

ОТЗЫВ официального оппонента  
на диссертацию на соискание ученой степени  
кандидата физико-математических наук Черных Георгия Сергеевича  
на тему: «Операции и умножения, связанные с  $SU$ - и  $c_1$ -сферическими бордизмами»  
по специальности 1.1.3. Геометрия и топология

Диссертация Черных Георгия Сергеевича относится к важному разделу топологии — к теории кобордизмов. Понятие кобордизма, связанные с ним понятия и концепции занимают в современной математике одно из центральных положений, более того, в относительно последнее время концепция кобордизма оказалась успешной и в квантовой теории поля. Идея изучать циклы, реализованные отображением многообразий в рассматриваемое пространство, с точностью до бордантности, восходит к Пуанкаре. Первые применения принадлежат Понтрягину (оснащенные многообразия и их связь с гомотопическими группами), а сведение вычисления кольца кобордизмов к задаче вычисления гомотопических групп некоторых пространств — Тому. Довольно быстро стало ясно, что полезно снабжать многообразия, реализующие циклы, дополнительными структурами и учитывать их в определении бордантности циклов. Так, например, требование существования комплексной структуры в стабильном касательном расслоении приводит в теории  $U$ -(ко)бордизмов. Оказалось, что с точки зрения базовых свойств группы (ко)бордизмов представляют собой экстраординарные теории (ко)гомологий с нетривиальными коэффициентами — (ко)бордизмами одноточечного пространства. Важным достижением было вычисление колец коэффициентов. Оказалось, что для некоторых структур эти кольца устроены достаточно просто, хотя их вычисление — весьма сложная задача (неориентированные бордизмы — Том, комплексные — Милнор-Новиков, спинорные — Андерсон—Браун—Петерсон). Но с другой стороны, уже для  $SU$ -бордизмов кольцо когомологий не допускает простого алгебраического описания. Вычислительные средства, которые используются в данном случае разнообразны. Самое первое вычисление — вычисление кольца неориентированных кобордизмов — было проделано Томом, но после обнаружилось, что с помощью спектральной последовательности Адамса его результат можно получить относительно просто. Такого сорта вычисления требуют знания действия операций Стиррода в (обычных) когомологиях соответствующих пространств Тома. Усовершенствование метода Адамса привело Новикова к построению спектральной последовательности, которая сейчас называется

спектральной последовательностью Адамса—Новикова и фактически является основным инструментом в такого сорта вычислениях. В частности, ему понадобилось детально исследовать структуру алгебры стабильных операций к комплексным кобордизмам, что привело к выделению в ней некоторой подалгебры, которая сейчас известна как алгебра Ландвебера—Новикова.

Далее, довольно быстро была обнаружена своего рода универсальность комплексных кобордизмов среди теорий когомологий с комплексной ориентацией, что теснейшим образом связано с понятием формальной группы.

Наконец, отметим следующий факт — образующие колец коэффициентов теорий кобордизмов часто описываются в терминах характеристических чисел; вместе с тем, бывает полезно знать конкретные многообразия, имеющие нужные характеристические числа. Для основных теорий кобордизмов такие представители были найдены. Вместе с тем, в ряде современных исследований оказываются полезны многообразия с дополнительными структурами, такие как, например, действие тора. Для комплексных бордизмов такие представители с действием тора были найдены в работах научного руководителя диссертанта и некоторых его учеников. В контексте  $SU$ -бордизмов полезно было бы знать, какие образующие можно реализовать кэлеровыми  $SU$ -многообразиями или, несколько другой вопрос, — квазиторическими многообразиями. Итак, представленная Г.С.Черных диссертация относится к важному разделу геометрии и топологии и посвящена актуальному направлению исследований.

Диссертация содержит 93 страницы и состоит из введения и 5 глав. Список литературы содержит 54 работы, из которых три принадлежат Черных Г.С. — в одной работе он единственный автор, две другие написаны в соавторстве (в диссертации есть указание о личном вкладе Черных Г.С. в эти работы).

Обратимся к основному содержанию диссертации.

Во введении обоснована актуальность темы диссертации, рассмотрена история вопроса, приведены основные работы по теме, сформулированы цели и задачи диссертационного исследования, приведены основные положения, выносимые на защиту, рассмотрена структура диссертации, а также подробно изложено содержание работы, обоснована научная новизна и приведены сведения об апробации диссертации.

В первой главе приводятся основные понятия и конструкции, используемые в диссертации: стабильная гомотопическая категория и операции над спектрами, алгебры когомологических операций, ориентация векторного расслоения относительно теории

когомологий, формальная группа,  $U$ - и  $SU$ -бордизмы, операции в комплексных кобордизмах и спектральная последовательность Адамса—Новикова.

Во второй главе дается полное описание  $SU$ -линейных операций в комплексных кобордизмах. Основным результатом здесь является теорема 2.3.4, описывающая три базиса в  $SU$ -линейных операциях.

Третья глава содержит детально вычисление спектральной последовательности Адамса—Новикова для спектра  $MSU$  и детальное описание действия алгебры операций на модуле  $U$ -кобордизмов спектра Тома  $SU$ -бордизмов.

Четвертая глава содержит наиболее важные результаты работы: описаны всевозможные  $SU$ -билинейные умножения на  $W$ -теории, описаны  $SU$ -линейные проекторы из  $U$ -теории в  $W$ -теорию, выделены проекторы, удовлетворяющие условию коммутирования с некоторыми операциями. В частности, в теореме 4.5.6. для произвольного  $SU$ -билинейного умножения на  $W$ -теории описана кольцевая структура на ее коэффициентах. Получено наиболее общее выражения для проектора, частным случаем которого являются проекторы Стонга и Коннера—Флойда.

В пятой главе обсуждаются комплексные ориентации  $W$ -теории и вычисляется соответствующая формальная группа. Доказывается точность по Ландвеберу  $W$ -теории для произвольного  $SU$ -билинейного умножения. Для выбранного  $SU$ -билинейного умножения и произвольной комплексной ориентации на  $W$  вычислены коэффициенты соответствующей формальной группы по модулю разложимых элементов. Получены результаты о порождаемости кольца коэффициентов коэффициентами формальной группы.

Автореферат соответствует содержанию диссертации, точно отражая все основные положения и полученные результаты.

Результаты диссертационной работы, выносимые на защиту, получены автором лично, являются новыми, строго доказаны и опубликованы со всеми нужными подробностями в ведущих рецензируемых научных журналах, удовлетворяющих положению о присуждении учёных степеней в МГУ.

В качестве замечаний отметим следующее:

1) Хотелось бы более полно осветить связь полученных автором результатов с характеристическими классами в  $KO$ -теории, которые, как следует из работ Андерсона, Брауна, Петерсона, Коннера и Флойда, имеют тесную связь с  $SU$ -бордизмами.

2) Хотелось бы более подробного описания, что известно о связи  $SU$ -бордизмов с многообразиями Калаби-Яу. Что могло бы быть аналогом этой связи для  $W$ -теории?

3) В тексте диссертации имеется незначительное количество опечаток.

Вместе с тем, указанные замечания не умаляют значимости диссертационного исследования. Диссертация отвечает требованиям, установленным Московским государственным университетом имени М.В.Ломоносова к работам подобного рода. Содержание диссертации соответствует специальности 1.1.3. «Геометрия и топология» (по физико-математическим наукам), а также критериям, определенным пп. 2.1-2.5 Положения о присуждении ученых степеней в Московском государственном университете имени М.В.Ломоносова, а также оформлена согласно требованиям Положения о совете по защите диссертаций на соискание ученой степени кандидата наук, на соискание ученой степени доктора наук Московского государственного университета имени М.В.Ломоносова. Таким образом, соискатель Черных Георгий Сергеевич заслуживает присуждения ученой степени кандидата физико-математических наук по специальности 1.1.3. «Геометрия и топология».

Официальный оппонент:

кандидат физико-математических наук,

доцент кафедры дифференциальной геометрии и приложений

механико-математического факультета МГУ им. М.В.Ломоносова

Контактные данные:

тел.: 7(495)939-39-40, e-mail: popelens@mech.math.msu.su

Специальность, по которой официальным оппонентом

защищена диссертация: 01.01.04 «Геометрия и топология»

Адрес места работы:

119991, г. Москва, Ленинские горы, д.1, МГУ им. М.В.Ломоносова,

механико-математический факультет

Ф.Ю.Попеленский

Подпись Ф.Ю.Попеленского удостоверяю: