

ОТЗЫВ
официального оппонента
о диссертации на соискание ученой степени
кандидата физико-математических наук
Алмохамеда Муатаза
на тему: «Обратные задачи для эволюционных дифференциальных
уравнений второго и высших порядков» по специальности 1.1.2. –
«Дифференциальные уравнения и математическая физика»

В диссертации Алмохамеда Муатаза установлены новые критерии единственности решения обратных задач для абстрактных дифференциальных уравнений второго и высших порядков. В исследуемом дифференциальном уравнении требуется восстановить неизвестное неоднородное слагаемое при помощи дополнительного условия (переопределения), взятого в финальный момент времени.

Актуальность темы. Как известно, при постановке конкретных задач математической физики важную роль играет вопрос единственности решения. Требуется выяснить, позволяют ли условия задачи гарантировать однозначность нахождения решения. Желательно также указать возможные случаи, когда единственность решения будет нарушаться. Указанные принципы в полной мере относятся и к обратным задачам, в которых помимо основной неизвестной функции ищутся другие неизвестные компоненты уравнения. В случае линейных обратных задач неизвестные компоненты ассоциируются, как правило, с внешними силами или дополнительными источниками, воздействующими на физическую систему.

Использование абстрактных дифференциальных уравнений позволяет выделить основные черты, присущие самим обратным задачам, и установить те принципы, которые влияют на единственность (или неединственность) решения. Затем, в зависимости от характера полученных результатов, их можно применять к тем или иным конкретным задачам из математической физики. Примечательно, что основные результаты диссертации имеют завершенный характер и получены при минимальных ограничениях на операторы, входящие в дифференциальные уравнения. Это существенно расширя-

ет область возможных приложений и включает в единую схему рассмотренные уравнения разных типов с существенно разным поведением решений.

В данной связи особенно актуальными представляются результаты диссертации для абстрактных дифференциальных уравнений второго порядка, поскольку в качестве примеров здесь может выступать множество различных обратных задач для уравнений эллиптического и гиперболического типов. Также важен общий критерий единственности решения линейной обратной задачи для абстрактного дифференциального уравнения произвольного натурального порядка, полученный без всяких ограничений на тип и характер уравнения. Установленный критерий вбирает в себя серию предыдущих результатов, завершая, по сути, целое направление. Помимо возможных практических приложений, работа имеет еще и теоретическое значение, развивая современные аналитические методы исследования обратных задач и перенося эти методы на новые ситуации.

Краткая характеристика основного содержания работы.

Диссертация состоит из введения, трех глав и заключения. Список литературы содержит 115 наименований. Полный объем диссертации составляет 127 страниц.

Во введении дан обзор научной литературы, связанной с выбранной тематикой, обоснована актуальность проделанной работы, сформулированы цели и задачи исследования, аргументирована научная новизна, отмечена значимость полученных результатов, представлены выносимые на защиту научные положения, изложено основное содержание диссертации.

Первая глава посвящена линейной обратной задаче о нахождении неизвестного неоднородного слагаемого в абстрактном дифференциальном уравнении второго порядка. В качестве дополнительного условия взято значение первой производной от основной неизвестной функции в выбранный финальный момент времени. Автор называет это условие «финальным переопределением второго рода» по аналогии с граничным условием для обыкновенных дифференциальных уравнений. Название представляется вполне

естественным. Для поставленной задачи получен критерий единственности решения. Результат имеет завершённый вид и выражен в терминах собственных значений основного оператора A из дифференциального уравнения. Автор приводит несколько примеров из математической физики, показывающих универсальность критерия и его применимость независимо от типа выбираемого уравнения. Отмечу, что доказательство критерия вполне обзорно — оно основано на соображениях полноты системы тригонометрических функций.

Во второй главе аналогичные результаты получены для переопределения третьего рода, когда задана комбинация значений основной функции и ее производной в выбранный финальный момент времени. Для поставленной обратной задачи также установлен критерий единственности решения. Доказательство последнего требует серьезных усилий и использует аналитический аппарат теории функций. Окончательный результат выражен через нули специальной характеристической функции, представляющей собой комбинацию гиперболических синуса и косинуса. Для возможных применений установленного критерия изучено распределение нулей характеристической функции, где выявлены полезные закономерности. На этой основе для обратной задачи доказан ряд признаков единственности (и неединственности) решения. Особо выделены случаи, когда характеристическая функция обратной задачи имеет кратные нули. Показано, что тогда в однородной задаче возможно появление специальных присоединенных решений по аналогии с присоединенными векторами в кратных точках спектра линейного оператора. Указаны примеры однородных обратных задач для уравнения колебаний струны, где выбор подходящих нелокальных условий приводит к появлению присоединенных решений. При построении примеров использованы конструкции несамосопряженных операторов с кратными спектрами, идейно восходящие к условиям задачи Бицадзе–Самарского. Здесь наблюдается интересное сочетание теории обратных задач и классической спектральной теории. В целом вторая глава дает завершённое представление по вопросу

единственности решения в обратной задаче с переопределением третьего рода, ранее почти не изучавшейся.

Третья глава посвящена общей обратной задаче для абстрактного дифференциального уравнения произвольного натурального порядка n . Снова неизвестно неоднородное слагаемое, а в качестве переопределения взято значение производной порядка q в финальный момент времени $T > 0$. Также установлен критерий единственности решения, действующий при любом выборе значений n, q, T без ограничений на тип эволюционного уравнения. Результат носит завершённый характер и включает в общую схему ряд прежних утверждений И. В. Тихонова, Ю. С. Эйдельмана и самого М. Алмохамеда. Как важную особенность главы, отметим систематическое использование теории специальных обобщённых гиперболических функций и теории функций Миттаг-Леффлера, активно развиваемой в последнее время. Окончательный результат — критерий единственности решения — формулируется в терминах нулей функций Миттаг-Леффлера, и автор приводит все нужные факты по распределению нулей. Полученное сочетание критерия единственности и сведений из теории функций Миттаг-Леффлера даёт возможность указать достаточно точный признак единственности решения, действующий в обратной задаче для всех уравнений высокого порядка и учитывающий конкретный выбор параметров задачи (см. теорему 14.5). Отдельно рассмотрен вопрос о том, когда нули функций Миттаг-Леффлера допускают прямое вычисление. Помимо известных прежде случаев для функций порядка 1 и $1/2$, здесь выделены новые случаи для функций Миттаг-Леффлера порядка $1/4$. На этой основе обнаружена одна обратная задача для уравнения четвертого порядка, где критерий единственности решения приобретает такой же элементарный вид, что и для уравнений первого и второго порядков. Данный результат проиллюстрирован примерами для уравнений в частных производных.

В заключении приведены основные результаты диссертации и сделаны краткие выводы по теме исследования.

Список литературы достаточно полон и содержит указание на основные источники, использованные в процессе исследования.

Научная новизна работы. К новым результатам, полученным в диссертации, следует отнести

— установление критериев единственности решения линейных обратных задач с переопределениями второго и третьего родов для абстрактных дифференциальных уравнений второго порядка;

— указание достаточных признаков единственности решения линейных обратных задач для абстрактных дифференциальных уравнений второго порядка, полученных без ограничений на тип исследуемого уравнения;

— использование присоединенных решений однородных обратных задач для уравнений второго порядка в случае кратных нулей у характеристической функции;

— установление критерия единственности решения линейных обратных задач для абстрактных дифференциальных уравнений произвольного натурального порядка и следующих из критерия признаков единственности решения;

— указание одной обратной задачи для абстрактного дифференциального уравнения четвертого порядка, где критерий единственности решения принимает элементарный вид с явно вычисленными нулями характеристической функции.

Теоретическая и практическая значимость работы состоит в создании завершенной теории единственности решения в линейных обратных задачах для абстрактных дифференциальных уравнений второго и высших порядков, где полностью исследован случай неизвестного стационарного слагаемого. Полученные результаты не требуют ограничений на тип дифференциального уравнения и могут быть использованы в обратных задачах математической физики из теории колебаний и теории потенциала. Результаты диссертации дают основу дальнейшего развития теории подобных обратных задач с точки зрения их разрешимости и последующего численного решения.

Обоснованность и достоверность положений, выносимых на защиту, научных выводов и рекомендаций:

Обоснованность и достоверность научных положений и выводов полученных в диссертации, обусловлена применением строгих аналитических методов и полными доказательствами всех утверждений работы. В согласии с принятыми нормами используемые математические факты, на которые опирается исследование, снабжены точными ссылками на научную литературу.

Основные результаты диссертации относятся к следующим научным направлениям:

- начальные, краевые и смешанные задачи для дифференциальных уравнений и систем дифференциальных уравнений;
- спектральные задачи для дифференциальных операторов;
- теория дифференциально-операторных уравнений;
- теория функционально-дифференциальных уравнений и нелокальных краевых задач.

Это подтверждает соответствие диссертационной работы специальности 1.1.2 «Дифференциальные уравнения и математическая физика».

По результатам диссертации опубликовано 20 работ, в том числе 3 статьи в научных изданиях, рекомендованных Ученым Советом МГУ и входящих в системы цитирования Scopus, Web of Science и RSCI.

Автореферат соответствует требованиям и правильно отражает содержание диссертации.

Замечания и недостатки:

1. Основное содержание работы связано с абстрактными дифференциальными уравнениями и недостаточно проиллюстрировано, на мой взгляд, конкретными примерами из математической физики. Особенно полезно было бы привести примеры в третьей главе, где рассматриваются обратные задачи для уравнений высокого порядка. Отсутствие указаний на приложения не позволяет в полной мере оценить результаты автора. В дальнейшем весь-

ма желательно подобрать примеры прикладного характера, подходящие под созданную теорию.

2. Также полезно было бы привести формулировки соответствующих теорем разрешимости для обратных задач из первых двух глав диссертации. Понятно, что вопросы разрешимости не входили в план исследования, и полученные прежде результаты носили, скорее всего, достаточно ограничительный характер. Однако стоило указать известные на данный момент условия разрешимости хотя бы в обзорном порядке.

Перечисленные замечания не влияют на общую положительную оценку работы и не умаляют значимости проделанного глубокого исследования.

Диссертация Алмохамеда Муатаза отвечает требованиям, установленным Московским государственным университетом имени М. В. Ломоносова к работам подобного рода. Содержание диссертации соответствует специальности 1.1.2. – «Дифференциальные уравнения и математическая физика» (по физико-математическим наукам), а также критериям, определенным пп. 2.1–2.5 Положения о присуждении ученых степеней в Московском государственном университете имени М. В. Ломоносова. Диссертация оформлена согласно требованиям Положения о совете по защите диссертаций на соискание ученой степени кандидата наук и на соискание ученой степени доктора наук Московского государственного университета имени М. В. Ломоносова.

Таким образом, соискатель Алмохамед Муатаз безусловно заслуживает присуждения ученой степени кандидата физико-математических наук по специальности 1.1.2 – «Дифференциальные уравнения и математическая физика».

Официальный оппонент:

доктор физико-математических наук,

и. о. заведующего кафедры общей математики

факультета Вычислительной математики и кибернетики

Федерального государственного бюджетного образовательного учреждения
высшего образования «Московский государственный университет имени
М. В. Ломоносова» МГУ

ЛОМОВ Игорь Сергеевич

04.12.2023 г.

Контактные данные:

тел.: +7 915 246 6628, e-mail: lomov@cs.msu.ru

Специальность, по которой официальным оппонентом
защищена диссертация:

01.01.02 – «Дифференциальные уравнения».

Адрес места работы:

119991, Москва, ГСП-1, Ленинские горы, д. 1, строение 52,
кафедра общей математики, ВМК МГУ имени М. В. Ломоносова.

Тел.: +7 (495) 939-55-91, e-mail: cmc@cs.msu.ru.

Подпись и. о. заведующего кафедры общей математики

ВМК МГУ имени М. В. Ломоносова

Ломова И.С. удостоверяю:
