.

Также аналитически исследована и задача наискорейшего бокового перехвата движущейся цели машиной Дубинса. Впервые получена и обоснована полная классификация оптимальных траекторий перехвата и представлен алгоритм вычисления оптимальных параметров траектории по наименьшему времени перехвата. Представленный всегда сходящийся алгоритм решения задач перехвата не может быть применён непосредственно к данной задаче, т. к. пространство важных при перехвате координат не является нормированным. Однако это пространство является метризуемым и это обстоятельство можно использовать для получения соответствующих аналитических результатов. Обобщение представленного метода на метрические пространства относится к дальнейшим перспективам исследования.

В завершении работы был рассмотрен случай неизвестного заранее движения цели (дифференциальной игры двух идентичных автомобилей). Для этой игры были получены явные аналитические решения для управлений игроков в форме синтеза для состояний, принадлежащих барьеру. Анализ изменения геометрии поверхности барьера показал, что существуют качественные различия формы барьера в зависимости от размера радиуса захвата. Произведённая классификация возможных форм барьера в зависимости от радиуса захвата позволяет не использовать метод проб и ошибок для построения барьера, как это делалось другими авторами при анализе барьера игры. Также получено аналитическое описание барьера через состояние системы. Это описание открывает возможность синтезировать оптимальные управления игроков так, что для этого не требуется исключать дополнительные параметры численными методами. Для задачи избежания столкновений полученные для убегающего формулы синтезирующего оптимального управления на барьере могут быть сделаны устойчивыми к ошибкам округления компонент состояния системы. Для достижения этого эффекта, вместо подсчёта управления на поверхности барьера,

нужно производить подсчёт управления для состояния, принадлежащего трёхмерному слою, граница которого примыкает к поверхности барьера. Это обстоятельство делает описанные процедуры вычисления готовыми к практическому использованию.

## Список литературы

1. *Palumbo N. F., Blauwkamp R. A., Lloyd J. M.* Modern homing missile guidance theory and techniques // Johns Hopkins Apl Technical Digest. — 2010. — Vol. 29, no. 1. — P. 42–59.
2. Математическая теория оптимальных процессов / Л. С. Понтрягин [и др.]. — Москва : Наука, 1983. — (4).
3. *Rubi B., Perez R., Morcego B.* A Survey of Path Following Control Strategies for UAVs Focused on Quadrotors // Journal of Intelligent and Robotic Systems. — 2020. — May. — Vol. 98, no. 2. — P. 241–265.
4. *Айзекс Р.* Дифференциальные игры. — Москва : МИР, 1967.
5. *Lewin J., Olsder G. J.* The isotropic rocket—A surveillance evasion game // Computers and Mathematics with Applications. — 1989. — Jan. — Vol. 18, no. 1. — P. 15–34.
6. *Акуленко Л. Д., Шматков А. М.* Синтез управления в задаче оптимального по быстродействию приведения материальной точки в заданное положение с нулевой скоростью // Прикладная математика и механика. — 1998. — Т. 62, № 1. — С. 129–138.
7. *Акуленко Л. Д., Шматков А. М.* Наискорейшее попадание на сферу с нулевой скоростью // Доклады Академии наук. — 2001. — Т. 379, № 1. — С. 28–32.
8. *Акуленко Л. Д., Шматков А. М.* Приведение динамического объекта на поверхность эллипсоида за минимальное время // Известия Российской академии наук. Теория и системы управления. — 2018. — № 1. — С. 64–72.
9. *Venkatraman A., Bhat S. P.* Optimal Planar Turns Under Acceleration Constraints // Proceedings of the 45th IEEE Conference on Decision and Control. — San Diego, CA, USA : IEEE, 12/2006. — P. 235–240.
10. *Bakolas E.* Optimal Guidance of the Isotropic Rocket in the Presence of Wind // Journal of Optimization Theory and Applications. — 2014. — Sept. — Vol. 162, no. 3. — P. 954–974.

11. *Марков А. А.* Несколько примеров решения особого рода задач о наибольших и наименьших величинах // Сообщения Харьковского математического общества. — 1889. — Т. 2, 1, № 5, 6. — С. 250–276.
12. *Dubins L. E.* On Curves of Minimal Length with a Constraint on Average Curvature, and with Prescribed Initial and Terminal Positions and Tangents // American Journal of Mathematics. — 1957. — Vol. 79, no. 3. — P. 497–516.
13. *Pecsvaradi T.* Optimal horizontal guidance law for aircraft in the terminal area // IEEE Transactions on Automatic Control. — 1972. — Dec. — Vol. 17, no. 6. — P. 763–772.
14. *Бердышев Ю. И.* Синтез оптимального управления для одной системы 3-го порядка // Вопросы анализа нелинейных систем автоматического управления. — 1973. — № 12. — С. 91–101.
15. *Shkel A. M., Lumelsky V.* Classification of the Dubins set // Robotics and Autonomous Systems. — 2001. — Mar. — Vol. 34, no. 4. — P. 179–202.
16. *Пацко В. С., Пятко С. Г., Федотов А. А.* Трехмерное множество достижимости нелинейной управляемой системы // Известия Российской академии наук. Теория и системы управления. — 2003. — № 3. — С. 8–16.
17. *Kaya C. Y.* Markov–Dubins path via optimal control theory // Computational Optimization and Applications. — 2017. — Vol. 68, no. 3. — P. 719–747.
18. *Coates S., Pachter M., Murphey R.* Optimal Control of a Dubins Car with a Capture Set and the Homicidal Chauffeur Differential Game // IFAC-PapersOnLine. — 2017. — July. — Vol. 50, no. 1. — P. 5091–5096.
19. *Vakolas E., Tsiotras P.* Optimal synthesis of the asymmetric sinistral/dextral Markov–dubins problem // Journal of Optimization Theory and Applications. — 2011. — Aug. — Vol. 150, no. 2. — P. 233–250.
20. *Пацко В. С., Федотов А. А.* Множество достижимости в момент для машины Дубинса в случае одностороннего поворота // Труды института математики и механики УрО РАН. — 2018. — Т. 24, № 1. — С. 143–155.

21. *Patsko V. S., Fedotov A. A.* Attainability set at instant for one-side turning dubins car // IFAC-PapersOnLine. — 2018. — Vol. 51, no. 32. — P. 201–206.
22. *Chitsaz H., LaValle S. M.* Time-optimal paths for a Dubins airplane // 2007 46th IEEE Conference on Decision and Control. — New Orleans, LA, USA : IEEE, 12/2007. — P. 2379–2384.
23. *McLain T., Beard R. W., Owen M.* Implementing Dubins Airplane Paths on Fixed-wing UAVs // Handbook of Unmanned Aerial Vehicles. — Springer, 2014. — P. 1677–1701. — (Faculty Publications).
24. Minimal 3D Dubins Path with Bounded Curvature and Pitch Angle / P. Vana [et al.] // 2020 IEEE International Conference on Robotics and Automation (ICRA). — Paris, France : IEEE, 05/2020. — P. 8497–8503.
25. *Reeds J., Shepp L.* Optimal paths for a car that goes both forwards and backwards // Pacific J. Math. — 1990. — Vol. 145, no. 2. — P. 367–393.
26. *Sussmann H. J., Tang G.* Shortest paths for the Reeds-Shepp car: A worked out example of the use of geometric techniques in nonlinear optimal control : tech. rep. — 1991. — SYCON–91-10.
27. *Boissonnat J.-D., Cerezo A., Leblond J.* Shortest paths of bounded curvature in the plane // Journal of Intelligent and Robotic Systems. — 1994. — Mar. — Vol. 11, no. 1. — P. 5–20.
28. *Soueres P., Laumond J.-P.* Shortest paths synthesis for a car-like robot // IEEE Transactions on Automatic Control. — 1996. — May. — Vol. 41, no. 5. — P. 672–688.
29. *Черноусько Ф. Л.* Оптимальный алгоритм поиска корня функции, вычисляемой приближенно // Журнал вычислительной математики и математической физики. — 1968. — Т. 8, № 4. — С. 705–724.
30. *Сухарев А. Г.* Оптимальный поиск корня функции, удовлетворяющей условию Липшица // Журнал вычислительной математики и математической физики. — 1976. — Т. 16, № 1. — С. 20–29.
31. *Abaffy J., Galantai A.* An always convergent algorithm for global minimization of univariate Lipschitz functions // Acta Polytechnica Hungarica. — 2013. — Vol. 10, no. 7. — P. 21–39.

32. *Galantai A., Abaffy J.* Always convergent iteration methods for nonlinear equations of Lipschitz functions // Numerical Algorithms. — 2015. — June. — Vol. 69, no. 2. — P. 443–453.
33. *Pachter M., Coates S.* The classical homicidal chauffeur game // Dyn. Games Appl. — 2019. — Sept. — Vol. 9, no. 3. — P. 800–850. — DOI: <https://doi.org/10.1007/s13235-018-0264-8>.
34. *Бердышев Ю. И.* Синтез оптимального по быстродействию управления для одной нелинейной системы четвертого порядка // Прикладная математика и механика. — 1975. — Т. 39, № 6. — С. 985–994.
35. *Бердышев Ю. И.* Об оптимальном по быстродействию управлении обобщенной машиной Дубинса // Труды института математики и механики УрО РАН. — 2016. — Т. 22, № 1. — С. 26–35.
36. *Sussmann H. J.* The Markov-Dubins problem with angular acceleration control // Proceedings of the 36th IEEE Conference on Decision and Control. Vol. 3. — San Diego, CA, USA : IEEE, 12/1997. — P. 2639–2643.
37. *Fraichard T., Scheuer A.* From Reeds and Shepp’s to continuous-curvature paths // IEEE Transactions on Robotics. — 2004. — Dec. — Vol. 20, no. 6. — P. 1025–1035.
38. *Clements J. C.* Minimum-time turn trajectories to fly-to points // Optimal Control Applications and Methods. — 1990. — Jan. — Vol. 11, no. 1. — P. 39–50.
39. *Zhang X., Chen J., Xin B.* Path planning for unmanned aerial vehicles in surveillance tasks under wind fields // Journal of Central South University of Technology. — 2014. — Aug. — Vol. 21, no. 8. — P. 3079–3091.
40. *Merz A. W.* The homicidal chauffeur — a differential game : tech. rep. / Department of Aeronautics ; Astronautics Stanford University. — 1971. — SUDAAR No. 418.
41. *Merz A. W.* The homicidal chauffeur // AIAA Journal. — 1974. — Mar. — Vol. 12, no. 3. — P. 259–260. — DOI: <https://doi.org/10.2514/3.49215>.
42. *Pachter M., Getz W. M.* The geometry of the barrier in the game of two cars // Optim. Control Appl. Methods. — 1980. — Apr. — Vol. 1, no. 2. — P. 103–118. — DOI: <https://doi.org/10.1002/oca.4660010202>.



43. *Симакова Э. Н.* Об оптимальных стратегиях в игре преследования объектов с ограниченной маневренностью // Автоматика и телемеханика. — 1983. — № 10. — С. 83–92.
44. *Bera R., Makkarati V. R., Kothari M.* A comprehensive differential game theoretic solution to a game of two cars // J. Optim. Theory Appl. — 2017. — Sept. — Vol. 174, no. 3. — P. 818–836. — DOI: <https://doi.org/10.1007/s10957-017-1134-z>.
45. The Shortest path synthesis for non-holonomic robots moving forwards : tech. rep. / X.-N. Bui [et al.] ; INRIA. — 12/1993. — RR-2153.
46. Shortest path synthesis for Dubins non-holonomic robot / X.-N. Bui [et al.] // Proceedings of the 1994 IEEE International Conference on Robotics and Automation. — San Diego, CA, USA : IEEE, 1994. — P. 2–7.
47. *Chen Z., Shima T.* Shortest Dubins paths through three points // Automatica. — 2019. — July. — Vol. 105. — P. 368–375.
48. *Jha B., Chen Z., Shima T.* On shortest Dubins path via a circular boundary // Automatica. — 2020. — Nov. — Vol. 121. — P. 109192.
49. *Jha B., Chen Z., Shima T. Y.* Shortest Bounded Curvature Trajectory Via A Moving Circle: Theory and Applications // AIAA SCITECH 2022 Forum. — San Diego, CA & Virtual : AIAA, 12/2021. — (AIAA SciTech Forum).
50. *Chen Z.* On Dubins paths to a circle // Automatica. — 2020. — July. — Vol. 117. — P. 108996.
51. *McGee T., Spry S., Hedrick K.* Optimal path planning in a constant wind with a bounded turning rate // AIAA Guidance, Navigation, and Control Conference and Exhibit. — San Francisco, California : AIAA, 08/2005.
52. *McGee T. G., Hedrick J. K.* Optimal Path Planning with a Kinematic Airplane Model // Journal of Guidance, Control, and Dynamics. — 2007. — Mar. — Vol. 30, no. 2. — P. 629–633.
53. *Techy L., Woolsey C. A., Schmale D. G.* Path planning for efficient UAV coordination in aerobiological sampling missions // 2008 47th IEEE Conference on Decision and Control. — Cancun, Mexico, 12/2008. — P. 2814–2819.

54. *Techy L., Woolsey C. A.* Minimum-Time Path Planning for Unmanned Aerial Vehicles in Steady Uniform Winds // *Journal of Guidance, Control, and Dynamics*. — 2009. — Nov. — Vol. 32, no. 6. — P. 1736–1746.
55. *Bakolas E., Tsiotras P.* Optimal Synthesis of the Zermelo–Markov–Dubins Problem in a Constant Drift Field // *Journal of Optimization Theory and Applications*. — 2013. — Vol. 156, no. 2. — P. 469–492.
56. *Monroy-Perez F.* Non-Euclidean Dubins' problem // *Journal of Dynamical and Control Systems*. — 1998. — Vol. 4, no. 2. — P. 249–272.
57. *Mittenhuber D.* Dubins' problem is intrinsically three-dimensional // *ESAIM. Control, Optimisation and Calculus of Variations*. — 1998. — Vol. 3. — P. 1–22.
58. *Mittenhuber D.* Dubins' problem in hyperbolic space // *Geometric Control and Non-holonomic Mechanics*. — Mexico City : AMS, 1998. — P. 101–114.
59. *Chitour Y., Sigalotti M.* On the controllability of the dubins' problem for surfaces // *IFAC Proceedings Volumes*. Vol. 37. — Оахака, Mexico, USA : Elsevier BV, 12/2004. — P. 563–565.
60. Восстановление траектории самолета по неточным измерениям / Бедин, Д А and Пацко, В С and Федотов, А А and Беляков, А В and Строков, К В // *Автоматика и телемеханика*. — 2010. — № 2. — С. 17–30.
61. *Wu A., How J. P.* Guaranteed infinite horizon avoidance of unpredictable, dynamically constrained obstacles // *Autonomous Robots*. — 2012. — Vol. 32. — P. 227–242.
62. Airborne Radar-Based Collision Detection and Risk Estimation for Small Unmanned Aircraft Systems / L. R. Sahawneh [et al.] // *Journal of Aerospace Information Systems*. — 2015. — Dec. — Vol. 12, no. 12. — P. 756–766.
63. *Cockayne E. J., Hall G. W. C.* Plane Motion of a Particle Subject to Curvature Constraints // *SIAM Journal on Control and Optimization*. — 1975. — Jan. — Vol. 13, no. 1. — P. 197–220.
64. *Boissonnat J.-D., Bui X.-N.* Accessibility Region for a Car that Only Moves Forwards Along Optimal Paths : tech. rep. / INRIA. — 1994. — RR–2181.

65. *Ding Y., Xin B., Chen J.* Curvature-constrained path elongation with expected length for Dubins vehicle // *Automatica*. — 2019. — Oct. — Vol. 108. — P. 108495.
66. *Cacace S., Lai A. C., Loreti P.* Modeling and Optimal Control of an Octopus Tentacle // *SIAM Journal on Control and Optimization*. — 2020. — Jan. — Vol. 58, no. 1. — P. 59–84.
67. *Fedotov A., Patsko V., Turova V.* Reachable sets for simple models of car motion // *Recent Advances in Mobile Robotics* / ed. by A. V. Topalov. — IntechOpen, 2011. — P. 147–172.
68. *Пацко В. С., Федотов А. А.* Аналитическое описание множества достижимости для машины Дубинса // *Труды института математики и механики УрО РАН*. — 2020. — Т. 26, № 1. — С. 182–197.
69. *Patsko V. S., Fedotov A. A.* Analytical description of three-dimensional reachable set for Dubins car // *Proceedings of the 61th Israel Annual Conference on Aerospace Sciences*. — Tel-Aviv & Haifa, Israel, 2022. — P. 1–30.
70. *Patsko V., Fedotov A.* Three-dimensional reachable set for the Dubins car: Foundation of analytical description // *Communications in Optimization Theory*. — 2022. — Vol. 2022. — P. 1–42.
71. *Chen Z., Wang K., Lu Y.* Elongation of Curvature-Bounded Path // *Automatica*. — 2023. — Vol. 151. — P. 110936.
72. *Guelman M., Shinar J.* Optimal guidance law in the plane // *Journal of Guidance, Control, and Dynamics*. — 1984. — July. — Vol. 7, no. 4. — P. 471–476.
73. *Glizer V. Y.* Optimal planar interception with fixed end conditions: Closed-form solution // *Journal of Optimization Theory and Applications*. — 1996. — Vol. 88, no. 3. — P. 503–539.
74. *Cockayne E.* Plane pursuit with curvature constraints // *SIAM J. Appl. Math.* — 1967. — Nov. — Vol. 15, no. 6. — P. 1511–1516. — DOI: <https://doi.org/10.1137/0115133>.

75. *Glizer V. Y., Shinar J.* On the structure of a class of time-optimal trajectories // Optimal Control Applications and Methods. — 1993. — Oct. — Vol. 14, no. 4. — P. 271–279.
76. *Бердышев Ю. И.* О задачах последовательного обхода одним нелинейным объектом двух точек // Труды Института математики и механики УрО РАН. — 2005. — Т. 11, № 1. — С. 43–52.
77. *Бердышев Ю. И.* Нелинейные задачи последовательного управления и их приложение: Монография / под ред. В. С. Пацко. — Екатеринбург : УрО РАН, 2015.
78. *Looker J. R.* Minimum paths to interception of a moving target when constrained by turning radius : tech. rep. / Australian Government Department of Defence. — 2008. — DSTO–TR–2227.
79. *Meyer Y., Isaiah P., Shima T.* On Dubins Paths to Intercept a Moving Target at a Given Time // Proceedings of the 19th World Congress The International Federation of Automatic Control. Vol. 47. — Cape Town, South Africa., 01/2014. — P. 2521–2526.
80. *Meyer Y., Isaiah P., Shima T.* On Dubins paths to intercept a moving target // Automatica. — 2015. — Mar. — Vol. 53. — P. 256–263.
81. Time-optimal guidance for intercepting moving targets by Dubins vehicles / Y. Zheng [et al.] // Automatica. — 2021. — June. — Vol. 128. — P. 109557.
82. *McNeely R. L., Iyer R. V., Chandler P. R.* Tour Planning for an Unmanned Air Vehicle Under Wind Conditions // Journal of Guidance, Control, and Dynamics. — 2007. — Sept. — Vol. 30, no. 5. — P. 1299–1306.
83. *Ayhan B., Kwan C.* Time-Constrained Extremal Trajectory Design for Fixed-Wing Unmanned Aerial Vehicles in Steady Wind // Journal of Guidance, Control, and Dynamics. — 2018. — July. — Vol. 41, no. 7. — P. 1569–1576.
84. *Bakolas E., Tsiotras P.* Time-optimal synthesis for the Zermelo-Markov-Dubins problem: The constant wind case // Proceedings of the 2010 American Control Conference. — Baltimore, MD, USA : IEEE, 06/2010. — P. 6163–6168.

85. Rapid path planning for Dubins vehicles under environmental currents / K. Mittal [et al.] // Robotics and Autonomous Systems. — 2020. — Dec. — Vol. 134. — P. 103646.
86. *Gopalan A., Ratnoo A., Ghose D.* Time-Optimal Guidance for Lateral Interception of Moving Targets // Journal of Guidance, Control, and Dynamics. — 2016. — Mar. — Vol. 39, no. 3. — P. 510–525.
87. *Gopalan A., Ratnoo A., Ghose D.* Generalized Time-Optimal Impact-Angle-Constrained Interception of Moving Targets // Journal of Guidance, Control, and Dynamics. — 2017. — Vol. 40, no. 8. — P. 2115–2120.
88. Optimal Dubins Paths to Intercept a Moving Target on a Circle / S. G. Manyam [et al.] // 2019 American Control Conference (ACC). — Philadelphia, PA, USA, 07/2019. — P. 828–834.
89. Shortest Dubins Paths to Intercept a Target Moving on a Circle / G. S. Manyam [et al.] // Journal of Guidance, Control, and Dynamics. — 2022. — July. — Vol. 45, no. 11. — P. 2107–2120.
90. *Manyam S. G., Casbeer D. W.* Intercepting a Target Moving on a Race-track Path // 2020 International Conference on Unmanned Aircraft Systems (ICUAS). — Athens, Greece : IEEE, 09/2020. — P. 799–806.
91. *Schopferer S., Pfeifer T.* Performance-aware flight path planning for unmanned aircraft in uniform wind fields // 2015 International Conference on Unmanned Aircraft Systems (ICUAS). — Denver, CO, USA : IEEE, 06/2015. — P. 1138–1147.
92. *Coombes M., Chen W.-H., Render P.* Landing Site Reachability in a Forced Landing of Unmanned Aircraft in Wind // Journal of Aircraft. — 2017. — July. — Vol. 54, no. 4. — P. 1415–1427.
93. *Burns B., Blue P., Zollars M.* Simulation of a Real-time Trajectory Generator for Automated Aerial Refueling with a Required Time of Arrival // AIAA Modeling and Simulation Technologies Conference and Exhibit. — Hilton Head, South Carolina : AIAA, 08/2007. — P. 1–13. — (Guidance, Navigation, and Control and Co-located Conferences).

94. *Rublein G. T.* On pursuit with curvature constraints // SIAM J. Control Optim. — 1972. — Feb. — Vol. 10, no. 1. — P. 37–39. — DOI: <https://doi.org/10.1137/0310003>.
95. *Borówko P., Rzymowski W.* On the game of two cars // J. Optim. Theory Appl. — 1984. — Vol. 44, no. 3. — P. 381–396. — DOI: <https://doi.org/10.1007/bf00935458>.
96. *Breakwell J. V., Merz A. W.* Minimum required capture radius in a coplanar model of the aerial combat problem // AIAA Journal. — 1977. — Aug. — Vol. 15, no. 8. — P. 1089–1094. — DOI: <https://doi.org/10.2514/3.7399>.
97. *Pachter M., Miloh T.* The geometric approach to the construction of the barrier surface in differential games // Comput. Math Appl. — 1987. — Vol. 13, no. 1–3. — P. 47–67. — DOI: [https://doi.org/10.1016/0898-1221\(87\)90093-9](https://doi.org/10.1016/0898-1221(87)90093-9).
98. *Simakova E. N.* Differential pursuit game // Autom. Remote Control. — 1967. — Vol. 28, no. 2. — P. 173–181.
99. *Simakova E. N.* On optimal strategies in games of pursuit with limited maneuverability // Autom. Remote Control. — 1983. — Vol. 44, no. 10. — P. 1307–1315.
100. *Simakova E. N.* On Bellman functions in optimization of dynamic systems under uncertainty // Autom. Remote Control. — 1986. — Vol. 47, no. 2. — P. 47–51.
101. *Simakova E. N.* Problem of pursuit and evasion // Autom. Remote Control. — 1970. — Vol. 31, no. 8. — P. 1205–1211.
102. *Kostsov A. V., Simakova E. N.* Differential game an conventional ways to solve the pursuit problem // Autom. Remote Control. — 1988. — Vol. 49, no. 11. — P. 1423–1432.
103. *Farber N., Shinar J.* Approximate solution of singularly perturbed nonlinear pursuit-evasion games // J. Optim. Theory Appl. — 1980. — Sept. — Vol. 32, no. 1. — P. 39–73. — DOI: <https://doi.org/10.1007/BF00934842>.
104. A new approach to aerial combat games : tech. rep. / S. Baron [et al.] ; Harvard University. — 10/1970. — NASA-CR-1626.

105. *Weintraub I. E., Pachter M., Garcia E.* An introduction to pursuit-evasion differential games // 2020 American Control Conference (ACC). — Denver, CO, USA, 07/2020. — P. 1049–1066. — DOI: <https://doi.org/10.23919/ACC45564.2020.9147205>.
106. *Meier L.* A new technique for solving pursuit-evasion differential games // IEEE Trans. Automat. Contr. — 1969. — Aug. — Vol. 14, no. 4. — P. 352–359. — DOI: <https://doi.org/10.1109/TAC.1969.1099226>.
107. *Ciletti M. D., Merz A. W.* Collision avoidance maneuvers for ships // Navigation. — 1976. — June. — Vol. 23, no. 2. — P. 128–135. — DOI: <https://doi.org/10.1002/j.2161-4296.1976.tb00731.x>.
108. *Merz A. W.* Optimal evasive maneuvers in maritime collision avoidance // Navigation. — 1973. — June. — Vol. 20, no. 2. — P. 144–152. — DOI: <https://doi.org/10.1002/j.2161-4296.1973.tb01163.x>.
109. *Merz A. W., Karmarkar J. S.* Collision avoidance systems and optimal turn manoeuvres // J. Navig. — 1976. — Apr. — Vol. 29, no. 2. — P. 160–174. — DOI: <https://doi.org/10.1017/s0373463300030150>.
110. *Miloh T.* Determination of critical maneuvers for collision avoidance using the theory of differential games : tech. rep. / Institut für Schiffbau der Uni Hamburg. — 1974. — No. 319.
111. *Sharma S. D.* On ship maneuverability and collision avoidance : tech. rep. / Institut für Schiffbau der Uni Hamburg. — 1977. — No. 352.
112. A problem of collision avoidance : tech. rep. / T. L. Vincent [et al.] ; University of Arizona. — 11/1972. — NASA-CR-129988.
113. Some aspects of collision avoidance / T. L. Vincent [et al.] // AIAA Journal. — 1974. — Jan. — Vol. 12, no. 1. — P. 3–4. — DOI: <https://doi.org/10.2514/3.49141>.
114. *Vincent T. L., Sticht D. J., Peng W. Y.* Aircraft missile avoidance // Oper. Res. — 1976. — June. — Vol. 24, no. 3. — P. 420–437. — DOI: <https://doi.org/10.1287/opre.24.3.420>.
115. *Miloh T.* The game of two elliptical ships // Optim. Control Appl. Methods. — 1983. — Jan. — Vol. 4, no. 1. — P. 13–29. — DOI: <https://doi.org/10.1002/oca.4660040103>.

116. *Olsder G. J., Walter J. L.* A differential game approach to collision avoidance of ships // Optimization Techniques Part 1 / ed. by J. Stoer. — Berlin, Heidelberg : Springer, 1978. — P. 264–271. — DOI: <https://doi.org/10.1007/BFb0007243>.
117. *Miloh T., Pachter M.* Ship collision-avoidance and pursuit-evasion differential games with speed-loss in a turn // Comput. Math. Appl. — 1989. — Jan. — Vol. 18, no. 1. — P. 77–100. — DOI: [https://doi.org/10.1016/0898-1221\(89\)90126-0](https://doi.org/10.1016/0898-1221(89)90126-0).
118. *Miloh T., Sharma S. D.* Maritime collision avoidance as a differential game // Schiffstechnik. — 1977. — May. — Vol. 24, no. 116. — P. 69–88.
119. *Kwik K. H.* Calculation of ship collision avoidance manoeuvres: A simplified approach // Ocean Eng. — 1989. — Jan. — Vol. 16, no. 5. — P. 475–491. — DOI: [https://doi.org/10.1016/0029-8018\(89\)90048-6](https://doi.org/10.1016/0029-8018(89)90048-6).
120. *Merz A. W.* The game of two identical cars // J. Optim. Theory Appl. — 1972. — Vol. 9, no. 5. — P. 324–343. — DOI: <https://doi.org/10.1007/BF00932932>.
121. *Greenfeld I.* A differential game of surveillance evasion of two identical cars // J. Optim. Theory Appl. — 1987. — Jan. — Vol. 52, no. 1. — P. 53–79. — DOI: <https://doi.org/10.1007/BF00938464>.
122. *Mitchell I.* Games of two identical vehicles : tech. rep. / Stanford University. — 2001. — SUDAAR #740.
123. *Tarnopolskaya T., Fulton N.* Optimal cooperative collision avoidance strategy for coplanar encounter: Merz's solution revisited // J. Optim. Theory Appl. — 2009. — Feb. — Vol. 140, no. 2. — P. 355–375. — DOI: <https://doi.org/10.1007/s10957-008-9452-9>.
124. *Maurer H., Tarnopolskaya T., Fulton N.* Singular controls in optimal collision avoidance for participants with unequal linear speeds // ANZIAM J. — 2011. — Vol. 53. — P. 1–18. — DOI: <https://doi.org/10.21914/anziamj.v53i0.5098>.



125. *Maurer H., Tarnopolskaya T., Fulton N.* Optimal bang-bang and singular controls in collision avoidance for participants with unequal linear speeds // 2012 IEEE 51st IEEE Conf. on Decis. Control (CDC). — Maui, HI, USA : IEEE, 12/2012. — P. 7697–7702. — DOI: <https://doi.org/10.1109/CDC.2012.6426792>.
126. *Maurer H., Tarnopolskaya T., Fulton N.* Computation of bang-bang and singular controls in collision avoidance // J. Ind. Manag. Optim. — 2014. — Vol. 10, no. 2. — P. 443–460. — DOI: <https://doi.org/10.3934/jimo.2014.10.443>.
127. *Tarnopolskaya T., Fulton N.* Synthesis of optimal control for cooperative collision avoidance for aircraft (ships) with unequal turn capabilities // J. Optim. Theory Appl. — 2010. — Feb. — Vol. 144, no. 2. — P. 367–390. — DOI: <https://doi.org/10.1007/s10957-009-9597-1>.
128. *Tarnopolskaya T., Fulton N. L.* Non-unique optimal collision avoidance strategies for coplanar encounter of participants with unequal turn capabilities // IAENG Int. J. Appl. Math. — 2010. — Vol. 40, no. 4. — P. 289–296.
129. *Tarnopolskaya T., Fulton N. L.* Synthesis of optimal control for cooperative collision avoidance in a close proximity encounter: Special cases // IFAC Proc. Vol. — 2011. — Jan. — Vol. 44, no. 1. — P. 9775–9781. — DOI: <https://doi.org/10.3182/20110828-6-IT-1002.00325>.
130. *Лу Э. Б., Маркус Л.* Основы теории оптимального управления. — Москва : Наука, 1972.
131. *Lewin J.* Differential Games: Theory and Methods for Solving Game Problems with Singular Surfaces. — Springer Science & Business Media, 12/2012. — DOI: <https://doi.org/10.1007/978-1-4471-2065-0>.

**Публикации автора по теме диссертации**

1. *Buzikov M., Galyaev A. A.* The game of two identical cars: An analytical description of the barrier // *Journal of Optimization Theory and Applications.* — 2023. — Vol. 198. — P. 988–1018. (WoS Q2: IF — 1.9, Scopus Q1).
2. *Buzikov M. E., Galyaev A. A.* Minimum-time lateral interception of a moving target by a Dubins car // *Automatica.* — 2022. — Jan. — Vol. 135. — 109968. (WoS Q1: IF — 6.4, Scopus Q1).
3. *Buzikov M. E., Galyaev A. A.* Time-optimal interception of a moving target by a Dubins car // *Automation and Remote Control* — 2021. — Vol. 82, no. 5. — P. 745–758. (WoS Q3: IF — 0.538, Scopus Q2, RSCI Q1).

**Иные публикации автора**

4. *Buzikov M.* Computing the minimum-time interception of a moving target. — 2022. — Oct. — arXiv: [210.03439 \[math.OC\]](https://arxiv.org/abs/210.03439).
5. *Buzikov M. E., Galyaev A. A.* Estimating the target survival probability in the attackers–target–defenders problem // Automation and Remote Control. — 2021. — Vol. 82, no. 9. — P. 1597–1606.
6. Optimization of interception plan for rectlineary moving targets / Galyaev A. A. [et al.] // Automation and Remote Control. — 2023. — Vol. 84, no. 10. — P. 18–36.
7. Intelligent control of autonomous and anthropocentric on-board systems / M. E. Buzikov [et al.] // Procedia Computer Science — 2019. — Vol. 150. — P. 10–18.
8. Модель группового противодействия системе самонаведения / М. Э. Бузи́ков [и др.] // Материалы 15-й МКПУ. — Санкт-Петербург: Концерн ЦННИ Электроприбор, 2022. — с. 95–97.
9. *Бузи́ков М. Э., Галяев А. А.* Алгоритмы вычисления оптимальной траектории перехвата подвижной цели машиной Дубинса // Материалы 14-й МКПУ. — Дивноморское, Геленджик : ЮФУ, 2021. — с. 73–76.
10. Нейросетевой подход к задаче оптимального перехвата машиной Дубинса / М. Э. Бузи́ков [и др.] // Материалы 15-й МКПУ. — Санкт-Петербург: Концерн ЦННИ Электроприбор, 2022. — с. 66–68.
11. *Бузи́ков М. Э.* Скорейший перехват предписано движущейся цели изотропной ракетой // Материалы 16-й МКПУ. — Волгоград: ВолгГТУ, 2023. — с. 121–124.
12. *Бузи́ков М. Э., Галяев А. А.* Задача сближения машины Дубинса с подвижной целью под заданным углом // Труды 63-й Всероссийской научной конференции МФТИ. — Москва: МФТИ, 2020. — с. 28–30.
13. *Бузи́ков М. Э.* Перехват криволинейно движущейся цели машиной Дубинса // Труды 63-й Всероссийской научной конференции МФТИ. — Москва: МФТИ, 2020. — с. 37–39.

## Приложение А

### Комплекс программ для построения траектории наискорейшего перехвата цели, движущейся известным образом

В этом разделе приведены отрывки из исходного кода реализации комплекса программ для построения траектории наискорейшего перехвата предписано движущейся цели, а также приведена демонстрация использования этого комплекса. Соответствующий комплекс программ с названием `mmcs` реализован в виде пакета модулей на языке Python с использованием JIT-компиляции<sup>1</sup> из пакета `numba`. Исходный код пакета размещён в открытом доступе по ссылке <https://github.com/shmax3/mmcs>. Пакет `mmcs` позволяет производить расчёты следующего типа:

1. Вычислить наименьшее необходимое время для достижения заданной точки на плоскости и построить соответствующую траекторию.
2. Вычислить наименьшее время перехвата предписано движущейся цели на плоскости и построить соответствующую траекторию наискорейшего перехвата.
3. Проверить принадлежность заданной точки плоскому множеству достижимости в заданный момент времени и построить соответствующую границу этого множества.
4. Вычислить расстояние от плоского множества достижимости до заданной точки в заданный момент времени.

Пример использования пакета `mmcs` представлен в листинге [A.1](#) (результат работы скрипта представлен на рис. [A.1](#)). Реализация вычисления функции расстояния от заданной точки до плоского множества достижимости приведена в листинге [A.2](#).

Листинг А.1 Использование пакета `mmcs` для задачи перехвата движущейся цели машиной Дубинса

```
import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt
from mmcs.dubins.value import interception_minimum_time
```

<sup>1</sup>Just-in-Time компиляция — это технология увеличения производительности программных систем, использующих байт-код, путём компиляции байт-кода в машинный код.

```

5 from mmcs.dubins.path import admissible_path_to_point
  from mmcs.dubins.control import admissible_control_to_point
  from mmcs.dubins.reachability import planar_reachable_set,
    planar_reachable_set_boundary,
    distance_to_planar_reachable_set,
    nearest_point_to_planar_reachable_set

10 # Описание траектории цели
  def xt(t):
    return 2 - vt*t

  def yt(t):
15     return -1 + 0*t

  # Радиус перехвата и наибольшая скорость цели
  r = 0.1
  vt = 0.4

20 # Расчёт наименьшего времени перехвата
  td = interception_minimum_time(xt, yt, r, vt)

  # Расчёт точки перехвата
25 xd, yd = nearest_point_to_planar_reachable_set(td, xt(td),
    yt(td))

  # Построение траектории перехвата
  t, x, y, phi = admissible_path_to_point(td, xd, yd, n=50)
30 # Вычисление функции управления
  t, u = admissible_control_to_point(td, xd, yd, n=50)

  # Инициализация сетки для визуализации
35 x_grid = np.linspace(min(x.min(), xt(t).min()) - 0.5,
    max(x.max(), xt(t).max()) + 0.5, 500)
  y_grid = np.linspace(min(y.min(), yt(t).min()) - 0.5,
    max(y.max(), yt(t).max()) + 2.5, 500)
  x_grid, y_grid = np.meshgrid(x_grid, y_grid)
40 # Установление принадлежности плоскому множеству достижимости то
    чек сетки

```

```

R = planar_reachable_set(td, x_grid, y_grid)

# Построение границы плоского множества достижимости
45 B = planar_reachable_set_boundary(td, n=100)

# Вычисление расстояния до плоского множества достижимости на то
    чках сетки
dist_to_R = distance_to_planar_reachable_set(td, x_grid, y_grid)

50 # Визуализация
fig, xy = plt.subplots(1, 1, figsize=(5, 5))
xy.plot(x, y, color='black', linestyle='dashed',
        label='minimum time interception path', zorder=1)
xy.scatter([x[0]], [y[0]], color='black',
55         label=f'initial point', zorder=2)
xy.scatter([x_dest], [y_dest], color='red', zorder=2,
        label=rf'destination point  $(x_{{d}}$ ,  $y_{{d}})$  = ( $\{x\_dest:.2f\}$ ,  $\{y\_dest:.2f\}$ )$')
xy.imshow(R, cmap="Greys", origin="lower", alpha=0.5, zorder=0,
        extent=(x_grid.min(), x_grid.max(), y_grid.min(),
                y_grid.max()))
60 xy.plot(*B[0], color='black', zorder=0,
        label=f'planar reachable set boundary at  $t = \{t\_dest:.2f\}$ $')
for Bx, By in B[1:]:
    xy.plot(Bx, By, color='black', zorder=0)
xy.imshow(dist_to_R, cmap="Greys", origin="lower", alpha=0.5,
65         zorder=-1,
        extent=(x_grid.min(), x_grid.max(), y_grid.min(),
                y_grid.max()))
xy.plot(xt(t), yt(t), color='green', linestyle='dotted',
        label='target path', zorder=1)
xy.scatter([xt(0)], [yt(0)], color='green', zorder=2,
        label=f'target initial position')
70 a = np.linspace(0, 2*np.pi, 100)
xy.plot(xt(t_dest) + r*np.cos(a), yt(t_dest) + r*np.sin(a),
        color='green', zorder=1,
        label=f'target boundary  $r = \{r:.2f\}$ $')
xy.set_aspect('equal')
75 xy.set_xlabel('$x$')
xy.set_xlim((x_grid.min(), x_grid.max()))

```

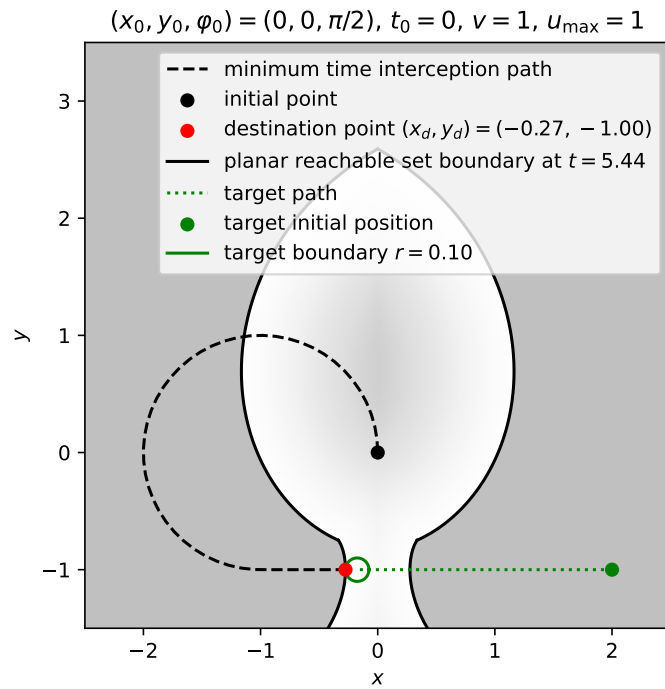


Рисунок А.1 — Результат работы скрипта из листинга А.1.

```

xy.set_ylabel('$y$')
xy.set_ylim((y_grid.min(), y_grid.max()))
xy.set_title(rf'$(x_0, y_0, \varphi_0) = ({0}, {0}, \pi/2)$, '
80         rf'$t_0 = {0}$, $v = {1}$, $u_{\{\max\}} = 1$')
xy.legend()
plt.show()

```

Листинг А.2 Реализация аналитического вычисления функции расстояния до плоского множества достижимости с помощью формул Кардано

```

from numpy import pi, arccos, sin, cos, sqrt, cbrt, sign
# Названия функций совпадают с названиями из главы 2
# Литера 'm' означает '-', а литера 'p' означает '+'
5 from .special_functions import VCS, VCCm, VCCp, thetaCS
from .special_functions import xCSm, xCSp, yCS, xCCp, yCC
from .special_functions import tauCC, rhoCC, DI, DII, DIII

10 # Функция принадлежности плоскому множеству достижимости
def planar_reachable_set(t, x, y):
    if t == 0 and x == 0 and y == 0:
        return True
    else:
15         if DI(x, y):

```

```

        return t >= VCCm(x, y)
    else:
        if t >= VCS(x, y):
            if DII(x, y):
                return True
            else:
                return t >= VCCm(x, y) or VCCp(x, y) >= t
        else:
            return False

# Функция расстояния до плоского множества достижимости
def distance_to_planar_reachable_set(t, x, y):
    if planar_reachable_set(t, x, y):
        return 0.0
    elif (DII(x, y) or (DIII(x, y) and VCS(x, y) >= t)) and
         thetaCS(x, y) <= t:
        return VCS(x, y) - t
    else:
        a = -(y + sin(t/3))
        b = 3*(1 + abs(x)) + cos(t/3)
        c = 3*y - sin(t/3)
        d = -(1 + abs(x)) + cos(t/3)
        r = rhoCC(x, y, 0., t)
        Tau = t if t < pi/2 else pi/2
        if a == 0 and b == 0:
            tau = tauCC(t, -d/c)
            if tau <= Tau:
                return min(r, rhoCC(x, y, tau, t))
        elif a == 0:
            D = c**2 - 4*b*d
            if D > 0:
                tau1 = tauCC(t, (-c + sqrt(D))/(2*b))
                tau2 = tauCC(t, (-c - sqrt(D))/(2*b))
                if tau1 <= Tau:
                    if tau2 <= Tau:
                        return min(r, rhoCC(x, y, tau1, t),
                                    rhoCC(x, y, tau2, t))
                    else:
                        return min(r, rhoCC(x, y, tau1, t))
            else:
                return min(r, rhoCC(x, y, tau1, t))
        else:

```



```

55         if tau2 <= Tau:
                return min(r, rhoCC(x, y, tau2, t))
elif D == 0:
        if tauCC(t, -c/(2*b)) <= Tau:
                return min(r, rhoCC(x, y, tauCC(t, -c/(2*b))
60                , t))
else:
        f = c/a - (b/a)**2/3
        g = (2*(b/a)**3 - 9*b*c/a**2)/27 + d/a
        h = g**2/4 + f**3/27
        if f == 0 and g == 0 and h == 0:
65                tau = tauCC(t, -cbrt(d/a))
                if tau <= Tau:
                        return min(r, rhoCC(x, y, tau, t))
elif h <= 0:
        i = sqrt(g**2/4 - h)
70        j = cbrt(i)
        k = arccos(-g/(2*i))
        tau1 = tauCC(t, 2*j*cos(k/3) - b/(3*a))
        tau2 = tauCC(t, -j*(cos(k/3) + sqrt(3)*sin(k/3))
                - b/(3*a))
        tau3 = tauCC(t, -j*(cos(k/3) - sqrt(3)*sin(k/3))
                - b/(3*a))
75        if tau1 <= Tau:
                if tau2 <= Tau:
                        if tau3 <= Tau:
                                return min(r, rhoCC(x, y, tau1, t),
                                        rhoCC(x, y, tau2, t), rhoCC(x, y,
                                        tau3, t))
                        else:
80                                return min(r, rhoCC(x, y, tau1, t),
                                        rhoCC(x, y, tau2, t))
                else:
                        if tau3 <= Tau:
                                return min(r, rhoCC(x, y, tau1, t),
                                        rhoCC(x, y, tau3, t))
                        else:
85                                return min(r, rhoCC(x, y, tau1, t))
else:
        if tau2 <= Tau:
                if tau3 <= Tau:

```

```

    return min(r, rhoCC(x, y, tau2, t),
               rhoCC(x, y, tau3, t))
90     else:
        return min(r, rhoCC(x, y, tau2, t))
    else:
        if tau3 <= Tau:
            return min(r, rhoCC(x, y, tau3, t))
95     else:
        tau = tauCC(t, cbrt(-g/2 + sqrt(h)) + cbrt(-g/2
            - sqrt(h)) - b/(3*a))
        if tau <= Tau:
            return min(r, rhoCC(x, y, tau, t))
return r
```