

ОТЗЫВ

официального оппонента на диссертацию Грозновой Анастасии Юрьевны на тему «Свойства типа несвязности и однородность топологических пространств», представленную на соискание ученой степени кандидата физико-математических наук по специальности 1.1.3 «Геометрия и топология» (01.01.04 «Геометрия и топология»)

Диссертация А. Ю. Грозновой посвящена обобщениям экстремально несвязных пространств и F -пространств, и исследованию различных свойств этих обобщений: взаимосвязь с F -пространствами и $\beta\omega$ -пространствами; несохранение при стоун-чеховских компактификациях; возможность продолжения функций с подпространств; неоднородность произведений.

Экстремально несвязные пространства играют важную роль в различных областях математики. Так в теории двойственности булевых алгебр и топологических пространств, полным булевым алгебрам соответствуют экстремально несвязные компакты. Данное понятие находит применение и в теории меры. К примеру, доказательство теоремы Рисса об интегральном представлении функционала (в терминах категории компактных пространств и непрерывных отображений) может быть сведено к рассмотрению морфизмов лишь из экстремально несвязных компактов. Наконец, экстремально несвязные пространства возникают в различных задачах общей топологии. Здесь хотелось бы отметить как классические работы З. Фролика, С. Сироты, В.И. Малыхина, А.В. Архангельского, так и сравнительно недавние работы О.В. Сипачевой, Е.А. Резниченко, М. Гавриловича.

Отдельный интерес представляет обобщение экстремально несвязных пространств - F -пространства, которые также встречаются в проблемах

двойственности пространств и в различных задачах функционального анализа.

В диссертации А. Ю. Грозновой вводятся понятия R_1 -, R_2 -, R_3 -пространств, обобщающих F -пространства (и, следовательно, экстремально несвязные пространства). Кроме того, изучается ряд свойств R_1 -, R_2 -, R_3 -пространств, которые естественно продолжают известные исследования в области экстремально несвязных и F -пространств. Таким образом, тематика диссертации является актуальной.

Первая глава посвящена ультрафильтрам на множестве целых неотрицательных чисел (далее ω), и их свойствам. В главе перечисляются основные понятия, связанные с ультрафильтрами, порядками на ультрафильтрах, операциями над ультрафильтрами. Кроме того, вводится понятие дискретного ультрафильтра и доказывается ряд его свойств. Основными результатами первой главы являются: а) критерий минимальности неглавных ультрафильтров на ω ; б) свойства тензорного произведения и суммы Фубини ультрафильтров на ω .

Во второй главе вводятся основные объекты исследования - R_1 -, R_2 -, R_3 -пространства (в том числе и для бесконечных кардиналов). Показано, что имеет место включение: класс $R_1 \subset$ класс $R_2 \subset$ класс R_3 . Также показано, что классы R_1 -, R_2 -, R_3 -пространств являются обобщениями класса F -пространств, и частным случаем класса $\beta\omega$ -пространств. Кроме того, построены примеры, демонстрирующие, что перечисленные включения строгие. Наконец, доказано, что классы R_1 -, R_2 -, R_3 - и $\beta\omega$ -пространств не сохраняются при стоун-чеховских компактификациях.

В третьей главе изучаются свойства R_1 - и R_3 -пространств в терминах продолжения непрерывных функций с подпространств и в терминах идеалов полуколец и колец непрерывных функций. В частности, показано, что

R_1 -пространство характеризуется C^* -вложенностью счетных подпространств, а R_3 -пространство характеризуется C^* -вложенностью счетных дискретных подпространств. Из данных результатов получены также характеристики R_1 - и R_3 -пространств в терминах идеалов полуколец и колец непрерывных функций.

Заключительная глава 4 посвящена вопросам однородности в произведениях R_2 - и $\beta\omega$ -пространств. В данной главе получены следующие основные результаты: а) о сравнимости неглавных ультрафильтров на ω , по которым сходятся к одной и той же точке последовательности в компактном R_2 - / $\beta\omega$ -пространстве, обобщающий лемму Кунена; б) о неоднородности произведения для R_2 - / $\beta\omega$ -пространств. Кроме того, вводится теоретико-множественное предположение, позволяющее доказать метризуемость и конечность для однородных подпространств счетных произведений $\beta\omega$ -пространств.

Перечислим некоторые замечания и предложения по диссертации:

- 1) Текст содержит незначительные опечатки: к примеру, в пункте ii замечания 1.1.1. явно имеется в виду "из равенства следует", а не "равенство равносильно тому".
- 2) В тексте иногда используются разные обозначения для одних и тех же понятий/объектов. Например, для включений (строгих/нестрогих) используются все три символа \subseteq , \subset , \subsetneq . Или на стр. 20 в соседних предложениях по-разному обозначается одно и то же произведение пространств.
- 3) Было бы интересно исследовать свойства групп с топологией R_1 -, R_2 -, R_3 - пространств (аналогичные свойствам экстремально несвязных топологических групп).

Перечисленные выше замечания никоим образом не влияют на общую положительную оценку работы, и носят скорее рекомендательный характер. Диссертация является законченным и самостоятельно выполненным исследованием по актуальной научной тематике. Результаты являются новыми, доказательства изложены строго и верно. Основные результаты опубликованы в рецензируемых научных изданиях, рекомендованных для защиты в диссертационном совете МГУ по заявленной специальности. Автореферат верно и полно отражает содержание диссертации.

Считаю, что диссертационная работа Грозновой Анастасии Юрьевны «Свойства типа несвязности и однородность топологических пространств» соответствует критериям, определенным пп. 2.1–2.5 «Положения о присуждении ученых степеней в Московском государственном университете имени М. В. Ломоносова» и оформлена согласно приложениям № 5, 6 «Положения о диссертационном совете Московского государственного университета имени М. В. Ломоносова». По моему мнению, автор диссертации заслуживает присуждения ей ученой степени кандидата физико-математических наук по специальности 1.1.3 «Геометрия и топология».

24 марта 2023

Кандидат физико-математических наук,
старший инженер ООО «КОУЛМЭН ТЕХ»,

Захарян Юрий Норикович

Подпись Захарян Ю.Н. заверяю

