МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
ИМЕНИ М.В. ЛОМОНОСОВА

На правах рукописи

Денисов Константин Юрьевич

Большие нижние локальные уклонения ветвящихся процессов в случайной среде

Специальность 1.1.4 —
Теория вероятностей и математическая статистика

Автореферат диссертации на соискание учёной степени
кандидата физико-математических наук

Москва — 2024

Работа подготовлена на кафедре математической статистики и случайных процессов механико-математического факультета МГУ имени М.В.Ломоносова

Научные руководители: **Козлов Михаил Васильевич**,
кандидат физико-математических наук, доцент,
Шкляев Александр Викторович,
кандидат физико-математических наук.

Официальные оппоненты: **Яровая Елена Борисовна**
доктор физико-математических наук, доцент,
Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего образования «Московский государственный университет имени М.В. Ломоносова»,
профессор кафедры теории вероятностей механико-математического факультета,
Фролов Андрей Николаевич
доктор физико-математических наук, доцент,
Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего образования «Санкт-Петербургский государственный университет»,
профессор кафедры теории вероятностей и математической статистики математико-механического факультета,
Алексеев Иван Алексеевич
кандидат физико-математических наук,
Санкт-Петербургское отделение математического института им. В.А. Стеклова РАН,
научный сотрудник лаборатории прикладных вероятностных и алгоритмических методов.

Защита диссертации состоится 14 февраля 2025 г. в 15 ч. 00 мин. на заседании диссертационного совета МГУ.011.3 Московского государственного университета имени М.В. Ломоносова по адресу: 119991, Москва, ГСП-1, Ленинские горы, д. 1, Московский государственный университет имени М.В.Ломоносова, механико-математический факультет, ауд. 16-24.

E-mail: mexmat_disser85@mail.ru

С диссертацией можно ознакомиться в отделе диссертаций научной библиотеки МГУ имени М.В. Ломоносова (Ломоносовский просп., д. 27) и на портале https://dissovet.msu.ru/dissertation/3251

Автореферат разослан ____ декабря 2024 г.

Ученый секретарь
диссертационного совета МГУ.011.3,
доктор физико-математических наук — В.Б. Шерстюков

Общая характеристика работы

Актуальность темы. Диссертация посвящена большим уклонениям ветвящихся процессов в случайной среде (ВПСС). В работе рассматриваются ВПСС с геометрическим распределением числа потомков одной частицы (ВПССГ). Для данных процессов рассматривается асимптотика локальных вероятностей больших уклонений.

Изучение ветвящихся процессов в случайной среде началось с работ В. Смита и В. Вилкинсона[1] и К. Атрейи и С. Карлина[2]. Исторически наиболее удобным для изучения является случай ВПССГ — из ранних работ, рассматривающих данный случай, можно отметить, например, работы М.В. Козлова[3,4]. Однако, в начале 21 века был сделан ряд значительных продвижений[5,6,7] в общей теории больших уклонений для ВПСС без предположения геометричности распределения.

В данной работе будет рассматриваться только случай ВПССГ. Это существенное ограничение общности позволяет получить локальные предельные теоремы на основе результатов А. Агрести[8,9]. Полученная асимптотика вероятностей больших нижних уклонений для частного случая ВПССГ может быть использована для получения более общих результатов. Так, например, уже после написания данной работы вышла статья А.В. Шкляева[10], в которой один

---

[1] Smith W.L., Wilkinson W.E. On branching processes in random environments // Ann. Math. Stat. 1969 Vol. 40, no. 3. P 814–827

[2] Athreya K.B., Karlin S. On branching processes with random environments. I: Extinction probabilities // Ann. Math. Stat. 1971. Vol. 42, no 5. P. 1499–1520

[3] Козлов М.В. Об асимптотике вероятности невырождения критических ветвящихся процессов в случайной среде // Теория вероятн. и ее примен. 1976. Т. 21, № 4. С. 813–825

[4] Kozlov M. V. On the asymptotic behavior of the probability of non-extinction for critical branching processes in a random environment // Theory of Probability & Its Applications. 1977. Vol. 21, no. 4. P. 791-804

[5] Birkner M., Geiger J., Kersting G. Branching processes in random environment–a view on critical and subcritical cases // Interacting stochastic systems. Springer, 2005. P. 269-291

[6] Afanasyev V.I., Geiger J., Kersting G., Vatutin V. A. Criticality for branching processes in random environment // Ann. Probab. 2005. Vol. 33, no. 2. P. 645-673

[7] Afanasyev V.I., Geiger J., Kersting G., Vatutin V.A. Functional limit theorems for strongly subcritical branching processes in random environment // Stochastic processes and their applications. 2005. Vol. 115, no. 10. P. 1658-1676

[8] Agresti A. Bounds on the extinction time distribution of a branching process // Adv. Appl. Prob. 1974. Vol. 6, no. 2. P. 322-335

[9] Agresti A. On the extinction times of varying and random environment branching processes // J. Appl. Prob. 1975. Vol. 12, no. 1. P. 39-46

[10] Шкляев А.В. Нижние большие уклонения ветвящегося процесса в случайной среде // Дискрет. матем. 2024. Т. 36, № 3. С. 127–140

из наших результатов был обобщен на произвольное распределение числа потомков одной частицы. Кроме того, случай ВПССГ является важным случаем для приложения к теории случайных блужданий в случайной среде.

Для более полного ознакомления с теорией ветвящихся процессов в случайной среде читателю рекомендуется обратиться к книге В.А. Ватутина и Г. Кёрстинга[11].

Настоящая работа посвящена теории больших уклонений для ВПССГ.

Теория предельных теорем стала основой классической теории вероятностей. Методы, предложенные Г. Крамером[12], а именно, крамеровское преобразование мер, позволили расширить классические результаты в случае н.о.р. случайных величин на более широкую зону, включающую нормальные, умеренные и большие уклонения. С использованием крамеровского преобразования мер Р. Бахадур и Р. Рао получили[13] точную асимптотику больших уклонений для среднего сумм н.о.р. случайных величин. В той же задаче равномерная в крамеровской зоне асимптотика для сумм н.о.р. случайных величин была получена[14] В.В. Петровым. Отдельно отметим важные результаты Л. Шеппа[15] и Ч. Стоуна[16], которые получили интегро-локальную теорему о больших уклонениях, на которую в значительной мере опирается данная работа. В многомерном случае данная задача рассматривалась[17], например, А.А. Боровковым и А.А. Могульским.

Для более полного ознакомления с теорией больших уклонений читателю рекомендуется обратиться к книге А.А. Боровкова[18].

Для ветвящихся процессов в случайной среде хорошо изучена задача о

[11] Kersting G., Vatutin V. Discrete time branching processes in random environment. Wiley-ISTE, 2017

[12] Cramer H. Sur un nouveau theoreme-limite de la theorie des probabilities // Scientifiques et Industrielles. 1938. Vol. 736. P. 5—23

[13] Bahadur R. R., Ranga Rao R. On Deviations of the Sample Mean // The Annals of Mathematical Statistics. 1960. Vol. 31, no. 4, P. 1015-1027

[14] Петров В.В. О вероятностях больших уклонений сумм независимых случайных величин // Теория вероятн. и ее примен. 1965. Т. 10, № 2. С. 310-322

[15] Shepp L.A. A Local Limit Theorem // The Annals of Mathematical Statistics. 1964. Vol. 35, no. 1. P. 419-423

[16] Stone C. On local and ratio limit theorems // Proceedings of the Fifth Berkeley Symposium on Mathematical Statistics and Probability. 1966. Vol. 2, no. 2. P. 217-224

[17] Боровков А. А., Могульский А. А. О больших и сверхбольших уклонениях сумм независимых случайных векторов при выполнении условия Крамера. I // Теория вероятностей и ее применения. 2006. Т. 51, № 2. С. 260—294

[18] Боровков А.А. Асимптотический анализ случайных блужданий. Быстроубывающие распределения приращений. Изд.: Физматлит, 2013

больших верхних уклонениях размера популяции, то есть исследована асимптотика вероятностей $\mathbf{P}(Z_n > \exp(\theta n))$, где $\theta > \mu$, где μ — среднее шага сопровождающего блуждания, которое будет введено позднее. В частности, для ветвящихся процессов в случайной среде с геометрическим числом потомков асимптотика такого рода вероятностей была получена М.В. Козловым[19,20], А.В. Шкляевым[21] и Д.В. Дмитрущенковым[22]. В общем случае (без предположения геометрического распределения числа потомков одной частицы) В. Бансайе и Ж. Берестицкий получили[23] логарифмическую асимптотику таких вероятностей. Затем рядом исследователей, таких как Д. Бурашевски и П. Дишевски, М.А. Струлёва и Е.И. Прокопенко и А.В. Шкляев, была получена[24,25,26,27,28,29] и точная асимптотика вероятностей больших уклонений, а также описана траектория процесса при условии совершения им большого уклонения. Аналогичные результаты были получены[30] А.В. Шкляевым не только для ВПСС, но и для более общей модели ВПСС с частицами двух полов.

Задача о больших нижних уклонениях, то есть о нахождении асимптотики вероятностей $\mathbf{P}(1 \leq Z_n < \exp(\theta n))$, где $\theta < \mu$, исследована значительно хуже. Для этого случая В. Бансайе, К. Боингхофф и Ж. Берестицкий по-

---

[19] Козлов М.В. О больших уклонениях ветвящихся процессов в случайной среде: геометрическое распределение числа потомков // Дискрет. матем. 2006. Т. 18, № 2. С. 29–47

[20] Козлов М.В. О больших уклонениях строго докритических ветвящихся процессов в случайной среде с геометрическим распределением числа потомков // Теория вероятн. и ее примен. 2009. Т. 54, № 3. С. 439–465

[21] Шкляев А.В. Большие уклонения ветвящихся процессов в случайной среде с произвольным начальным числом частиц // Дискрет. матем. 2012. Т. 24, № 4. С. 114–130

[22] Дмитрущенков Д.В., Шкляев А.В. Большие уклонения ветвящихся процессов с иммиграцией в случайной среде // Дискрет. матем. 2016. Т. 28, № 3. С. 28–48

[23] V. Bansaye and J. Berestycki. Large deviations for branching processes in random environment // Markov Process. Related Fields. 2009. Vol. 15, no. 3. P. 493–524

[24] Buraczewski D., Dyszewski P. Precise large deviation estimates for branching process in random environment // arXiv:1706.03874 [math.PR]. 2017

[25] Struleva M. A., Prokopenko E. I. Integro-local limit theorems for supercritical branching process in a random environment // Statistics & Probability Letters. 2022. Vol. 181. P. 109-234

[26] Шкляев А.В. Большие уклонения ветвящегося процесса в случайной среде. I // Дискрет. матем. 2019. Т. 31, № 4. С. 102–115

[27] Шкляев А.В. Большие уклонения ветвящегося процесса в случайной среде.II // Дискрет. матем. 2020. Т. 32, № 1. С. 135–156

[28] Шкляев А.В. Большие уклонения строго докритического ветвящегося процесса в случайной среде // Труды МИАН. 2022. Т. 316. С. 316–335

[29] Шкляев А.В. Условная функциональная предельная теорема для случайной рекуррентной последовательности при условии совершения ею большого уклонения // Теория вероятн. и ее примен. 2024. Т. 69, № 1. С. 125–147

[30] Шкляев А.В. Большие уклонения ветвящегося процесса с частицами двух полов в случайной среде // Дискрет. матем. 2023. Т. 35, № 3. С. 125–142

лучили[31,32,33] только логарифмическую асимптотику. Отдельно отметим, что традиционно задача о больших нижних уклонениях формулируется только для надкритических ВПСС ($\mu > 0$), поэтому в данной работе большие нижние уклонения для $\mu \leq 0$ не рассматриваются.

Задача о больших уклонениях ВПСС в локальной форме, то есть об асимптотике вероятностей $\mathbf{P}(Z_n = \lfloor \exp(\theta n) \rfloor)$, также редко рассматривалась ранее, причём как для больших нижних уклонений, так и для больших верхних. В обоих случаях была получена только логарифмическая асимптотика и только для частных случаев. В. Бансайе и К. Боингхоффом, а также И. Грама с соавторами была изучена[34,35] асимптотика вероятностей $\mathbf{P}(Z_n = k)$, где k — константа, то есть для так называемых низких уровней. К. Боингхоффом была изучена[36] асимптотика для вероятностей $\mathbf{P}(Z_n = 1)$.

Цель работы. Целью работы является получение точной асимптотики локальных вероятностей $\mathbf{P}(Z_n = \lfloor \exp(\theta n) \rfloor)$ больших нижних уклонений (для $\theta < \mu$) для надкритического случая ($\mu > 0$), а также больших верхних уклонений (для $\theta > \mu$) для надкритического ($\mu > 0$), критического ($\mu = 0$), слабо и умеренно докритического ($\mu < 0, m(1) \geq 0$) и частично для строго докритического случаев ($\mu < 0, m(1) < 0$), где $m(1)$ — константа, которая будет определена далее.

Научная новизна. Впервые получена точная, а не логарифмическая асимптотика вероятностей больших нижних уклонений для надкритического ВПССГ. Также новым является рассмотрение в данной работе локальных вероятностей $\mathbf{P}(Z_n = \lfloor \exp(\theta n) \rfloor)$, а не классических интегральных $\mathbf{P}(1 \leq Z_n \leq \exp(\theta n))$ или исследуемых в некоторых современных работах интегро-локальных вероятностей $\mathbf{P}(Z_n \in [\exp(\theta n); \exp((\theta + \triangle) n)])$. Таким образом, по-

[31] V. Bansaye, C. Böinghoff. Lower large deviations for supercritical branching processes in random environment // Proceedings of the Steklov Institute of Mathematics. 2013. Vol. 282, no. 1. P. 15-34

[32] V. Bansaye and J. Berestycki. Large deviations for branching processes in random environment // Markov Process. Related Fields. 2009. Vol. 15, no. 4. P. 493–524

[33] C. Böinghoff. Branching Processes in Random Environment. Dissertation at Johann Wolfgang Goethe-Universität Frankfurt am Main, 2010

[34] V. Bansaye, C. Böinghoff. Small positive values for supercritical branching processes in random environment // Annales de l'Institut Henri Poincaré — Probabilités et Statistiques. 2014. Vol. 50, no. 3. P. 770–805

[35] Grama I., Liu Q., Miqueu E. Asymptotics of the distribution and harmonic moments for a supercritical branching process in a random environment // Annales de l'Institut Henri Poincare (B) Probabilites et statistiques. 2023. Vol. 59, no. 4. P. 1934-1950

[36] C. Böinghoff. Branching Processes in Random Environment. Dissertation at Johann Wolfgang Goethe-Universität Frankfurt am Main, 2010

лучен более сильный результат. В частности, для больших верхних уклонений ВПССГ точная асимптотика интегральных вероятностей была получена ранее, однако локальные вероятности ранее не рассматривались. В процессе работы получена вспомогательная лемма об экспоненциальном функционале, являющаяся полезным обобщением ранее известных вспомогательных утверждений такого рода.

Методы исследования. В работе использованы методы теории вероятностей, теории больших уклонений, случайных блужданий, а также ветвящихся процессов, метод крамеровского преобразования мер, а также интегро-локальный подход к предельным теоремам.

Теоретическая и практическая значимость. Диссертация носит теоретический характер. Ее результаты могут быть использованы для дальнейшего развития теории больших уклонений ветвящихся процессов, а также для практического моделирования биологических и физических процессов.

Положения, выносимые на защиту.

1. Получена лемма об экспоненциальном функционале.

2. Для надкритического ветвящегося процесса в случайной среде с геометрическим распределением числа потомков одной частицы (ВПССГ) для первой зоны больших нижних уклонений найдена точная асимптотика вероятностей больших нижних уклонений.

3. Для надкритического ВПССГ для второй зоны больших нижних уклонений найдена точная асимптотика вероятностей больших нижних уклонений.

4. Для надкритического ВПССГ на границе первой и второй зон больших нижних уклонений найдена точная асимптотика вероятностей больших нижних уклонений.

5. Для ВПССГ для первой зоны больших верхних уклонений найдена точная асимптотика вероятностей больших верхних уклонений.

Апробация. Результаты диссертации докладывались на следующих научных семинарах и конференциях:

- Большой семинар кафедры теории вероятностей механико-математического факультета МГУ имени М.В. Ломоносова, Москва, 2024;
- Семинар "Случайные блуждания, ветвящиеся процессы" кафедры математической статистики и случайных процессов механико-математического факультета МГУ имени М.В. Ломоносова, Москва, Россия, 2018-2022;
- Семинар отдела дискретной математики МИАН, Москва, Россия, 2019;
- Workshop "St. Petersburg Youth Conference in Probability and Mathematical Physics", Санкт-Петербург, Россия, 21-24 декабря 2021;
- Международная конференция "Branching Processes, Random Walks and Probability on Discrete Structures", Москва, Россия, 21–24 июня 2022;
- Workshop "6-th St. Petersburg Youth Conference in Probability and Mathematical Physics", Санкт-Петербург, Россия, 20-22 декабря 2022;
- Branching Processes and Their Applications, Ташкент-Самарканд, Узбекистан, 18-22 сентября 2023.

Публикации. Результаты диссертации опубликованы в научных журналах "Дискретная математика" и "Сибирские электронные математические известия", индексируемых Web of Science, SCOPUS и RSCI. В научных журналах представлено 4 публикации — все без соавторов. В материалах международных конференций представлено 3 публикации. Список работ автора приведен в конце автореферата и диссертации.

Личный вклад. Автором лично доказаны все теоремы, выносимые на защиту.

Соответствие паспорту научной специальности. Тема диссертации соответствует паспорту специальности 1.1.4 - Теория вероятностей и математическая статистика (физико-математические науки). Области исследований:
6. Предельные теоремы, 10. Марковские процессы и поля, а также связанные с ними модели.

Объём и структура работы. Диссертация объемом 73 страницы состоит из введения, трех глав, заключения и списка литературы, насчитывающего 50 наименований. В диссертацию вошли результаты, выполненные при поддержке РНФ (грант №19-11-00111-П, руководитель гранта – профессор В.А. Ватутин).

Содержание работы

Первая глава посвящена вспомогательным утверждениям о случайных блужданиях и об экспоненциальных функционалах от них, а также большим уклонениям случайных блужданий.

Рассмотрим случайное блуждание $S_n = \sum_{i=1}^{n} \xi_i$, где ξ_i — независимые одинаково распределенные нерешетчатые случайные величины с функцией распределения $F(x)$, удовлетворяющие условию $0 < \mu := \mathbf{E}\xi < \infty$. Здесь и далее мы будем использовать символ ξ для обозначения случайной величины, имеющей такое же распределение, что и ξ_i.

Назовём с.в. ζ решётчатой, если существуют такие вещественные числа a и b, $b > 0$, что

$$\mathbf{P}\left(\zeta \in \{a + bn, n \in \mathbb{Z}\}\right) = 1,$$

и нерешетчатой в ином случае. В работе рассматриваются с.в. ξ, которые имеют нерешетчатые распределения. Будем предполагать, что выполнено условие Крамера: найдутся такие $h^- \leq 0$ и $h^+ \geq 0$, что $R(h) = \mathbf{E}e^{h\xi} < \infty$ при $h^- \leq h \leq h^+$. Предполагая, что $\mathbf{E}\xi^2 \exp\left(h^-\xi\right) < \infty$ и $\mathbf{E}\xi^2 \exp\left(h^+\xi\right) < \infty$, для указанных значений параметра h положим

$$m(h) = (\ln R(h))' = \mathbf{E}\xi e^{h\xi}/R(h), \quad \sigma^2(h) = m'(h),$$
$$F^{(h)}(x) = R^{-1}(h) \int\limits_{-\infty}^{x} e^{hu}\mathbf{P}(\xi \in \mathrm{d}u). \tag{1}$$

Распределение, порожденное функцией $F^{(h)}$, назовем сопряженным с параметром h. Независимые одинаково распределённые величины, имеющие сопряженное распределение с параметром h, будем обозначать $\xi_i^{(h)}$, $i > 0$. Нам также понадобится обозначение $S_n^{(h)} = \xi_1^{(h)} + \cdots + \xi_n^{(h)}$, $n > 0$.

Из определения сопряженного распределения следует, что

$$\mathbf{E}\xi_i^{(h)} = m(h), \ \mathbf{D}\xi_i^{(h)} = \sigma^2(h) > 0. \tag{2}$$

Следовательно, функция $m(h)$ монотонно возрастает при $h \in (h^-; h^+)$. Обозначим $m^- := \lim_{h\downarrow h^-} m(h)$, $m^+ := \lim_{h\uparrow h^+} m(h)$. Таким образом, при всех

$\theta \in (m^-; m^+)$ найдётся единственное число h_θ, принадлежащее (h^-, h^+), такое что $m(h_\theta) = \theta$. Положим $\Lambda(\theta) = h_\theta\theta - \ln R(h_\theta)$. Функцию Λ назовем функцией уклонений.

Введём следующие обозначения:

$$\widetilde{S}_n := S_n^{(h_\theta)} - \theta n,\ \widetilde{V}_n := \sum_{i=0}^{n-1} \exp\left(-S_i^{(h_\theta)}\right),\ \widetilde{V}_\infty = \sum_{i=0}^{\infty} \exp\left(-S_i^{(h_\theta)}\right).$$

Следующая лемма является центральным утверждением главы и сформулирована в работе в более общем виде.

Лемма 1. *Пусть $S_n = \xi_1 + \cdots + \xi_n, n > 0$ — случайное блуждание, где ξ_1, ..., ξ_n, ... — н.о.р. с.в., имеющие такое же распределение, как с.в. ξ. Пусть ξ является нерешетчатой, $\mathbf{E}\xi = \mu < \infty$. Пусть для ξ верно, что $\mathbf{E}\xi^2 \exp(h^-\xi) < \infty$ и $\mathbf{E}\xi^2 \exp(h^+\xi) < \infty$.*

Пусть $k(n) = k \in \mathbb{N}$ таково, что $\theta(n) = \theta := \ln k/n$. Пусть $\theta \in [\theta_1; \theta_2] \subset [m^-; m^+]$.

Тогда для произвольной константы a, а также произвольных последовательностей g_n и d_n таких, что $|g_n| < D\sqrt{n}$ и $G < d_n - g_n < D\sqrt{n}$ для всех n и некоторых положительных констант D и G, верно, что

$$\mathbf{P}\left(\widetilde{V}_n < a \middle| \widetilde{S}_n \in [g_n, d_n]\right) \to \mathbf{P}\left(\widetilde{V}_\infty < a\right)$$

при $n \to \infty$, причём сходимость равномерна по $\theta \in [\theta_1; \theta_2]$.

Данный результат является обобщением утверждений, полученных[37] М.В. Козловым.

Вторая глава посвящена большим нижним уклонениям надкритических ветвящихся процессов в случайной среде с геометрическим распределением числа потомков одной частицы.

Пусть $\boldsymbol{\eta} = (\eta_1, \ldots)$ — последовательность независимых одинаково распределённых (н.о.р.) случайных величин (с.в.), а $\{\phi_y\}_{y \in \mathbb{R}}$ — семейство производящих функций (п.ф.). При фиксированной среде $\boldsymbol{\eta}$ рассмотрим набор независимых случайных величин $(X_{i,j}, i, j \in \mathbb{N})$, где $X_{i,j}$ имеют п.ф. ϕ_{η_i}.

[37] Козлов М.В. О больших уклонениях ветвящихся процессов в случайной среде: геометрическое распределение числа потомков // Дискрет. матем. 2006. Т. 18, № 2. С. 29–47

Ветвящимся процессом $(Z_n, n \geq 0)$ в случайной среде $\boldsymbol{\eta}$ (ВПСС) назовём последовательность случайных величин, заданную соотношениями:

$$Z_0 = 1, \quad Z_{n+1} = X_{n+1,1} + \cdots + X_{n+1,Z_n}, \ n \geq 0.$$

Положим $\xi_i = \ln \phi'_{\eta_i}(1), \mathbf{E}\xi_i = \mu$. Сопровождающим случайным блужданием ВПСС назовём последовательность случайных величин $S_n = \xi_1 + \cdots + \xi_n, n \geq 1$.

В работе рассматривается случай геометрического семейства п.ф.:

$$\phi_y(s) = 1 - \left(1 + \frac{1}{\phi'_y(1)(1-s)}\right)^{-1}. \tag{3}$$

ВПСС в котором п.ф. числа потомков одной частицы задаются соотношением выше, будем называть ветвящимся процессом в случайной среде с геометрическим числом потомков (ВПССГ).

Существует общепринятая классификация ВПСС[38][39]. ВПСС $(Z_n, n \geq 0)$ называется докритическим, если $\mathbf{E}\xi = \mu < 0$, критическим, если $\mu = 0$, и надкритическим, если $\mu > 0$.

Кроме этого существует дополнительная классификация докритических и надкритических ВПСС, основанная в том числе на различии в поведении функции уклонений для больших верхних и больших нижних уклонений соответственно.

Пусть для ξ выполнено условие Крамера: $R(h) = \mathbf{E}e^{h\xi} < \infty$ при $0 < h < h^+$, где $h^+ > 1$. Тогда для ξ определены сопряженные величины $\xi^{(h)}$ и, соответственно, их математические ожидания $\mathbf{E}\xi^{(h)} = m(h)$. Назовём ВПСС

- строго докритическим, если $\mu < 0$ и $m(1) < 0$;
- умеренно докритическим, если $\mu < 0$, $m(1) = 0$;
- слабо докритическим, если $\mu < 0$, $m(1) > 0$.

Пусть для ξ выполнено условие Крамера: $R(h) = \mathbf{E}e^{h\xi} < \infty$ при $h^- < h < 0$, где $h^- < -1$. Тогда назовём ВПСС

- слабо надкритическим, если $\mu > 0$ и $m(-1) < 0$;

[38] Afanasyev V.I. Limit Theorems for a Strongly Supercritical Branching Process with Immigration in Random Environment // Stochastics and Quality Control. 2021. Vol. 36, no. 2. P. 129–143

[39] Афанасьев В.И. Слабо надкритический ветвящийся процесс в неблагоприятной случайной среде // Дискрет. матем. 2022. Т. 34, № 3. С. 3-19

- умеренно надкритическим, если $\mu > 0$, $m(-1) = 0$;
- строго надкритическим, если $\mu > 0$, $m(-1) > 0$.

Традиционно большие нижние уклонения определяются только для случая надкритических ВПССГ.

На уровне грубой асимптотики известно, что есть два разных поведения функции уклонений в случае больших нижних уклонений. В соответствии с этим поведением принято делить нижние уклонения на две зоны — первую и вторую зону больших нижних уклонений. Данная работа уточняет и дополняет результат, полученный К. Боингхоффом, на примере которого можно рассмотреть различие двух зон больших нижних уклонений ВПССГ. Сформулируем указанный результат.

Теорема 1. [40] *Пусть* $(Z_n, n \geq 0)$ *— ВПССГ со средой* $\boldsymbol{\eta}$*, порожденной последовательностью н.о.р. величин,* $S_n = \xi_1 + \cdots + \xi_n, n > 0$, *— его сопровождающее случайное блуждание,* $\mathbf{E}\xi = \mu > 0$. *Предположим также, что для* ξ *выполнено условие Крамера:* $R(h) < \infty$ *при* $h^- < h < 0$.

Пусть $\theta \in (0; \mu)$. *Тогда*

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \log \mathbf{P}\left(1 \leq Z_n \leq \exp(\theta n)\right) = -\chi(\theta),$$

где, если $h^- < -1$, *то*

$$\chi(\theta) = \begin{cases} \Lambda(\theta), & \theta > m(-1) \\ -\theta - \log R(-1), & \theta \leq m(-1) \end{cases},$$

иначе $\chi(\theta) = \Lambda(\theta)$.

Можно видеть, что, если $h^- < -1$, то вероятности больших нижних уклонений существенно отличаются при $\theta > m(-1)$ и $\theta < m(-1)$ даже на уровне логарифмической асимптотики. При этом в точке $\theta = m(-1)$ происходит переходное явление.

Определим первую и вторую зону больших нижних уклонений. Первая зона больших нижних уклонений определяется следующими условиями.

[40] C. Böinghoff. Branching Processes in Random Environment. Dissertation at Johann Wolfgang Goethe-Universität Frankfurt am Main, 2010

1) Если $(Z_n, n \geq 0)$ — строго надкритический процесс, то первой зоной уклонений называется случай, когда $\theta \in (m(-1); \mu)$.

2) Если $(Z_n, n \geq 0)$ — слабо или умеренно надкритический процесс, либо условие Крамера выполнено при $h^- < h < 0$, где $h^- \geq -1$, то первой зоной уклонений называется случай, когда $\theta \in (\max(0, m^-); \mu)$.

Вторая зона больших нижних уклонений определяется следующим образом: если $(Z_n, n \geq 0)$ — строго надкритический процесс, то второй зоной уклонений называется случай, когда $\theta \in (0; m(-1))$.

Граничной зоной будем называть область, соответствующую фазовому переходу между первой и второй зонами.

Положим множество K_1 равным $(m(-1); \mu)$, если $(Z_n, n \geq 0)$ — строго надкритический процесс, и равным $(\max(0, m^-); \mu)$, если $(Z_n, n \geq 0)$ — слабо или умеренно надкритический процесс.

В дальнейшем нам будет удобно обозначать через $\rho_n = \rho_n(\theta, \theta_1, \theta_2)$ величины, стремящиеся к нулю при $n \to \infty$ равномерно по $\theta \in [\theta_1, \theta_2]$. При этом в разных местах ρ_n будет, вообще говоря, обозначать различные функции. Кроме того, в некоторых случаях мы будем использовать это обозначение для величин, стремящихся к нулю при $n \to \infty$ и не зависящих от θ.

Для первой зоны больших нижних уклонений надкритического ВПССГ в работе получен следующий результат.

Теорема 2. *Пусть $(Z_n, n \geq 0)$ — ВПССГ со средой $\boldsymbol{\eta}$, порожденной последовательностью н.о.р. величин, $S_n = \xi_1 + \cdots + \xi_n, n > 0$, — его сопровождающее случайное блуждание, где величина ξ предполагается нерешетчатой, $\mathbf{E}\xi = \mu > 0$. Предположим также, что для ξ выполнено условие Крамера: $R(h) < \infty$ при $h^- < h < 0$.*

Пусть $k(n) = k \in \mathbb{N}$, а $\theta(n) = \theta := \ln k/n \in [\theta_1; \theta_2]$, где θ_1 и θ_2 фиксированы и принадлежат K_1. Тогда

$$\mathbf{P}(Z_n = k) = \frac{(1 + \rho_n)\Gamma(1 + h_\theta)}{\sqrt{2\pi n}\sigma(h_\theta)} e^{-\Lambda(\theta)n - \theta n} \mathbf{E}\widetilde{V}_\infty^{h_\theta - 1},$$

где

$$\widetilde{V}_\infty := \sum_{i=0}^{\infty} \exp\left(-S_i^{(h_\theta)}\right).$$

В случае строго надкритического ВПССГ теорему 2 можно уточнить до следующей теоремы, захватывающей часть граничной зоны.

Теорема 3. *Пусть $(Z_n, n \geq 0)$ — ВПССГ со средой $\boldsymbol{\eta}$, порожденной последовательностью н.о.р. величин, $S_n = \xi_1 + \cdots + \xi_n, n > 0$, — его сопровождающее случайное блуждание, где величина ξ предполагается нерешетчатой, $\mathbf{E}\xi = \mu > 0$, $m(-1) > 0$. Предположим также, что для ξ верно, что $\mathbf{E}\xi^2 \exp(-\xi) < \infty$.*

Пусть $k(n) = k \in \mathbb{N}$, а $\theta(n) = \theta := \ln k/n \in [\theta_1; \theta_2] \subset (0; \mu)$, где $\theta_2 \in (m(-1); \mu)$ фиксировано, а $\theta_1 = \theta_1(n) = m(-1) + n^{-1/2}\varepsilon_n$ для некоторой фиксированной положительной последовательности $\varepsilon_n = o(\sqrt{n})$, такой, что $\varepsilon_n \to \infty$ при $n \to \infty$. Тогда

$$\mathbf{P}(Z_n = k) = \frac{(1+\rho_n)\Gamma(1+h_\theta)}{\sqrt{2\pi n}\sigma(h_\theta)} e^{-\Lambda(\theta)n - \theta n} \mathbf{E}\widetilde{V}_\infty^{h_\theta - 1},$$

где

$$\widetilde{V}_\infty := \sum_{i=0}^{\infty} \exp\left(-S_i^{(h_\theta)}\right).$$

Для второй зоны больших нижних уклонений строго надкритического ВПССГ получен следующий результат.

Теорема 4. *Пусть процесс $(Z_n, n \geq 0)$ удовлетворяет условиям теоремы 3.*

Пусть $k(n) = k \in \mathbb{N}$, а $\theta(n) = \theta := \ln k/n \in [0; \theta_2]$, где $\theta_2 = \theta_2(n) = m(-1) + c/\sqrt{n}$ для некоторой произвольной константы $c > 0$. Тогда

$$\mathbf{P}(Z_n = k) = (1+\rho_n) R^n(-1) \mathbf{E}\widehat{V}_\infty^{-2} \left(1 - \Phi\left(\frac{\sqrt{n}(\theta - m(-1))}{\sigma(-1)}\right)\right).$$

Данная теорема также частично включает поведение вероятности $\mathbf{P}(Z_n = k)$ в переходной зоне в окрестности точки $m(-1)$, которая возникает в случае строго надкритического ВПССГ.

Кроме этого в теорему 4 включён результат для случая так называемых низких уровней — то есть ситуации, когда k является константой, иначе говоря, когда θ стремится к 0 или равно 0. Данный результат дополняет и уточняет результат, полученный[41] В. Бансайе и К. Боингхоффом в для низких уровней.

Отметим также, что рассматриваемая асимптотика вероятностей во второй зоне уклонений ($\theta \in [\theta_1; \theta_2] \subset (0; m(-1))$) не зависит от θ и, соответственно,

[41] V. Bansaye, C. Böinghoff. Small positive values for supercritical branching processes in random environment // Annales de l'Institut Henri Poincaré — Probabilités et Statistiques. 2014. Vol. 50, no. 3. P. 770–805

от k — данное свойство проявляется только в случае рассмотрения локальных вероятностей.

Для вероятности больших нижних уклонений в окрестности $m(-1)$ в работе получен следующий результат.

Теорема 5. *Пусть процесс* $(Z_n, n \geq 0)$ *удовлетворяет условиям теоремы 3.*

Пусть $k(n) = k \in \mathbb{N}$, *а* $\theta(n) = \theta := \ln k/n \in [\theta_1; \theta_2] \subset (0; \mu)$, *где* $\theta_1 = \theta_1(n) \to m(-1)$ *и* $\theta_2 = \theta_2(n) \to m(-1)$ *при* $n \to \infty$. *Тогда*

$$\mathbf{P}\left(Z_n = k\right) = (1 + \rho_n)\mathbf{E}\widetilde{V}_\infty^{h_\theta - 1} e^{-\Lambda(\theta)n - \theta n} \times \tag{4}$$

$$\times \exp\left(\sigma^2(h_\theta)n(1 + h_\theta)^2/2\right)\left(1 - \Phi\left(\sigma(h_\theta)\sqrt{n}(1 + h_\theta)\right)\right), \tag{5}$$

где

$$\widetilde{V}_\infty := \sum_{i=0}^{\infty} \exp\left(-S_i^{(h_\theta)}\right).$$

Теоремы 3, 4 и 5 полностью описывают асимптотику вероятностей больших нижних уклонений надкритических ВПССГ для $\theta \in [\theta_1; \theta_2] \subset [0; \mu)$. Объединяя данные результаты воедино, в работе получен следующий результат.

Теорема 6. *Пусть процесс* $(Z_n, n \geq 0)$ *удовлетворяет условиям теоремы 4.*

Пусть $k(n) = k \in \mathbb{N}$, *а* $\theta(n) = \theta := \ln k/n \in [0; \theta_2] \subset [0; \mu)$. *Тогда*

$$\mathbf{P}\left(Z_n = k\right) = (1 + \rho_n)\mathbf{E}(V_\infty^{(h_\alpha)})^{h_\alpha - 1} G(h_\alpha) \times$$
$$\times \exp\left(\frac{\sigma^2(h_\alpha n(1 + h_\alpha)^2}{2}\right)\left(1 - \Phi\left(\frac{\sqrt{n}(\theta - m(-1))}{\sigma(\alpha)}\right)\right) e^{-\Lambda(\alpha)n - \alpha n},$$

где $\alpha := \max(m(-1), \theta)$, *а*

$$G(h_\alpha) = \begin{cases} \frac{\Gamma(1 + h_\alpha)}{1 + h_\alpha}, & h_\alpha > -1 \\ 1, & h_\alpha = -1 \end{cases}.$$

Третья глава посвящена большим верхним уклонениям ВПССГ. Обращаясь к типизации процессов из второй главы, отметим, что в отличие от больших нижних уклонений, большие верхние уклонения определены для всех типов процессов — докритических, критических и надкритических.

М.В. Козловым было обнаружено[42,43], что асимптотика вероятностей больших уклонений существенно отличается при изменении параметра в двух зонах уклонений, которые мы будем называть первой и второй зонами больших верхних уклонений. Сразу отметим, что вторая зона больших верхних уклонений определена только в случае строго докритического ВПССГ и она в данной работе рассматриваться не будет.

Первая зона больших верхних уклонений определяется следующими условиями.

1) Если $(Z_n, n \geq 0)$ — надкритический или критический процесс, то есть $\mu \geq 0$, то первой зоной уклонений называется случай, когда $\theta \in (\mu; m^+)$.

2) Если $(Z_n, n \geq 0)$ — слабо или умеренно докритический процесс, то есть, если $\mu < 0$ и условие Крамера выполнено при $0 < h < h^+$, где $h^+ > 1$ и $m(1) \geq 0$, то первой зоной уклонений называется случай, когда $\theta \in (0; m^+)$.

3) Если $(Z_n, n \geq 0)$ — строго докритический процесс, то есть, если $\mu < 0$, условие Крамера выполнено при $0 < h < h^+$, где $h^+ > 1$, $m(1) < 0$ и $\sup\limits_{1<h<h^+} R(h) > R(1)$, то первой зоной уклонений называется случай, когда $\theta \in (\gamma; m^+)$. Параметр γ равен $m(\varkappa)$, где точка $\varkappa$ определяется из уравнения $R(\varkappa) = R(1), \varkappa > 1$.

Положим $\mu^* = \mu$ в первом случае, 0 во втором и γ в третьем.

Для первой зоны больших верхних уклонений ВПССГ получен следующий результат.

Теорема 7. *Пусть $(Z_n, n \geq 0)$ — ВПССГ со средой $\boldsymbol{\eta}$, порожденной последовательностью н.о.р. величин, $S_n = \xi_1 + \cdots + \xi_n, n > 0$, — его сопровождающее случайное блуждание, где величина ξ предполагается нерешетчатой. Предположим также, что для ξ выполнено условие Крамера: $R(h) < \infty$ при $0 < h < h^+$.*

Пусть $k(n) = k \in \mathbb{N}$, а $\theta(n) = \theta := \ln k/n \in [\theta_1; \theta_2] \subset (\mu^*, m^+)$, где θ_1 и θ_2 фиксированы. Тогда

$$\mathbf{P}\left(Z_n = k\right) = \frac{(1+\rho_n)\Gamma(1+h_\theta)}{\sqrt{2\pi n}\sigma(h_\theta)} e^{-\Lambda(\theta)n - \theta n} \mathbf{E}\widetilde{V}_\infty^{h_\theta - 1},$$

[42] Козлов М.В. О больших уклонениях ветвящихся процессов в случайной среде: геометрическое распределение числа потомков // Дискрет. матем. 2006. Т. 18, № 2. С. 29–47

[43] Козлов М.В. О больших уклонениях строго докритических ветвящихся процессов в случайной среде с геометрическим распределением числа потомков // Теория вероятн. и ее примен. 2009. Т. 54, № 3. С. 439–465

где

$$\widetilde{V}_\infty := \sum_{i=0}^{\infty} \exp\left(-S_i^{(h_\theta)}\right).$$

Настоящая работа оставляет за пределами своего изучения вторую зону больших верхних уклонений для строго докритических ВПССГ. В этом случае известна только интегральная асимптотика. Локальная же асимптотика остаётся неисследованной.

Заключение содержит основные результаты работы. Получена точная асимптотика локальных вероятностей $\mathbf{P}(Z_n = \lfloor \exp(\theta n) \rfloor)$ больших нижних уклонений ВПССГ для надкритического случая для первой зоны уклонений, второй зоны уклонений и для границы зон. Также получена точная асимптотика локальных вероятностей $\mathbf{P}(Z_n = \lfloor \exp(\theta n) \rfloor)$ для больших верхних уклонений ВПССГ для надкритического, критического, слабо и умеренно докритического и частично для строго докритического случаев.

Результаты, полученные в работе, могут быть использованы для дальнейшего исследования ВПСС. В частности, для получения асимптотики вероятностей больших нижних и больших верхних уклонений для ВПСС без предположения о геометричности распределения. Также данные результаты могут быть использованы в теории случайных блужданий в случайной среде.

Благодарность. Автор выражает признательность своим научным руководителям: кандидату физико-математических наук Шкляеву Александру Викторовичу за постоянное внимание к работе и полезные обсуждения, а также кандидату физико-математических наук, доценту Козлову Михаилу Васильевичу за ценные замечания.

Работы автора по теме диссертации

Статьи в рецензируемых научных изданиях, рекомендованных для защиты в диссертационном совете МГУ.011.3 по специальности 1.1.4 - теория вероятностей и математическая статистика и входящих в базы цитирования Scopus, Web of Science и RSCI

[1] Денисов К.Ю. Асимптотика локальных вероятностей нижних уклонений ветвящегося процесса в случайной среде при геометрических распределениях чисел потомков // Дискрет. матем. — 2020. — Т. 32, № 3. — С. 24–37.

ИФ РИНЦ - 0.494 / 0.875 п.л.

Denisov K.Yu. Asymptotical local probabilities of lower deviations for branching process in random environment with geometric distributions of descendants // Diskretnaya Matematika. — 2020. — Vol. 32, No. 3. — P. 24–37.

SCOPUS SJR - 0.254 / 0.875 п.л.

[2] Денисов К.Ю. Асимптотика локальных вероятностей больших уклонений ветвящегося процесса в случайной среде с геометрическим распределением числа потомков // Дискрет. матем. — 2021. — Т. 33, № 4. — С. 19–31.

ИФ РИНЦ - 0.494 / 0.8125 п.л.

Denisov K.Yu. Asymptotic local probabilities of large deviations for branching process in random environment with geometric distribution of descendants // Diskretnaya Matematika. — 2021. — Vol. 33, No. 4. — P. 19–31.

SCOPUS SJR - 0.254 / 0.8125 п.л.

[3] Денисов К.Ю. Локальная асимптотика вероятностей нижних уклонений строго надкритических ветвящихся процессов в случайной среде с геометрическими распределениями чисел потомков // Дискрет. матем. — 2022. — Т. 34, № 4. — С. 14–27.

ИФ РИНЦ - 0.494 / 0.875 п.л.

Denisov K.Yu. Asymptotic local lower deviations of strictly supercritical branching process in a random environment with geometric distributions of descendants // Diskretnaya Matematika. — 2022. — Vol. 34, No. 4. — P. 14–27.

SCOPUS SJR - 0.254 / 0.875 п.л.

[4] Денисов К.Ю. Локальная асимптотика вероятностей больших нижних уклонений сильно надкритических ветвящихся процессов в случайной среде с геометрическим распределением чисел потомков одной частицы // Сибирские электронные математические известия. — 2024. — Т. 21, № 1. — С. 1-16.

ИФ РИНЦ - 0.547 / 1 п.л.

Denisov K.Y. Local Lower Large Deviations of Strongly Supercritical BPREG // Siberian Electronic Mathematical Reports. — 2024. — Vol. 21. No. 1. — P. 1-16.

SCOPUS SJR - 0.465 / 1 п.л.