ОТЗЫВ официального оппонента на диссертацию на соискание ученой степени кандидата физико-математических наук Промыслова Валентина Валерьевича на тему: «Графы и алгебраические конструкции» по специальности 1.1.5 «Математическая логика, алгебра, теория чисел и дискретная математика»

Диссертация посвящена изучению автоморфизмов и свойств тотального и регулярного графов матричной алгебры и многочленов – актуальному направлению современной алгебры. Два последних десятилетия появилось множество работ, посвященных применению теории графов в алгебре. Вводились новые понятия, такие, как тотальный граф, регулярный граф, граф делителей нуля, граф коммутативности и т.д. И это понятно, поскольку язык теории графов универсален и позволяет на многие задачи и методы теории колец взглянуть под другим углом. В настоящей работе исследуются свойства автоморфизмов тотального и регулярного графов матричных колец и многочленов. *Тотальным графом* кольца матриц называется граф, вершинами которого являются все матрицы, а ребром две матрицы соединяются тогда и только тогда, когда сумма этих матриц является вырожденной матрицей. *Регулярный граф* строится аналогично, только его вершинами считаются все невырожденные матрицы матричного кольца. Понятие тотального и регулярного графов было введено сначала для коммутативного кольца с единицей (Андерсон, Бадави, 2008), а позже – для некоммутативного случая (Акбари, 2014). В 2009 году было доказано, что кликовое число регулярного графа над полем нечетное характеристики является конечным (Акбари и др., 2009), в то время как бесконечность кликового числа тотального графа очевидна, а бесконечность кликового числа регулярного графа над полем характеристики два легко доказывается (см. стр. 30). Также было доказано, что хроматическое число регулярного графа может быть бесконечным (Томон, 2015). В настоящем диссертационном исследовании изучаются автоморфизмы тотального и регулярного графов матричного кольца. Фактически, автоморфизм тотального графа – это биекция T множества матриц на себя, для которого условие $|A+B|=0$ равносильно условию $|T(A)+T(B)|=0$ для любых различных матриц A, B размера $n\times n$. Другими словами, речь идет об отображении матричной алгебры, сохраняющей конкретное соотношение для определителей. Интерес к исследованию отображений матриц, которые сохраняют различные соотношения, восходит к известному результату Фробениуса (1987): *если T– линейное биективное отображение множества $M_n(C)$ на себя, сохраняющее определитель, то $T(A)=PAQ$ для всех матриц A из $M_n(C)$ или $T(A)=PA^tQ$ для всех матриц A из $M_n(C)$, где P, Q – невырожденные матрицы, такие что $|PQ|=1$.* Позже был получен еще ряд результатов, касающихся отображений, сохраняющих различные соотношения (Дьедонне, 1949; Долинар, Шемрл, 2002; Тан, Ванг, 2003; Костара, 2019-2020).

Диссертация состоит из введения, пяти глав и списка литературы. Надо отметить, что актуальность и история вопроса В.В. Промысловым хорошо раскрыты в первой главе. Первая глава носит реферативный характер, автор приводит результаты, ранее полученные другими математиками и касающиеся свойств тотального и регулярного графов матричной алгебры, а также отображений матричной алгебры, сохраняющих некоторые соотношения, связанные с определителем.

Во второй главе получен результат, который продолжает серию результатов, посвященных исследованию отображений матричной алгебры, сохраняющих некоторые соотношения на определитель. А именно, удалось усилить один из результатов Костары (теорема 1.2.11, 2020), ослабив условия на сами отображения. Центральным результатом второй главы является следующая теорема: *Пусть F – алгебраически замкнутое поле, Y – множество квадратных матриц порядка n, содержащее множество GL_n, а T_1, T_2 – это отображения множества Y в M_n, удовлетворяющие* *одностороннему пучковому условию для вырожденности Y, а также существует невырожденная матрица D, такая, что $T_2(D)$ тоже невырожденная. Тогда ограничения отображений T_1 и T_2 на подмножество Y-{0} равны и отображения T_1, T_2 имеют стандартный вид на множестве Y-{0}* (теорема 2.1.4). Доказательство этой теоремы опирается на ряд вспомогательных утверждений (предложение 2.2.4, леммы 2.2.9 и 2.4.1 и т.д.), а также на результат, полученный ранее А.М. Максаевым (теорема 2.3.1). Схему доказательства данной вспомогательной теоремы В.В. Промыслов также излагает во второй главе.

В третьей главе исследуются автоморфизмы тотального графа матричной алгебры. В.В. Промыслову удалось определить вид таких отображений для квадратных матриц над полем F, в котором есть хотя бы три элемента. Основным результатом данной главы является теорема 3.1.10: *Пусть φ_1, φ_2 – сюръективные отображения M_n на себя, причем $|A+B|=0$ тогда и только тогда, когда $|\varphi_1(A)+\varphi_2(B)|=0$ для всех матриц A, B из M_n. Тогда существуют матрица R и невырожденные матрицы P, Q, такие, что $\varphi_1(A)=PA^{\tau}Q+R$, $\varphi_2(A)=PA^{\tau}Q-R$ или $\varphi_1(A)=P(A^{\tau})^{t}Q+R$, $\varphi_2(A)= P(A^{\tau})^{t}Q-R$ для любой матрицы A (τ – некоторый автоморфизм поля F)*. Ранее аналогичный результат для матриц размера *2x2* над конечным полем показали Джоу, Вонг и Ма (2017).

В четвертой главе В.В. Промыслов изучает свойства тотального и регулярного графов многочлена. Понятия тотального и регулярного графа матричной алгебры являются частным случаем соответствующих графов многочленов. В частности, в главе 4 доказана связность регулярного графа многочлена над полем нечетной характеристики (предложение 4.1.1), а также доказан важный критерий связности тотального и регулярного графов однородного многочлена (теорема 4.1.7). Параграф 4.2 посвящен вопросу конечности кликового числа тотального графа многочлена от двух переменных (теорема 4.2.9). В параграфе 4.3 рассматриваются регулярные графы кривых второго порядка, а именно установлена связь хроматического числа регулярного графа кольца матриц и хроматического числа регулярных графов кривых второго порядка (утверждения 4.3.2, 4.3.7 и 4.3.12).

В заключительной главе 5 полностью классифицированы с точностью до изоморфизма тотальный и регулярный графы трехточечного множества (случай трехточечного множества является минимальным нетривиальным случаем). Центральным результатом пятой главы является теорема 5.1.9, в которой приведена полная классификация тотальных и регулярных графов трехточечного множества. Стоит отметить, что доказательство этой теоремы опирается на ряд нетривиальных вспомогательных утверждений (леммы 5.1.1, 5.1.2, 5.1.3, 5.1.7, 5.1.8 и т.д.), доказанных В.В. Промысловым в этой главе.

К работе есть некоторые замечания:

1. Автор упоминает во введении некоторые определения и результаты, а их формулировки приводятся только в тексте самой диссертации далее. Так, например, на стр. 15 говорится о фундаментальной теореме Хуа, а сама теорема не формулируется, хотя она не является общеизвестным фактом. Теорема Хуа сформулирована только на стр. 61. Или в теореме 3.1.10 на стр. 16 упоминается условие (12), а само условие (12) сформулировано только в третьей главе диссертации, где и доказывается данная теорема. В начале главы 4 имело смысл повторить определение тотального и регулярного графов многочлена, поскольку в формулировке результатов главы 4 используется символ *n*, а не оговаривается, что он обозначает.
2. Есть некоторые замечания к формулировкам утверждений. Во введении предложение 4.1.1 сформулировано не совсем корректно: не упоминается, что оно справедливо только для поля нечетной характеристики. Об этом условии говорится только в главе 4, где это предложение и было доказано. В теореме 3.1.10 в фразе «для любых

матриц A, $B\in M_n$ выполнено условие (12)» слова «для любых матриц A, $B\in M_n$» лишние, поскольку они есть в условии (12).

Критических замечаний по оформлению и содержанию диссертации, влияющих на общую положительную оценку работы, у меня нет. Диссертационная работа имеет теоретическое значение. Результаты, полученные В.В. Промысловым в диссертационной работе, являются новыми. Доказательства обоснованы и проведены на хорошем научном уровне. Диссертационное исследование В.В. Промыслова представляет собой законченную научно-исследовательскую работу, содержащую решения актуальных задач, упомянутых выше (теорема 2.1.4, теорема 3.1.10, предложение 4.1.1, теорема 4.1.7, теорема 4.2.9, теорема 5.1.9).

Результаты, выносимые на защиту, апробированы: они были опубликованы в 7 работах, в том числе в 4 журналах, включенных в перечень ведущих рецензируемых научных журналов и изданий ВАК и индексируемых в реферативных базах данных Scopus и/или Web of Science, а также были представлены на четырех международных конференциях. Все это подтверждает достоверность результатов, выносимых В.В. Промысловым на защиту.

Данная работа представляет интерес для дальнейших исследований в данной области, а также может быть использована при чтении лекций и проведении семинаров для студентов, специализирующихся в области теории колец. Автореферат полно отражает содержание диссертации.

Диссертация отвечает требованиям, установленным Московским государственным университетом имени М.В.Ломоносова к работам подобного рода. Содержание диссертации соответствует специальности 1.1.5 «Математическая логика, алгебра, теория чисел и дискретная математика» (по физико-математическим наукам), а также критериям, определенным пп. 2.1-2.5 Положения о присуждении ученых степеней в Московском государственном университете имени М.В.Ломоносова, а также оформлена согласно требованиям Положения о совете по защите диссертаций на соискание ученой степени кандидата наук, на соискание ученой степени доктора наук Московского государственного университета имени М.В.Ломоносова.

Таким образом, соискатель Промыслов Валентин Валерьевич заслуживает присуждения ученой степени кандидата физико-математических наук по специальности 1.1.5 «Математическая логика, алгебра, теория чисел и дискретная математика».

Официальный оппонент:

кандидат физико-математических наук,
доцент, доцент кафедры алгебры и
математической логики
ФГБОУ ВО «Алтайский государственный университет» _______________
МОНАСТЫРЕВА Анна Сергеевна *подпись*

____
Дата подписания

Контактные данные:

тел.: 7(913)2771484, e-mail: akuzmina1@yandex.ru
Специальность, по которой официальным оппонентом
защищена диссертация:
01.01.06 – Математическая логика, алгебра и теория чисел

Адрес места работы:

656049, г. Барнаул, пр. Ленина, д.61,
ФГБОУ ВО «Алтайский государственный университет»,
кафедра алгебры и математической логики
Тел.: (3852)298-138; e-mail: akuzmina1@yandex.ru

Подпись сотрудника ФГБОУ ВО «Алтайский
государственный университет»
Монастыревой А.С. удостоверяю: