

МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
ИМЕНИ М. В. ЛОМОНОСОВА

На правах рукописи

Колотов Игорь Иванович

**РЕГУЛЯРИЗИРУЮЩИЕ АЛГОРИТМЫ
ВОССТАНОВЛЕНИЯ МАГНИТНЫХ ПОЛЕЙ ПО
ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНЫМ ДАННЫМ.**

1.3.3. — «Теоретическая физика»

АВТОРЕФЕРАТ

диссертации на соискание ученой степени
кандидата физико-математических наук

Москва — 2023

Работа выполнена на кафедре математики физического факультета МГУ имени М. В. Ломоносова.

Научный руководитель: **Ягола Анатолий Григорьевич**
доктор физико-математических наук, профессор

Научный консультант: **Лукьяненко Дмитрий Витальевич**
кандидат физико-математических наук, доцент

Официальные оппоненты: **Поляков Петр Александрович**, доктор физико-математических наук, профессор кафедры общей физики физического факультета МГУ имени М.В. Ломоносова.

Леонов Александр Сергеевич, доктор физико-математических наук, профессор кафедры высшей математики Федерального государственного автономного образовательного учреждения высшего образования "Национальный исследовательский ядерный университет МИФИ".

Шишленин Максим Александрович, доктор физико-математических наук, профессор РАН, заместитель директора по науке ФГБУН "Институт математики им. С.Л. Соболева" Сибирского отделения Российской академии наук.

Защита диссертации состоится «20-го» апреля 2023 г. в 16 часов 30 минут на заседании диссертационного совета МГУ.011.2 Московского государственного университета имени М.В.Ломоносова по адресу:119991, ГСП-1, Москва, Ленинские горы, МГУ, дом 1, строение 2, физический факультет, физическая аудитория им. Р.В. Хохлова.

E-mail: ff.dissovet@gmail.com

С диссертацией можно ознакомиться в отделе диссертаций научной библиотеки МГУ имени М.В. Ломоносова (Ломоносовский просп., д. 27) и на сайте <https://dissovet.msu.ru/dissertation/011.2/2450>

Автореферат разослан “ ___ ” _____ 2023 года.

Ученый секретарь
диссертационного совета МГУ.011.2,
доктор физико-математических наук,
профессор

П.А Поляков

Общая характеристика работы

Диссертационная работа посвящена исследованию проблем решения задачи восстановления параметров намагниченности в коре планет и магнитной восприимчивости в Земной коре по измеренным значениям магнитного поля и/или градиента магнитного поля. Для решения этих задач, в зависимости от известной априорной информации об изучаемом объекте, предлагаются различные численные алгоритмы, которые могут быть реализованы как на обычных компьютерах, так и на многопроцессорных системах. Техника распараллеливания позволяет производить обработку больших объемов данных, что даёт достаточно подробное описание исследуемого объекта. Разработанные алгоритмы также могут быть успешно применены для решения очень широкого класса прикладных физических задач, сводящихся как к трёхмерным интегральным уравнениям Фредгольма 1-го рода для векторной функции, так и к задачам меньшей размерности (в том числе для случая, когда необходимо восстановить скалярную функцию).

Актуальность темы. Решение задач по восстановлению параметров намагниченности и магнитной восприимчивости в земной коре и коре планет Солнечной системы является важным для изучения их глубинного строения строения планет, выявления слабых магнитных аномалий для поиска полезных, уточнения моделей магнитного поля в настоящем и проверки гипотез о существовании магнитного динамо в прошлом. Последнее особенно важно для Меркурия, у которого есть магнитное динамо. Также важна задача уточнения модели магнитного поля планет. Для ее решения необходимо выделять так называемую “коровую” составляющую магнитного поля, которая обусловлена наличием близко залегающих к поверхности плотностных магнитных неоднородностей.

Во всех реальных задачах входные данные задаются с погрешностью. Оказывается, что абсолютное большинство обратных задач, к которым сводятся прикладные задачи, являются некорректно поставленными.

Академиком А. Н. Тихоновым в 60-х годах прошлого века была заложена теория решения некорректных задач, основанная на понятии регуляризирующего алгоритма. После основополагающих работ А. Н. Тихонова, М. М. Лаврентьева и В. К. Иванова теория некорректных задач была развита многими учеными в применении к разным областям науки и техники.

При решении многих современных прикладных обратных задач часто необходимо восстанавливать характеристики исследуемых объектов в пространстве, при этом эти характеристики могут являться векторными функциями. Это зачастую приводит к необходимости решать трёхмерные интегральные уравнения Фредгольма 1-го рода для векторных или скалярных функций, что невозможно сделать с использованием обычных персональ-

ных компьютеров. В таких случаях обычно используются различные упрощения и допущения, которые понижают размерность задачи, но при этом дают ограниченную информацию об исследуемом объекте либо приводят к существенным ошибкам. В связи с этим наибольший интерес представляют эффективные методы решения прикладных трёхмерных обратных задач [1–5], [A1].

Цель работы. Разработка моделей, численных методов и комплексов программ для восстановления эквивалентных по внешнему полю параметров намагниченности в коре планет и магнитной восприимчивости в земной коре, опираясь на измеренные с помощью спутников значения магнитного поля, либо градиентов магнитного поля, измеренных с помощью сверхпроводящих квантовых интерференционных устройств (SQUIDs).

Положения, выносимые на защиту.

1. Предложен и реализован в виде комплекса программ алгоритм решения прикладных трёхмерных обратных задач восстановления параметров намагниченности и магнитной восприимчивости в коре планет по измеренным значениям магнитного поля, сводящихся к интегральным уравнениям Фредгольма 1-го рода для векторной и скалярной функций с использованием многопроцессорных систем.
2. Для частного случая доказана единственность решения задачи восстановления распределения интенсивностей магнитных диполей.
3. Разработанные алгоритмы решения обратной задачи магниторазведки апробированы на модельных и реальных задачах в трёхмерных областях и показали свою эффективность.

Научная новизна. Разработаны новые методы и подходы для интерпретации реальных геофизических данных, а также экспериментальных данных, полученных в ходе межпланетных миссий.

Теоретическая ценность и практическая значимость. Описанные в работе методы решения применимы к линейным обратным задачам, встречающимся как при исследовании магнитных полей Земли, так и для изучения магнитных полей других планет. Разработанные в данной работе комплексы программ позволяют решать реальные прикладные трёхмерные обратные задачи.

Личный вклад автора. Во всех опубликованных работах вклад автора является определяющим. Автором выписаны все необходимые для исследования интегральные уравнения, проведены конечно-разностные аппроксимации функционалов. Все численные алгоритмы реализованы и распараллелены лично автором. Автор принимал активное участие в интерпретации полученных результатов.

Публикации. Результаты диссертации опубликованы в 3 статьях [A1–A3] в рецензируемых журналах из баз данных Scopus и Web of Science и четыре тезиса конференций [C1–C4].

Апробация работы. Основные результаты докладывались на следующих научных конференциях:

1. Марчуковские научные чтения-2021 (Новосибирск, 2021);
2. IX международная научная конференция «современные проблемы математики и физики» посвященная 70-летию чл.-корр. АН РБ К.Б. Сабитова (Стерлитамак, 2021);
3. Всероссийская научно-практическая конференция “Обратные задачи и математические модели” (Бирск, 2021);
4. Международная научно-практическая конференция, посвященная 90-летию со дня рождения А.Г.Костюченко (Уфа, 2021);
5. Евразийская конференция по прикладной математике (Новосибирск, 2021);
6. The 6th International Workshop on Computational Inverse Problems and Applications (CIPA), Шеньчжень, Китай, 22-26 июля 2022;
7. Вычислительная математика и приложения, Сочи, Россия, 1-5 августа 2022;
8. 8-я Международная конференция “Квазилинейные уравнения, обратные задачи и их приложения” (QIPA 2022), Сочи, Сириус, Россия, 22-26 августа 2022;
9. Всероссийская научно-практическая конференция, посвященная памяти профессора Усманова Салават Мударисовича “Обратные задачи и математические модели”, Бирск, Башкортостан, Россия, 16 сентября 2022;

Структура и объем диссертации. Диссертация состоит из введения, 6 глав, заключения и списка литературы. Общий объем диссертации составляет 118 страниц. Библиография содержит 161 наименование.

Краткое содержание работы

В **первой главе** представлен краткий обзор подходов и результатов предыдущих лет, на основе которых написана данная работа.

Во **второй главе** подробно описаны постановка задачи восстановления параметров намагниченности, а также задача восстановления магнитной восприимчивости в коре планет по измеренным значениям магнитного поля и/или градиентов магнитного поля на некотором расстоянии от поверхности [А1–А3].

Математическая модель, определяющая напряжённость магнитного поля \mathbf{H}_{field} , индуцированного объектом с распределением намагниченности $\mathbf{M}(x, y, z)$ и локализацией в области V , имеет вид [6]:

$$\mathbf{H}_{field}(\mathbf{r}_s) = \frac{1}{4\pi} \nabla_s \iiint_V \left(\nabla_s \frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_s|}, \mathbf{M}(\mathbf{r}) \right) dv. \quad (1)$$

Здесь $|\mathbf{r} - \mathbf{r}_s| = \sqrt{(x - x_s)^2 + (y - y_s)^2 + (z - z_s)^2}$ — расстояние между точкой $\mathbf{r}_s = (x_s, y_s, z_s)$, в которой расположен измеряющий поле \mathbf{H}_{field} сенсор s , и точкой $\mathbf{r} = (x, y, z)$ области V , в которой расположен магнитный источник с суммарным магнитным моментом на единицу объёма вещества $\mathbf{M}(\mathbf{r})$; $\nabla_s \equiv \left(\frac{\partial}{\partial x_s}, \frac{\partial}{\partial y_s}, \frac{\partial}{\partial z_s} \right)$ — оператор вычисления градиента по переменным с индексом s .

Если имеется априорная информация об индуцированном Землёй магнитном поле в области расположения исследуемого тела, обратную задачу поиска векторной функции магнитного момента можно редуцировать к нахождению магнитной восприимчивости, представляющей собой скалярную функцию. Запишем зависимость вектора намагниченности \mathbf{M} от вектора напряжённости внешнего магнитного поля \mathbf{H}^0 и преобразуем это выражение в вектор-функцию намагниченности от магнитной индукции внешнего поля \mathbf{B}^0 :

$$\mathbf{M}(\mathbf{r}) = \chi \mathbf{H}^0(\mathbf{r}) = \frac{\chi}{\mu_0 \mu} \mathbf{B}^0(\mathbf{r}) = \frac{\chi}{\mu_0(1 + \chi)} \mathbf{B}^0(\mathbf{r}) \approx \frac{\chi}{\mu_0} \mathbf{B}^0(\mathbf{r}), \quad (2)$$

где χ — магнитная восприимчивость и $|\chi| \ll 1$ для диа- и парамагнетиков, μ_0 — магнитная постоянная, а $\mu = 1 + \chi$ — магнитная проницаемость в системе СИ. Важно отметить, что в работе автора не рассматривались ферромагнитные среды, поэтому взаимосвязь намагниченности среды и внешнего магнитного поля имеет линейный характер.

Измерения внешнего магнитного поля проводятся над поверхностью Земли, магнитная проницаемость воздуха близка по своему значению к единице, поэтому для нашего случая выполнено следующее соотношение $\mathbf{H}_{field} \approx \mathbf{B}_{field}/\mu_0$ согласно (2) и выражение (1) можно переписать для

магнитной индукции:

$$\frac{\mathbf{B}_{field}(\mathbf{r}_s)}{\mu_0} = \nabla_s \iiint_V \left(\nabla_s \frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_s|}, \mathbf{M}(\mathbf{r}) \right) dv. \quad (3)$$

Представим намагниченность $\mathbf{M}(\mathbf{r})$ области V в следующем виде:

$$\mathbf{M}(\mathbf{r}) = |\mathbf{M}(\mathbf{r})| \mathbf{l}, \quad (4)$$

где $\mathbf{l} \equiv (l_x, l_y, l_z)$ — единичный вектор, сонаправленный с вектором намагниченности $\mathbf{M}(\mathbf{r})$ в точке \mathbf{r} , $|\mathbf{M}(\mathbf{r})|$ — величина этого поля в точке \mathbf{r} .

Преобразовав $\mathbf{H}_{field}(\mathbf{r}_s)$ к виду

$$\begin{aligned} \mathbf{H}_{field}(\mathbf{r}_s) &= H_x(\mathbf{r}_s) \mathbf{i} + H_y(\mathbf{r}_s) \mathbf{j} + H_z(\mathbf{r}_s) \mathbf{k} = \\ &= \left(\frac{1}{4\pi} \iiint_V \left(\frac{3(\mathbf{l}, \mathbf{r} - \mathbf{r}_s)(x - x_s)}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_s|^5} - \frac{l_x}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_s|^3} \right) |\mathbf{M}(\mathbf{r})| dv \right) \mathbf{i} + \\ &+ \left(\frac{1}{4\pi} \iiint_V \left(\frac{3(\mathbf{l}, \mathbf{r} - \mathbf{r}_s)(y - y_s)}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_s|^5} - \frac{l_y}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_s|^3} \right) |\mathbf{M}(\mathbf{r})| dv \right) \mathbf{j} + \\ &+ \left(\frac{1}{4\pi} \iiint_V \left(\frac{3(\mathbf{l}, \mathbf{r} - \mathbf{r}_s)(z - z_s)}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_s|^5} - \frac{l_z}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_s|^3} \right) |\mathbf{M}(\mathbf{r})| dv \right) \mathbf{k}, \end{aligned}$$

и, переобозначив переменные как $i = x, y, z$ и $p = (p_x, p_y, p_z) = (x_s, y_s, z_s)$, мы можем записать выражения для компонент вектора $\mathbf{H}_{field}(\mathbf{r}_s)$ в следующем виде:

$$H_i(\mathbf{r}_s) = \frac{1}{4\pi} \iiint_V \left(\frac{3(\mathbf{l}, \mathbf{r} - \mathbf{r}_s)(i - p_i)}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_s|^5} - \frac{l_i}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_s|^3} \right) |\mathbf{M}(\mathbf{r})| dv.$$

Вычисляя производные от H_i по пространственным переменным $i = x, y, z$ и $j = x, y, z \neq i$, мы можем получить следующие выражения для диагональных и недиагональных элементов тензора градиентов компонент

напряжённости магнитного поля \mathbf{H}_{tensor} :

$$H_{ii}(\mathbf{r}_s) = \frac{1}{4\pi} \iiint_V \left(\frac{15(\mathbf{l}, \mathbf{r} - \mathbf{r}_s)(i - p_i)^2}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_s|^7} - \frac{6l_x(i - p_i)}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_s|^5} - \frac{3(\mathbf{l}, \mathbf{r} - \mathbf{r}_s)}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_s|^5} \right) |\mathbf{M}(\mathbf{r})| dv,$$

$$H_{ij}(\mathbf{r}_s) = \frac{1}{4\pi} \iiint_V \left(\frac{15(\mathbf{l}, \mathbf{r} - \mathbf{r}_s)(i - p_i)(j - p_j)}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_s|^7} - \frac{3l_x(j - p_j)}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_s|^5} - \frac{3l_y(i - p_i)}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_s|^5} \right) |\mathbf{M}(\mathbf{r})| dv.$$

Обратим внимание на то, что мы определили полный тензор градиентов компонент напряжённости магнитного поля \mathbf{H}_{tensor} , который в отличие от трёхмерной напряжённости магнитного поля \mathbf{H}_{field} имеет 9 компонент и может быть записан в следующей матричной форме:

$$\mathbf{H}_{tensor} = [H_{ij}] = \begin{bmatrix} \frac{\partial B_x}{\partial x} & \frac{\partial H_x}{\partial y} & \frac{\partial H_x}{\partial z} \\ \frac{\partial H_y}{\partial x} & \frac{\partial H_y}{\partial y} & \frac{\partial H_y}{\partial z} \\ \frac{\partial H_z}{\partial x} & \frac{\partial H_z}{\partial y} & \frac{\partial H_z}{\partial z} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} H_{xx} & H_{xy} & H_{xz} \\ H_{yx} & H_{yy} & H_{yz} \\ H_{zx} & H_{zy} & H_{zz} \end{bmatrix},$$

где $\frac{\partial H_x}{\partial y} = \frac{\partial H_y}{\partial x}$, $\frac{\partial H_x}{\partial z} = \frac{\partial H_z}{\partial x}$, $\frac{\partial H_y}{\partial z} = \frac{\partial H_z}{\partial y}$ и $\frac{\partial H_x}{\partial x} + \frac{\partial H_y}{\partial y} + \frac{\partial H_z}{\partial z} = 0$ (из этих соотношений следует, что только 5 компонент тензора являются линейно-независимыми).

В результате мы приходим к системе из двух интегральных уравнений Фредгольма 1-го рода:

$$\begin{cases} \mathbf{H}_{field}(\mathbf{r}_s) = \frac{1}{4\pi} \iiint_V \mathbf{K}_{MI}(\mathbf{r} - \mathbf{r}_s; \mathbf{l}) |\mathbf{M}(\mathbf{r})| dv, \\ \mathbf{H}_{tensor}(\mathbf{r}_s) = \frac{1}{4\pi} \iiint_V \mathbf{K}_{MGT}(\mathbf{r} - \mathbf{r}_s; \mathbf{l}) |\mathbf{M}(\mathbf{r})| dv, \end{cases} \quad (5)$$

где $\mathbf{H}_{field} = [H_x \ H_y \ H_z]^T$ и $\mathbf{H}_{tensor} = [H_{xx} \ H_{xy} \ H_{xz} \ H_{yz} \ H_{zz}]^T$, а ядра

интегральных уравнений \mathbf{K}_{MI} и \mathbf{K}_{MGT} имеют вид

$$\mathbf{K}_{MI}(\mathbf{r} - \mathbf{r}_s; \mathbf{l}) = \begin{bmatrix} \frac{3(\mathbf{l}, \mathbf{r} - \mathbf{r}_s)(x - x_s)}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_s|^5} - \frac{l_x}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_s|^3} \\ \frac{3(\mathbf{l}, \mathbf{r} - \mathbf{r}_s)(y - y_s)}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_s|^5} - \frac{l_y}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_s|^3} \\ \frac{3(\mathbf{l}, \mathbf{r} - \mathbf{r}_s)(z - z_s)}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_s|^5} - \frac{l_z}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_s|^3} \end{bmatrix}$$

и

$$\mathbf{K}_{MGT}(\mathbf{r} - \mathbf{r}_s; \mathbf{l}) = \begin{bmatrix} \frac{15(\mathbf{l}, \mathbf{r} - \mathbf{r}_s)(x - x_s)^2}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_s|^7} - \frac{6l_x(x - x_s)}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_s|^5} - \frac{3(\mathbf{l}, \mathbf{r} - \mathbf{r}_s)}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_s|^5} \\ \frac{15(\mathbf{l}, \mathbf{r} - \mathbf{r}_s)(x - x_s)(y - y_s)}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_s|^7} - \frac{3l_x(y - y_s)}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_s|^5} - \frac{3l_y(x - x_s)}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_s|^5} \\ \frac{15(\mathbf{l}, \mathbf{r} - \mathbf{r}_s)(x - x_s)(z - z_s)}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_s|^7} - \frac{3l_z(x - x_s)}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_s|^5} - \frac{3l_x(z - z_s)}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_s|^5} \\ \frac{15(\mathbf{l}, \mathbf{r} - \mathbf{r}_s)(y - y_s)(z - z_s)}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_s|^7} - \frac{3l_z(y - y_s)}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_s|^5} - \frac{3l_y(z - z_s)}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_s|^5} \\ \frac{15(\mathbf{l}, \mathbf{r} - \mathbf{r}_s)(z - z_s)^2}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_s|^7} - \frac{6l_z(z - z_s)}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_s|^5} - \frac{3(\mathbf{l}, \mathbf{r} - \mathbf{r}_s)}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_s|^5} \end{bmatrix}.$$

При восстановлении параметров намагниченности уравнение для $\mathbf{H}_{field}(\mathbf{r}_s)$ из системы (5), с учетом (3), можно переписать в следующем виде:

$$\mathbf{B}_{field}(\mathbf{r}_s) = \frac{\mu_0}{4\pi} \iiint_V \left(\frac{3(\mathbf{M}(\mathbf{r}), \mathbf{r} - \mathbf{r}_s)(\mathbf{r} - \mathbf{r}_s)}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_s|^5} - \frac{\mathbf{M}(\mathbf{r})}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_s|^3} \right) dv. \quad (6)$$

Для восстановления магнитной восприимчивости систему (5), с учетом (2), можно переписать так:

$$\begin{cases} \mathbf{B}_{field}(\mathbf{r}_s) = \iiint_V \mathbf{K}_{MI}(\mathbf{r} - \mathbf{r}_s; |\mathbf{B}^0|, \mathbf{l}) \chi(\mathbf{r}) dv, \\ \mathbf{B}_{tensor}(\mathbf{r}_s) = \iiint_V \mathbf{K}_{MGT}(\mathbf{r} - \mathbf{r}_s; |\mathbf{B}^0|, \mathbf{l}) \chi(\mathbf{r}) dv, \end{cases} \quad (7)$$

где $\mathbf{B}_{field} = [B_x \ B_y \ B_z]^T$ и $\mathbf{B}_{tensor} = [B_{xx} \ B_{xy} \ B_{xz} \ B_{yz} \ B_{zz}]^T$, а ядра

интегральных уравнений \mathbf{K}_{MI} и \mathbf{K}_{MGT} имеют вид:

$$\mathbf{K}_{MI}(\mathbf{r} - \mathbf{r}_s; |\mathbf{B}^0|, \mathbf{l}) = |\mathbf{B}^0| \begin{bmatrix} \frac{3(\mathbf{l}, \mathbf{r} - \mathbf{r}_s)(x - x_s)}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_s|^5} - \frac{l_x}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_s|^3} \\ \frac{3(\mathbf{l}, \mathbf{r} - \mathbf{r}_s)(y - y_s)}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_s|^5} - \frac{l_y}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_s|^3} \\ \frac{3(\mathbf{l}, \mathbf{r} - \mathbf{r}_s)(z - z_s)}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_s|^5} - \frac{l_z}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_s|^3} \end{bmatrix}$$

и

$$\mathbf{K}_{MGT}(\mathbf{r} - \mathbf{r}_s; |\mathbf{B}^0|, \mathbf{l}) = |\mathbf{B}^0| \begin{bmatrix} \frac{15(\mathbf{l}, \mathbf{r} - \mathbf{r}_s)(x - x_s)^2}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_s|^7} - \frac{6l_x(x - x_s)}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_s|^5} - \frac{3(\mathbf{l}, \mathbf{r} - \mathbf{r}_s)}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_s|^5} \\ \frac{15(\mathbf{l}, \mathbf{r} - \mathbf{r}_s)(x - x_s)(y - y_s)}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_s|^7} - \frac{3l_x(y - y_s)}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_s|^5} - \frac{3l_y(x - x_s)}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_s|^5} \\ \frac{15(\mathbf{l}, \mathbf{r} - \mathbf{r}_s)(x - x_s)(z - z_s)}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_s|^7} - \frac{3l_z(x - x_s)}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_s|^5} - \frac{3l_x(z - z_s)}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_s|^5} \\ \frac{15(\mathbf{l}, \mathbf{r} - \mathbf{r}_s)(y - y_s)(z - z_s)}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_s|^7} - \frac{3l_z(y - y_s)}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_s|^5} - \frac{3l_y(z - z_s)}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_s|^5} \\ \frac{15(\mathbf{l}, \mathbf{r} - \mathbf{r}_s)(z - z_s)^2}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_s|^7} - \frac{6l_z(z - z_s)}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_s|^5} - \frac{3(\mathbf{l}, \mathbf{r} - \mathbf{r}_s)}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_s|^5} \end{bmatrix}.$$

В **третьей главе** подробно описан метод локализации “тонких структур” в коре Меркурия на основе решённой задачи восстановления эквивалентного распределения намагниченности. Результаты этой задачи используются для восстановления значений магнитного поля в окружающем Меркурий шаром слое. Далее, из восстановленного в шаровом слое поля, с помощью разложения Гаусса-Ми, выделяется высокочастотная компонента внутреннего поля. Рассмотрим окружающий Меркурий шаровой слой $S(a, c) = \{r : a < r < c\}$. Внутренний радиус этого шарового слоя равен a , внешний c . Разложение Гаусса-Ми внутри этого шарового слоя, согласно принципу суперпозиции, имеет вид

$$\mathbf{B} = \mathbf{B}^{int} + \mathbf{B}^{ext} + \mathbf{B}_T^{sh} + \mathbf{B}_P^{sh}. \quad (8)$$

Здесь $\mathbf{B}_T^{sh} + \mathbf{B}_P^{sh}$ — разложение Ми на тороидальную и полоидальную компоненту (T — toroidal, P — poloidal, sh — shell); $\mathbf{B}^{int} = -\nabla\Phi^i$ — внутреннее поле (int — internal), порождённое токами в области $r < a$; $\mathbf{B}^{ext} = -\nabla\Phi^{ext}$ — внешнее поле (ext — external), порождённое токами в области $r > c$; $\mathbf{B}_T^{sh} = [\nabla, \mathbf{r}\Psi_T^{sh}]$ — поле в области $a < r < c$, порождённое полоидальными токами; $\mathbf{B}_P^{sh} = [\nabla, [\nabla, \mathbf{r}\Psi_P^{sh}]]$ — поле в области $a < r < c$, порождённое тороидальными токами; $\mathbf{r} = r \mathbf{i}_r$ (\mathbf{i}_r — единичный вектор в сферической системе координат, см. рис. 1); функции Φ^{int} , Φ^{ext} , Ψ_T^{sh} , Ψ_P^{sh} — скалярные потенциалы. Для выделения “тонких структур” необходимо из поля \mathbf{B}^{int} выделить “высокочастотную” составляющую внутреннего магнитного поля Меркурия \mathbf{B}_{high}^{int} . Для этого необходимо параметризовать поле (8) через коэффициенты разложения по сферическим гармоникам потенциалов соответствующих полей в разложении Гаусса-Мия. Будем использовать the body-fixed, planetary-centered spherical coordinates (см. рис. 1) с $r \in [R_M, +\infty)$, $\varphi \in [0, 2\pi)$ и $\theta \in [0, \pi]$. Здесь R_M — средний радиус Меркурия. В этой системе координат скалярные потенциалы можно представить

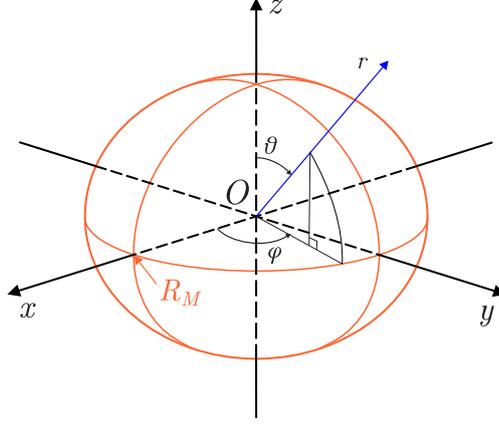


Рис. 1. Планетарная система координат, используемая при решении задачи.

следующим образом [7, 8]:

$$\Phi^{int}(r, \varphi, \theta) = R_M \sum_{l=1}^{\infty} \sum_{m=0}^l \left(\frac{R_M}{r} \right)^{l+1} [g_l^m \cos(m\varphi) + h_l^m \sin(m\varphi)] P_l^m(\cos(\theta)),$$

$$\Phi^{ext}(r, \varphi, \theta) = R_M \sum_{l=1}^{\infty} \sum_{m=0}^l \left(\frac{r}{R_M} \right)^l [q_l^m \cos(m\varphi) + s_l^m \sin(m\varphi)] P_l^m(\cos(\theta)),$$

$$\begin{aligned} \Psi_T^{sh}(r, \varphi, \theta) = & \left(\frac{R_M}{r} \right) \sum_{l=1}^{\infty} \sum_{m=0}^l [a_l^m \cos(m\varphi) + b_l^m \sin(m\varphi) + \\ & + \frac{r-b}{R_M} \bar{a}_l^m \cos(m\varphi) + \frac{r-b}{R_M} \bar{b}_l^m \sin(m\varphi)] P_l^m(\cos(\theta)), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \Psi_P^{sh}(r, \varphi, \theta) = & \left(\frac{R_M^2}{r} \right) \sum_{l=1}^{\infty} \sum_{m=0}^l [c_l^m \cos(m\varphi) + d_l^m \sin(m\varphi) + \\ & + \frac{r-b}{R_M} \bar{c}_l^m \cos(m\varphi) + \frac{r-b}{R_M} \bar{d}_l^m \sin(m\varphi)] P_l^m(\cos(\theta)). \end{aligned}$$

Здесь $b = \frac{a+c}{2}$, а $g_l^m, h_l^m, q_l^m, s_l^m, a_l^m, b_l^m, \bar{a}_l^m, \bar{b}_l^m$ — искомые коэффициенты, $P_l^m(\cos(\theta))$ — присоединенные полиномы Лежандра (с нормировкой по Шмидту) степени l и порядка m (the Schmidt-normalized associated Legendre polynomials).

Запишем уравнение (8) через потенциалы. Для этого сразу отметим, что в рассматриваемой задаче толщина шарового слоя $S(a, c) = \{r : a < r < c\}$ считается достаточно малой, чтобы можно было использовать приближение тонкой оболочки (the thin shell approximation), т.е. не учитывать \mathbf{B}_P^{sh} . Поэтому уравнение (8) примет вид:

$$\mathbf{B} = -\nabla\Phi^{int} - \nabla\Phi^{ext} + [\nabla, \mathbf{r}\Psi_T^{sh}]. \quad (9)$$

Затем из поля \mathbf{B}^{int} необходимо выделить “высокочастотную” составляющую \mathbf{B}_{high}^{int} , которая отвечает за магнитные массы в приповерхностном слое Меркурия и позволяет нам локализовать “тонкие структуры”.

Для получения “высокочастотную” составляющей из вектора \hat{g}_{int} необходимо взять компоненты разложения, начиная с шестого. Таким образом, мы “отбрасываем” дипольную часть внутреннего магнитного поля, которая может заглушить все прочие компоненты поля, и получаем возможность локализовать “тонкие структуры”. Поэтому коэффициенты Гаусса высокочастотной составляющей магнитного поля определяются следующим образом:

$$\hat{g}_{int}^{high} := [g_1^0 = 0 \ h_1^0 = 0 \ g_1^1 = 0 \ h_1^1 = 0 \ g_2^0 = 0 \ h_2^0 \ g_2^1 \ h_2^1 \ g_2^2 \ h_2^2 \ g_3^0 \ h_3^0 \ g_3^1 \ h_3^1 \ g_3^2 \ h_3^2 \ g_3^3 \ h_3^3]^T. \quad (10)$$

Эти коэффициенты используются для вычисления высокочастотной составляющей \mathbf{B}_{high}^{int} , компоненты которой определяются по следующим формулам:

$$\begin{aligned} B_r(r, \varphi, \theta) &= -R_M \sum_{l=1}^3 \sum_{m=0}^l \frac{\partial R_1^l(r)}{\partial r} K_l^m(\varphi; g_l^m, h_l^m) P_l^m(\cos(\theta)), \\ B_\varphi(r, \varphi, \theta) &= -\frac{R_M}{r \sin(\theta)} \sum_{l=1}^3 \sum_{m=0}^l R_1^l(r) \frac{\partial K_l^m(\varphi; g_l^m, h_l^m)}{\partial \varphi} P_l^m(\cos(\theta)), \\ B_\theta(r, \varphi, \theta) &= -\frac{R_M}{r} \sum_{l=1}^3 \sum_{m=0}^l R_1^l(r) K_l^m(\varphi; g_l^m, h_l^m) \frac{\partial P_l^m(\cos(\theta))}{\partial \theta}. \end{aligned} \quad (11)$$

Переход к декартовым координатам осуществляется стандартным преобразованием поворота. Полученное магнитное поле \mathbf{B}_{high}^{int} используется в решении обратной задачи для локализации “тонких структур” в следующем разделе.

Уравнение, описывающее индукцию магнитного поля \mathbf{B}_{high}^{int} , создаваемого объектом с распределением намагниченности $\mathbf{M}(\mathbf{r})$, и локализация в области V имеет вид:

$$\mathbf{B}_{high}^{int}(\mathbf{r}_s) = \frac{\mu_0}{4\pi} \iiint_V \left(\frac{3(\mathbf{M}(\mathbf{r}), \mathbf{r} - \mathbf{r}_s)(\mathbf{r} - \mathbf{r}_s)}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_s|^5} - \frac{\mathbf{M}(\mathbf{r})}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_s|^3} \right) dv, \quad (12)$$

где $|\mathbf{r} - \mathbf{r}_s| = \sqrt{(x - x_s)^2 + (y - y_s)^2 + (z - z_s)^2}$ — расстояние между точкой $\mathbf{r}_s = (x_s, y_s, z_s)$, в которой трехосный датчик s измеряет индукцию магнитного поля \mathbf{B}_{high}^{int} , и точкой $\mathbf{r} = (x, y, z)$ области V , где размещен магнитный источник с суммарным магнитным моментом на единицу объема $\mathbf{M}(\mathbf{r})$, μ_0 проницаемость в вакууме.

В результате, для восстановления вектор-функции $\mathbf{M}(\mathbf{r})$, определяющей приповерхностное магнитное изображение Меркурия, необходимо решить следующую обратную задачу.

Обратная задача состоит в определении плотности магнитного момента (намагниченности) $\mathbf{M}(\mathbf{r})$, $\mathbf{r} \in V$, по данным измерения индукции магнитного поля $\mathbf{B}_{high}^{int}(\mathbf{r}_s)$ в точках \mathbf{r}_s , $s = \overline{1, S}$. Таким образом, восстанавливается приповерхностное магнитное изображение Меркурия.

Найденная намагниченность $\mathbf{M}(\mathbf{r})$ позволит идентифицировать “тонкие структуры” Меркурия в виде локальных максимумов модуля намагниченности.

В **четвёртой главе** рассмотрены методы регуляризации решения поставленной некорректной задачи. В работе автором используется алгоритм, основанный на минимизации функционала Тихонова, для выбора параметра регуляризации применяется алгоритм конечномерного обобщенного принципа невязки. Также можно эффективно использовать априорные ограничения на неизвестное решение. В этом случае математическую постановку задачи можно сформулировать в следующем виде.

Пусть Z, U – гильбертовы пространства; D – такое замкнутое выпуклое множество априорных ограничений задачи ($D \subseteq Z$), что A, A_h – линейные операторы, действующие из Z в U , причем $\|A - A_h\| \leq h$, $h \geq 0$. Рассматриваемые в главах 2 и 3 обратные задачи восстановления параметров намагниченности и магнитной восприимчивости сводятся к уравнению

$$Az = u. \quad (13)$$

Построим его приближенное решение, принадлежащее множеству D , по заданному набору данных $\{A_h, u_\delta, \eta\}$, $\eta = (\delta, h)$, где $\delta > 0$ – погрешность задания правой части u_δ исходного уравнения, т.е. $\|u_\delta - \bar{u}\| \leq \delta$, $\bar{u} = A\bar{z}$. Здесь \bar{z} – точное решение задачи, $\bar{z} \in D$, соответствующее правой части \bar{u} . Введем сглаживающий функционал:

$$F^\alpha[z] = \|A_h z - u_\delta\|_U^2 + \alpha \|z\|_Z^2,$$

($\alpha > 0$ – параметр регуляризации) и рассмотрим экстремальную задачу $F^* = \min_{z \in D} F^\alpha[z]$.

Функционал $F^\alpha[z]$ является сильно выпуклым функционалом в гильбертовом пространстве. Для отыскания экстремали $z_\eta^{\alpha(\eta)} \in D$ при фиксированном $\alpha > 0$ достаточно применить, например, градиентные методы минимизации функционалов с ограничениями. Идея построения регуляризирующего алгоритма на основе экстремальной задачи для функционала $F^\alpha[z]$ заключается в построении такой функции $\alpha = \alpha(\eta)$, что $z_\eta^{\alpha(\eta)} \rightarrow \bar{z}$ при $\eta \rightarrow 0$, т.е. в согласовании параметра регуляризации α с погрешностью

задания входных данных η .

Для любого $\alpha > 0$ существует единственная экстремаль функционала Тихонова $z_\eta^{\alpha(\eta)}$, $\eta = \{\delta, h\}$, реализующая минимум $F^\alpha[z]$. Для выбора параметра регуляризации можно использовать алгоритм конечномерного обобщенного принципа невязки. При выборе параметра $\alpha = \alpha(\eta)$ по обобщенному принципу невязки

$$\rho(\alpha) \equiv \|\mathbf{A}_h z_\eta^{\alpha(\eta)} - u_\delta\|_U^2 - \left(\delta + h \|z_\eta^{\alpha(\eta)}\|_Z\right)^2 = 0 \quad (14)$$

$z_\eta^{\alpha(\eta)}$ стремится при $\eta \rightarrow 0$ к точному решению задачи в норме пространства Z [9].

Описанный выше алгоритм представляет собой вариационный регуляризирующий алгоритм и применялся для решения всех описанных в работе задач. Для решения задачи восстановления магнитной восприимчивости также применялись итерационные алгоритмы регуляризации: алгоритм с фейеровским оператором шага и итерационный алгоритм, сохраняющий неотрицательность решения.

Итерационный алгоритм с фейеровским шагом основан следующей теореме [10].

Теорема 1. Пусть выполнены условия аппроксимации $\|A - A_h\| < h$, $\|u - u_\delta\| < \delta$, и в итерационном процессе

$$z^{k+1} = P_Q[(A_h^T A_h + \alpha I)^{-1}(\alpha z^k + A_h^T u_\delta)], \quad (15)$$

где P_Q - метрическая проекция на ограниченно компактное замкнутое подмножество Q пространства \mathbb{R}^n . Тогда при выборе числа итераций в соответствии с правилом

$$k(\delta, h) : k(\delta, h)(\delta + h) \rightarrow 0, \quad \delta, h \rightarrow 0,$$

имеет место сходимость

$$\lim_{\delta, h \rightarrow 0} \|z^{k(\delta, h)} - \bar{z}\| = 0,$$

где $\bar{z} \in Q$, т.е \bar{z} - решение задачи (13).

Итерационный алгоритм, сохраняющий неотрицательность решения, основан на следующей теореме [11].

Теорема 2. Для компактных и инъективных оператора прямой задачи A , A_h и для μI с некоторой константой $\mu > 0$, пусть $\{z_{\delta, h}^k\} \subset L_2^+(P)$ — последовательность, порождённая процессом

$$z_\delta^{(k+1)} = |(\mu I + A^* A)^{-1}[(\mu I - A^* A)|x_\delta^{(k)}| + 2A^* u_\delta]|, \quad (16)$$

где операция $|\cdot|$ – модуль функции.

Если номер последней итерации $k^* = k^*(h, \delta)$ выбран так что

$$k^* \rightarrow \infty, \quad k^*(h, \delta)(h + \delta) \rightarrow 0 \quad h, \delta \rightarrow 0,$$

тогда приближённое решение $z_{\delta, h}^{k^*}$ сходится решению задачи \bar{z} в норме $L_2(P)$ при $h, \delta \rightarrow 0$.

Рассмотрим **конечно-разностные** аппроксимации решаемых уравнений (6) и (7). Если предположить, что $V \subset P = \{(x, y, z) : L_x \leq x \leq R_x, L_y \leq y \leq R_y, L_z \leq z \leq R_z\}$ и система сенсорных плоскостей ограничена прямоугольным параллелепипедом $O = \{(x_s, y_s, z_s) \equiv (s, t, r) : L_s \leq s \leq R_s, L_t \leq t \leq R_t, L_r \leq r \leq R_r\}$, мы можем переписать уравнение (7) в следующем операторном виде

$$\mathbf{A}\chi \equiv \int_{L_x}^{R_x} \int_{L_y}^{R_y} \int_{L_z}^{R_z} \mathbf{K}(s, t, r, x, y, z) \chi(x, y, z) dx dy dz = \mathbf{B}(s, t, r), \quad (17)$$

где $\mathbf{B} = [B_{xx} \ B_{xy} \ B_{xz} \ B_{yz} \ B_{zz}]^T$ и $\mathbf{K} = \mathbf{K}_{MGT}$ [A1].

При решении задачи восстановления магнитной восприимчивости с помощью вариационного регуляризирующего алгоритма предполагается, что $\chi \in D = \{\chi : \chi \in W_2^2(P), \chi \geq 0\}$, $\mathbf{B} \in L_2(O)$, а оператор \mathbf{A} с ядром \mathbf{K} непрерывен и однозначен. Норма правой части уравнения (17) вводится следующим образом:

$$\|\mathbf{B}\|_{L_2} = \sqrt{\|B_{xx}\|_{L_2}^2 + \|B_{xy}\|_{L_2}^2 + \|B_{xz}\|_{L_2}^2 + \|B_{yz}\|_{L_2}^2 + \|B_{zz}\|_{L_2}^2}.$$

Пусть вместо точно известных $\bar{\mathbf{B}}$ и оператора \mathbf{A} известны их приближенные значения \mathbf{B}_δ и \mathbf{A}_h , такие, что $\|\mathbf{B}_\delta - \bar{\mathbf{B}}\|_{L_2} \leq \delta$, $\|\mathbf{A} - \mathbf{A}_h\|_{W_2^2 \rightarrow L_2} \leq h$.

При решении задачи с помощью итерационных алгоритмов предполагается, что $\chi \in D = L_2^+(P) = \{\chi : \chi \in L_2(P), \chi \geq 0\}$, на оператор \mathbf{A} будет теперь наложено условие $\|\mathbf{A} - \mathbf{A}_h\|_{L_2^+ \rightarrow L_2} \leq h$. Другие условия остаются без изменения.

Также при решении задачи предполагалось, что $\chi \in D = \{\chi : \chi \in V_H(P), \chi \geq 0\}$, где $V_H(P)$ – банахово пространство функций ограниченной вариации типа Харди $VH(\chi, P)$ в области P [12, 13]. На оператор \mathbf{A} будет теперь наложено условие $\|\mathbf{A} - \mathbf{A}_h\|_{V_H(P) \rightarrow L_2} \leq h$. Преимущество рассмотрения данного пространства в том, что такие функции могут быть разрывными или же иметь изломы, в то время как при решении задачи в пространстве Соболева решение может слишком сильно сгладиться. Сходимость в данном пространстве даёт нам кусочно-равномерную сходимость.

Замечание. Отметим, постановка задачи (17) является физически пе-

реопределённой. В этой постановке необходимо найти 1 скалярную функцию по результатам экспериментальных измерений 8-ми других скалярных функций. В работе автора [A1] было показано, что для решения этой задачи достаточно знания градиентов компонент магнитного поля (ГКМП) без значений самого магнитного поля, поэтому потребуется найти 1 скалярную функцию по результатам экспериментальных измерений только 5-ти скалярных функций.

Запишем конечно-разностную аппроксимацию уравнения (17). Введём сетки $X_{N_x} = \{x_n, 1 \leq n \leq N_x : x_n = L_x + \frac{h_x}{2} + h_x(n-1), h_x = \frac{R_x - L_x}{N_x}\}$, $Y_{N_y} = \{y_m, 1 \leq m \leq N_y : y_m = L_y + \frac{h_y}{2} + h_y(m-1), h_y = \frac{R_y - L_y}{N_y}\}$, $Z_{N_z} = \{z_k, 1 \leq k \leq N_z : z_k = L_z + \frac{h_z}{2} + h_z(k-1), h_z = \frac{R_z - L_z}{N_z}\}$ для области интегрирования P и $S_{N_s} = \{s_i, 1 \leq i \leq N_s : s_i = L_s + \frac{h_s}{2} + h_s(i-1), h_s = \frac{R_s - L_s}{N_s}\}$, $T_{N_t} = \{t_j, 1 \leq j \leq N_t : t_j = L_t + \frac{h_t}{2} + h_t(j-1), h_t = \frac{R_t - L_t}{N_t}\}$, $R_{N_r} = \{r_l, 1 \leq l \leq N_r : r_l = L_r + \frac{h_r}{2} + h_r(l-1), h_r = \frac{R_r - L_r}{N_r}\}$ для системы сенсорных плоскостей O . В результате, аппроксимируя интегралы в (17) по формуле средних, получим [A1]

$$\mathbf{B}(s_i, t_j, r_l) = \sum_{n=1}^{N_x} \sum_{m=1}^{N_y} \sum_{k=1}^{N_z} \mathbf{K}(s_i, t_j, r_l, x_n, y_m, z_k) \chi(x_n, y_m, z_k) h_x h_y h_z.$$

В задаче восстановления параметров намагниченности в коре планет, исходя из предположения, что область V является приповерхностным шаровым слоем планеты глубины h , уравнение (6), с учётом перехода к сферической системе координат может быть переписано в виде [A2]:

$$\begin{aligned} \mathbf{B}(x_s, y_s, z_s) = & \frac{\mu_0}{4\pi} \int_{R-h}^R \int_0^{2\pi} \int_0^\pi \mathbf{K}(x_s, y_s, z_s, \rho \cos \varphi \sin \theta, \rho \sin \varphi \sin \theta, \rho \cos \theta) \cdot \\ & \cdot \mathbf{M}(\rho \cos \varphi \sin \theta, \rho \sin \varphi \sin \theta, \rho \cos \theta) \cdot \rho^2 \sin \theta \cdot d\rho d\varphi d\theta. \end{aligned} \quad (18)$$

Замечание. Здесь $\mathbf{B} \equiv \mathbf{B}_{field}$ и $\mathbf{K} \equiv \mathbf{K}_{MI}$. Введение дополнительных обозначений связано с тем, что матрица \mathbf{K} (и соответственно вектор-функция \mathbf{B}) может быть расширена при учёте дополнительной физической информации в постановке задачи.

При обработке экспериментальных данных вместо точно известных вектора \mathbf{B} и матрицы A обычно известны их приближенные значения B_δ и A_h , такие, что $\|B_\delta - \mathbf{B}\|_U \leq \delta$, $\|A - A_h\|_{Z \rightarrow U} \leq h$. Это связано как с ошибками измерений индукции магнитного поля (они вносят ошибку в значения компонент вектора \mathbf{B}), так и с ошибками в точности определения позиционирования спутника относительно Марса (они вносят искажения элемен-

тов матрицы A). При выписанных условиях задача является некорректной, для ее решения необходимо построить регуляризующий алгоритм. При решении можно воспользоваться алгоритмом, основанным на минимизации функционала А. Н. Тихонова.

Замечание. Отметим, постановка задачи (18) является физически определённой. В (18) необходимо восстановить одну векторную функцию по результатам измерений также одной векторной функции. Принимая во внимание тот факт, что каждая компонента векторной функции является скалярной функцией, требуется восстановить три скалярные функции по результатам измерения трёх скалярных функций. Такая постановка приводит к системе из трёх скалярных уравнений с тремя неизвестными функциями.

Введём сетки $\Phi_{N_\varphi} = \{\varphi_n, 1 \leq n \leq N_\varphi : \varphi_n = \frac{h_\varphi}{2} + h_\varphi(n-1), h_\varphi = \frac{2\pi}{N_\varphi}\}$ и $\Theta_{N_\theta} = \{\theta_m, 1 \leq m \leq N_\theta : \theta_m = \frac{h_\theta}{2} + h_\theta(m-1), h_\theta = \frac{\pi}{N_\theta}\}$. Также, для простоты, будем исходить из предположения, что шаровой слой достаточно тонкий. Как следствие, по переменной ρ введём сетку только с одним узлом $\rho_h = R - \frac{h}{2}$. В результате, аппроксимируя интегралы в (18) по формуле средних, получим [A2]:

$$\begin{aligned} \mathbf{B}(x_s, y_s, z_s) = & \frac{\mu_0}{4\pi} \sum_{n=1}^{N_\varphi} \sum_{m=1}^{N_\theta} \mathbf{K}(x_s, y_s, z_s, \rho_h \cos \varphi_n \sin \theta_m, \rho_h \sin \varphi_n \sin \theta_m, \rho_h \cos \theta_m) \cdot \\ & \cdot \mathbf{M}(\rho_h \cos \varphi_n \sin \theta_m, \rho_h \sin \varphi_n \sin \theta_m, \rho_h \cos \theta_m) \cdot \rho_h^2 \sin \theta_m \cdot h h_\varphi h_\theta. \end{aligned}$$

Учтём, что 1) измерения сделаны для всех $s = \overline{1, S}$, 2) \mathbf{B} и \mathbf{M} являются векторными функциями (в частности $\mathbf{M} = M_x \mathbf{i} + M_y \mathbf{j} + M_z \mathbf{k}$). Таким образом, мы получаем систему с $3 \times S$ уравнениями (которые соответствуют измерению трёх компонент вектор-функции \mathbf{B} в S точках) с $3 \times N_\varphi \times N_\theta$ неизвестными (которые соответствуют сеточным значениям трёх компонент вектор-функции \mathbf{M} на введённой сетке $\Phi_{N_\varphi} \times \Theta_{N_\theta}$).

В **пятой главе** приведены результаты численного моделирования. На рисунке 2 представлен один из результатов восстановления магнитной восприимчивости методом проекции сопряжённых градиентов на множество векторов с неотрицательными компонентами [A1].

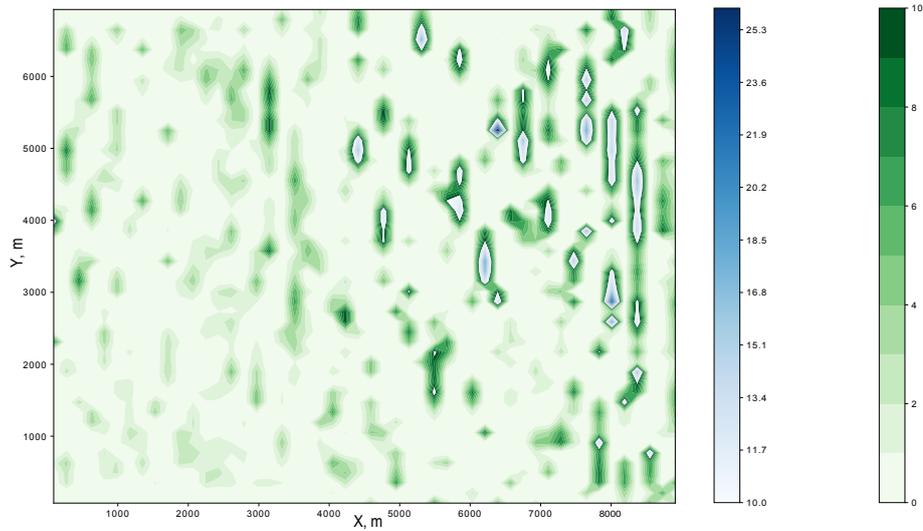


Рис. 2. Результаты вычислений методом проекции сопряжённых градиентов: восстановленное решение $\chi(x, y) * 10^6$ при использовании MGT-модели на глубине 200 м.

Параметров намагниченности были восстановлены в приповерхностном слое (коре) Марса и Меркурия. Результаты для Марса [A2] представлены на рисунке 3 и на рисунке 4 для Меркурия [A3].

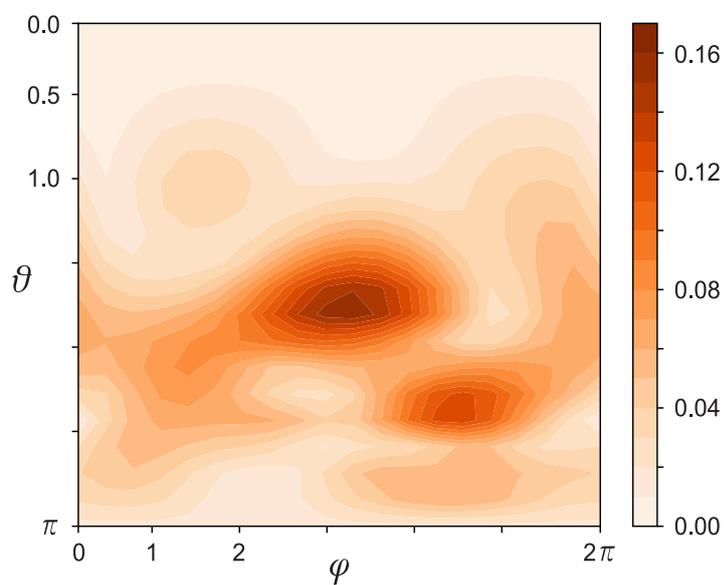


Рис. 3. Значения модуля намагниченности M для коры Марса. Значения нормализованны.

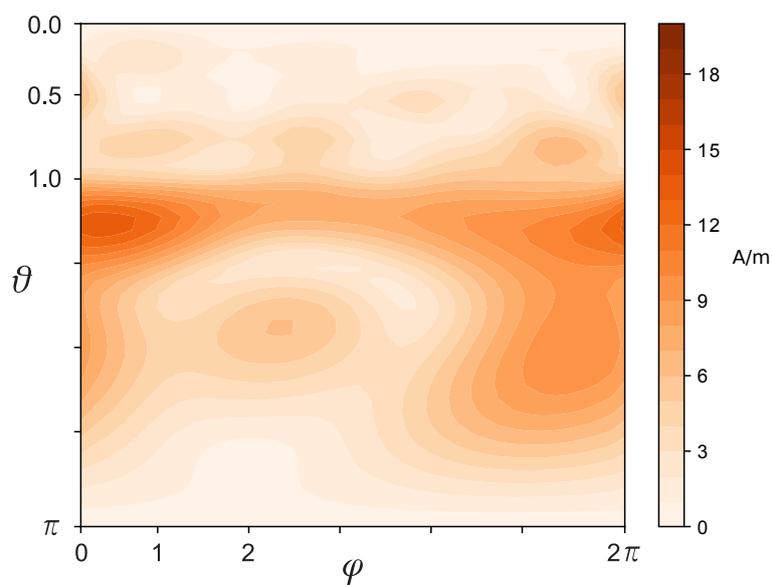


Рис. 4. Значение модуля намагниченности M для коры Меркурия.

Результаты локализации “тонких структур” представлены на рисунке

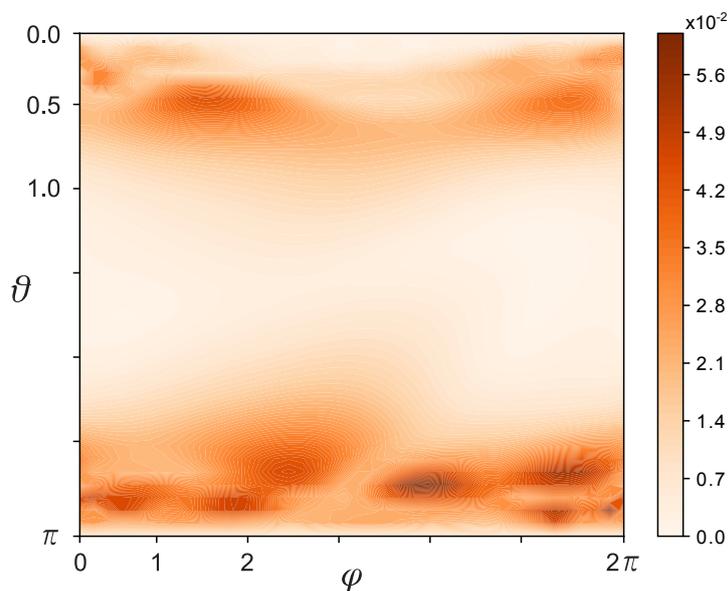


Рис. 5. Результаты локализации “тонких структур”. Значение модуля намагниченности M для коры Меркурия.

В **шестой главе** кратко описан реализованный автором программный комплекс.

Заключение содержит список основных результатов, полученных в работе:

1. С помощью измеренных градиентов компонент магнитного поля решена задача восстановления магнитной восприимчивости в локализованной области земной коры.
2. Определены эквивалентные распределения параметров намагниченности в коре Марса и Меркурия.
3. С помощью разложения Гаусса-Ми проведена локализация “тонких структур” в коре Меркурии.
4. Предложен и реализован в виде комплекса программ алгоритм решения прикладных трёхмерных обратных задач, сводящихся к интегральным уравнениям Фредгольма 1-го рода для векторной функции, с использованием многопроцессорных систем.
5. Автором сформулирована и доказана теорема единственности решения задачи восстановления распределения интенсивностей магнитных диполей для случая двух диполей и произвольного распределения сенсоров в пространстве.

Список литературы

- [1] *Lukyanenko D.V., Yagola A.G., Evdokimova N.A.* Application of inversion methods in solving ill-posed problems for magnetic parameter identification of steel hull vessel // *Journal of Inverse and Ill-Posed Problems*. — 2011. — Vol. 18, no. 9. — Pp. 1013–1029.
- [2] *Lukyanenko D.V., Yagola A.G.* Some methods for solving of 3D inverse problem of magnetometry // *Eurasian Journal of Mathematical and Computer Applications*. — 2016. — Vol. 4, no. 3. — Pp. 4–14.
- [3] *Wang Y., Lukyanenko D., Yagola A.* Magnetic parameters inversion method with full tensor gradient data // *Inverse Problems & Imaging*. — 2019. — Vol. 13, no. 4. — Pp. 745–754.
- [4] Magnetic susceptibility inversion method with full tensor gradient data using low temperature SQUIDS / Y.F. Wang, L.L. Rong, L.Q. Qiu et al. // *Petroleum Science*. — 2019. — Vol. 16, no. 4. — Pp. 794–807.
- [5] General Tikhonov regularization with applications in geoscience / Y. Wang, A.S. Leonov, D.V. Lukyanenko, A.G. Yagola // *CSIAM Transaction on Applied Mathematics*. — 2020. — Vol. 1, no. 1. — Pp. 53–85.
- [6] *Zhdanov M.S.* Integral transforms in geophysics. — Springer Science & Business Media, 2012.
- [7] The Mie representation for Mercury’s magnetic field / S. Toepfer, Y. Narita, K-H. Glassmeier et al. // *Earth Planets and Space*. — 2021. — Vol. 73, no. 1.
- [8] Reconstruction of Mercury’s internal magnetic field beyond the octupole / S. Toepfer, I. Oertel, V. Schiron et al. // *Annales Geophysicae*. — 2022. — Vol. 40. — Pp. 91–105.
- [9] Численные методы решения некорректных задач / А.Н. Тихонов, А.В. Гончарский, В.В. Степанов, А.Г. Ягола. — Наука Москва, 1990.
- [10] *В.В. Васин.* Основы теории некорректных задач. — Новосибирск: Издательство Сибирского отделения Российской академии наук, 2020.
- [11] *Zhang Y., Hofmann B.* Two new non-negativity preserving iterative regularization methods for ill-posed inverse problems // *Inverse Problems and Imaging*. — 2021. — Vol. 15, no. 2. — Pp. 229–256.
- [12] *Леонов А.С.* Решение некорректно поставленных обратных задач. Очерк теории, практические алгоритмы и демонстрации в МАТЛАБ. — Москва: Книжный дом ЛИБРОКОМ, 2015.

- [13] *Leonov A.S.* Application of functions of several variables with limited variations for piecewise uniform regularization of ill-posed problems // *Inverse Ill-Posed Problems*. — 1998. — Vol. 6, no. 1. — Pp. 67–93.

Публикации автора по теме диссертации в рецензируемых научных журналах индексируемых в базах Web of Science и Scopus

- [A1] Восстановление магнитной восприимчивости с использованием полных магнито-градиентных данных / Я. Ван, И.И. Колотов, Д.В. Лукьяненко, А.Г. Ягола // *Журнал вычислительной математики и математической физики*. — 2020. — Т. 60, № 6. — С. 1027–1034 (Импакт-фактор РИНЦ: 1.095). — (Translated version) Reconstruction of magnetic susceptibility using full magnetic gradient data / Y. Wang, I.I. Kolotov, D.V. Lukyanenko, A.G. Yagola // *Computational Mathematics and Mathematical Physics*. — 2020. — Vol. 60, no. 6. — Pp. 1000–1007 (SJR: 0.503).
- [A2] Recovering the magnetic image of Mars from satellite observations / I.I. Kolotov, D.V. Lukyanenko, I.E. Stepanova et al. // *Journal of Imaging*. — 2021. — Vol. 7, no. 11. — P. 234 (SJR: 0.728).
- [A3] Recovering the magnetic properties of Mercury from satellite observations / I.I. Kolotov, D.V. Lukyanenko, I.E. Stepanova et al. // *Eurasian Journal of Mathematical and Computer Applications*. — 2022. — Vol. 10, no. 2. — Pp. 26–41 (SJR: 0.315).

Публикации автора по теме диссертации в материалах конференций

- [C1] Трехмерные обратные задачи восстановления магнитной восприимчивости по экспериментальным данным / И.И. Колотов, Д.В. Лукьяненко, Я. Ван, А. Г. Ягола // *Современные проблемы математики и физики. Материалы Международной научной конференции (г. Стерлитамак, 12-15 сентября 2021 г.)*. — РИЦ БашГУ Уфа, 2021. — С. 281–281.
- [C2] Восстановление магнитных полей планет по спутниковым данным / И.И. Колотов, Д.В. Лукьяненко, И.Э. Степанова и др. // *Сборник тезисов Евразийской конференции по прикладной математике. Новосибирск, Академгородок, 16-22 декабря 2021 года*. — Математический центр в Академгородке, опубликовано онлайн,

<http://conf.nsc.ru/files/conferences/ecam2021/678646/document.pdf>
Новосибирск, Академгородок, 2021. — С. 88–88.

- [С3] 3D inverse problems of magnetic susceptibility restoration from experimental data / I.I. Kolotov, D.V. Lukyanenko, Y. Wang, A.G. Yagola // Марчуковские научные чтения-2021: Тезисы Междунар. конф., 4–8 октября 2021 г. / Ин-т вычислит. математики и матем. геофизики СО РАН. — Новосибирск: Новосибирск, 2021. — Рр. 136–136.
- [С4] Methods of recovering of the magnetic fields using experimental data / Y. Wang, I.I. Kolotov, D.V. Lukyanenko et al. // Марчуковские научные чтения-2022 : Тезисы Междунар. конф., 3–7 октября 2021 г. — Ин-т вычислит. математики и матем. геофизики СО РАН Академгородок, Новосибирск, Россия, 2022. — Рр. 10–10.