ОТЗЫВ ОФИЦИАЛЬНОГО ОППОНЕНТА

на диссертационную работу Клячко Антона Александровича
«Уравнения в группах и смежные вопросы»
на соискание ученой степени доктора физико-математических наук
по специальности 1.1.5 – математическая логика, алгебра, теория
чисел и дискретная математика (01.01.06 – математическая логика,
алгебра и теория чисел)

Диссертация А. А. Клячко посвящена вопросам комбинаторной алгебры и, прежде всего, вопросам комбинаторной теории групп, связанным с уравнениями в группах.

Диссертация состоит из введения, 28 глав, заключения, списка цитированной литературы и списка работ соискателя по теме диссертации. Главы диссертации группируются в 12 разделов. Главы каждого раздела тематически тесно связаны между собой. В большинстве случаев тематика раздела мотивируется одним или несколькими имеющими важное значение результатами комбинаторной теории групп, а полученные в разделе результаты углубляют и существенно усиливают эти мотивирующие результаты в представляющем большой интерес направлении, а зачастую в нескольких таких направлениях. При этом в некоторых случаях полученные результаты выявляют новые аспекты мотивирующих результатов и вскрывают далеко не очевидные связи между ними.

В первый раздел (главы 1 и 2) получены обобщения теоремы Минеева–Фридмана (о справедливости гипотезы Х. Нейман относительно ранга пересечения подгрупп свободой группы) на случай подгрупп почти свободной группы.

Во втором разделе (главы 3-7) получены результаты, обобщающие теорему Фробениуса о числе решений уравнения $x^n = 1$ в конечной группе, теорему Соломона о числе решений в конечной группе системы уравнений, в которой уравнений меньше, чем неизвестных, и теорему Ивасаки о корнях из подгруппы конечной группы. Сначала, в главе 3, доказывается аналог теоремы Соломона для произвольных формул первого порядка в групповом языке; затем, в главе 4, с использованием этого доказывается общее утверждение о числе решений систем уравнений в группах, включающая в себя теоремы Соломона и Ивасаки; после этого, в главе 5, результат главы 4 обобщается до результата, включающего в себя и теорему Фробениуса; наконец, в главе 7, этот результат еще обобщается. Следует отметить, что перечисленные обобщения являются содержательными, вскрывающими связи между казалось бы весьма далекими результатами и в определенном смысле проясняющими их содержание. Кроме того, в главе 6 этого раздела доказываются аналоги результатов глав 3-5 для алгебраических групп, при этом вместо количества решений уравнений рассматривается размерность множества решений.

Результаты третьего раздела (главы 8-10) существенно усиливают теорему Мясникова–Романькова о том, что подгруппа H конечно порожденной свободной группы G является ретрактом (т. е. образом идемпотентного эндоморфизма) тогда и только тогда, когда каждое уравнение вида $w(x_1, ..., x_n) = h$, где w — слово в алфавите $\{x_1^{\pm 1}, ..., x_n^{\pm 1}\}$ и $h \in H$, имеющее решение в G, имеет решение и в H. Доказывается, что аналогичное заключение справедливо для произвольной конечно порожденной группы G и ее подгруппы H в случае, когда H почти свободна и не имеет нетривиальных конечных нормальных (в H) подгрупп (гла-

вы 8, 9), а также в случае, когда H является свободным произведением более чем одной нетривиальных групп с тождествами (глава 9). Кроме того, в главе 10 показано, что аналог теоремы Мясникова–Романькова не имеет места для группы G, являющейся фундаментальной группой бутылки Клейна, хотя, как было известно ранее, для других фундаментальных групп поверхностей аналог этой теоремы имеет место.

В четвертом разделе (главы 11-14) получено несколько широких обобщений ранее известных «теорем типа Макаренко–Хухро», как иногда называют результаты, утверждающие существование у групп «больших» характеристических подгрупп с определенными свойствами в случае существования у групп «больших» подгрупп с этими свойствами. Содержание раздела позволяет глубже понять природу подобных результатов. Кроме того, в разделе даются приложения полученных результатов к вопросам из теории групп (так, в главе 12 получена неулучшаемая оценка на ступень почти разрешимости расширения почти разрешимой группы посредством почти разрешимой, что отвечает на вопрос Дж. Баттона), комбинаторики и теории графов (например, в главе 13 доказывается, что если граф можно сделать планарным удалением конечного множества ребер, то его можно сделать планарным и удалением конечного множества ребер, инвариантного относительно всех автоморфизмов графа).

В пятом разделе (глава 15) получена весьма общая теорема для свободных произведений групп без кручения, касающаяся представления в них произведения коммутаторов и элементов, сопряженных элементам из сомножителей, в виде произведения элементов, сопряженных между собой, но не сопряженных элементам из сомножителей. Этот результат, в частности, обобщает на случай свободного произведения групп без кручения результат А. Дункана и Дж. Хауи для свободных групп о точности оценки М. Каллера для показателя степени элемента, равной произведению заданного числа коммутаторов. (Следует отметить, что это обобщение было независимо и другими методами получено Л. Ченом.) Теорема имеет также другие представляющие значительный интерес для теории групп следствия. Ее доказательство основано на использовании известной «леммы о столкновениях» диссертанта.

Несколько особняком стоят шестой (главы 16 и 17) и восьмой (глава 19) разделы, не имеющие непосредственного отношения к теории групп. В шестом разделе дается простое новое доказательство результата Л. Эйлера о том, что каждое рациональное число можно разложить в произведение четырех рациональных чисел, сумма которых равна нулю. Кроме того, решаются аналогичные задачи для некоторых других полей и колец. В главе 17 полностью исследован вопрос: для каких целого числа $k \geq 2$ и конечного поля F в поле F каждый элемент можно разложить в произведение k сомножителей, сумма которых равна нулю? Результаты восьмого раздела отчасти мотивированы компьютерной алгеброй. В нем исследуются алгебры (в смысле универсальной алгебры), элементы которых являются вычетами по модулю степени двойки q, а операциями являются сложения по модулю q и «побитовое» сложение по модулю 2. Теорема 1 раздела дает явное описание свободных алгебр многообразия, порожденного такой алгеброй, а теорема 2 раздела утверждает, что это многообразие конечно базируемо, причем согласно следствию 2 существует алгоритм, выписывающий для каждого q конечный базис тождеств соответствующего многообразия.

В седьмом разделе (глава 18) строится конечно порожденная бесконечная рекурсивно представленная финитно аппроксимируемая группа G, которая ал-

горитмически конечна (т. е. не существует алгоритма, выписывающего бесконечное количество попарно различных элементов группы G), что дает ответ на вопрос А. Г. Мясникова и Д. В. Осина. При этом группа G содержит бесконечную абелеву нормальную подгруппу, а все конечные декартовы степени группы также алгоритмически конечны.

Как было показано в работе Ф. Левина 1962 г., каждая конечная группа G вкладывается в группу порядка $2|G|^2$, в которой все элементы группы G являются квадратами. В девятом разделе (глава 20) доказывается, что существует бесконечно много попарно неизоморфных конечных групп G_i, $i \in I$, таких, что для каждого $i \in I$ и некоторого $g_i \in G_i$ любая группа, содержащая G_i в качестве подгруппы и содержащая элемент, квадрат которого равен g_i, имеет порядок $\geq |G_i|^2$. Этот результат показывает, что для конечной группы G число $2|G|^2$ в качестве универсальной зависящей лишь от $|G|$ оценки сверху для минимального порядка содержащей G группы, в которой все элементы G являются квадратами, близко к наилучшему значению.

Результаты десятого раздела (главы 21-26) посвящены двум связанным направлениям исследований, представляющим большой интерес, причем не только для теории групп, но и, например, для топологии. Одно из них — разрешимость уравнений над группами, другое — изучение строения групп, получающейся из группы, заданной порождающими и соотношениями, добавлением новых порождающих и одного соотношения. Известная гипотеза Левина состоит в том, что над группой без кручения разрешимо любое нетривиальное уравнение. Одним из важнейших продвижений в доказательстве этой гипотезы является полученный ранее диссертантом результат о ее справедливости для унимодулярных (т. е. таких, у которых сумма показателей неизвестной равна 1) уравнений. В главе 21 этот результат обобщается на случай унимодулярных обобщенных (т. е. зависящих от нескольких неизвестных, сумма показателей которых равна 1) уравнений над группой без кручения. Другая известная гипотеза в комбинаторной теории групп — гипотеза Кервера–Лауденбаха — утверждает, что для произвольной нетривиальной группы G любая группа $\tilde{G}$, получающаяся из G добавлением одного порождающего и одного соотношения (т. е. факторгруппа свободного произведения G и бесконечной циклической группы по нормальной подгруппе, порожденной как нормальная подгруппа одним элементом) также нетривиальна. Как замечено диссертантом, эта гипотеза эквивалентна гипотезе, утверждающей, что для непростой группы G группа $\tilde{G}$ также непроста. В главе 22 доказывается, в частности, что непростота группы G без кручения влечет непростоту $\tilde{G}$. Для случая, когда группа G не имеет кручения, а добавляемое соотношение задается унимодулярным относительно добавляемого порождающего словом, доказывается, что за явно указываемыми вырожденными исключениями группа $\tilde{G}$ содержит неабелеву свободную подгруппу (глава 23) и имеет тривиальный центр (глава 25). Кроме того, в десятом разделе доказывается, что группа, получающаяся добавлением к нетривиальной группе без кручения двух или более новых порождающих и одного соотношения, является большой в нескольких смыслах (главы 23, 24, 25). Доказывается также, что в определенном смысле большой является группа, получающаяся из нетривиальной группы добавлением одного нового порождающего и одного соотношения, являющегося унимодулярным относительно добавляемого порождающего словом в степени ≥ 2 (глава 26).

Важные результаты Р. Стйнберга, Дж. Хамфри, А. Бореля и Ж. Титса, опи-

сывающие автоморфизмы групп Шевалле над полями и изоморфизмы между группами Шевалле над полями, инициировали многочисленные и представляющие значительный интерес исследования, в которых эти результаты обобщались на группы Шевалле над различными ассоциативными и коммутативными кольцами. В одиннадцатом разделе (глава 27) получены описание автоморфизмов присоединенных групп Шевалле ранга большего единицы над $\mathbf{Q}$-алгебрами и, с использования этого результата, описание изоморфизмов между присоединенными группами Шевалле, соответствующими одной и той же неприводимой системе корней ранга большего единицы, над $\mathbf{Q}$-алгебрами. Сходные результаты были ранее получены Ю Ченом, но при дополнительном условии отсутствия у $\mathbf{Q}$-алгебр делителей нуля.

В заключительном двенадцатом разделе (глава 28) с использованием результатов А. Ю. Ольшанского доказывается существование такой неединичной конечно порожденной группы без кручения и такого уравнения (с одним неизвестным) над ней, что решениями этого уравнения являются в точности все неединичные элементы группы. Следствием этого представляющего и самостоятельный интерес результата является существование счетной нетопологизируемой группы без кручения, что дает ответ на вопрос П. И. Кирку. Кроме того, с использованием этого результата доказывается существование для любой пары кардиналов с бесконечной суммой такой группы и такого уравнения (с одной неизвестной) над ней, что первый кардинал является числом решений этого уравнения в группе, а второй — числом нерешений этого уравнения в группе.

Можно констатировать, что диссертационная работа выполнена на высоком математическом уровне, получены глубокие и сложные результатов, имеющие важное значение для ряда направлений комбинаторной алгебры и, прежде всего, комбинаторной теории групп. Используемые в доказательствах разнообразные методы в значительной мере разработаны диссертантом.

К недостаткам изложения можно отнести имеющиеся повторения в различных главах одного того же раздела формулировок результатов, мотивирующих тематику этого раздела, и некоторых определений. Однако это и облегчает чтение диссертации. Имеется несколько (очень мало для текста такого объема) несущественных опечаток. Перечисленные замечания незначительны и не снижают научную ценность диссертации.

Диссертационная работа А. А. Клячко представляет собой завершенную научную работу. Результаты диссертации являются новыми, актуальными и вносят большой вклад в ряд важных направлений комбинаторной теории групп и, шире, комбинаторной алгебры. Все они сопровождаются строгими математическими доказательствами. Основные результаты диссертации своевременно опубликованы в ведущих международных и российских математических журналах (26 статей) и докладывались на различных международных научных конференциях. Некоторые из результатов диссертации опубликованы в соавторстве. Все эти результаты, как указано в диссертации, получены в неразделимом соавторстве. Автореферат правильно и полно отражает содержание диссертации.

Считаю, что диссертационная работа А. А. Клячко «Уравнения в группах и смежные вопросы» является научно-квалификационной работой, соответствующей критериям, определенным пп. 2.1-2.5 «Положения о присуждении ученых степеней в Московском государственном университете имени М. В. Ломоносова», и оформленной согласно приложениям № 5, 6 «Положения о диссертаци-

онном совете Московского государственного университета имени М. В. Ломоносова». По моему мнению, автор диссертации заслуживает присуждения ему ученой степени доктора физико-математических наук по специальности 1.1.5 — «Математическая логика, алгебра, теория чисел и дискретная математика» (01.01.06 — «Математическая логика, алгебра и теория чисел»).

Официальный оппонент:
доктор физ.-мат. наук (специальность
01.01.06 — «Математическая логика,
алгебра и теория чисел»),
ведущий научный сотрудник
отдела алгебры и топологии
Федерального государственного
бюджетного учреждения науки
Института математики и механики
им. Н. Н. Красовского
Уральского отделения
Российской академии наук Трофимов Владимир Иванович

31 августа 2022 г.

Подпись В. И. Трофимова заверяю:
ученый секретарь Института
кандидат физ.-мат. наук О. Н. Ульянов

Почтовый адрес:
ул. С. Ковалевской, 16, Екатеринбург, 620108,
Институт математики и механики
им. Н. Н. Красовского УрО РАН
Телефон: +7 (343) 3628107
E-mail: trofimov@imm.uran.ru