

Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение
высшего образования «Московский государственный университет имени
М.В. Ломоносова»

На правах рукописи



Ефимов Алексей Андреевич

Оценки энергопотребления объёмных схем

Специальность 1.1.5 —
«Математическая логика, алгебра, теория чисел и дискретная
математика»

Автореферат
диссертации на соискание учёной степени
кандидата физико-математических наук

Москва — 2023

Работа выполнена в Московском государственном университете имени М.В. Ломоносова.

Научные руководители: **Гасанов Эльяр Эльдарович**
доктор физико-математических наук, профессор

Калачев Глеб Вячеславович
кандидат физико-математических наук

Официальные оппоненты: **Ложкин Сергей Андреевич**,
доктор физико-математических наук, профессор,
Московский государственный университет имени М.В. Ломоносова, факультет Вычислительной математики и кибернетики,
Заведующий кафедрой математической кибернетики

Сергеев Игорь Сергеевич,
доктор физико-математических наук,
ФГУП «Научно-исследовательский институт "Квант"»,
начальник лаборатории

Мастихина Анна Антоновна,
кандидат физико-математических наук,
Московский государственный технический университет имени Н. Э. Баумана,
доцент

Защита состоится 22 декабря 2023 г. в 16:45 на заседании диссертационного совета МГУ.011.4 ФГБОУ ВО «Московский государственный университет имени М. В. Ломоносова» по адресу: Российская Федерация, 119234, Москва, Ленинские горы, д. 1, МГУ имени М. В. Ломоносова, механико-математический факультет, аудитория 14-08.

E-mail: vladimir.manuilov@gmail.com

С диссертацией можно ознакомиться в библиотеке Фундаментальной библиотеке ФГБОУ ВО МГУ имени М. В. Ломоносова по адресу: Москва, Ломоносовский проспект, д. 27 и на портале <https://dissovet.msu.ru/dissertation/011.4/2787>.

Автореферат разослан 22 ноября 2023 года.

Ученый секретарь

диссертационного совета

МГУ.011.4,

доктор физ.-мат. наук, профессор

Мануйлов Владимир Маркович

Общая характеристика работы

Одним из разделов математической кибернетики является теория управляющих систем. Интенсивное развитие науки и вычислительной техники в XX веке породило одно из интереснейших направлений в этой области — задачу синтеза схем, вычисляющих булевы функции и операторы. Автор решает эту задачу, разрабатывая универсальные методы синтеза схем и получая фундаментальные нижние оценки сложности схем, показывающие оптимальность применяемых методов.

Одной из основных моделей схем является схема из функциональных элементов (СФЭ). В качестве характеристики оптимальности СФЭ можно рассматривать сложность — количество функциональных элементов, содержащихся в схеме. Под сложностью булевой функции или оператора будем понимать минимальную сложность схемы, реализующую данную функцию или оператор. В 1956 году Д. Маллер¹ посчитал сложность любой булевой функции, равную $\Theta(2^n/n)$. В 1958 году О.Б. Лупанов² нашёл сложность почти всех булевых функций для любого конечного базиса $\{E\}$, которая асимптотически равна $\min_{e \in E} P(e) \cdot 2^n/n$, где $P(e)$ — приведённый вес элемента e . В 1963 году³ О.Б. Лупанов в качестве следствия установил, что в стандартном базисе (\wedge, \vee, \neg) сложность почти всех булевых функций асимптотически равна $2^n/n$.

Отметим, что в 1961 году М.Н. Вайнцвайг⁴ определил другую меру сложности СФЭ — мощность. Мощность или активность СФЭ — это максимальное количество элементов схемы, выдающих на выходе единицу, где максимум берётся по всем входным наборам. О.М. Касим-Заде⁵ исследовал мощность в различных базисах и установил порядок функции Шеннона для произвольного конечного базиса.

В качестве альтернативной модели СФЭ рассматриваются контактные схемы (КС). Сложностью КС считается количество её контактов. Ю.С. Шуткин⁶ ввёл понятие временной сложности КС, являющиеся некоторым аналогом мощности СФЭ. Им было установлено, что функция Шеннона сложности моделирования КС для функций от n переменных равна $2n - 1$.

¹ Muller, D. E. Complexity in Electronics Switching Circuits / D. E. Muller // IRE Transactions on Electronic Computers. 1956. EC—5, no. 1. P. 15—19.

² Лупанов, О. Б. Об одном методе синтеза схем / О. Б. Лупанов // Известия ВУЗ, Радиофизика. Горький, издательство ГУ. 1958. № 1. С. 120—140.

³ Лупанов, О. Б. О синтезе некоторых классов управляющих систем / О. Б. Лупанов // Проблемы кибернетики. Наука. Физматгиз. 1963. № 10. С. 64—97.

⁴ Вайнцвайг, М. Н. О мощности схем из функциональных элементов / М. Н. Вайнцвайг // Докл. АН СССР. Наука. 1961. 139:2. С. 320—323.

⁵ Касим-Заде, О. М. Об одной мере сложности схем из функциональных элементов / О. М. Касим-Заде // Проблемы кибернетики. Наука. 1981. № 38. С. 117—179.

⁶ Шуткин, Ю. С. Об одновременной минимизации объёмной и временной сложности контактных и вентильных схем / Ю. С. Шуткин // Интеллектуальные системы. Теория и приложения. 2010. 24:1—4. С. 595—615.

Существенным недостатком модели СФЭ является то, что в ней не учитываются вполне естественные ограничения на размещение элементов схемы в плоскости или пространстве, способы их соединения, разводка проводов и т.п. В 1967 году С.С. Кравцов⁷ впервые рассмотрел модель плоских прямоугольных схем, учитывающую данные ограничения. Им было показано, что порядок функции Шеннона площади плоских схем, реализующих функции от n переменных, равен 2^n . Одновременно с ним А.Д. Коршунов⁸ начал рассматривать два класса схем: схемы из объёмных функциональных элементов и объёмные схемы из функциональных элементов. Для обоих классов при ограничении на длину проводов порядок функции Шеннона также равен 2^n .

Интересное обобщение модели клеточных схем — многослойные d -мерные схемы были рассмотрены Т.Р. Сытдыковым⁹. Если k — число слоев в d -мерной схеме, то были получены верхняя и нижняя оценки функции Шеннона сложности прямоугольных многомерных схем равны $\Theta\left(\frac{2^n}{\min(n, d \log k)}\right)$.

Н.А. Шкаликова в работе¹⁰ одной из первых исследовала связь между площадью плоских схем и объёмом трёхмерных схем, реализующих булевы операторы. Было показано, что если оператор можно реализовать объёмной схемой с объёмом V , то его можно реализовать плоской схемой площади $\Theta(n^{3/2})$.

Также в работе¹¹ Н.А. Шкаликова изучила сложность реализации плоскими схемами некоторых классов булевых функций. В частности, было показано, что сложность реализации всех элементарных конъюнкций от n переменных равна $\Theta(n \cdot 2^n)$, сложность реализации всех булевых функций от n переменных равна $\Theta(n \cdot 2^{2n})$, сложность умножения двух n -разрядных чисел равна $\Theta(n^2)$.

⁷ Кравцов, С. С. О реализации функций алгебры логики в одном классе схем из функциональных и коммутационных элементов / С. С. Кравцов // Проблемы кибернетики. Наука. 1967. № 19. С. 285—293.

⁸ Коршунов, А. Д. Об оценках сложности из объёмных функциональных элементов и объёмных схем из функциональных элементов / А. Д. Коршунов // Проблемы кибернетики. Наука. 1967. № 19. С. 275—283.

⁹ Сытдыков, Т. Р. Сложность синтеза многомерных прямоугольных схем / Т. Р. Сытдыков // Интеллектуальные системы. Теория и приложения. 2019. 23:3. С. 61—80; Сытдыков, Т. Р. Сложность многослойных d -мерных схем / Т. Р. Сытдыков, Г. В. Калачёв // Интеллектуальные системы. Теория и приложения. 2021. 25:2. С. 131—154.

¹⁰ Шкаликова, Н. А. О реализации булевых функций схемами из клеточных элементов / Н. А. Шкаликова // Математические вопросы кибернетики. Наука. 1989. № 2. С. 177—197.

¹¹ Шкаликова, Н. А. О сложности реализации некоторых функций клеточными схемами / Н. А. Шкаликова // Сборник работ по математической кибернетике. 1976. № 1. С. 102—115.

Что касается одной булевой функции, то в работе¹² Н.А. Шкаликова построила специальную булеву функцию от n переменных, сложность которой равна $\Theta(n^{3/2})$. Позднее, С.А. Ложкин и другие авторы в работе¹³ ввели понятие коммуникативной сложности и сформулировали общий подход к получению нижних оценок сложности плоской реализации булевых функций. Ими была получена нижняя квадратичная оценка сложности одной специальной булевой функции для плоской реализации, и порядка $\Theta(n^{4/3})$ для объёмной реализации.

О.В. Черемисин¹⁴ показал, что в классе прямоугольных схем невозможна одновременная минимизация площади и мощности плоских схем, реализующих систему всех конъюнкций.

Особый интерес представляют работы Г.В. Калачёва¹⁵, посвящённые плоским схемам. Автор также, как и Г.В. Калачёв, использует такую меру сложности схемы как потенциал. Он равен значению количества единиц на всех внутренних узлах схемы. Неформально говоря, потенциал играет роль «энергии» схемы, необходимой для её функционирования. Кроме того, рассматривается и другая мера мощности — переключательная мощность — количество внутренних узлов схемы, изменяющих своё значение при изменении входных наборов схемы.

¹² Шкаликова, Н. А. О соотношении сложностей плоских и объёмных схем из функциональных элементов / Н. А. Шкаликова // Методы дискретного анализа в оценках сложности управляющих систем. Новосибирск. 1982. № 38. С. 87—107.

¹³ Об одном подходе к оценке пространственной сложности схем из функциональных элементов / С. А. Ложкин [и др.] // Mathematical Problems in Computation Theory. Banach Center Publications. 1987. С. 501—510.

¹⁴ Черемисин, О. В. Об активности схем из клеточных элементов, реализующих систему всех конъюнкций / О. В. Черемисин // Дискретная математика. 2003. 15:2. С. 113—122.

¹⁵ Калачёв, Г. В. Порядок мощности плоских схем, реализующих булевы функции / Г. В. Калачёв // Дискретная математика. 2014. 26:1. С. 49—74; Калачёв, Г. В. Об одновременной минимизации площади, мощности и глубины плоских схем, реализующих частичные булевы операторы / Г. В. Калачёв // Интеллектуальные системы. Теория и приложения. 2016. 20:2. С. 203—266; Калачёв, Г. В. Нижние оценки мощности плоских схем, реализующих частичные булевы операторы / Г. В. Калачёв // Интеллектуальные системы. Теория и приложения. 2014. 18:2. С. 279—322; Калачёв, Г. В. Об оценках мощности плоских схем для замкнутых классов булевых функций / Г. В. Калачёв // Интеллектуальные системы. Теория и приложения. 2016. 20:3. С. 52—57; Калачёв, Г. В. Оценки мощности плоских схем, реализующих функции с ограниченным числом единиц / Г. В. Калачёв // Интеллектуальные системы. Теория и приложения. 2017. 21:1; Калачёв, Г. В. Оценки мощности плоских схем, реализующих монотонные функции / Г. В. Калачёв // Интеллектуальные системы. Теория и приложения. 2017. 21:2; Калачёв, Г. В. Обобщение оценок мощности плоских схем, реализующих частичные булевы операторы / Г. В. Калачёв // Вестник Московского университета. Серия 1: Математика. Механика. 2018. 73:3. С. 60—64; Калачёв, Г. В. О нижней оценке максимального потенциала плоских схем с несколькими выходами через площадь / Г. В. Калачёв // Интеллектуальные системы. Теория и приложения. 2018. 22:1. С. 111—117.

В статье¹⁶ было показано, что имеют одинаковый порядок функции Шеннона потенциала и переключательной мощности плоских схем, реализующих булевы функции. В частности, для рассматриваемых мер мощности получен одинаковый порядок функции Шеннона, равный $\Theta(2^{n/2})$.

В работе¹⁷ для почти всех частичных булевых операторов с областью определения D и m выходами получена нижняя оценка $\frac{m\sqrt{|D|}}{\sqrt{\min(m, \log_2 |D|)}}$ средней мощности. Отметим, что был применён метод расслоения, непрерывный аналог которого используется в данной диссертационной работе.

Позднее в статье¹⁸ было показано, что при незначительных ограничениях на область определения оператора существует плоская схема, имеющая оптимальный порядок мощности, площади и глубины. В частности, для всюду определённых операторов с n входами и m выходами мощность равна $\Theta\left(\frac{m\sqrt{2^n}}{\min(n, \log_2 m)}\right)$, а глубина равна $\Theta(\max(n, \log_2 m))$.

Для класса монотонных функций также был получен порядок функции Шеннона для среднего и максимального потенциала плоских схем. В частности, в работе¹⁹, функция Шеннона для максимального потенциала равна $\Theta\left(\frac{2^{n/2}}{n^{1/4}}\right)$, а для среднего потенциала равна $\Theta\left(\frac{2^{n/2}}{n^{3/4}}\right)$. Также Г.В. Калачёвым в работе²⁰ были доказаны универсальные нижние оценки функции Шеннона мощности плоских схем. Кроме того, найден порядок роста функции Шеннона мощности схем, реализующих монотонные функции.

В статье²¹ исследована функция Шеннона максимального потенциала плоских схем, реализующих функции от n переменных с ограниченным числом единиц. В частности, было показано, что если количество единиц функции ограничено числом N , то при условии $\log_2 N \asymp n$ порядок функции Шеннона равен $\Theta(N(n - \log_2 N))$.

¹⁶ Калачёв, Г. В. Порядок мощности плоских схем, реализующих булевы функции / Г. В. Калачёв // Дискретная математика. 2014. 26:1. С. 49–74.

¹⁷ Калачёв, Г. В. Нижние оценки мощности плоских схем, реализующих частичные булевы операторы / Г. В. Калачёв // Интеллектуальные системы. Теория и приложения. 2014. 18:2. С. 279–322.

¹⁸ Калачёв, Г. В. Об одновременной минимизации площади, мощности и глубины плоских схем, реализующих частичные булевы операторы / Г. В. Калачёв // Интеллектуальные системы. Теория и приложения. 2016. 20:2. С. 203–266.

¹⁹ Калачёв, Г. В. Об оценках мощности плоских схем для замкнутых классов булевых функций / Г. В. Калачёв // Интеллектуальные системы. Теория и приложения. 2016. 20:3. С. 52–57.

²⁰ Калачёв, Г. В. Об оценках мощности плоских схем для замкнутых классов булевых функций / Г. В. Калачёв // Интеллектуальные системы. Теория и приложения. 2016. 20:3. С. 52–57.

²¹ Калачёв, Г. В. Оценки мощности плоских схем, реализующих функции с ограниченным числом единиц / Г. В. Калачёв // Интеллектуальные системы. Теория и приложения. 2017. 21:1.

Позднее в статье²² был исследован порядок функции Шеннона потенциала плоских схем, реализующих частичные булевы операторы при наличии ограничений на количество различных значений, принимаемых оператором. Было показано, что в классе частичных операторов с t выходами, областью определения мощности d и областью значения мощности не более r как средний, так и максимальный потенциал по порядку равны $\Theta\left(\left(\sqrt{d} + \frac{m\sqrt{r}}{\log_2 r}\right) \sqrt{\log_2 r}\right)$.

Очень интересный результат получен в работе²³. Исследуется связь между площадью и максимальным потенциалом плоских схем, реализующих булевы операторы. Показано, что для произвольного булева оператора потенциал не меньше, чем $\sqrt{S}/4\sqrt{2}$, где S — площадь минимальной схемы, реализующей данный оператор.

Плоские автоматные схемы были недавно рассмотрены А.С. Воротниковым²⁴. В качестве клеточного элемента здесь рассматривается автомат с не более чем двумя состояниями. А.С. Воротников получил верхнюю оценку переключательной мощности реализации периодической последовательности автоматной схемой. В работе приводится схема, реализующая произвольную последовательность длины 2^n с переключательной мощностью не более $\frac{2^{n/2}}{n}$.

Данная диссертационная работа посвящена объёмным схемам [1—4], которые определяются аналогично плоским схемам, но в трёхмерном пространстве. Под объёмной схемой будем понимать укладку схемы из функциональных элементов в пространстве. Объёмная схема состоит из кубических элементов. Каждый кубический элемент реализует булев оператор, у которого в сумме не более 6 входов и выходов.

Целью работы является исследование модели объёмных схем, реализующих булевы функции и операторы. Необходимо получить порядок функции Шеннона потенциала объёмных схем для класса схем без ограничений и в классе схем с близкими выходами.

Для достижения поставленной цели необходимо было решить следующие **задачи**:

1. Получить верхнюю оценку функции Шеннона потенциала объёмных схем, реализующих булевы функции и операторы.
2. Получить нижнюю оценку функции Шеннона потенциала объёмных схем, реализующих частичные булевы операторы.

²² Калачёв, Г. В. Обобщение оценок мощности плоских схем, реализующих частичные булевы операторы / Г. В. Калачёв // Вестник Московского университета. Серия 1: Математика. Механика. 2018. 73:3. С. 60—64.

²³ Калачёв, Г. В. О нижней оценке максимального потенциала плоских схем с несколькими выходами через площадь / Г. В. Калачёв // Интеллектуальные системы. Теория и приложения. 2018. 22:1. С. 111—117.

²⁴ Воротников, А. С. Верхние оценки переключательной мощности плоских схем, реализующих автономные автоматные функции / А. С. Воротников // Интеллектуальные системы. Теория и приложения. 2021. 25:4. С. 96—99.

3. Получить верхнюю оценку функции Шеннона потенциала объёмных схем, реализующих булевы операторы в классе схем с близкими выходами.
4. Получить нижнюю оценку функции Шеннона потенциала объёмных схем, реализующих булевы операторы в классе схем с ограничениями на расстояние между выходами.

Научная новизна:

1. Впервые была получена нижняя оценка потенциала объёмных схем, реализующих частичные булевы операторы.
2. Впервые была получена верхняя оценка потенциала объёмных схем, реализующих всюду определённые булевы операторы. При этом по порядку она совпадает с нижней оценкой.
3. Впервые был рассмотрен класс объёмных схем с близкими выходами, для которого получены верхняя и нижняя оценка функции Шеннона, совпадающие по порядку.

Теоретическая и практическая значимость Диссертация имеет теоретический характер. Методы, используемые в работе, могут быть использованы в дальнейшем теоретическом исследовании синтеза схем из различных классов. Результаты, полученные в работе, могут быть применены при проектировании различных электронных устройств с целью уменьшения энергопотребления.

Методология и методы исследования. В работе используются методы дискретной математики, теории управляющих систем, теории вероятностей и математического анализа.

Основные положения, выносимые на защиту. На защиту выносятся обоснование актуальности проведенного исследования и его научной новизны, цели и поставленные задачи, методы исследования, применённые для получения результатов, а также следующие положения, которые подтверждаются результатами исследований, представленными в Заключение диссертации.

1. Значение верхней оценки функции Шеннона потенциала объёмных схем, реализующих булевы функции и операторы.
2. Значение нижней оценки функции Шеннона потенциала объёмных схем, реализующих частичные булевы операторы.
3. Значение верхней оценки функции Шеннона потенциала объёмных схем, реализующих булевы операторы в классе схем с близкими выходами.
4. Значение нижней оценки функции Шеннона потенциала объёмных схем, реализующих булевы операторы в классе схем с ограничениями на расстояние между выходами.

Достоверность полученных результатов обеспечивается строгими математическими доказательствами. Работа прошла апробацию на научных семинарах, всероссийских и международных конференциях, и

опубликована в рецензируемых научных журналах. Все результаты других авторов, которые используются в тексте диссертации, приводятся с указанием выходных данных публикаций.

Апробация работы. Основные результаты работы докладывались на следующих конференциях:

- Международная конференция студентов, аспирантов и молодых учёных «Ломоносов» (9.04.18 – 13.04.18, 8.04.19 – 12.04.19, 10.11.20 – 27.11.20, 11.04.22 – 22.04.22, Москва)
- Ломоносовские чтения (15.04.19 – 25.04.19, Москва)
- XIII Международный семинар «Дискретная математика и её приложения» имени академика О.Б. Лупанова (17.06.19 – 22.06.19, Москва)
- XIX Международная конференция «Проблемы теоретической кибернетики» (27.09.21 – 1.10.21, Казань)

Также результаты работы докладывались на семинарах механико-математического факультета МГУ имени М.В. Ломоносова:

- Семинар «Теория автоматов» под руководством академика, профессора, д.ф.-м.н. В.Б. Кудрявцева (2021)
- Семинар «Вопросы сложности алгоритмов поиска» под руководством профессора, д.ф.-м.н. Э.Э. Гасанова (2019–2022)
- Семинар «Математические вопросы кибернетики» (2023)

Личный вклад. Все приводимые в работе результаты, за исключением специально выделенных, сформулированы и доказаны автором лично.

Публикации. Основные результаты по теме диссертации изложены автором в 4 работах [1–4]. Все работы опубликованы в рецензируемом научном издании из дополнительного списка, утвержденного учёным советом МГУ, в котором могут быть опубликованы научные результаты диссертаций по направлению физико-математические науки. Работ, написанных в соавторстве, нет.

Краткое содержание работы.

Диссертационная работа состоит из введения и трёх глав. Введение описывает актуальность поднятой проблемы, исследуемой в рамках диссертационной работы. Также проводится обзор научной литературы по данному исследованию, формулируется цель и задачи работы. Далее обосновывается научная новизна и научная значимость данной диссертации.

В введении даются основные понятия и определения. В частности, определяется объёмная схема и потенциал, как мера сложности объёмных схем.

Первая глава диссертационной работы является изложением статей [1; 2] и посвящена верхним оценкам функции Шеннона для булевых функций и операторов, реализуемых объёмными схемами. А именно, приведен

универсальный метод синтеза, позволяющий построить для любой булевой функции (оператора) объёмную схему, реализующую данную функцию (оператор) и имеющую оптимальный порядок сложности и потенциала.

Вторая глава диссертационной работы, результаты которой опубликованы в статье [4], полностью посвящена нижней оценке функции Шеннона потенциала для частичных булевых операторов. Для доказательства используется вариация метода расслоения, ранее применявшегося в работах²⁵ для плоских схем. Отметим, что для всюду определенных операторов нижняя оценка совпадает с верхней оценкой, доказанной в работе [2].

В третьей главе диссертационной работы рассматривается класс объёмных схем с близкими выходами. Для него получены нижняя и верхняя оценка функции Шеннона потенциала объёмных схем, совпадающие по порядку. Результаты опубликованы в статье [3].

Кубическим элементом будем называть булев оператор, у которого в сумме не более шести входов и выходов, причём каждому его входу и выходу сопоставлена некоторая метка из множества $\{l, t, r, b, f, a\}$ и метки не повторяются.

Метки будем называть сторонами элемента:

- l — левая сторона;
- r — правая сторона;
- t — верхняя сторона;
- b — нижняя сторона;
- f — передняя сторона;
- a — задняя сторона.

Кубический элемент будем изображать в виде единичного куба в пространстве. При этом входам и выходам элемента сопоставляются грани куба в соответствии с присвоенными им метками.

Метки, присвоенные входам (выходам) оператора будем называть *входами (выходами)* элемента. Метки, не присвоенные ни входам, ни выходам, будем называть *изоляторами*. Входы и выходы элемента будем называть его *контактами*.

Если на всех выходах элемента реализуются тождественные функции, то будем называть элемент *коммутационным*, иначе — *логическим*.

Описывать элемент можно уравнениями, которые задают его оператор, заменяя все переменные в них на сопоставленные им метки (l, t, r, b, f, a). Тогда в левой части каждого уравнения будет стоять выходная метка, а в правую часть будут входить только входные метки.

²⁵ Калачёв, Г. В. Порядок мощности плоских схем, реализующих булевы функции / Г. В. Калачёв // Дискретная математика. 2014. 26:1. С. 49—74; Калачёв, Г. В. Нижние оценки мощности плоских схем, реализующих частичные булевы операторы / Г. В. Калачёв // Интеллектуальные системы. Теория и приложения. 2014. 18:2. С. 279—322.

Сетью из кубических элементов на множестве $M \subseteq \mathbb{Z}^3$ будем называть отображение $K : M \rightarrow E$, где E — множество всех кубических элементов.

Элемент $K(x, y, z)$ будем называть элементом схемы K с координатами (x, y, z) .

Левой, правой, верхней, нижней, передней и задней стороной элемента e с координатами (x, y, z) будем называть точки с координатами $(x - \frac{1}{2}, y, z)$, $(x + \frac{1}{2}, y, z)$, $(x, y, z + \frac{1}{2})$, $(x, y, z - \frac{1}{2})$, $(x, y + \frac{1}{2}, z)$, $(x, y - \frac{1}{2}, z)$ соответственно.

Будем говорить, что сеть K из кубических элементов корректна, если для любых элементов x и y схемы K верно, что если сторона a элемента x совпадает со стороной b элемента y , то выполнено одно из условий:

- один из элементов x, y — изолирующий,
- стороны a и b являются изоляторами,
- среди них одна является входом, другая выходом; если a — выход, а b — вход, то будем говорить, что выход a подключен ко входу b .

Введём понятие графа корректной сети из кубических элементов K (будем обозначать G_K). G_K — ориентированный граф, вершинами которого являются входы и выходы элементов схемы. Если выход одного элемента подключен ко входу другого, то им будет соответствовать одна и та же вершина графа (будем говорить, что эта вершина является выходом первого элемента и входом второго). Из вершины a в вершину b ведёт ребро в том и только в том случае, когда существует элемент e , такой, что a является его входом, b — выходом, причём функция, реализуемая на выходе b , существенно зависит от входа a .

Объёмной схемой или схемой из кубических элементов на множестве $M \subseteq \mathbb{Z}^3$ будем называть корректную сеть из кубических элементов, в графе которой нет ориентированных циклов. Множество M будем называть носителем схемы K .

Длиной схемы K будем называть длину наименьшего прямоугольного параллелепипеда, содержащего все элементы схемы K , обозначается $\ell_1(K)$.

Шириной схемы K будем называть ширину наименьшего прямоугольного параллелепипеда, содержащего все элементы схемы K , обозначается $\ell_2(K)$.

Высотой схемы K будем называть высоту наименьшего прямоугольного параллелепипеда, содержащего все элементы схемы K , обозначается $\ell_3(K)$.

Длину схемы мы будем считать по оси Ox , ширину — по оси Oy , высоту — по оси Oz . На примере, изображенном на рис. 1, у схемы K имеется 6 входов, 9 выходов, а характеристики равны: $\ell_1(K) = 5$, $\ell_2(K) = 2$, $\ell_3(K) = 3$.

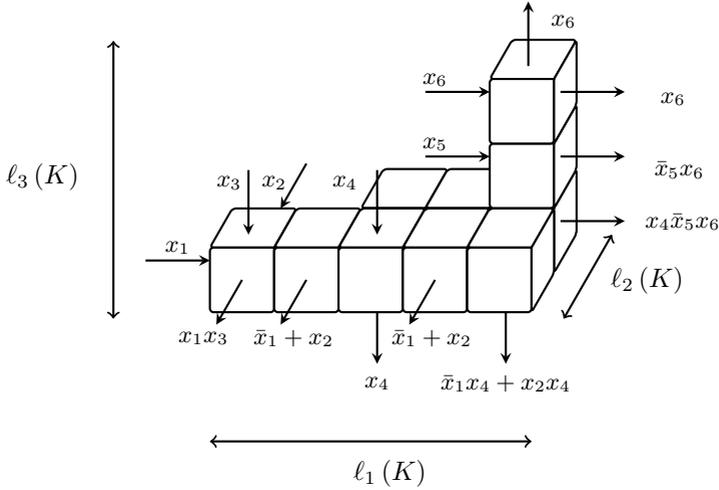


Рис. 1 — Изображение объёмной схемы K .

Если вход (выход) элемента не подключен к выходу (входу) другого элемента, будем его называть *входом* (*выходом*) схемы. *Контактами* схемы K будем называть её входы и выходы, и обозначать их $\text{In}(K)$, $\text{Out}(K)$ соответственно.

Узлами схемы K будем называть вершины графа G_K .

Если M — носитель схемы K , то величину $|M|$, равную количеству элементов в множестве M , будем называть *объёмом* схемы K и обозначать $V(K)$.

Каждой объёмной схеме K можно сопоставить схему их функциональных элементов $\text{Circ}(K)$ следующим образом:

1. каждой функции $f_{s,i}$, которую реализует i -й выход элемента s объёмной схемы, сопоставим функциональный элемент $e_{s,i}$, реализующий $f_{s,i}$; если на i -м и j -м выходе реализуется одна и та же функция, то им будет соответствовать один и тот же функциональный элемент;
2. если i -й выход элемента s_1 подключен к j -му входу элемента s_2 , то соединим выход элемента $e_{s_1,i}$ с j -ми входами элементов $e_{s_2,k}$ для всех k , для которых $f_{s_2,k}$ существенно зависит от j -го аргумента.

Будем говорить, что схема K *реализует* булев оператор F , если схема из функциональных элементов $\text{Circ}(K)$ реализует F . Через $\text{Impl}(F)$ обозначим множество всех объёмных схем, реализующих оператор F .

Через $V(F)$ обозначим объём схемы, реализующей оператор F , и обладающей минимальным объёмом среди всех объёмных схем, реализующих F . То есть, $V(F) := \min_{K \in \text{Impl}(F)} V(K)$. Здесь и далее символ $:=$ обозначает «по определению равно».

Будем говорить, что объёмные схемы K_1 и K_2 *равны* и писать $K_1 = K_2$, если существует параллельный перенос пространства π , который позволяет совместить схемы K_1 и K_2 (т.е. $K_1 = K_2 \circ \pi$), иначе будем говорить, что они *различны*.

Для каждой схемы K зафиксируем некоторую нумерацию её узлов. На i -м узле реализуется некоторая функция g_i от входных переменных схемы K (на входах схемы считаем, что реализуются тождественные функции).

Также далее будем считать, что схема K имеет n входов, m выходов и l узлов.

Для вектора $v = (v_1, \dots, v_q) \in \{0, 1\}^q$ введём обозначение

$$|v| := v_1 + v_2 + \dots + v_q.$$

Потенциалом схемы K на входном наборе $x \in \{0, 1\}^n$ назовём величину $u_K(x) := |(g_1(x), \dots, g_l(x))|$.

Средним потенциалом схемы K на множестве входных наборов $D \subseteq \{0, 1\}^n$ назовём величину

$$U_D(K) := \frac{1}{|D|} \sum_{x \in D} u_K(x).$$

Через $P_2(D, m)$ обозначим множество частичных булевых операторов $f : D \rightarrow \{0, 1\}^m$ с m выходами, определённых на множестве D .

Пусть $f \in P_2(D, m)$. Тогда

$$U(f) := \min_{K \in \text{Impl}(f)} U_D(K).$$

Если множество $\text{Impl}(f)$ пусто, то формально полагаем $U(f) = \infty$.

Максимальным потенциалом схемы K на множестве входных наборов $D \subseteq \{0, 1\}^n$ назовём величину

$$\hat{U}_D(K) := \max_{x \in D} u_K(x).$$

Пусть $f \in P_2(D, m)$. Тогда

$$\hat{U}(f) := \min_{K \in \text{Impl}(f)} \hat{U}_D(K).$$

Если $\text{Impl}(f)$ пусто, то формально полагаем $\hat{U}(f) = \infty$.

Через $P_2(n, m)$ обозначим множество всюду определённых булевых операторов $f : \{0, 1\}^n \rightarrow \{0, 1\}^m$ с n входами и m выходами.

Введём функцию Шеннона для среднего и максимального потенциала:

$$U(n, m) := \max_{f \in P_2(n, m)} U(f).$$

$$\hat{U}(n, m) := \max_{f \in P_2(n, m)} \hat{U}(f).$$

Мы будем рассматривать случай, когда выходы схемы располагаются достаточно близко. Если мы будем рассматривать лишь схемы из некоторого множества Q , то будем ко всем мерам сложности и мощности добавлять нижний индекс Q .

Пусть $f \in P_2(D, m)$. Тогда

$$U_Q(f) := \min_{K \in Q \cap \text{Impl}(f)} U_D(K).$$

Если $Q \cap \text{Impl}(f)$ пусто, то формально полагаем $U_Q(f) = \infty$.

Аналогично определим максимальный потенциал для $f \in P_2(n, m)$:

$$\hat{U}_Q(f) := \min_{K \in Q \cap \text{Impl}(f)} \hat{U}(K).$$

Если $Q \cap \text{Impl}(f)$ пусто, то формально полагаем $\hat{U}_Q(f) = \infty$.

Введём функцию Шеннона для среднего и максимального потенциала:

$$U_Q(n, m) := \max_{f \in P_2(n, m)} U_Q(f).$$

$$\hat{U}_Q(n, m) := \max_{f \in P_2(n, m)} \hat{U}_Q(f).$$

Деревом выходов схемы K назовем минимальное остовное дерево полного графа с вершинами в выходных элементах схемы K , у которого длины рёбер равны расстоянию между элементами — расстоянию между их центрами в манхэттенской метрике.

Введём величину $T(K)$. Пусть m — количество выходов схемы K , числа r_1, \dots, r_{m-1} — длины рёбер дерева выходов. Положим

$$T(K) := \sum_{j=1}^{m-1} r_j.$$

То есть $T(K)$ — величина, равная суммарной длине рёбер дерева выходов схемы K , которую для краткости будем называть длиной дерева выходов.

Введём множество $T_h := \{K : T(K) \leq h\}$, состоящее из таких объёмных схем, у которых длина дерева выходов не превосходит h .

Через T_{near} обозначим множество объёмных схем K , у которых длина дерева выходов не превосходит числа выходов.

Для удобства для любого $q \in \mathbb{N}$ положим $[q] = \{1, 2, \dots, q\}$.

Пусть K — объёмная схема, $f : D \mapsto \{0, 1\}^m$ — булев оператор, причём $K \in \text{Impl}(f)$. Определим образ $Im(K) := \{y \in \{0, 1\}^m \mid f(x) = y, x \in D\}$ схемы K .

В связи с большим числом параметров, от которых будут зависеть оценки (в том числе и неявно), уточним, как будут пониматься в работе такие стандартные обозначения, как $o(\cdot)$, $O(\cdot)$, $\mathcal{O}(\cdot)$, $\Theta(\cdot)$ в случае наличия неявных параметров. Нам часто потребуется писать асимптотические оценки различных величин, явно или неявно зависящих от набора параметров $x = (x_1, \dots, x_k)$. Пусть есть некоторое множество допустимых наборов параметров X , и нём задана база подмножеств²⁶ \mathfrak{B} . Допустимые значения остальных параметров образуют множество Y и в данном контексте считаются фиксированными. Пусть величины f и g явно или неявно зависят от параметров $x \in X, y \in Y$. Введём обозначения:

1. $f(x, y) = o(g(x, y))$ при базе \mathfrak{B} , если

$$\forall y \in Y (\exists B \in \mathfrak{B}, \forall x \in B, g(x, y) \neq 0) : \lim_{\mathfrak{B}} \frac{f(x, y)}{g(x, y)} = 0.$$

2. $f(x, y) = O(g(x, y))$ при базе \mathfrak{B} , если

$$\exists C > 0, \forall y \in Y, \exists B \in \mathfrak{B}, \forall x \in B : f(x, y) \leq Cg(x, y).$$

3. $f(x, y) \asymp g(x, y)$ или $f(x, y) = \Theta(g(x, y))$ при базе \mathfrak{B} , если $f(x, y) = O(g(x, y))$ и $g(x, y) = O(f(x, y))$, то есть

$$\exists C_1, C_2 > 0, \forall y \in Y, \exists B \in \mathfrak{B}, \forall x \in B : C_1g(x, y) \leq f(x, y) \leq C_2g(x, y).$$

Для неасимптотических неравенств с точностью до константы будем использовать обозначение $f(x, y) = \mathcal{O}(g(x, y))$, если $f(x, y) \leq Cg(x, y)$ для некоторой абсолютной константы C .

Если каждый набор параметров $x \in X$ задаёт некоторое множество объектов $\mathcal{F}(x)$, то будем говорить, что *для почти всех* элементов $f \in \mathcal{F}(x)$ при базе \mathfrak{B} верно утверждение $P(x, f)$, если

$$|\{f \in \mathcal{F}(x) : P(x, f)\}| = |\mathcal{F}(x)|(1 + o(1)) \text{ при базе } \mathfrak{B}.$$

Отметим, что обычно множество $\mathcal{F}(x)$ — это множество булевых операторов, а набор параметров x включает в себя число аргументов n , область определения D , число выходов оператора m , а также ограничения на геометрию схемы. База \mathfrak{B} как правило задается несколькими асимптотическими ограничениями на параметры при $n \rightarrow \infty$.

Глава 1 посвящена верхним оценкам. Первая часть состоит из реализации вспомогательных блоков, с помощью которых реализуется схема для любой всюду определённой булевой функции и булева оператора. В частности, особый интерес вызывает дешифратор, который позволяет подводить информацию от одного блока к другому, минимизируя при этом потенциал проводов.

²⁶Непустая система \mathfrak{B} подмножеств множества X называется *базой* множества X , если $\emptyset \notin \mathfrak{B}$ и для любых $B_1, B_2 \in \mathfrak{B}$ существует $B \in \mathfrak{B}$ такое, что $B \subset B_1 \cap B_2$.

Основная верхняя оценка для булевых функций сформулирована в теореме 1.

Теорема 1. Пусть дана булева функция $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$. Тогда существует объёмная схема V_f со входами x_1, x_2, \dots, x_n на одном выходе которой реализуется функция $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$, причём схема V_f обладает следующими характеристиками:

1. $\ell_1(V_f) = \mathcal{O}(2^{n/3})$, $\ell_2(V_f) = \mathcal{O}(2^{n/3})$, $\ell_3(V_f) = \mathcal{O}(2^{n/3})$.
2. $\hat{U}(V_f) = \mathcal{O}(2^{n/3})$.
3. $V(V_f) = \mathcal{O}(2^n)$.

Следующая теорема является обобщением теоремы 2 на случай, когда нужно реализовать несколько булевых функций (булев оператор).

Теорема 2. Пусть дан булев оператор $f : \{0, 1\}^n \rightarrow \{0, 1\}^m$. Тогда существует объёмная схема W_f со входами x_1, x_2, \dots, x_n на m выходах которой реализуется оператор f , причём схема W_f обладает следующими характеристиками: Если $m \leq n$:

1. $\ell_1(W_f) = \mathcal{O}(\sqrt[3]{m} \cdot 2^{n/3})$, $\ell_2(W_f) = \mathcal{O}(\sqrt[3]{m} \cdot 2^{n/3})$, $\ell_3(W_f) = \mathcal{O}(\sqrt[3]{m} \cdot 2^{n/3})$.
2. $\hat{U}(W_f) = \mathcal{O}(\sqrt[3]{m} \cdot 2^{n/3})$.
3. $V(W_f) = \mathcal{O}(m \cdot 2^n)$.

Если $m > n$:

1. $\ell_1(W_f) = \mathcal{O}(\sqrt[3]{n} \cdot 2^{n/3})$, $\ell_2(W_f) = \mathcal{O}(\sqrt[3]{n} \cdot 2^{n/3})$, $\ell_3(W_f) = \mathcal{O}(\frac{m}{n} \cdot \sqrt[3]{n} \cdot 2^{n/3})$.
2. $\hat{U}(W_f) = \mathcal{O}(\frac{m}{n} \cdot \sqrt[3]{n} \cdot 2^{n/3})$.
3. $V(W_f) = \mathcal{O}(m \cdot 2^n)$.

В главе 2 получена нижняя оценка для частичных булевых операторов. Для доказательства использовалась непрерывная модификация метода расслоения. Идея метода расслоения состоит в том, чтобы считать потенциал схемы по слоям и потом интегрировать оценки. Таким образом была получена теорема 3.

Теорема 3. Существует такая абсолютная константа $C > 0$, что для любого натурального n , любого $D \subseteq \{0, 1\}^n$ верно

$$U(f) \geq C \frac{m \sqrt[3]{|D|}}{\min^{2/3}(m, \log_2 |D|)}$$

для почти всех операторов $f \in P_2(D, m)$ при $n \log_2 n = o(|D|)$, $\log_2 m = o(|D|)$, $|D| \rightarrow \infty$.

Фраза «для почти всех операторов» означает, что доля операторов стремится к 1 при указанных условиях.

Учитывая результат теоремы 2 и теоремы 3, получаем порядок функции Шеннона для всюду определённых булевых операторов.

Следствие 1. Для почти всех $f \in P_2(n, m)$, при $n \rightarrow \infty$, $\log_2 m = o(2^n)$ верно асимптотическое равенство:

$$U(f) = \Theta \left(\frac{m \cdot 2^{n/3}}{\min^{2/3}(m, n)} \right).$$

Следствие 2. Пусть $n \rightarrow \infty$, $\log_2 m = o(2^n)$. Тогда верно асимптотическое равенство:

$$U(n, m) \asymp \hat{U}(n, m) = \Theta \left(\frac{m \cdot 2^{n/3}}{\min^{2/3}(m, n)} \right).$$

Глава 3 посвящена классу T_{near} объёмных схем с близкими выходами и классу T_h . Для класса T_h в теореме 4 получена нижняя оценка потенциала.

Теорема 4. Существует такая абсолютная константа C , что для любого натурального n , любого $D \subseteq \{0, 1\}^n$, $d = |D|$ неравенство

$$U_{T_h}(f) \geq \begin{cases} C \frac{m \sqrt[3]{md}}{\log_2 d}, & \text{если } \sqrt[3]{md} > h, \\ C \frac{m \sqrt{md}}{\sqrt{h} \log_2 d}, & \text{если } \sqrt[3]{md} \leq h. \end{cases}$$

выполнено для почти всех $f \in P_2(D, m)$ при $n \rightarrow \infty$, $n \log_2(n) = o(d)$, $\log_2(m) = o(d)$.

Также в теореме 5 для класса T_{near} получена верхняя оценка потенциала, совпадающая по порядку с нижней оценкой.

Теорема 5. Для любого булева оператора $f : \{0, 1\}^n \rightarrow \{0, 1\}^m$, существует объёмная схема $K_f \in T_{near}$ со входами x_1, x_2, \dots, x_n на m выходах которой реализуется оператор f , причём схема K_f обладает следующими характеристиками:

Если $m \leq n$:

1. $\ell_1(K_f) = \mathcal{O}(\sqrt[3]{m} \cdot 2^{n/3})$, $\ell_2(K_f) = \mathcal{O}(\sqrt[3]{m} \cdot 2^{n/3})$,
 $\ell_3(K_f) = \mathcal{O}(\sqrt[3]{m} \cdot 2^{n/3})$.
2. $\hat{U}(K_f) = \mathcal{O}(\sqrt[3]{m} \cdot 2^{n/3})$.
3. $V(K_f) = \mathcal{O}(m \cdot 2^n)$.

Если $n < m \leq 2^{n/2}$:

1. $\ell_1(K_f) = \mathcal{O}(\sqrt[3]{m} \cdot 2^{n/3})$, $\ell_2(K_f) = \mathcal{O}(\sqrt[3]{m} \cdot 2^{n/3})$,
 $\ell_3(K_f) = \mathcal{O}(\sqrt[3]{m} \cdot 2^{n/3})$.
2. $\hat{U}(K_f) = \mathcal{O}\left(\frac{m}{n} \cdot \sqrt[3]{m} \cdot 2^{n/3}\right)$.
3. $V(K_f) = \mathcal{O}(m \cdot 2^n)$.

Если $m > 2^{n/2}$:

1. $\ell_1(K_f) = \mathcal{O}(2^{n/2})$, $\ell_2(K_f) = \mathcal{O}(2^{n/2})$,
 $\ell_3(K_f) = \mathcal{O}(m)$.
2. $\hat{U}(K_f) = \mathcal{O}\left(\frac{m}{n} \cdot 2^{n/2}\right)$.
3. $V(K_f) = \mathcal{O}(m \cdot 2^n)$.

Таким образом, в качестве следствия из теорем 4 и 5 получаем порядок функции Шеннона в классе объёмных схем с близкими выходами.

Следствие 3. Для почти всех $f \in P_2(n, m)$, при $m \geq n$, $n \rightarrow \infty$, $\log_2(m) = o(2^n)$ верно равенство:

$$U_{T_{\text{near}}}(f) = \Theta\left(\frac{m}{n} \cdot \left(\min(m, 2^{n/2})\right)^{1/3} \cdot 2^{n/3}\right).$$

Заключение. Основные результаты работы заключаются в следующем.

1. Получена верхняя оценка функции Шеннона потенциала объёмных схем, реализующих булевы функции и операторы.
2. Получена нижняя оценка функции Шеннона потенциала объёмных схем, реализующих частичные булевы операторы.
3. Получена верхняя оценка функции Шеннона потенциала объёмных схем, реализующих булевы операторы в классе схем с близкими выходами.
4. Получена нижняя оценка функции Шеннона потенциала объёмных схем, реализующих булевы операторы в классе схем с ограничениями на расстояние между выходами.

Благодарности. Автор выражает особую признательность научному руководителю д.ф.-м.н. профессору Эльяру Эльдаровичу Гасанову за постановку задачи и научное руководство. Также автор выражает особую благодарность научному руководителю к.ф.-м.н. Глебу Вячеславовичу Калачеву за научные обсуждения, помогающие улучшить читаемость текста и четкость формулировок.

Автор приносит благодарность профессорско-преподавательскому составу механико-математического факультета МГУ имени М.В. Ломоносова. Также, автор благодарит коллектив кафедры Математической теории интеллектуальных систем за опыт, знания и ценные советы, полученные за весь период обучения.

Публикации автора по теме диссертации

1. *Ефимов, А. А.* Верхняя оценка энергопотребления в классе объёмных схем / А. А. Ефимов // Интеллектуальные системы. Теория и приложения. — 2019. — Т. 23:1. — С. 117—132. — Импакт-фактор РИНЦ 2019 год: 0.397.

2. *Ефимов, А. А.* Верхняя оценка энергопотребления объемных схем, реализующих булевы операторы / А. А. Ефимов // Интеллектуальные системы. Теория и приложения. — 2019. — Т. 23:2. — С. 105—124. — Импакт-фактор РИНЦ 2019 год: 0.397.
3. *Ефимов, А. А.* Оценки энергопотребления для класса объёмных схем с близкими выходами / А. А. Ефимов // Интеллектуальные системы. Теория и приложения. — 2022. — Т. 26:3. — С. 109—150. — Импакт-фактор РИНЦ 2022 год: 0.242.
4. *Ефимов, А. А.* Нижняя оценка энергопотребления для класса объёмных схем / А. А. Ефимов // Интеллектуальные системы. Теория и приложения. — 2023. — Т. 27:1. — С. 91—133. — Импакт-фактор РИНЦ 2022 год: 0.242.

Ефимов Алексей Андреевич

Оценки энергопотребления объёмных схем

Автореф. дис. на соискание ученой степени канд. физ.-мат. наук

Подписано в печать _____._____._____. Заказ № _____

Формат 60×90/16. Усл. печ. л. 1. Тираж 100 экз.

Типография _____