МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
имени М.В.ЛОМОНОСОВА

На правах рукописи

Александров Илья Игоревич

Дисперсионная цепочка уравнений Власова

1.3.3 — теоретическая физика

АВТОРЕФЕРАТ
диссертации на соискание ученой степени
кандидата физико-математических наук

Москва — 2023

Диссертация подготовлена на кафедре квантовой статистики и теории поля физического факультета МГУ имени М.В. Ломоносова.

Научный руководитель — *Перепёлкин Евгений Евгеньевич, доктор физико-математических наук, доцент*

Официальные оппоненты — *Борисов Анатолий Викторович, доктор физико-математических наук, профессор, кафедра теоретической физики физического факультета МГУ имени М.В. Ломоносова, профессор*

Чижов Алексей Владимирович, доктор физико-математических наук, доцент, лаборатория радиационной биологии международной межправительственной организации «Объединенный институт ядерных исследований», заместитель директора по научной работе

Арбузова Елена Владимировна, доктор физико-математических наук, доцент, кафедра высшей математики ФГБОУ ВО Московской области «Университет «Дубна», профессор

Защита диссертации состоится «18» мая 2023 г. в 16 часов 30 минут на заседании диссертационного совета МГУ.011.2 Московского государственного университета им. М.В. Ломоносова по адресу: 119992, г. Москва, Ленинские горы, д. 1, стр. 2, Физический факультет МГУ, физическая аудитория имени Р.В. Хохлова.

E-mail: ff.dissovet@gmail.com

С диссертацией можно ознакомиться в отделе научной библиотеки МГУ им. М.В. Ломоносова (Ломоносовский просп., д. 27) и на портале https://dissovet.msu.ru/dissertation/011.2/2482

Автореферат разослан « »   2023 г.

Учёный секретарь
диссертационного совета МГУ.011.2,
доктор физико-математических наук
профессор П.А. Поляков

Общая характеристика работы

<u>Обзор литературы, историческая справка и актуальность темы исследования</u>

Одной из задач теоретической физики является построение фундаментальной математически строгой модели, описывающей с приемлемой точностью наблюдаемые экспериментально результаты [1]. Механика является наиболее полно описанным разделом физики. Первый эмпирический закон движения был получен еще Аристотелем в III-IV веке до н.э. $\vec{v} = \vec{F} / \kappa m$, где κ − коэффициент пропорциональности между скоростью $\vec{v}$, силою $\vec{F}$ и массой m. По мере повышения уровня точности экспериментальной техники Ньютон в 1686 г. сформулировал закон движения $\dot{\vec{v}} = \vec{F} / m$, ставший фундаментом классической механики. Теоретическая интерпретация второго закона Ньютона возможна на основе принципа наименьшего действия (ПНД) и получения уравнения Эйлера-Лагранжа $\frac{d}{dt}\nabla_v L - \nabla_r L = 0$ для функции $L = L(\vec{r}, \vec{v}, t) = T - U$, где T, U − кинетическая и потенциальная энергия соответственно. С развитием физики и появлением электромагнитной теории на основе работ Дж. Лармора в 1897 г. по излучению электромагнитной волны заряженной частицей, движущейся с ускорением, Х. Лоренцем было предложено уравнение

$$\tau_0 m \ddot{\vec{v}} = m \dot{\vec{v}} - \vec{F}_{ext}, \tag{1}$$

где $\vec{F}_{ext}$ − внешняя сила, а $\tau_0 = \frac{q^2}{6\pi\varepsilon_0 m c^3}$; q − заряд частицы. Производная $\ddot{\vec{v}}$ содержит информацию о силе радиационного трения и определяет третий порядок дифференциального уравнения движения (1), что выходит за рамки классической механики. Заметим, что механика материальных точек не отвечает на вопрос − почему уравнения движения второго порядка, так как они являются исходными уравнениями в этой теории.

В 1860 г. М.В. Остроградский предложил расширенный вариант лагранжева формализма $L_N = L_N\left(\vec{r},\dot{\vec{r}},\ddot{\vec{r}},...,\vec{r}^{(N)},t\right)$ и рассмотрел фазовое пространство, содержащее конечный набор $N+1$ кинематических величин высшего порядка $\vec{r},\dot{\vec{r}},\ddot{\vec{r}},...,\vec{r}^{(N)}$. Уравнение Эйлера-Лагранжа, соответствующее механике М.В. Остроградского имеет вид:

$$\nabla_r L_N + \sum_{n=1}^{N}(-1)^n \frac{d^n}{dt^n}\nabla_{\overset{(n)}{r}} L_N = 0, \tag{2}$$

которое при $N=1$ переходит в известное уравнение движения в классическом фазовом пространстве (второй закон Ньютона). Механика М.В. Остроградского получила свое дальнейшее применение в теории поля [2, 3].

В середине XX века А.А. Власов рассмотрел бесконечномерное фазовое пространство (обобщенное фазовое пространство (ОФП)), содержащее полный, бесконечный набор кинематических величин всех порядков $\vec{r},\dot{\vec{r}},\ddot{\vec{r}},...,\vec{r}^{(N)},...$ [4]. В обобщенном фазовом пространстве Ω А.А. Власов постулировал первый принцип – закон сохранения вероятностей

$$\frac{\partial f_\infty}{\partial t} + \operatorname{div}_\xi\left(f_\infty \vec{u}_\xi\right) = 0, \tag{3}$$

где $\vec{\xi} = \left\{\vec{r},\vec{v},\dot{\vec{v}},\ddot{\vec{v}},...\right\}^T$, $f_\infty = f_\infty\left(\vec{\xi},t\right)$ − функция распределения, а $\vec{u}_\xi = \left\{\vec{v},\dot{\vec{v}},\ddot{\vec{v}},...\right\}^T$ − векторное поле «скорости» потока вероятностей; $\operatorname{div}_\xi = \operatorname{div}_r + \operatorname{div}_v + \operatorname{div}_{\dot{v}} + ...$ Континуальное интегрирование уравнения (3) по подпространствам Ω_r, Ω_v, $\Omega_{\dot{v}}$,… обобщенного фазового пространства Ω дало бесконечную само-зацепляющуюся цепочку уравнений Власова для функций распределений $f_1\left(\vec{r},t\right)$, $f_2\left(\vec{r},\vec{v},t\right)$, $f_3\left(\vec{r},\vec{v},\dot{\vec{v}},t\right)$, $f_4\left(\vec{r},\vec{v},\dot{\vec{v}},\ddot{\vec{v}},t\right)$,…:

$$
\begin{aligned}
&\frac{\partial f_1}{\partial t}+\operatorname{div}_r\left[f_1\left\langle\vec{v}\right\rangle\right]=0,\\
&\frac{\partial f_2}{\partial t}+\operatorname{div}_r\left[f_2\vec{v}\right]+\operatorname{div}_v\left[f_2\left\langle\dot{\vec{v}}\right\rangle\right]=0,\\
&\frac{\partial f_3}{\partial t}+\operatorname{div}_r\left[f_3\vec{v}\right]+\operatorname{div}_v\left[f_3\dot{\vec{v}}\right]+\operatorname{div}_{\dot{v}}\left[f_3\left\langle\ddot{\vec{v}}\right\rangle\right]=0,\\
&\ldots\\
&\frac{\partial f_n}{\partial t}+\operatorname{div}_r\left[f_n\vec{v}\right]+\operatorname{div}_v\left[f_n\dot{\vec{v}}\right]+\ldots+\operatorname{div}_{\overset{(n-2)}{v}} f_n\left\langle\overset{(n-1)}{\vec{v}}\right\rangle=0,\\
&\ldots
\end{aligned}
\tag{4}
$$

где функции распределения связаны между собой условиям:

$$
\begin{aligned}
&f_0(t)=\int\limits_{(\infty)} f_1(\vec{r},t)d^3r=\int\limits_{(\infty)}\int\limits_{(\infty)} f_2(\vec{r},\vec{v},t)d^3rd^3v=\\
&=\int\limits_{(\infty)}\int\limits_{(\infty)}\int\limits_{(\infty)} f_3\left(\vec{r},\vec{v},\dot{\vec{v}},t\right)d^3rd^3vd^3\dot{v}=\int\limits_{(\infty)}\int\limits_{(\infty)}\int\limits_{(\infty)}\int\limits_{(\infty)} f_4\left(\vec{r},\vec{v},\dot{\vec{v}},\ddot{\vec{v}},t\right)d^3rd^3vd^3\dot{v}d^3\ddot{v}=\ldots,
\end{aligned}
\tag{5}
$$

Средние кинематические величины $\left\langle\vec{v}\right\rangle$, $\left\langle\dot{\vec{v}}\right\rangle$, $\left\langle\ddot{\vec{v}}\right\rangle$,.. определяются соотношениями

$$
\begin{aligned}
&f_1(\vec{r},t)\left\langle\vec{v}\right\rangle(\vec{r},t)=\int\limits_{(\infty)} f_2(\vec{r},\vec{v},t)\vec{v}d^3v,\\
&f_2(\vec{r},\vec{v},t)\left\langle\dot{\vec{v}}\right\rangle(\vec{r},\vec{v},t)=\int\limits_{(\infty)} f_3\left(\vec{r},\vec{v},\dot{\vec{v}},t\right)\dot{\vec{v}}d^3\dot{v},\\
&f_3\left(\vec{r},\vec{v},\dot{\vec{v}},t\right)\left\langle\ddot{\vec{v}}\right\rangle\left(\vec{r},\vec{v},\dot{\vec{v}},t\right)=\int\limits_{(\infty)} f_4\left(\vec{r},\vec{v},\dot{\vec{v}},\ddot{\vec{v}},t\right)\ddot{\vec{v}}d^3\ddot{v},\\
&\ldots
\end{aligned}
\tag{6}
$$

Цепочка уравнений Власова (4) содержит кинематические уравнения, для решения которых необходим разрыв цепочки на некотором уравнении и введение динамической аппроксимации кинематической средней (6). Номер уравнения, на котором производится разрыв цепочки, определяет уровень кинематической информации о системе. С практической точки зрения особое распространение получило второе уравнение в цепочке Власова (4) для функции распределения $f_2(\vec{r},\vec{v},t)$, известное как уравнение Власова. В области классической физики А.А. Власов предложил динамическую аппроксимацию для среднего потока ускорений

$$\left\langle \dot{\vec{v}} \right\rangle = \frac{\vec{F}}{m}, \tag{7}$$

где $\vec{F}$ − сила, которая в физике плазмы имеет вид $\vec{F} = q\left(\vec{E} + \vec{v} \times \vec{B}\right)$, а в статистической физике $\vec{F} = -\nabla_r U$. Поля $\vec{E}$ и $\vec{B}$ соответствуют электрическому и магнитному полю и удовлетворяют уравнениям Максвелла. Функция U соответствует скалярному потенциалу. Первая аппроксимация Власова (7) широко используется в статистической физике, в физике конденсированного состояния, в физике плазмы, ускорительной физике и астрофизике.

Дальнейшее исследование свойств цепочки уравнений Власова показало, что цепочка (4) обеспечивает фундаментальную связь между различными областями классической и квантовой физики: статистической физикой, термодинамикой, механикой сплошных сред, теорией поля и квантовой нерелятивистской механикой. Так из первого уравнения Власова (4) для функции распределения $f_1(\vec{r},t)$ может быть получен аналог уравнения Шрёдингера для скалярной частицы в электромагнитном поле [5]:

$$\frac{i}{\beta}\frac{\partial \Psi}{\partial t} = -\alpha\beta\left(\hat{\mathrm{p}} - \frac{\gamma}{2\alpha\beta}\vec{A}\right)^2 \Psi + U\Psi, \tag{8}$$

где $\hat{\mathrm{p}} \overset{\det}{=} -\frac{i}{\beta}\nabla_r$; α,β,γ − постоянные величины; функция распределения $f_1 = |\Psi|^2 \geq 0$ является положительной, а векторное поле потока вероятностей $\langle \vec{v} \rangle$

(4), (6) по теореме Гельмгольца представимо в виде суперпозиции вихревого $\vec{A}$ и потенциального $\nabla_r \Phi$ поля:

$$\langle \vec{v} \rangle (\vec{r},t) = -\alpha \nabla_r \Phi(\vec{r},t) + \gamma \vec{A}(\vec{r},t), \tag{9}$$

при этом $\vec{B} = \operatorname{rot} \vec{A},\ \Phi = 2\varphi + 2\pi k,\ k \in \mathbb{Z}$. Функция φ является фазой волновой функции $\Psi(\vec{r},t) = \sqrt{f_1} e^{i\varphi}$ и удовлетворяет уравнению Гамильтона-Якоби:

$$-\frac{1}{2\beta} \frac{\partial \Phi}{\partial t} = \frac{1}{4\alpha\beta} \left| \langle \vec{v} \rangle \right|^2 + \mathrm{V} = \mathrm{H}, \tag{10}$$

$$\mathrm{V} \overset{\det}{=} U + \mathrm{Q}, \qquad \mathrm{Q} = \frac{\alpha}{\beta} \frac{\Delta |\Psi|}{|\Psi|} = -\frac{\hbar^2}{2m} \frac{\Delta |\Psi|}{|\Psi|},$$

где $\alpha \overset{\det}{=} -\frac{\hbar}{2m},\ \beta \overset{\det}{=} \frac{1}{\hbar},\ \gamma \overset{\det}{=} -\frac{e}{m}$. Величина Q является квантовым потенциалом, используемым в теории «волны-пилота» де’Бройля-Бома, который связан с тензором квантового давления $P_{\mu\lambda}^{(q)}$:

$$-\frac{1}{f_1} \frac{\partial P_{\mu\lambda}^{(q)}}{\partial x_\lambda} = 2\alpha^2 \frac{\partial}{\partial x_\mu} \left(\frac{1}{\sqrt{f_1}} \frac{\partial^2 \sqrt{f_1}}{\partial x_\lambda \partial x_\lambda} \right) = 2\alpha\beta \frac{\partial \mathrm{Q}}{\partial x_\mu}. \tag{11}$$

Уравнение (10) в гидродинамическом приближении представимо через тензор давления $P_{\mu\lambda} = \int\limits_{(\infty)} f_2 \left(v_\mu - \langle v_\mu \rangle \right) \left(v_\lambda - \langle v_\lambda \rangle \right) d^3 v$ в виде:

$$\frac{d \langle v_\mu \rangle}{dt} = \left(\frac{\partial}{\partial t} + \langle v_\lambda \rangle \frac{\partial}{\partial x_\lambda} \right) \langle v_\mu \rangle = -\frac{1}{f_1} \frac{\partial P_{\mu\lambda}}{\partial x_\lambda} + \langle \langle \dot{v}_\mu \rangle \rangle. \tag{12}$$

С учетом выражений (9), (10) уравнение (12) для случая электродинамики представимо как

$$\frac{d}{dt}\langle\vec{v}\rangle = -\gamma\left(\vec{E} + \langle\vec{v}\rangle \times \vec{B}\right),\ \vec{E} = -\frac{\partial}{\partial t}\vec{A} - \frac{2\alpha\beta}{\gamma}\nabla_r \mathrm{V}, \tag{13}$$

откуда естественным образом следуют уравнения Максвелла: $\mathrm{rot}_r\,\vec{E} = -\frac{\partial\vec{B}}{\partial t}$ и $\mathrm{div}_r\,\vec{B} = 0$.

Второе уравнение Власова (4) для функции распределения $f_2(\vec{r},\vec{v},t)$ может быть рассмотрено не только в области классической физики (уравнение Власова с аппроксимацией (7)), но и для квантовой механики в фазовом пространстве. Рассмотрение квантовых систем в фазовом пространстве было инициировано в 1930-1932 г.г. работами Е. Вигнера и Г. Вейля. Функция $f_2(\vec{r},\vec{v},t) = mW(\vec{r},\vec{p},t)$ соответствует функции Вигнера $W(\vec{r},\vec{p},t)$, являющейся квази-плотностью вероятностей квантовой системы в фазовом пространстве:

$$W(\vec{r},\vec{p},t) = \frac{1}{(2\pi\hbar)^3}\int_{-\infty}^{+\infty}\exp\left(-i\frac{\vec{p}\vec{s}}{\hbar}\right)\left\langle\vec{r}+\frac{\vec{s}}{2}\right|\hat{\rho}(t)\left|\vec{r}-\frac{\vec{s}}{2}\right\rangle d^3s, \tag{14}$$

где ρ − матрица плотности. Термин квази-вероятность обусловлен наличием отрицательных значений у функции $W(\vec{r},\vec{p},t)$. Несмотря на необычные свойства, функция Вигнера получила широкое применение в квантовой информатике, томографии в теории квантовой связи и квантовой криптографии. Функция Вигнера удовлетворяет уравнению Моэля:

$$\frac{\partial W}{\partial t} + \frac{1}{m}(\vec{p},\nabla_r)W - (\nabla_r U,\nabla_p W) = \sum_{l=1}^{+\infty}\frac{(-1)^l(\hbar/2)^{2l}}{(2l+1)!}U\left(\overleftarrow{\nabla}_r,\vec{\nabla}_p\right)^{2l+1}W, \tag{15}$$

которое является частным случаем второго уравнения Власова с аппроксимацией Власова-Моэля для среднего потока ускорений:

$$\left\langle \dot{v}_\mu \right\rangle = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^{n+1}(\hbar/2)^{2n}}{m^{2n+1}(2n+1)!} \frac{\partial^{2n+1}U}{\partial x_\mu^{2n+1}} \frac{1}{f_2} \frac{\partial^{2n} f_2}{\partial v_\mu^{2n}}, \tag{16}$$

где $\left\langle\left\langle \dot{v}_\mu \right\rangle\right\rangle = -\frac{1}{m}\frac{\partial U}{\partial x_\mu}$. Таким образом, при усреднении по пространству скоростей аппроксимация Власова-Моэля (16) переходит в аппроксимацию Власова (7) и квантовые поправки не присутствуют в явном виде на макроуровне в уравнении (12). Если считать, что члены в разложении (16) с коэффициентами $\hbar^{2n}$ малы в классическом приближении ($\hbar \ll 1$), тогда аппроксимация (16) переходит в аппроксимацию (7). Такой «предельный» переход переводит второе уравнение Власова/Моэля (15) в классическое уравнение Лиувилля.

Заметим, что при построении цепочки уравнений Власова (4) нигде не накладывается условие положительности функций распределения. При рассмотрении первого уравнения Власова предположение о положительности $f_1 = |\Psi|^2 \geq 0$ привело к введению волновой функции Ψ и соответствующего ей уравнению Шрёдингера (8). Отсутствие условия положительности для функции f_2 приводит к ее связи с функцией Вигнера W. В работе [6] рассмотрен случай, когда все функции распределения в цепочке Власова являются положительными. Условие $f_n = |\Psi_n|^2 \geq 0$ приводит к цепочке уравнений квантовой механики высших кинематических величин.

Таким образом, обрыв цепочки уравнений Власова приводит к разным уровням информации о системе: закон Аристотеля, уравнение Ньютона, Лоренца, механика М.В. Остроградского. На каком уравнении необходимо остановиться и произвести обрыв цепочки определятся объёмом информации, который необходим для анализа системы. Цепочка Власова описывает фундаментальный подход к многоуровневому информационному рассмотрению, не ограничиваясь феноменологией. Естественным образом цепочка уравнений Власова связывает классическую и статистическую механику, теорию поля, механику сплошных сред, физику плазмы, астрофизику, квантовую механику и ускорительную физику.

В связи с фундаментальной важностью цепочки уравнений Власова, целью данной работы является расширение исходных уравнений на функции распределения «смешанного» типа. Проблема состоит в следующем. Цепочка уравнений Власова имеет иерархическую структуру, то есть рассматриваются уравнения для функций $f_1(\vec{r},t)$, $f_2(\vec{r},\vec{v},t)$, $f_3(\vec{r},\vec{v},\dot{\vec{v}},t)$, $f_4(\vec{r},\vec{v},\dot{\vec{v}},\ddot{\vec{v}},t)$,... Так как кинематические величины $\vec{r},\vec{v},\dot{\vec{v}},\ddot{\vec{v}},...$ являются независимыми, то логичным видится иметь информацию о функциях распределения «смешанного» типа, например,

$$f(\vec{v},t),\ f(\dot{\vec{v}},t),\ f(\ddot{\vec{v}},t),... \tag{17}$$

$$f(\vec{r},\dot{\vec{v}},t),\ f(\vec{r},\ddot{\vec{v}},t),....f(\vec{v},\dot{\vec{v}},t), f(\vec{v},\ddot{\vec{v}},t),..., f(\dot{\vec{v}},\ddot{\vec{v}},t), f(\dot{\vec{v}},\dddot{\vec{v}},t),...$$

$$f(\vec{r},\vec{v},\ddot{\vec{v}},t),..., f(\vec{r},\dot{\vec{v}},\dddot{\vec{v}},t),...$$

а так же о смешанных средних кинематических величинах

$$\langle\dot{\vec{v}}\rangle(\vec{v},t), \langle\vec{v}\rangle(\dot{\vec{v}},t), \langle\vec{v}\rangle(\vec{r},\dot{\vec{v}},t), \langle\dot{\vec{v}}\rangle(\vec{r},\vec{v},\ddot{\vec{v}},t),... \tag{18}$$

Заметим, что средние кинематические величины, присутствующие в уравнении Власова, являются функциями от кинематических величин низшего порядка, то есть $\langle\vec{v}\rangle(\vec{r},t)$, $\langle\dot{\vec{v}}\rangle(\vec{r},\vec{v},t)$, $\langle\ddot{\vec{v}}\rangle(\vec{r},\vec{v},\dot{\vec{v}},t)$,... или после последующих усреднений $\langle\langle\dot{\vec{v}}\rangle\rangle(\vec{r},t)$, $\langle\langle\dot{\vec{v}}\rangle\rangle(\vec{v},t)$, $\langle\langle\ddot{\vec{v}}\rangle\rangle(\vec{r},\vec{v},t)$, $\langle\langle\langle\ddot{\vec{v}}\rangle\rangle\rangle(\vec{r},t)$.

Рассмотрение уравнений (12) или (1) возможно проводить разными способами. С одной стороны, глядя на уравнение (12) можно считать, что величина $\dot{\vec{v}}$ определяется величиной $\vec{v}$, то есть высшая кинематическая величина зависит от низшей кинематической величины в соответствии с представлением (7). Аналогично в уравнении (1) можно считать, что величина $\ddot{\vec{v}}$ определяется $\dot{\vec{v}}$. Такие рассуждения связаны с иерархической формой записи цепочки уравнений Власова (4). С другой стороны, в силу независимости кинематических величин $\vec{r}, \vec{v}, \dot{\vec{v}}, \ddot{\vec{v}}, \ldots$ можно строить смешанные функции распределения (17) и соответствующие средние кинематические величины (18). В этом случае уравнение (1) можно трактовать как зависимость низшей кинематической величины $\dot{\vec{v}}$ от высшей кинематической величины $\ddot{\vec{v}}$. Аналогичные рассуждения можно провести для уравнения (12). Внешне такой подход близок классической механике, если вспомнить разложение в ряд Тейлора траектории движения материальной точки $\vec{r}(t) = \vec{r}_0 + \vec{v}_0 t + \dot{\vec{v}}_0 \dfrac{t^2}{2} + \ddot{\vec{v}}_0 \dfrac{t^3}{3!} + \ldots$, аналогично для $\vec{v}(t) = \vec{v}_0 + \dot{\vec{v}}_0 t + \ddot{\vec{v}}_0 \dfrac{t^2}{2!} + \ldots$ и далее.

В данной работе построена бесконечная цепочка для функций распределения смешанного типа (17) и соответствующих им кинематическим величинам (18), которая была названа *дисперсионной цепочкой уравнений Власова*. По аналогии с работой [7] построены группы уравнений для смешанных $H^{n_1 \ldots n_R}$-функций Больцмана и исследованы их свойства. Также получены дисперсионные уравнения законов сохранения для смешанных функций распределения.

Полученные результаты позволили найти частные решения нестационарного уравнения Шрёдингера, построить для них функции Вигнера, связать их с классическим термодинамическим описанием в терминах обратной температуры.

Другим важным следствием из законов сохранения дисперсионной цепочки Власова стало построение новой аппроксимации для средней кинематической величины $\left\langle \ddot{\vec{v}} \right\rangle$, которая позволяет разорвать цепочку (4) на третьем уравнении. Третье уравнение Власова (4) для функции распределения плотности вероятностей $f^{1,2,3}\left(\vec{r},\vec{v},\dot{\vec{v}},t\right)$ позволяет по-новому взглянуть на классические системы с излучением. Примером такой физической системы может служить плазма и широкий спектр прикладных задач, связанных с термоядерным синтезом. Другой областью применения третьего уравнения Власова является физика высоких энергий, методами которой проектируются ускорительные комплексы, учитывающие синхротронное излучение. Также стоит отметить задачи астрофизики, связанные с моделированием излучения гравитационных волн. Третье уравнение Власова может быть рассмотрено как расширенный вариант второго уравнения Власова для описания диссипативных систем. Для учёта диссипаций феноменологическим образом модифицируют второе уравнение Власова добавлением слагаемых в правую часть [8]. В третьем уравнении Власова диссипация в виде излучения естественным образом содержится в уравнении, благодаря средней кинематической величине $\left\langle \ddot{\vec{v}} \right\rangle$, которой определяется сила радиационного трения.

Моделирование сложных физических систем, как правило, производится с использованием численных методов. Существует множество работ по численному решению уравнений Власова, Власова-Пуассон и Власова-Максвелла. Третье уравнение Власова может быть использовано при численном моделировании в качестве дополнительных законов сохранения, необходимых при построении консервативных разностных схем. Наличие дополнительных законов сохранения имеет особое значение при моделировании устойчивости плазмы.

Таким образом, исходя из сказанного выше, тема диссертации является актуальной.

Цель работы

Целью данной работы было построение дисперсионной цепочки уравнений Власова и соответствующих ей законов сохранения с последующим применением их к задачам классической и квантовой физики.

Научная новизна

- Построена новая дисперсионная цепочка уравнений Власова для функций распределений смешанного типа.
- На основе дисперсионной цепочки уравнений Власова получены новые законы сохранения для кинематических величин высшего порядка.
- Получена новая дисперсионная цепочка для $H^{n_1...n_R}$ - функций Больцмана.
- Предложена новая динамическая аппроксимация для векторного поля потока ускорений второго порядка $\left\langle \ddot{\vec{v}} \right\rangle$.
- Получена новая модификация третьего уравнения Власова − Ψ-уравнение Власова для систем с излучением.
- Для модельной системы получены новые точные решения нестационарного уравнения Шрёдингера, соответствующие им функции Вигнера и проведен анализ динамических свойств решений с позиции статистической физики, механики сплошных сред и квантовой механики в фазовом пространстве.

Методология и методы исследования

Дисперсионная цепочка уравнений получается путем явного интегрирования исходной цепочки уравнений Власова по соответствующим подпространствам обобщенного фазового пространства. Функции распределения и кинематические величины принимают форму записи в виде экстенсивов (тензоров). Уравнения дисперсионной цепочки группируются на ранги. Интегрирование уравнений дисперсионной цепочки, умноженными на различные кинематические величины разного порядка, приводит к трем группам законов сохранения, которые условно можно назвать законами сохранения «массы», «момента движения» и «энергии».

$H^{n_1...n_R}$ - функции Больцмана строятся как расширение известной H-функции Больцмана на функции распределения смешанного типа, удовлетворяющие дисперсионной цепочке уравнений Власова. Используя математические преобразования на основе дисперсионной цепочки уравнений Власова строится дисперсионная цепочка для $H^{n_1 \ldots n_R}$ - функции. Эволюция $H^{n_1 \ldots n_R}$ - функции определяется источниками диссипаций смешанного типа.

Вторая аппроксимация Власова для среднего поля $\langle \ddot{\vec{v}} \rangle$ строится на основе полученных из дисперсионной цепочки законов сохранения «момента движения» при условии ослабления корреляций в тензоре давления $P_{\alpha\beta}$. В результате величине $\langle \ddot{\vec{v}} \rangle$ ставится в соответствие мощность излучения. Непосредственная подстановка второй аппроксимации Власова в третье уравнение цепочки (4) приводит к Ψ-уравнению Власова, описывающему системы с излучением.

Точное решение нестационарного уравнения Шрёдингера выражается через эллиптические θ-функции Якоби. Анализ полученных решений производится методами квантовой механики в фазовом пространстве, механики сплошных сред, теории «волны-пилота» де’Бройля-Бома и аппаратом статистической физики.

Положения, выносимые на защиту

- Цепочка уравнений Власова может быть разложена в дисперсионную цепочку уравнений для функций распределения смешанного типа.
- Дисперсионная цепочка уравнений Власова содержит цепочку законов сохранения для кинематических величин смешанного типа.
- Эволюция $H^{n_1 \ldots n_R}$-функций Больцмана определяется источниками диссипаций $Q^{p}_{n_1,\ldots,n_R}$ смешанных кинематических величин.
- Вторая аппроксимация Власова для поля $\langle \ddot{\vec{v}} \rangle$ позволяет разорвать цепочку уравнений Власова на третьем уравнении и рассматривать системы с излучением.

Теоретическая и практическая значимость работы

На основе цепочки уравнений Власова получена новая бесконечная дисперсионная цепочка уравнений для функций распределения смешанных кинематических величин высших порядков. В отличие от цепочки Власова дисперсионная цепочка содержит функции распределения с произвольным набором кинематических величин и имеет тензорную форму записи. Для дисперсионной цепочки получены новые уравнения для смешанных функций Больцмана и соответствующая цепочка законов сохранения гидродинамики. Доказано сохранение вероятности нахождения в фазовой области, в которой квази-плотность вероятностей имеет отрицательные значения (функция Вигнера).

На простейшем, но фундаментальном примере − задаче о частице в бесконечно глубокой потенциальной яме, анализируется точное решение нестационарного уравнения Шрёдингера с позиции квантовой механики в фазовом пространстве. Именно фазовое пространство, которое так активно используется в последние годы в квантовых вычислениях, квантовой информатике и связи, является тем мостиком к классической физике, где еще возможно «понимание» физической реальности. В результате, получена наглядная с точки зрения классической физики интерпретация нестационарных процессов перераспределения энергии в квантовой системе, волнам вероятностей, температуре квантовой системы, переходу в стационарное «замороженное состояние». Описывается интерпретация свойств точного решения задачи с позиций механики сплошных сред, статистической физики и, конечно, квантовой механики в фазовом пространстве.

Получено новое уравнение для описания физических систем с излучением. Примеры таких систем существуют в физике плазмы, ускорительной физике (синхротронное излучение) и астрофизике (гравитационные волны). Новое уравнение записано на основе третьего уравнения Власова для функции плотности распределения вероятностей кинематических величин: координаты, скорости и ускорения. Построенное новое Ψ- уравнение Власова позволяет естественным образом описывать диссипативные системы вместо феноменологических модификаций второго уравнения Власова, а при численном моделировании строить консервативные разностные схемы.

Степень разработанности темы исследования

Поставленные в диссертационной работе цели и задачи полностью выполнены.

Достоверность и обоснованность результатов

Достоверность выносимых на защиту диссертационной работы результатов обеспечивается использованием строгих математических методов, подкрепляемых численной проверкой полученных в работе формул.

Личный вклад автора

Все результаты, выносимые на защиту, получены автором лично. Основные идеи и положения диссертации изложены в работах [1-3], опубликованных в рецензируемых журналах из базы данных Web of Science. Автор принимал активное участие в постановке научных задач, проведении численных исследований, разработке теоретических моделей, анализе полученных результатов и предоставлении их в печати. В частности, можно отметить следующие вклады: при построении дисперсионной цепочки уравнений Власова, под руководством Перепёлкина Е.Е. [1] автором были установлены и доказаны теоремы о свойствах дисперсионной цепочки уравнений Власова. В случае рассмотрения нахождения точного решения нестационарного уравнения Шрёдингера [2], автором был выполнен анализ полученных решений методами квантовой механики в фазовом пространстве, механики сплошных сред и предложена связь со статистической физикой. В публикации [3] автором были предложены аппроксимации среднего потока ускорений на основе уравнения Лоренца-Абрахама-Дирака, используемого в 3-ем уравнении Власова, а также предложен алгоритм численный решения.

Апробация работы

Результаты диссертационной работы обсуждались и отражены в тезисах и докладах следующих конференций:

- MATHEMATICS. COMPUTING. EDUCATION, Joint Institute for Nuclear Research, Dubna, Russia, 23-27 January 2023 // **Aleksandrov I.I.**, Polyakova R.V., PSI-Vlasov equation properties.

- XXIX Международная научная конференция студентов, аспирантов и молодых ученых «Ломоносов-2022», МГУ имени М.В. Ломоносова, Россия, 11-22 апреля 2022 // **Александров И.И.**, Дисперсионная цепочка уравнений Власова.

Также полученные результаты были доложены на семинаре Лаборатории информационных технологий Объединённого института ядерных исследований 14 апреля 2022 г.

<u>Структура и объем диссертационной работы</u>

Диссертация состоит из введения, трёх глав, заключения и списка литературы. Материал изложен на 187 страницах, включает 15 рисунков, содержит 87 библиографических ссылок.

Содержание работы

<u>Краткое содержание работы</u>

Во **введении** дано обоснование актуальности темы диссертации, формулируется цель диссертационной работы, а также приводится ее краткое содержание.

Глава 1 содержит описание цепочки уравнений Власова. В §1.1 рассматривается обобщенное фазовое пространство, понятие обобщенной фазовой траектории, обобщенного векторного поля скоростей, аналогов матриц Якоби отображения Тейлора. В §1.2 определяются функции плотности распределений, функции распределений вероятностей и средние кинематические величины. В §1.3 описывается построение цепочки уравнений Власова из первого принципа – закона сохранения вероятностей. В §1.4 рассмотрена аппроксимация эволюции функции f_n порядка n по функции распределения f_k порядка $k>n$, известной в некоторый фиксированный момент времени t_0. Описана процедура построения такой аппроксимации. Введено понятие средней обобщенной траектории $\left\langle\vec{\xi}\right\rangle(t)$, соответствующей центру «масс» физической системы в обобщенном фазовом пространстве. Доказана теорема о том, что функции плотности вероятностей, удовлетворяющие цепочке уравнений Власова, однозначно определяют среднюю обобщенную фазовую траекторию.

Глава 2 посвящена построению дисперсионной цепочки уравнений Власова для функций распределения смешанного типа. В §2.1 описывается общий формализм представления функций распределения и кинематических величин смешанного типа. За основу взято понятие экстенсива, используемое в тензорном анализе. Использование экстенсивов различных рангов для представления функций распределения, высших кинематических величин, дифференциальных операторов позволяет наглядно проводить анализ свойств этих объектов и существенно упрощает математические преобразования. В §2.2, используя формализм экстенсива, определяется дисперсионная цепочка уравнений Власова. Форма дисперсионной цепочки наглядно показывает изменение функции распределения вдоль фазовой траектории за счет источников диссипаций Q, определяемых высшими кинематическими величинами. В §2.3 получены уравнения законов сохранения для высших кинематических величин. В простейшем классическом случае (только координатного представления) эти законы соответствуют закону сохранения массы, импульса и энергии. Доказан ряд теорем о виде уравнений движения с высшими кинематическими величинами. В §2.4 доказывается теорема о свойствах средних производных и производных от средних кинематических величин. Показывается, что разница между производной от средней кинематической величины порядка n и средней кинематической величиной порядка $n+1$ определяется моментами $P_{\mu\lambda}$ функций распределения.

Приведены примеры использования полученных результатов на модельных классических и квантовых системах. В §2.5 вводится в рассмотрение понятие $H^{n_1,\dots,n_R}$-функции Больцмана, которая является обобщением известной H-функции Больцмана для обобщенного фазового пространства высших кинематических величин. В частном случае $H^{1,2}-$функция совпадает с H-функцией Больцмана для фазового пространства $\{\vec{r}, m\vec{v}\}$. Доказана теорема, что эволюция $H^{n_1,\dots,n_R}$-функции определяется знаками источников диссипации Q. Средние значения функций $\langle Q \rangle$ являются источниками производства «энтропии» в обобщенном фазовом пространстве. Для квантовой механики в фазовом пространстве рассмотрен случай функции распределения, имеющей отрицательные значения вероятностей (функция Вигнера). Доказана теорема, что вероятность нахождения в фазовой области с отрицательными значениями остается неизменной с течением времени.

В **главе 3** рассматриваются примеры применения результатов главы 2 для классических и квантовых систем. В §3.1-§3.2 строятся различные типы аппроксимаций $\langle \ddot{\vec{v}} \rangle_{1,2,3}$ на основе уравнения Лоренца-Абрахама-Дирака и из гидродинамического описания. В §3.3, используя второе уравнение Власова, предлагается модель расширения уравнений Максвелла на фазовое пространство. Полученная система уравнений «кинематических» полей позволяет построить аппроксимацию $\langle \ddot{\vec{v}} \rangle_{1,2,3}$ для электромагнитного взаимодействия. В §3.4 подробно рассматриваются свойства решений третьего уравнения Власова с различными аппроксимациями $\langle \ddot{\vec{v}} \rangle_{1,2,3}$, полученными в §3.1-§3.3. Исследуются диссипативные свойства решений, анализируются микроскопические решения. В §3.4-§3.6 разобран простейший модельный пример, иллюстрирующий возможности описания системы цепочкой уравнений Власова как с позиции классической, так и квантовой физики. В §3.4 строится точное $\Psi_{\mu,\beta}(x,t)$ нестационарное решение задачи о частице в бесконечно глубокой яме через эллиптическую $\theta-$функцию Якоби, где $\mu-$ номер квантового состояния, а β трактуется как термодинамический параметр «обратной температуры» квантовой системы. По волновой функции $\Psi_{\mu,\beta}(x,t)$ получено явное выражение для плотности вероятностей $f^1_{\mu,\beta}(x,t)$, которая является периодической функцией по времени с периодом T_μ, зависящим от номера состояния μ. Найдено выражение для усредненной по периоду T_μ функции $f^1_{\mu,\beta}(x,t)$, то есть для $\overline{f}^1_{\mu,\beta}(x)$. Доказаны теоремы, что известная стационарная плотность распределения является асимптотикой при $\beta \to +\infty$ для распределений $f^1_{\mu,\beta}(x,t)$ и $\overline{f}^1_{\mu,\beta}(x)$. Проведен динамический анализ структуры эволюции функции распределения $f^1_{\mu,\beta}(x,t)$ при различных значениях обратной температуры β. В §3.5 квантовая система рассматривается в фазовом пространстве. Строится явное выражение для функции Вигнера $f^{1,2}_{\mu,\beta}(x,v,t) = \hbar W_{\mu,\beta}(x,p,t)$, которая удовлетворяет эволюционному уравнению Моэля (квантовый аналог уравнения Лиувилля). Описывается связь уравнения Моэля и второго уравнения Власова чрез аппроксимацию Власова-Моэля для поля ускорений потока вероятностей $\langle \dot{\vec{v}} \rangle$. Используя первое уравнение Власова для функции $f^1_{\mu,\beta}(x,t)$, в явном виде найдено поле скоростей потока вероятностей $\langle \vec{v} \rangle$. Рассмотрены периодические волны вероятностей, возникающие внутри потенциальной ямы при малых значениях обратной температуры β и их затухание при понижении температуры («замораживание» квантовой системы). В §3.5 строится термодинамическая модель квантовой системы, описываемой распределением Гиббса. Усредненная по периоду функция плотности вероятностей $\overline{f}^1_{\mu,\beta}(x)$ представляется в виде средней по Гиббсу от ансамбля волновых пакетов всех частот. Среднее по Гиббсу значение энергий квантовой системы $\langle \mathcal{E}_\mu \rangle_{Gibbs}(\beta)$ имеет асимптотику при $\beta \to +\infty$ в виде спектра собственных значений E_μ стационарной системы. Детально рассмотрен динамический процесс перераспределения энергии внутри потенциальной ямы в зависимости от «температуры» квантовой системы. Получено явное выражение для термодинамической энтропии квантовой системы.

Энтропия является строго монотонной функцией «температуры» квантовой системы. Доказана теорема о стремлении термодинамической энтропии к нулю при замораживании квантовой системы. С позиции механики сплошных сред показано выполнение законов сохранения «массы» (вероятности), импульса (плотность потока вероятности) и энергии.

Заключение содержит основные результаты работы.

Заключение

Основные результаты, полученные в диссертации:

1. Построена дисперсионная цепочка уравнений Власова для функций распределений смешанного типа.
2. На основе дисперсионной цепочки уравнений Власова получены законы сохранения для кинематических величин высшего порядка.
3. Получена дисперсионная цепочка для $H^{n_1 \ldots n_R}$ - функций Больцмана.
4. Предложена динамическая аппроксимация для векторного поля потока ускорений второго порядка $\left\langle \ddot{\vec{v}} \right\rangle$.
5. Получена модификация третьего уравнения Власова $-$ Ψ- уравнение Власова для систем с излучением.
6. Найдены точные решения нестационарного уравнения Шрёдингера и соответствующие им функции Вигнера. Проведен анализ динамических свойств квантовой системы с позиции статистической физики, механики сплошных сред и квантовой механики в фазовом пространстве.

Список литературы

1. Н.Н. Боголюбов, Собрание научных трудов в 12 томах Том 6. Равновесная статистическая механика, 1945-1986. – М.: Наука, 2006. – 520 с. – ISBN 5-02-034143-6
2. M. V. Ostrogradskii, M&m. AC. St.-Petersbourg 6, 385 (1850).

3. C. M. Campos, M. de Leon, D. Martin de Diego and J. Vankerschaver, Unambigous formalism for higher-order Lagrangian field theories, J. Phys. A, 42 (2009), 475207, 24 pp.
4. Vlasov A.A., Many-Particle Theory and Its Application to Plasma, New York, Gordon and Breach, 1961, ISBN 0-677-20330-6
5. Perepelkin E.E., Sadovnikov B.I., Inozemtseva N.G., The properties of the first equation of the Vlasov chain of equations, J. Stat. Mech. (2015) P05019
6. Perepelkin E. E., Sadovnikov B. I., Inozemtseva N. G. The quantum mechanics of high-order kinematic values //Annals of Physics. – 2019. – Т. 401. – С. 59-90.
7. Perepelkin E. E., Sadovnikov B. I., Inozemtseva N. G. The new modified Vlasov equation for the systems with dissipative processes //Journal of Statistical Mechanics: Theory and Experiment. – 2017. – №. 053207.
8. E. S. Benilov, M. S. Benilov, Energy conservation and H theorem for the Enskog-Vlasov equation, Physical Review E 97, 062115 (2018)

Список публикаций

Статьи, опубликованные в журналах Scopus, WoS, RSCI

1. *Perepelkin E.E., Sadovnikov B.I., Inozemtseva N.G., Aleksandrov I.I.* Dispersion chain of Vlasov equations // Journal of Statistical Mechanics: Theory and Experiment. – 2022. – №013205, с. 013205-1−013205-50 (impact factor WoS: 2.215)
2. *Perepelkin E.E., Sadovnikov B.I., Inozemtseva N.G., Aleksandrov I.I.* Exact time-dependent solution of the Schrödinger equation, its generalization to the phase space and relation to the Gibbs distribution // Physica Scripta. – 2023. – vol. 98, № 015221, с. 015221-1−015221-26 (impact factor WoS: 3.081)
3. *Perepelkin E.E., Sadovnikov B.I., Inozemtseva N.G., Aleksandrov I.I.* Ψ- Vlasov equation // European Physical Journal Plus. – 2022. –vol. 137 №1385, с. 1385-1−1385-7 (impact factor WoS: 3.758)

Иные публикации (сборники тезисов)

1. *Александров И.И. Дисперсионная цепочка уравнений Власова* // Научная конференция «Ломоносовские чтения». Секция физики. Апрель 2022. Сборник тезисов и докладов «Ломоносов – 2022». Физический факультет МГУ. – 2022. – С. 448
2. *Александров И.И., Полякова Р.В., Свойства PSI-уравнения Власова//* МКО-2023, 23-27 января 2023. Сборник тезисов «Mathematics. Computing. Education XXX - International Conference». – 2023.