

МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
имени М.В. ЛОМОНОСОВА
МЕХАНИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТЕТ

На правах рукописи



Абдухакимов Фаррух Адхамович

Новые задачи флаттера авиационных конструкций

Специальность 1.1.9 Механика жидкости газа и плазмы

ДИССЕРТАЦИЯ

на соискание учёной степени

кандидата физико-математических наук

Научный руководитель
доктор физико-математических наук,
Веденеев Василий Владимирович

Москва – 2023

Оглавление

Введение	5
1 Флаттер прямоугольных панелей обшивки при ненулевом угле скольжения	15
1.1 Обзор литературы	15
1.2 Постановка задачи.....	17
1.3 Уравнения движения.....	18
1.3.1 Волновое уравнение.....	18
1.3.2 Возмущение давления	21
1.3.3 Уравнение малых возмущений пластины	21
1.3.4 Граничные и начальные условия.....	22
1.3.5 Замкнутая система уравнений	24
1.4 Распределение давления.....	26
1.4.1 Преобразование выражения для потенциала возмущения скорости.....	26
1.4.2 Преобразование выражения возмущения давления	36
1.5 Метод расчета.....	38
1.6 Исследование сходимости.....	39
1.7 Результаты.....	43
1.7.1 Первая мода	43
1.7.2 Вторая мода	50
1.8 Выводы	53
2 Флаттер панелей обшивки различной формы	55
2.1 Постановка задачи.....	55
2.2 Энергетический метод	56
2.2.1 Уравнение изменения энергии.....	56
2.3 Работа сил давления на периоде колебания	61
2.4 Расчет собственных частот	62
2.5 Аэродинамический расчет.....	64
2.6 Результаты.....	65
2.6.1 Верификация.....	65
2.6.2 Трапецевидная пластина	67

2.6.3	Пластина в форме параллелограмма.....	69
2.7	Выводы	71
3	Флаттер лопаток компрессоров газотурбинных двигателей	73
3.1	Обзор литературы	73
3.2	Постановка задачи.....	76
3.3	Метод прогнозирования флаттера.....	79
3.3.1	Собственное колебание лопасти.....	80
3.3.2	Работа нестационарных сил давления	81
3.4	Расчет собственных форм и частот	82
3.4.1	Конечно-элементная модель	83
3.4.2	Результаты	84
3.5	Аэродинамический расчет.....	85
3.5.1	Расчет установившегося течения в компрессоре.....	86
3.5.2	Расчет установившегося течения для ступени.....	89
3.5.3	Нестационарный расчет.....	90
3.6	Результаты расчета флаттера	91
3.6.1	Фиксированное значение натяга	91
3.6.2	Влияние монтажного натяга	92
3.7	Выводы	94
4	Флаттер лопастей несущих винтов вертолета.....	96
4.1	Обзор литературы	96
4.2	Постановка задачи.....	98
4.3	Численный метод	99
4.3.1	Нелинейный статический расчет	100
4.3.2	Редукция модели	110
4.3.3	Силы, обусловленные колебанием лопасти	111
4.3.4	Несущая система вертолета	117
4.3.5	Численный расчет флаттера.....	120
4.3.6	Маховые колебания	121
4.3.7	Численный расчет флаттера лопастей, совершающих маховые колебания	122

4.4	Результаты.....	125
4.4.1	Статический расчет.....	125
4.4.2	Расчет собственных форм и частот.....	126
4.4.3	Флаттер.....	128
4.5	Выводы.....	131
	Заключение.....	132
	Список литературы.....	133
	Приложение А.....	149

Введение

Актуальность работы

Явление флаттера, то есть динамической неустойчивости упругой конструкции в потоке воздуха, встречается в различных системах: крыло самолета, панель обшивки, лопатка компрессора, лопасть несущего винта вертолета, мосты и т. д. [1]. В настоящей работе исследуются такие явления, как панельный флаттер, флаттер лопаток компрессоров газотурбинных двигателей и флаттер лопастей несущей системы вертолета.

В первой задаче настоящей работы исследуется панельный флаттер — явление потери устойчивости и интенсивных вибраций панелей обшивок летательных аппаратов, возбуждающихся при взаимодействии с потоком воздуха при больших скоростях полета. Обычно панельный флаттер приводит не к немедленному разрушению летательного аппарата, а к накоплению усталостных повреждений панелей [2]. Это может привести к ухудшению аэроупругих свойств летательного аппарата и даже к разрушению других его систем. Существует два типа панельного флаттера. Первый из них, связанный флаттер, обусловлен взаимодействием двух собственных мод колебания. Данный тип панельного флаттера детально изучен с применением поршневой теории. При втором типе, одномодовом флаттере, не происходит слияния собственных частот и существенного изменения формы колебания. Одномодовый флаттер возникает при малой сверхзвуковой скорости, где поршневая теория неприменима, и поэтому необходимо использовать более сложные аэродинамические модели. В литературе отсутствуют работы, в которых изучается геометрическая форма пластины и угол скольжения при малых сверхзвуковых скоростях. Кроме того, известно, что при больших сверхзвуковых скоростях ненулевой угол скольжения может привести к уменьшению критических скоростей флаттера. Поэтому исследование влияния геометрической формы пластины и угла скольжения на границы флаттера при малых сверхзвуковых скоростях является новым и актуальным.

Во второй задаче рассматривается флаттер лопаток [3]. Опасность этого явления заключается в быстром росте напряжений в лопатках, что может привести

к их разрушению. Наиболее распространенный метод прогнозирования флаттера лопаток основан на обработке большого числа проведенных испытаний реальных двигателей. При этом используются различные эмпирические и упрощенные критерии возникновения флаттера. Такие критерии не могут оценить влияние конструктивных параметров, не входящих в число определяющих, на прогнозирование флаттера лопаток. Другие известные методы, такие как прямое численное моделирование развития аэроупругих колебаний во времени и решение задачи на собственные частоты аэроупругой системы, требуют значительных вычислительных ресурсов. Таким образом, поскольку исследование влияния таких параметров, как величина радиального зазора, угла прикрытия/открытия входного направляющего аппарата, радиальной неравномерности потока и величина монтажного натяга в бандажных полках, на границы флаттера лопаток ранее не проводилось, то оно является новым и актуальным.

Третья задача посвящена флаттеру лопастей несущей системы вертолета, опасному явлению, которое может привести к его крушению [4]. В отечественном вертолетостроении накоплен большой научный и практический опыт исследования флаттера лопастей несущей системы. При этом используются различные расчетные методы. Для одних из этих методов требуется уточнение аэродинамических моделей, например, для учета периодичности течения. Для других – необходимо совершенствование упругих моделей, например, для учета упругого взаимодействия лопастей и возможности возникновения флаттера по высшим модам. Поэтому является актуальной задача разработки математической модели и ее программной реализации, позволяющей выявить возникновение флаттера по высшим модам и изучить влияние периодичности течения и упругого взаимодействия лопастей через валы и систему тяг на границы флаттера.

Степень разработанности приведена в разделах 1.1, 3.1, 4.1.

Цели и задачи

1. Исследование с помощью теории потенциального течения устойчивости прямоугольной панели обшивки при малых сверхзвуковых и трансзвуковых скоростях для различных углов скольжения.
2. Изучение с помощью энергетического метода одномодового флаттера пластин, имеющих форму параллелограмма и трапеции, при малых сверхзвуковых и трансзвуковых скоростях.
3. Исследование влияния конструктивных параметров на границы флаттера лопаток компрессоров газотурбинных двигателей с помощью энергетического метода.
4. Разработка математической модели и ее реализации в виде программного обеспечения для исследования флаттера лопастей несущих винтов вертолета. Проведение аэроупругого анализа несущей системы вертолета.

Научная новизна

1. Исследовано влияние изменения угла скольжения на возникновение панельного флаттера при малых сверхзвуковых скоростях
2. Изучено влияние геометрической формы и размеров панелей обшивки на границы одномодового флаттера;
3. Проведен анализ того, какие конструктивные параметры влияют на прогнозирование флаттера лопаток существенно, а какие – незначительно;
4. Развита ранее разработанный метод численного расчета флаттера для учета изменения формы колебаний лопаток при движении бегущей волны по лопаточному венцу
5. Исследовано влияние упругого взаимодействия лопастей несущего винта на границы флаттера.

Теоретическая и практическая значимость

Результаты, полученные в работе, важны для развития знаний в области аэроупругости летательных аппаратов при малых сверхзвуковых и трансзвуковых скоростях, а также знаний о динамическом поведении лопаток рабочих колес компрессоров и лопастей несущей системы вертолетов и механизмов возникновения флаттера. Практическая значимость работы состоит в том, что ее результаты могут быть использованы для построения эффективных методов прогнозирования и подавления флаттера. Это будет способствовать совершенствованию конструкций летательных аппаратов и повышению безопасности их полетов.

Методология и Методы исследования.

Исследование влияния угла скольжения на границы флаттера при малых сверхзвуковых и трансзвуковых скоростях проводится численно с помощью метода, основанного на теории потенциального течения газа и теории малых колебаний пластины в потоке. Задача на собственные значения решается методом Бубнова-Галеркина.

Для изучения влияния формы панели обшивки и конструктивных параметров газотурбинного двигателя на границы флаттера применяется энергетический метод. Расчёт собственных форм и частот проводится методом конечных элементов; расчёт неустановившегося обтекания колеблющейся конструкции – методом контрольных объёмов.

Анализ аэроупругости несущей системы вертолета проводится с использованием метода конечных элементов. Численный метод предполагает расчет флаттера с учетом напряжено-деформированного состояния, определенного в нелинейном статическом расчете, нагрузок, обусловленных колебанием лопасти, а также конструкционного демпфирования. Аэродинамические нагрузки определяются по квазистатической теории.

Положения, выносимые на защиту

1. Изменение угла скольжения приводит к нерегулярности границ флаттера и образованию дополнительных изолированных областей неустойчивости и устойчивости. Анализ флаттера только при нулевом угле скольжения не является достаточным.
2. При уменьшении геометрического угла скоса повышается аэроупругая устойчивость пластин в форме параллелограмма при трансзвуковых и малых сверхзвуковых скоростях потока. Границы одномодового флаттера для трапецевидных пластин близки к границам флаттера для прямоугольной пластины при различных геометрических углах скоса.
3. Значение монтажного натяга в бандажных полках рабочих лопаток компрессора газотурбинного двигателя существенно влияет на границу флаттера из-за изменения формы колебаний лопаток. Влияние таких параметров, как радиальный зазор между торцом лопатки и корпусом компрессора, угол прикрытия и открытия входного направляющего аппарата, радиальная неравномерность потока на входе в двигатель на границы флаттера незначительно. Из-за падения монтажного натяга в бандажных полках лопаток в процессе эксплуатации двигателя возможно возникновение флаттера лопаток, который отсутствовал при монтажном натяге в начале эксплуатации двигателя.
4. Упругое взаимодействие лопастей через валы приводит к изменению форм и частот колебаний. В свою очередь, изменение форм колебания лопастей может привести к изменению границ флаттера. Флаттер возникает на высших модах колебания, на которых он не может быть обнаружен с помощью упрощенных методов.

Достоверность результатов обусловлена использованием классических математических методов механики сплошных сред. Для численных расчётов использованы подходы, основанные на апробированных методах: методе конечных элементов и методе конечных объемов. Достоверность также обеспечена

исследованием по каждому типу расчетов сходимости по пространственным сеткам и временному шагу, сравнением с решениями задачи другими методами и другими авторами, сравнением с экспериментальными данными.

Апробация работы. Результаты диссертации докладывались автором и обсуждались на семинаре НИИ механики МГУ по механике сплошных сред под руководством академика РАН А.Г. Куликовского, профессора В.П. Карликова, член-корр. РАН О.Э. Мельника, профессора А.Н. Осипцова.

Постановки задач и результаты работы также обсуждались на семинаре Высшей школы теоретической механики Санкт-Петербургского политехнического университета под руководством члена-корреспондента РАН А.М. Кривцова.

Основные результаты работы были представлены на следующих конференциях:

- Всероссийский съезд по фундаментальным проблемам теоретической и прикладной механики (XII Уфа 2019, XIII Санкт-Петербург 2023)
- Всероссийская конференция молодых учёных-механиков (Сочи 2018, 2021, 2022)
- Ломоносовские чтения (Москва 2016, 2018, 2019, 2020, 2021)
- VII Открытая Всероссийская (XIX научно-техническая) конференция по аэроакустике (Геленджик 2021)
- ASME Pressure Vessels & Piping, Virtual Conference (США 2021)
- Международная научно-техническая конференция “Проблемы и перспективы развития двигателестроения” (Самара 2021)
- XLIX International Summer School – Conference Advanced Problems in Mechanics (St. Petersburg 2021)
- XV Всероссийская школа-конференция для молодых ученых «Проблемы механики: теория, эксперимент и новые технологии» (Новосибирск 2021)
- XIX Всероссийская конференция "Современные проблемы аэрогидродинамики" (Сочи 2016, 2019)

- International Scientific Conference on High Speed Turbomachines and Electrical Drives (HSTED) (Санкт-Петербург 2019)
- «Динамика, прочность, надежность авиационных газотурбинных двигателей», конференция посвященная 100-летию со дня рождения И. А. Биргера (Москва 2019)
- 9th International Symposium on Fluid-Structure Interactions, Flow-Sound Interactions, Flow-Induced Vibration & Noise (Toronto, Ontario, Canada 2018)
- IV Всероссийская научно-техническая конференция "Динамика и прочность конструкций аэрогидроупругих систем. Численные методы" (Москва 2017)
- Вопросы прикладной математики и проблема взаимодействия твёрдых тел с жидкой и газовой средой: Всероссийская конференция, посвящённая 85-летию И. А. Кийко (Москва 2017)
- Конференция-конкурс молодых ученых НИИ механики МГУ (Москва 2017)
- International Conference on Aerospace Technology, Communications and Energy Systems (ATCES 2017) (Samara 2017)
- Международный симпозиум «Динамические и технологические проблемы механики конструкций и сплошных сред» им. А.Г. Горшкова (Калужская область, XXII 2016, XXIII 2017)
- First International Symposium on Flutter and its Applications (Токуо, Япония 2016)
- XXVII Научно-Техническая Конференция по Аэродинамике (Московская область 2016)
- XXII Международная конференция «Нелинейные Задачи Теории Гидродинамической Устойчивости и Турбулентность» (Московская область 2016)
- Авиадвигатели XXI века (Москва 2015)

Полученные в диссертации результаты содержатся в научно-квалификационной работе на тему: «Применение энергетического метода для решения задач флаттера конструкций в газовых потоках», которая была успешно

защищена автором при окончании аспирантуры механико-математического факультета МГУ имени М.В. Ломоносова.

Публикации

Результаты диссертации изложены в 10 работах из них 5 статей опубликованы в изданиях, индексируемых в базах данных Web of Science, Scopus или RSCI.

Личный вклад автора.

Автором было выведено выражения для возмущения давления при ненулевом угле скольжения и разработана программа для расчета границ флаттера пластины с учетом этого выражения, проведены численные исследования; был разработан метод для численного исследования границ одномодового флаттера пластин непрямоугольной формы с применением энергетического метода, были построены расчетные модели и проведены соответствующие численные расчеты. Кроме того, автор участвовал в усовершенствовании ранее разработанного метода прогнозирования флаттера лопаток для учета изменения формы колебаний лопаток при движении бегущей волны по лопаточному венцу; были построены модели для расчета установившегося и неустойчивого течения воздуха в исследуемом рабочем колесе компрессора и проведены численные исследования влияния конструктивных параметров на прогнозирование флаттера лопаток. Автор участвовал в разработке метода прогнозирования флаттера лопастей несущего винта вертолета и его программной реализации. Автором проведен аэропругий анализ несущей системы с помощью разработанного метода на нескольких режимах. В постановке задач, обсуждении результатов, в разработке методов прогнозирования флаттера и подготовке совместных научных публикаций принимал участие соавтор, научный руководитель Веденеев В.В. Другие соавторы, Колотников М.Е., Макаров П.В и Чепига С.А., принимали участие в постановке задачи, обсуждении результатов исследования флаттера лопаток. В разработке метода прогнозирования флаттера лопастей несущей системы вертолета и обсуждении результатов исследования участвовали Жидяев К.А. и Бондарев В.О.

В работах [139, 141, 143] авторский вклад соискателя составляет $2/3$, в работах [140, 144] авторский вклад соискателя составляет $1/4$.

Объем и структура работы.

Диссертация состоит из введения, четырех глав, заключения, списка литературы и приложения. Полный объем диссертации составляет 152 страницы, включая 72 рисунка и 5 таблиц. Список литературы содержит 171 наименование.

Глава 1 посвящена исследованию устойчивости серии прямоугольных пластин при различных углах скольжения. Дан обзор основных работ по панельному флаттеру. Приведен вывод распределения возмущения давления и общего решения для потенциала возмущения скорости течения газа. Проведено исследование сходимости по параметрам численного метода. Определены значения численных параметров, достаточные для получения точных результатов. Получены границы неустойчивости при ненулевых углах скольжения. Проанализированы механизмы возникновения флаттера, их схожесть и отличия от случая нулевого угла скольжения.

В главе 2 с помощью энергетического метода изучена устойчивость пластин различной формы. Приведен вывод уравнения энергии для общего случая линейно упругого тела и в случае тонкой упругой пластины. Получены границы одномодового флаттера для пластин в форме прямоугольника, трапеции и параллелограмма. Проведена верификация результатов расчетов прямоугольной задачи сравнением с результатами расчета с использованием теории потенциального течения.

В главе 3 энергетический метод применяется для исследования влияния параметров конструкции и течения газа на прогнозирования флаттера лопаток компрессоров газотурбинных двигателей. Определены собственные частоты и формы колебания лопаток. Определены границы флаттера при различных конфигурациях. Показаны, какие параметры существенно влияют на расчет флаттера, а какие незначительно.

Глава 4 посвящена исследованию флаттера лопастей несущей системы вертолета. Описан метод расчета флаттера лопастей в трехмерной постановке. Рассмотрены три режима. Показаны параметры, при которых возникает неустойчивость лопастей несущей системы или наблюдается их устойчивость. Приведены рекомендации по подавлению флаттера.

1 Флаттер прямоугольных панелей обшивки при ненулевом угле скольжения¹

1.1 Обзор литературы

В разделе приводится краткий обзор основных, по мнению автора, работ по панельному флаттеру. Подробные обзоры исследований флаттера пластин и оболочек приведены в книгах [2, 5 – 7], а также в работах [8 – 10].

Первый тип флаттера панели, связанный флаттер, возникает из-за взаимодействия двух собственных мод колебаний. Флаттер связанных мод подробно изучался с использованием поршневой теории [11 – 18], которая пригодна в качестве аэродинамической модели при высоких сверхзвуковых скоростях ($M > 2$). Второй тип флаттера панели, одномодовый флаттер, вызывается отрицательным аэродинамическим демпфированием. В этом случае не происходит слияния собственных частот и существенного изменения формы моды колебаний. Одномодовый флаттер возникает при малой сверхзвуковой скорости, где поршневая теория не применима, и поэтому необходимо использовать более общие аэродинамические модели [19 – 27]. Веденеевым [28] был аналитически исследован связанный и одномодовый флаттер упругой полосы. С помощью теории глобальной неустойчивости [29, 30] определены критерии возникновения обоих типов панельного флаттера. Позже изучено влияние длины пластины на границы флаттера [31] и исследован флаттер прямоугольной пластины [32]. В работах [33 – 36] с помощью теории потенциального течения [37] проведено численное исследование флаттера пластины. Изучено влияние различных факторов на границы неустойчивости, в том числе плотность газа, натяжение пластины [34], конструкционное демпфирование [35]. В [34] рассматривались шарнирно опертые пластины. Было получено, что в отличие от связанного типа панельного флаттера плотность газа незначительно влияет на границы одномодового флаттера. Также результаты показали, что натяжение пластины приводит к сдвигу границ

¹ При подготовке данной главы диссертации использовались следующие публикации автора, в которых, согласно «Положению о присуждении ученых степеней в Московском государственном университете имени М.В.Ломоносова», отражены основные результаты, положения и выводы исследования: [143, 146, 150 – 153, 155].

одномодового флаттера по низшим модам в сторону больших чисел Маха и больших длин (отнесенных к толщине) пластин, а по более высоким модам - к большим числам Маха. В работе [35] было показано, что при учете конструкционного демпфирования увеличивается длина пластины, а также уменьшается диапазон чисел Маха, при которых возникает флаттер. Однако для длинных пластин и пластин, созданных из легких материалов, уровень демпфирования, необходимый для подавления флаттера, настолько высок, что для его получения необходимы дополнительные демпфирующие механизмы. Шитов и Веденеев [36] исследовали границы флаттера для изолированной прямоугольной пластины и бесконечного ряда прямоугольных пластин. При различных размерах пластины и трансзвуковых и малых сверхзвуковых скоростях полета для четырех мод построены границы неустойчивости. Показано, как изменяются границы одномодового и связанного флаттера при изменении числа Маха и размеров пластины.

Долгое время одномодовый флаттер рассматривался как несущественный, несмотря на то, что он проявлялся в ряде экспериментов [38, 39]. Но в работе [40] была рассмотрена модель, исключая связанный флаттер, и одномодовый флаттер был подтвержден экспериментально. Проведено сравнение с теоретическими исследованиями. Получено хорошее согласование результатов.

Ряд работ посвящен флаттеру пластины с учетом пограничного слоя [17, 21, 24, 38, 39, 41 - 46]. Определены условия как стабилизирующего воздействия пограничного слоя, так и дестабилизирующего.

Панельный флаттер изучается в нелинейной постановке при трансзвуковых и малых сверхзвуковых скоростях в работах [21, 43, 47 - 51].

В большинстве исследований панельного флаттера рассматриваются прямоугольные пластины и поток, перпендикулярный передней кромке. Лишь в нескольких работах [52 - 54] исследуется флаттер панели при ненулевом угле скольжения. Однако они использовали поршневую теорию или ее модификации, применимые только при больших числах Маха.

Вопросу о влиянии формы пластины посвящен ряд работ [55 – 64]. В этих работах также используются различные модификации поршневой теории.

Таким образом проблеме флаттера пластины при малых сверхзвуковых и трансзвуковых скоростях посвящено небольшое количество исследований, а работы, в которых изучается форма пластины и угол скольжения при малых сверхзвуковых скоростях, отсутствуют. Этому посвящены первая и вторая глава.

1.2 Постановка задачи

В линейной постановке исследуется устойчивость бесконечной серии тонких упругих прямоугольных пластин при ненулевом угле скольжения потока θ (Рис. 1.1). Каждая пластина шарнирно оперта по всем краям. Пластины с одной стороны обтекаются потоком невязкого совершенного газа. С другой стороны пластин, задано постоянное давление, так что невозмущенное состояние пластин – плоское.

Используется линейная теория пластин Киргоффа-Лява [65]. Растяжением срединной плоскости пластины пренебрегаем.

Рассматривается адиабатическое движение газа. Предполагается, что невозмущенное течение – однородно. Массовыми силами пренебрежём. Изучается случай сверхзвуковой передней кромки, то есть выполнено условие:

$$M \cos(\theta) > 1, \quad (1.1)$$

где M – число Маха.

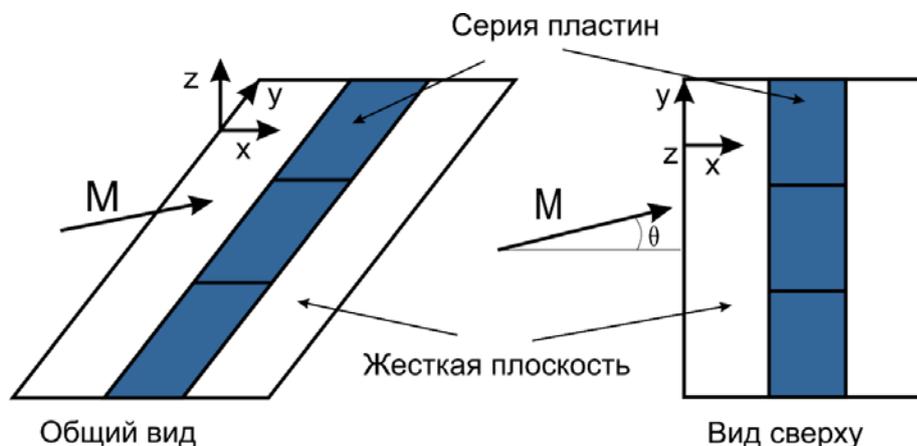


Рис. 1.1. Геометрия задачи

В следующем разделе в рамках рассматриваемой постановки задачи выводятся уравнения движения газа и пластины.

1.3 Уравнения движения

1.3.1 Волновое уравнение

Выведем сначала волновое уравнение для малых возмущений газа. Зададим систему координат ξ, η, z , связанную с потоком газа: ось ξ направим вдоль потока, а η – поперек него, z – перпендикулярно поверхности пластины (Рис. 1.2). Также введем систему координат x, y, z , связанную с пластиной: оси x и y направлены вдоль соответствующих сторон пластины.

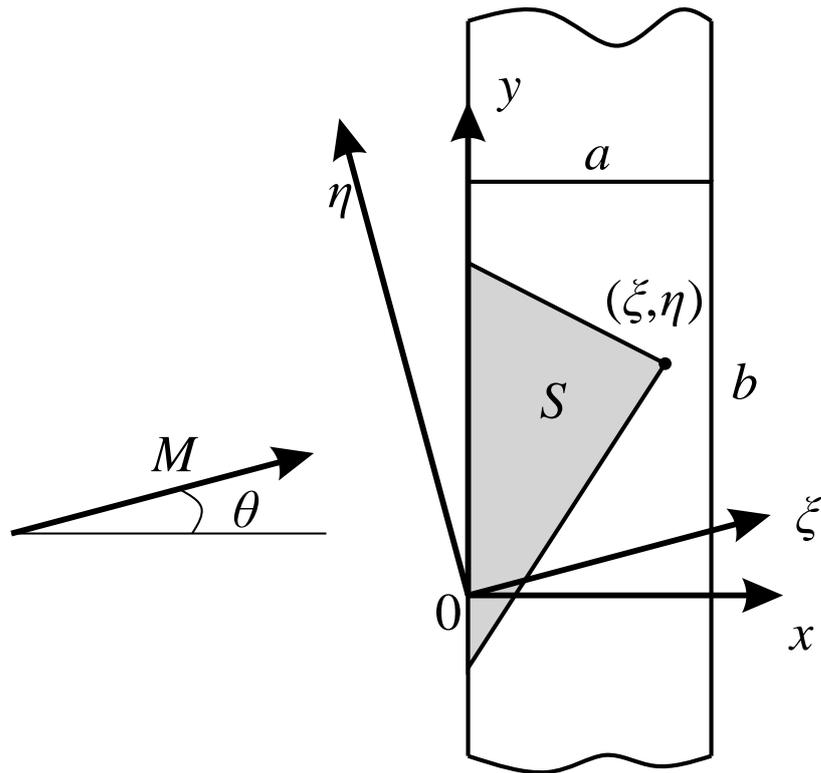


Рис. 1.2. Обтекание пластины

В рамках рассматриваемой постановки задачи в силу теорем Томпсона и Лагранжа [66] возмущенное течение будет потенциальным, то есть скорость течения газа \mathbf{v} обладает потенциалом φ :

$$\mathbf{v} = \text{grad}\varphi, \quad (1.2)$$

где жирным шрифтом обозначена векторная величина.

Будем рассматривать малые возмущения газа:

$$\begin{aligned} \varphi &= \varphi_0 + \varphi' \\ \rho &= \rho_0 + \rho' \\ p &= p_0 + p', \end{aligned} \quad (1.3)$$

где φ_0, ρ_0, p_0 – параметры невозмущенного газа (потенциал скорости, плотность и давление), φ', ρ', p' – малые возмущения потенциала скорости газа, плотности газа и давления газа соответственно.

Так как течение газа адиабатично и баротропно, то в предположении, что движение достаточно гладко, справедливы уравнения неразрывности и импульсов в форме интегралов Коши-Лагранжа [67] для возмущенного:

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{d\rho}{dt} + \rho \cdot \operatorname{divgrad}\varphi = 0 \\ \frac{\partial\varphi}{\partial t} + \frac{|\operatorname{grad}\varphi|^2}{2} + \frac{\gamma}{\gamma-1} \frac{p}{\rho} = f_1(t) \\ p = C\rho^\gamma \end{array} \right. \quad (1.4)$$

и невозмущенного течения газа:

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{d\rho_0}{dt} + \rho_0 \cdot \operatorname{divgrad}\varphi_0 = 0 \\ \frac{\partial\varphi_0}{\partial t} + \frac{|\operatorname{grad}\varphi_0|^2}{2} + \frac{\gamma}{\gamma-1} \frac{p_0}{\rho_0} = f_2(t) \\ p_0 = C\rho_0^\gamma \end{array} \right. \quad (1.5)$$

где γ – отношение теплоемкости при постоянном давлении к теплоемкости при постоянном объеме. Третье выражение в (1.4) и (1.5), связывающее давление и плотность газа, является адиабатой Пуассона [66].

Для невозмущенного течения газа примем:

$$\operatorname{grad}\varphi_0 = (u_\xi, 0, 0) \quad (1.6)$$

Вычитая соответствующие уравнения (1.5) из уравнений (1.4), учитывая (1.6) и пренебрегая малыми величинами выше первого, получим:

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial\rho'}{\partial t} + u_\xi \frac{\partial\rho'}{\partial\xi} + \rho_0\Delta\varphi' = 0 \\ \frac{\partial\varphi'}{\partial t} + u_\xi \frac{\partial\varphi'}{\partial\xi} + \frac{\gamma}{\gamma-1} \left(\frac{p_0 + p'}{\rho_0 + \rho'} - \frac{p_0}{\rho_0} \right) = f_3(t) \\ p = C\rho^\gamma \\ p_0 = C\rho_0^\gamma \end{array} \right. \quad (1.7)$$

Рассмотрим выражение $\frac{\gamma}{\gamma-1} \left(\frac{p_0 + p'}{\rho_0 + \rho'} - \frac{p_0}{\rho_0} \right)$. Учитывая, что

$$p_0 + p' = p = C\rho^\gamma = C(\rho_0 + \rho')^\gamma$$

имеем следующее:

$$\begin{aligned} \frac{\gamma}{\gamma-1} \left(\frac{p_0 + p'}{\rho_0 + \rho'} - \frac{p_0}{\rho_0} \right) &= \frac{\gamma}{\gamma-1} (C(p_0 + p')^{\gamma-1} - C\rho_0^{\gamma-1}) = \\ &= \frac{\gamma}{\gamma-1} C\rho_0^{\gamma-1} \left[\left(1 + \frac{\rho'}{\rho_0} \right)^{\gamma-1} - 1 \right] \end{aligned}$$

Используя разложение $\left(1 + \frac{\rho'}{\rho_0} \right)^{\gamma-1}$ в ряд Тейлора, получим в первом приближении следующее выражение:

$$\frac{\gamma}{\gamma-1} \left(\frac{p_0 + p'}{\rho_0 + \rho'} - \frac{p_0}{\rho_0} \right) \approx \frac{\gamma}{\gamma-1} C\rho_0^{\gamma-1} \left(1 + (\gamma-1) \frac{\rho'}{\rho_0} - 1 \right) = \gamma \frac{p_0}{\rho_0} \cdot \frac{\rho'}{\rho_0}$$

Так как скорость звука невозмущенного газа a_0 равна $\sqrt{\gamma \frac{p_0}{\rho_0}}$, то окончательно имеем следующее выражение:

$$\frac{\gamma}{\gamma-1} \left(\frac{p_0 + p'}{\rho_0 + \rho'} - \frac{p_0}{\rho_0} \right) \approx a_0^2 \frac{\rho'}{\rho_0} \quad (1.8)$$

Примем также, что возмущения затухают на бесконечности, следовательно

$$f_3(t) \equiv 0$$

Тогда система (1.7) приводится к виду:

$$\begin{cases} \frac{\partial \rho'}{\partial t} + u_\xi \frac{\partial \rho'}{\partial \xi} + \rho_0 \Delta \varphi' = 0 \\ \frac{\partial \varphi'}{\partial t} + u_\xi \frac{\partial \varphi'}{\partial \xi} + a_0^2 \frac{\rho'}{\rho_0} = 0 \end{cases} \quad (1.9)$$

Полученную систему уравнений можно свести к одному уравнению. Для этого выразим из второго уравнения (1.9) возмущение плотности газа:

$$\rho' = -\frac{\rho_0}{a_0^2} \left(\frac{\partial \varphi'}{\partial t} + u_\xi \frac{\partial \varphi'}{\partial \xi} \right) \quad (1.10)$$

Определим производные по t и ξ :

$$\frac{\partial \rho'}{\partial t} = -\frac{\rho_0}{a_0^2} \left(\frac{\partial^2 \varphi'}{\partial t^2} + u_\xi \frac{\partial^2 \varphi'}{\partial t \partial \xi} \right) \quad (1.11)$$

$$\frac{\partial \rho'}{\partial \xi} = -\frac{\rho_0}{a_0^2} \left(\frac{\partial^2 \varphi'}{\partial t \partial \xi} + u_\xi \frac{\partial^2 \varphi'}{\partial \xi^2} \right) \quad (1.12)$$

Поставим выражения (1.11) – (1.12) в первое уравнение (1.9) и получим в итоге волновое уравнение для малых возмущений газа [68]:

$$\frac{\partial^2 \varphi'}{\partial t^2} + 2u_\xi \frac{\partial^2 \varphi'}{\partial \xi \partial t} + (u_\xi^2 - a_0^2) \frac{\partial^2 \varphi'}{\partial \xi^2} - a_0^2 \frac{\partial^2 \varphi'}{\partial \eta^2} - a_0^2 \frac{\partial^2 \varphi'}{\partial z^2} = 0 \quad (1.13)$$

1.3.2 Возмущение давления

Теперь выведем выражение для возмущения давления газа.

Предварительно, используя выражение, определяющее зависимость давления газа от его плотности, имеем следующее:

$$p' = p_0 + p' - p_0 = C(p_0 + p')^\gamma - C\rho_0^\gamma = C\rho_0^\gamma \left[\left(1 + \frac{\rho'}{\rho_0} \right)^\gamma - 1 \right]$$

Аналогично выводу выражений (1.9), применяя разложение в ряд Тейлора и учитывая выражения для возмущения плотности газа (1.10), получим выражение для возмущения давления газа [68]:

$$p' = -\rho_0 \left(\frac{\partial \varphi'}{\partial t} + u_\xi \frac{\partial \varphi'}{\partial \xi} \right) \quad (1.14)$$

1.3.3 Уравнение малых возмущений пластины

Получим уравнение малых возмущений пластины. Рассматривается тонкая пластина, то есть толщина пластины намного меньше двух других ее линейных размеров. Прогибы малы по сравнению с толщиной.

Предполагается, что, во-первых, любая прямая, нормальная к срединной плоскости пластины до деформации, остается прямой, нормальной к срединной плоскости после деформации. Во-вторых, взаимное давление слоев пластины, параллельных срединной поверхности, отсутствует. В-третьих, срединная плоскость нерастяжима. Тогда справедливо следующее уравнение малых возмущений пластины [69]:

$$D_w \left(\frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} \right) + \rho h \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} + p = 0 \quad (1.15)$$

$$x = x(\xi, \eta)$$

$$y = y(\xi, \eta)$$

$$w = w(x(\xi, \eta), y(\xi, \eta), t)$$

$$p = p(x(\xi, \eta), y(\xi, \eta), t),$$

где D_w – изгибная жесткость.

1.3.4 Граничные и начальные условия

Наконец рассмотрим граничные и начальные условия. Газ считается невязким, поэтому на поверхности пластины задается условие непротекания. Выведем это условие.

Уравнение поверхности пластины имеет вид:

$$F(\xi, \eta, z, t) = z - w(\xi, \eta, t) = 0 \quad (1.16)$$

Тогда

$$\frac{dF}{dt} = \frac{\partial F}{\partial t} + \mathbf{v}_T \nabla F = 0 \quad (1.17)$$

Нормальные составляющие скоростей частиц жидкости и пластины должны совпадать:

$$\mathbf{v}\mathbf{n} = v_n = v_{n_T} = \mathbf{v}_T \mathbf{n}, \quad (1.18)$$

где \mathbf{n} – нормаль к поверхности пластины, определяемая следующим образом:

$$\mathbf{n} = \frac{\nabla F}{|\nabla F|} \quad (1.19)$$

Учитывая уравнение поверхности пластины (1.16) и выражение (1.6), имеем

$$\frac{\partial F}{\partial t} = -\frac{\partial w}{\partial t},$$

$$\nabla F = \left\{ -\frac{\partial w}{\partial \xi}, -\frac{\partial w}{\partial \eta}, 1 \right\}$$

$$\mathbf{v} = \left\{ u_\xi + \frac{\partial \varphi'}{\partial \xi}, \frac{\partial \varphi'}{\partial \eta}, \frac{\partial \varphi'}{\partial z} \right\}$$

Тогда, пренебрегая величинами второго и более порядка, получаем следующее условие:

$$\left. \frac{\partial \varphi'}{\partial z} \right|_{z = w(\xi, \eta, t)} = \frac{\partial w}{\partial t} + u_\xi \frac{\partial w}{\partial \xi}$$

Раскладывая правую часть в ряд Тейлора

$$\frac{\partial \varphi'}{\partial z} \Big|_{z=w(\xi, \eta, t)} = \frac{\partial \varphi'}{\partial z} \Big|_{z=0} + \frac{\partial^2 \varphi'}{\partial z^2} \Big|_{z=0} \cdot w + O(w^2),$$

в линейном приближении получаем условие непротекания [5]:

$$\frac{\partial \varphi'}{\partial z} \Big|_{z=0} = \frac{\partial w}{\partial t} + u_\xi \frac{\partial w}{\partial \xi} \quad (1.20)$$

Как было отмечено выше, рассматриваются возмущения, затухающие на бесконечности. Соответственно, второе граничное условие для уравнения малых возмущений газа будем задавать в следующем виде:

$$\left(\frac{\partial \varphi'}{\partial \xi}, \frac{\partial \varphi'}{\partial \eta}, \frac{\partial \varphi'}{\partial z} \right) \rightarrow 0 \text{ при } z \rightarrow +\infty \text{ вдоль характеристик } z = \frac{\xi - \xi_0}{\sqrt{M^2 - 1}} \quad (1.21)$$

Поскольку рассматривается шарнирное опирание пластины по всем кромкам, то для уравнения (1.15) выполнено следующее граничное условие [69]:

$$w = 0, \quad \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = 0 \quad \text{при } x(\xi, \eta) = 0, x(\xi, \eta) = a \quad (1.22)$$

$$w = 0, \quad \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} = 0 \quad \text{при } y(\xi, \eta) = 0, y(\xi, \eta) = b, \quad (1.23)$$

где a – длина пластины, b – ширина пластина.

Так как уравнения (1.13) и (1.15) второго порядка, то в качестве начальных условий задаются значение при $t = 0$ для потенциала возмущения скорости и прогиба пластины, а также для их производных по времени:

$$\begin{aligned} \varphi'(\xi, \eta, z, 0) &= \varphi'_0(\xi, \eta, z), \\ \frac{\partial \varphi'(\xi, \eta, z, 0)}{\partial t} &= \varphi'_{t_0}(\xi, \eta, z) \end{aligned} \quad (1.24)$$

$$\begin{aligned} w(\xi, \eta, 0) &= w_0(\xi, \eta), \\ \frac{\partial w(\xi, \eta, 0)}{\partial t} &= w_{t_0}(\xi, \eta) \end{aligned} \quad (1.25)$$

1.3.5 Замкнутая система уравнений

С учетом приведенных выше уравнений движения и выражений справедлива следующая замкнутая система уравнений малых возмущений газа и пластины (штрих опущен):

$$\left\{ \begin{array}{l}
 \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} + 2u_\xi \frac{\partial^2 \varphi}{\partial \xi \partial t} + (u_\xi^2 - a_0^2) \frac{\partial^2 \varphi}{\partial \xi^2} - a_0^2 \frac{\partial^2 \varphi}{\partial \eta^2} - a_0^2 \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2} = 0 \\
 \frac{\partial \varphi}{\partial z} \Big|_{z=0} = \frac{\partial w}{\partial t} + u_\xi \frac{\partial w}{\partial \xi} \\
 \left(\frac{\partial \varphi}{\partial \xi}, \frac{\partial \varphi}{\partial \eta}, \frac{\partial \varphi}{\partial z} \right) \rightarrow 0 \text{ при } z \rightarrow +\infty \text{ вдоль характеристик } z = \frac{\xi - \xi_0}{\sqrt{M^2 - 1}} \\
 \varphi(\xi, \eta, z, 0) = \varphi_0(\xi, \eta, z), \frac{\partial \varphi(\xi, \eta, z, 0)}{\partial t} = \psi_0(\xi, \eta, z) \\
 p = -\rho_0 \left(\frac{\partial \varphi}{\partial t} + u_\xi \frac{\partial \varphi}{\partial \xi} \right) \\
 \left(\frac{\partial^4 w(\xi, \eta)}{\partial x^4(\xi, \eta)} + 2 \frac{\partial^4 w(\xi, \eta)}{\partial x^2(\xi, \eta) \partial y^2(\xi, \eta)} + \frac{\partial^4 w(\xi, \eta)}{\partial y^4(\xi, \eta)} \right) + \rho_m h \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} + p = 0 \\
 w = 0, \quad \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = 0 \quad \text{при } x(\xi, \eta) = 0, x(\xi, \eta) = a \\
 w = 0, \quad \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} = 0 \quad \text{при } y(\xi, \eta) = 0, y(\xi, \eta) = b \\
 \varphi(\xi, \eta, z, 0) = \varphi_0(\xi, \eta, z), \frac{\partial \varphi(\xi, \eta, z, 0)}{\partial t} = \varphi_{t_0}(\xi, \eta, z) \\
 w(\xi, \eta, 0) = w_0(\xi, \eta), \frac{\partial w(\xi, \eta, 0)}{\partial t} = w_{t_0}(\xi, \eta)
 \end{array} \right. \quad (1.26)$$

Перейдем к безразмерным величинам. Рассмотрим в качестве независимых параметров толщину пластины h , скорость звука невозмущенного газа a_0 , а также плотность материала пластины ρ_m . Тогда размерные величины выражаются через безразмерные следующим образом:

$$\varphi = \hat{\varphi} a_0 h, U_0 = M a_0, \xi = \hat{\xi} h, \eta = \hat{\eta} h, z = \hat{z} h, t = \frac{\hat{t} h}{a_0}, \quad (1.27)$$

$$w = \hat{w} h, p = \rho_0 a_0^2 \hat{p}, \rho_0 = \mu \rho_m, a = L_x h, b = L_y h, D_w = D a_0^2 \rho_m h^3$$

Таким образом, система безразмерных уравнений имеет вид (знак \wedge опущен):

$$\left\{ \begin{array}{l}
\frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} + 2M \frac{\partial^2 \varphi}{\partial \xi \partial t} + (M^2 - 1) \frac{\partial^2 \varphi}{\partial \xi^2} - \frac{\partial^2 \varphi}{\partial \eta^2} - \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2} = 0 \\
\frac{\partial \varphi}{\partial z} \Big|_{z=0} = \frac{\partial w}{\partial t} + M \frac{\partial w}{\partial \xi} \\
\left(\frac{\partial \varphi}{\partial \xi}, \frac{\partial \varphi}{\partial \eta}, \frac{\partial \varphi}{\partial z} \right) \rightarrow 0 \text{ при } z \rightarrow +\infty \text{ вдоль характеристик } z = \frac{\xi - \xi_0}{\sqrt{M^2 - 1}} \\
\varphi(\xi, \eta, z, 0) = \varphi_0(\xi, \eta, z), \frac{\partial \varphi(\xi, \eta, z, 0)}{\partial t} = \psi_0(\xi, \eta, z) \\
D\Delta^2 w + \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} + p = 0 \\
p = -\mu \left(\frac{\partial \varphi}{\partial t} + M \frac{\partial \varphi}{\partial \xi} \right) \\
w = 0, \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = 0 \text{ при } x = 0, x = L_x; w = 0, \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} = 0 \text{ при } y = 0, y = L_y \\
\varphi(\xi, \eta, z, 0) = \varphi(\xi, \eta, z, 0), \frac{\partial \varphi(\xi, \eta, z, 0)}{\partial t} = \varphi_{t_0}(\xi, \eta, z) \\
w(\xi, \eta, 0) = w_0(\xi, \eta), \frac{\partial w(\xi, \eta, 0)}{\partial t} = w_{t_0}(\xi, \eta)
\end{array} \right. \quad (1.28)$$

Рассматривая малые возмущения газа и пластины в виде

$$\begin{aligned}
\varphi(\xi, \eta, z, t) &= \Phi(\xi, \eta, z) e^{-i\omega t}, \\
w(\xi, \eta, t) &= W(\xi, \eta) e^{-i\omega t}, \\
p(\xi, \eta, t) &= \Pi(\xi, \eta) e^{-i\omega t},
\end{aligned} \quad (1.29)$$

в итоге окончательно получим следующую систему безразмерных уравнений течения газа и колебания пластины:

$$\left\{ \begin{array}{l}
-\omega^2 \Phi - 2i\omega M \frac{\partial \Phi}{\partial \xi} + (M^2 - 1) \frac{\partial^2 \Phi}{\partial \xi^2} - \frac{\partial^2 \Phi}{\partial \eta^2} - \frac{\partial^2 \Phi}{\partial z^2} = 0 \\
\frac{\partial \Phi}{\partial z} \Big|_{z=0} = -i\omega W + M \frac{\partial W}{\partial \xi} \\
\left(\frac{\partial \Phi}{\partial \xi}, \frac{\partial \Phi}{\partial \eta}, \frac{\partial \Phi}{\partial z} \right) \rightarrow 0 \text{ при } z \rightarrow +\infty \text{ вдоль характеристик } z = \frac{\xi - \xi_0}{\sqrt{M^2 - 1}} \\
D\Delta^2 W(x, y) - \omega^2 W(x, y) + \Pi(x, y) = 0 \\
\Pi = -\mu \left(-i\omega + M \frac{\partial}{\partial \xi} \right) \Phi(\xi, \eta, 0) \\
W(x, y) = \frac{\partial^2 W(x, y)}{\partial x^2} = 0, x = 0, L_x \quad W(x, y) = \frac{\partial^2 W(x, y)}{\partial y^2} = 0, y = 0, L_y
\end{array} \right. \quad (1.30)$$

Решение системы относительно возмущения потенциала скорости ищется с помощью преобразования Лапласа и имеет вид [37]:

$$\begin{aligned} \Phi(\xi, \eta, 0) = & -\frac{1}{\pi} \iint_S \left(-i\omega W(\xi_1, \eta_1) + M \frac{\partial W(\xi_1, \eta_1)}{\partial \xi} \right) \times \\ & \times \exp\left(\frac{i\omega M}{\beta^2} (\xi - \xi_1)\right) \frac{\cos\left(\frac{\omega}{\beta^2} \sqrt{(\xi - \xi_1)^2 - \beta^2(\eta - \eta_1)^2}\right)}{\sqrt{(\xi - \xi_1)^2 - \beta^2(\eta - \eta_1)^2}} d\xi_1 d\eta_1, \end{aligned} \quad (1.31)$$

где $\beta = \sqrt{M^2 - 1}$, S – треугольник (Рис. 1.2), который образуется при пересечении пластины и обратного конуса Маха с вершиной в точке (ξ, η) .

Используя данное решение, выведем выражение для возмущения давления, действующего на пластину.

1.4 Распределение давления

Вывод выражения будем проводить в системе координат x, y, z , связанной с пластиной. Преобразование от системы координат, связанной с потоком к системе координат, связанной с пластиной, имеет вид:

$$\begin{aligned} \xi &= x \cos \theta + y \sin \theta \\ \eta &= -x \sin \theta + y \cos \theta \\ \frac{\partial}{\partial \xi} &= \frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial \xi} + \frac{\partial}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial \xi} = \frac{\partial}{\partial x} \cos \theta + \frac{\partial}{\partial y} \sin \theta \end{aligned} \quad (1.32)$$

Сначала получим преобразованное выражение для потенциала возмущения скорости газа.

1.4.1 Преобразование выражения для потенциала возмущения скорости

Используя выражение (1.32), преобразуем последовательно границы интегрирования и подынтегральное выражение.

Преобразование границ интегрирования

Рассмотрим границы области интегрирования (Рис. 1.3):

1) Преобразуем верхний предел

$$\eta_{1b} = \eta + \frac{\xi - \xi_1}{\beta} \quad (1.33)$$

Подставим преобразование координат:

$$-x_1 \sin \theta + y_1 \cos \theta = -x \sin \theta + y \cos \theta + \frac{x \cos \theta + y \sin \theta - x_1 \cos \theta - y_1 \sin \theta}{\beta}$$

Выражая y_1 через x_1, x, y , получим выражения для верхнего предела:

$$y_{1b} = \frac{(x - x_1)(\cos \theta - \beta \sin \theta)}{\beta \cos \theta + \sin \theta} + y \quad (1.34)$$

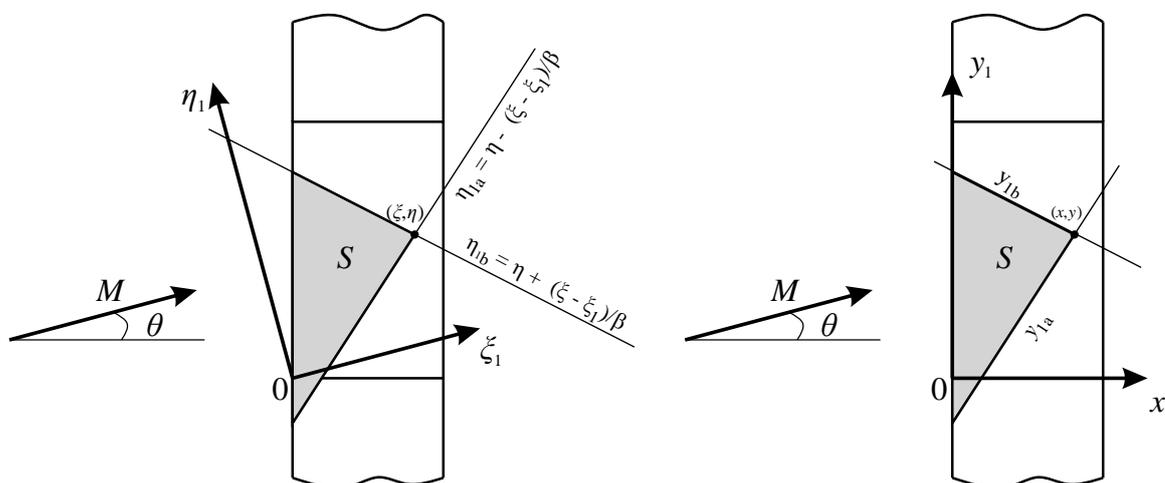


Рис. 1.3. Область интегрирования

2) Теперь рассмотрим нижний предел:

$$\eta_{1a} = \eta - \frac{\xi - \xi_1}{\beta} \quad (1.35)$$

Используя преобразование координат

$$-x_1 \sin \theta + y_1 \cos \theta = -x \sin \theta + y \cos \theta - \frac{x \cos \theta + y \sin \theta - x_1 \cos \theta - y_1 \sin \theta}{\beta}$$

и преобразуя выражения, имеем следующий нижний предел интегрирования:

$$y_{1a} = -\frac{(x - x_1)(\cos \theta + \beta \sin \theta)}{\beta \cos \theta - \sin \theta} + y \quad (1.36)$$

Перейдем теперь к преобразованию подынтегрального выражения и с учетом границ интегрирования (1.34) и (1.36) выведем в итоге выражение для потенциала возмущения скорости в случае, когда форма колебания пластины имеет вид:

$$W(x, y) = W(x) \sin(\lambda y). \quad (1.37)$$

Так как справедливо соотношение:

$$W(x) \sin(\lambda y) = \frac{W(x) \exp(i\lambda y) - W(x) \exp(-i\lambda y)}{2i}, \quad (1.38)$$

то рассмотрим преобразование для формы колебания, имеющей вид:

$$W(x, y) = W(x, y) = W(x)e^{\pm i\lambda y}, \quad (1.39)$$

а затем получим выражения для формы вида (1.37).

Преобразование подынтегрального выражения при $W(x, y) = W(x)e^{i\lambda y}$

Рассмотрим сначала $W(x, y)$ в виде:

$$W(x, y) = W(x)e^{i\lambda y} \quad (1.40)$$

Преобразуем множители подынтегрального выражения:

$$\begin{aligned} & \left(-i\omega W(\xi_1, \eta_1) + M \frac{\partial W(\xi_1, \eta_1)}{\partial \xi} \right) \times \\ & \times \exp\left(\frac{i\omega M}{\beta^2} (\xi - \xi_1) \right) \frac{\cos\left(\frac{\omega}{\beta^2} \sqrt{(\xi - \xi_1)^2 - \beta^2(\eta - \eta_1)^2} \right)}{\sqrt{(\xi - \xi_1)^2 - \beta^2(\eta - \eta_1)^2}} \end{aligned} \quad (1.41)$$

- 1) Рассмотрим первый множитель. Подставляя выражения и введя обозначения $M_x = M \cos \theta$ и $M_y = M \sin \theta$, получим:

$$\begin{aligned} & -i\omega W(\xi_1, \eta_1) + M \frac{\partial W(\xi_1, \eta_1)}{\partial \xi} = \\ & = -i\omega W(x_1, y_1) + M \cos \theta \frac{\partial W(x_1, y_1)}{\partial x_1} + M \sin \theta \frac{\partial W(x_1, y_1)}{\partial y_1} = \\ & = -i\omega W(x_1) e^{i\lambda y_1} + M_x \frac{\partial W(x_1)}{\partial x_1} e^{i\lambda y_1} + M_y W(x_1) i\lambda e^{i\lambda y_1} = \\ & = \left(-i(\omega - \lambda M_y) W(x_1) + M_x \frac{\partial W(x_1)}{\partial x_1} \right) e^{i\lambda y_1} \end{aligned} \quad (1.42)$$

- 2) Теперь преобразуем экспоненту:

$$\begin{aligned} & \exp\left(\frac{i\omega M}{\beta^2} (\xi - \xi_1) \right) = \\ & = \exp\left(\frac{i\omega M}{\beta^2} (x \cos \theta + y \sin \theta - x_1 \cos \theta - y_1 \sin \theta) \right) = \\ & = \exp\left(\frac{i\omega M_x}{\beta^2} (x - x_1) \right) \exp\left(\frac{i\omega M_y y}{\beta^2} \right) \exp\left(-\frac{i\omega M_y y_1}{\beta^2} \right) \end{aligned} \quad (1.43)$$

3) Наконец преобразуем третий множитель. Рассмотрим выражение под корнем:

$$q = (\xi - \xi_1)^2 - \beta^2(\eta - \eta_1)^2 \quad (1.44)$$

Преобразуя систему координат и группируя члены при $\sin \theta$ и $\cos \theta$ в скобках, получим:

$$\begin{aligned} q &= (x \cos \theta + y \sin \theta - x_1 \cos \theta - y_1 \sin \theta)^2 - \\ &\quad - \beta^2(-x \sin \theta + y \cos \theta + x_1 \sin \theta - y_1 \cos \theta)^2 \\ q &= ((x - x_1) \cos \theta + (y - y_1) \sin \theta)^2 - \beta^2(-(x - x_1) \sin \theta + (y - y_1) \cos \theta)^2 \end{aligned}$$

Теперь раскроем скобки:

$$\begin{aligned} q &= (x - x_1)^2 \cos^2 \theta + 2(x - x_1)(y - y_1) \sin \theta \cos \theta + \\ &\quad + (y - y_1)^2 \sin^2 \theta - \beta^2(x - x_1)^2 \sin^2 \theta + \beta^2 2(x - x_1)(y - y_1) \sin \theta \cos \theta - \\ &\quad - \beta^2(y - y_1)^2 \cos^2 \theta = \\ &= (y - y_1)^2(\sin^2 \theta - \beta^2 \cos^2 \theta) + 2(x - x_1)(y - y_1) \sin \theta \cos \theta (1 + \beta^2) + \\ &\quad + (x - x_1)^2(\cos^2 \theta - \beta^2 \sin^2 \theta) \end{aligned}$$

Учитывая выражения для β и $M_x = M \cos \theta$, $M_y = M \sin \theta$, имеем:

$$\begin{aligned} q &= (y - y_1)^2(\sin^2 \theta - M^2 \cos^2 \theta + \cos^2 \theta) + \\ &\quad + 2(x - x_1)(y - y_1) \sin \theta \cos \theta (1 + M^2 - 1) + \\ &\quad + (x - x_1)^2(\cos^2 \theta - M^2 \sin^2 \theta + \sin^2 \theta) = \\ &= -(M_x^2 - 1)(y_1 - y)^2 - 2(x - x_1)(y_1 - y)M_x M_y + (x - x_1)^2(1 - M_y^2) \end{aligned}$$

Преобразуем получившееся выражение:

$$\begin{aligned} q &= (x - x_1)^2(1 - M_y^2) - (M_x^2 - 1) \left[(y_1 - y)^2 + \frac{2(x - x_1)(y_1 - y)M_x M_y}{M_x^2 - 1} \right] = \\ &= (x - x_1)^2(1 - M_y^2) - (M_x^2 - 1) \times \\ &\quad \times \left[(y_1 - y)^2 + \frac{2(x - x_1)(y_1 - y)M_x M_y}{M_x^2 - 1} + \frac{(x - x_1)^2 M_x^2 M_y^2}{(M_x^2 - 1)^2} - \frac{(x - x_1)^2 M_x^2 M_y^2}{(M_x^2 - 1)^2} \right] = \\ &= (x - x_1)^2(1 - M_y^2) + \frac{(x - x_1)^2 M_x^2 M_y^2}{M_x^2 - 1} - \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& -(M_x^2 - 1) \left[y_1 - \left(y - \frac{(x - x_1)M_x M_y}{M_x^2 - 1} \right) \right]^2 = \\
& = (x - x_1)^2 \frac{M_x^2 - 1 - M_x^2 M_y^2 + M_y^2 + M_x^2 M_y^2}{M_x^2 - 1} - \\
& -(M_x^2 - 1) \left[y_1 - \left(y - \frac{(x - x_1)M_x M_y}{M_x^2 - 1} \right) \right]^2
\end{aligned}$$

Окончательно получим:

$$q = (x - x_1)^2 \frac{\beta^2}{M_x^2 - 1} - (M_x^2 - 1)[y_1 - y_{1c}]^2, \quad (1.45)$$

$$\text{где } y_{1c} = y - \frac{(x - x_1)M_x M_y}{M_x^2 - 1}$$

Выражение для потенциала в системе x, y, z

Таким образом, выражение для потенциала в системе x, y, z имеет вид:

$$\Phi(x, y, 0) = -\frac{1}{\pi} \int_0^x g(x, y, x_1) I_{y_1} dx_1, \quad (1.46)$$

где

$$g(x, y, x_1) = \left(-i(\omega - \lambda M_y)W(x_1) + M_x \frac{\partial W(x_1)}{\partial x_1} \right) e^{\frac{i\omega M_x(x-x_1)}{\beta^2}} e^{\frac{i\omega M_y y}{\beta^2}} \quad (1.47)$$

$$I_{y_1} = \int_{y_{1a}}^{y_{1b}} e^{i\left(\lambda - \frac{\omega M_y}{\beta^2}\right)y_1} \frac{\cos\left(\frac{\omega}{\beta^2}\sqrt{q}\right)}{\sqrt{q}} dy_1 = I_{cos} + iI_{sin} \quad (1.48)$$

$$I_{cos} = \int_{y_{1a}}^{y_{1b}} \cos\left[\left(\lambda - \frac{\omega M_y}{\beta^2}\right)y_1\right] \frac{\cos\left(\frac{\omega}{\beta^2}\sqrt{q}\right)}{\sqrt{q}} dy_1 \quad (1.49)$$

$$I_{sin} = \int_{y_{1a}}^{y_{1b}} \sin\left[\left(\lambda - \frac{\omega M_y}{\beta^2}\right)y_1\right] \frac{\cos\left(\frac{\omega}{\beta^2}\sqrt{q}\right)}{\sqrt{q}} dy_1 \quad (1.50)$$

Покажем, что интеграл I_{y_1} можно выразить через функцию Бесселя первого рода.

Преобразование интеграла от y_1

1) Рассмотрим интеграл I_{cos} и представим его как сумму двух интегралов:

$$\begin{aligned}
I_{cos} &= \int_{y_{1a}}^{y_{1c}} \cos \left[\left(\lambda - \frac{\omega M_y}{\beta^2} \right) y_1 \right] \frac{\cos \left(\frac{\omega}{\beta^2} \sqrt{q} \right)}{\sqrt{q}} dy_1 + \\
&+ \int_{y_{1c}}^{y_{1b}} \cos \left[\left(\lambda - \frac{\omega M_y}{\beta^2} \right) y_1 \right] \frac{\cos \left(\frac{\omega}{\beta^2} \sqrt{q} \right)}{\sqrt{q}} dy_1 = \\
&= \int_{y_{1a}}^{y_{1c}} \cos \left[\left(\lambda - \frac{\omega M_y}{\beta^2} \right) y_1 \right] \frac{\cos \left(\frac{\omega}{\beta^2} \sqrt{q} \right)}{\sqrt{q}} dy_1 - \\
&- \int_{y_{1b}}^{y_{1c}} \cos \left[\left(\lambda - \frac{\omega M_y}{\beta^2} \right) y_1 \right] \frac{\cos \left(\frac{\omega}{\beta^2} \sqrt{q} \right)}{\sqrt{q}} dy_1 = I_{cos,1} + I_{cos,2}
\end{aligned}$$

Заметим, что

$$\begin{aligned}
q(y_{1a}) &= q(y_{1b}) = 0 \\
q(y_{1c}) &= q \left(y - \frac{(x - x_1) M_x M_y}{M_x^2 - 1} \right) = (x - x_1)^2 \frac{\beta^2}{M_x^2 - 1}
\end{aligned}$$

Сделаем замену координат:

$$\begin{aligned}
\sqrt{q} &= t \frac{(x - x_1) \beta}{\sqrt{M_x^2 - 1}} \\
\sqrt{(x - x_1)^2 \frac{\beta^2}{M_x^2 - 1} - (M_x^2 - 1) \left[y_1 - \left(y - \frac{(x - x_1) M_x M_y}{M_x^2 - 1} \right) \right]^2} &= t \frac{(x - x_1) \beta}{\sqrt{M_x^2 - 1}} \\
y_1 &= y - \frac{(x - x_1) M_x M_y}{M_x^2 - 1} \pm \frac{(x - x_1) \beta}{M_x^2 - 1} \sqrt{1 - t^2} \\
dy_1 &= \mp \frac{(x - x_1) \beta}{M_x^2 - 1} \frac{t dt}{\sqrt{1 - t^2}}
\end{aligned}$$

Знак минус для интеграла $I_{cos,1}$, а плюсом – для $I_{cos,2}$

Применяя тригонометрические соотношения, имеем:

$$\begin{aligned}
\cos \left[\left(\lambda - \frac{\omega M_y}{\beta^2} \right) y_1 \right] &= \cos \left[\left(\lambda - \frac{\omega M_y}{\beta^2} \right) \left(y - \frac{(x - x_1) M_x M_y}{M_x^2 - 1} \right) \right] \times \\
&\times \cos \left[\left(\lambda - \frac{\omega M_y}{\beta^2} \right) \frac{(x - x_1) \beta}{M_x^2 - 1} \sqrt{1 - t^2} \right] \mp
\end{aligned}$$

$$\mp \sin \left[\left(\lambda - \frac{\omega M_y}{\beta^2} \right) \left(y - \frac{(x - x_1) M_x M_y}{M_x^2 - 1} \right) \right] \sin \left[\left(\lambda - \frac{\omega M_y}{\beta^2} \right) \frac{(x - x_1) \beta}{M_x^2 - 1} \sqrt{1 - t^2} \right]$$

Таким образом, получаем следующее выражение для интеграла I_{cos} :

$$\begin{aligned} I_{cos} &= 2 \cos \left[\left(\lambda - \frac{\omega M_y}{\beta^2} \right) \left(y - \frac{(x - x_1) M_x M_y}{M_x^2 - 1} \right) \right] \times \\ &\times \int_0^1 \cos \left(\zeta_1 \sqrt{1 - t^2} \right) \frac{\cos(\zeta_2 t)}{t \frac{\beta}{\sqrt{M_x^2 - 1}}} \frac{(x - x_1) \beta}{M_x^2 - 1} \frac{t dt}{\sqrt{1 - t^2}} = \\ &= \frac{2}{\sqrt{M_x^2 - 1}} \cos \left[\left(\lambda - \frac{\omega M_y}{\beta^2} \right) \left(y - \frac{(x - x_1) M_x M_y}{M_x^2 - 1} \right) \right] \times \\ &\times \int_0^1 \cos \left(\zeta_1 \sqrt{1 - t^2} \right) \cos(\zeta_2 t) \frac{dt}{\sqrt{1 - t^2}}, \end{aligned}$$

где

$$\zeta_1 = \left(\lambda - \frac{\omega M_y}{\beta^2} \right) \frac{(x - x_1) \beta}{M_x^2 - 1}, \zeta_2 = \frac{\omega (x - x_1) \beta}{\beta^2 \sqrt{M_x^2 - 1}}$$

Сделаем еще одну замену:

$$\begin{aligned} t &= \sin \psi \\ \sqrt{1 - t^2} &= \cos \psi \\ dt &= \cos \psi d\psi \end{aligned}$$

Тогда имеем:

$$\begin{aligned} I_{cos} &= \frac{2}{\sqrt{M_x^2 - 1}} \cos \left[\left(\lambda - \frac{\omega M_y}{\beta^2} \right) \left(y - \frac{(x - x_1) M_x M_y}{M_x^2 - 1} \right) \right] \times \\ &\times \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos(\zeta_1 \cos \psi) \cos(\zeta_2 \sin \psi) d\psi \end{aligned}$$

Применим формулу произведения косинусов:

$$\begin{aligned} \cos(\zeta_1 \cos \psi) \cos(\zeta_2 \sin \psi) &= \frac{1}{2} [\cos(\zeta_1 \cos \psi - \zeta_2 \sin \psi) + \cos(\zeta_1 \cos \psi + \zeta_2 \sin \psi)] \\ &= \frac{1}{2} [\cos(\zeta \sin(\psi - \psi_0)) + \cos(\zeta \sin(\psi + \psi_0))], \end{aligned}$$

где

$$\begin{aligned}
\zeta &= \sqrt{\zeta_1^2 + \zeta_2^2} = \sqrt{\left(\lambda - \frac{\omega M_y}{\beta^2}\right)^2 \frac{(x - x_1)^2 \beta^2}{(M_x^2 - 1)^2} + \frac{\omega^2 (x - x_1)^2 \beta^2}{\beta^4 (M_x^2 - 1)}} = \\
&= (x - x_1) \sqrt{\frac{\lambda^2 \beta^4 - 2\lambda\omega M_y \beta^2 + \omega^2 M_y^2 + \omega^2 (M_x^2 - 1)}{\beta^2 (M_x^2 - 1)^2}} = \\
&= (x - x_1) \sqrt{\frac{\lambda^2 \beta^4 - 2\lambda\omega M_y \beta^2 + \omega^2 \beta^2}{\beta^2 (M_x^2 - 1)^2}} = \\
&= \frac{(x - x_1)}{M_x^2 - 1} \sqrt{\lambda^2 (M_x^2 - 1) + \lambda^2 M_y^2 - 2\lambda\omega M_y + \omega^2} = \\
&= \frac{(x - x_1)}{M_x^2 - 1} \sqrt{\lambda^2 (M_x^2 - 1) + (\omega - \lambda M_y)^2}
\end{aligned}$$

Заметим, что

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos(\zeta \sin(\psi \pm \psi_0)) d\psi = \int_{\pm\psi_0}^{\frac{\pi}{2} \pm \psi_0} \cos(\zeta \sin \tilde{\psi}) d\tilde{\psi},$$

где $\tilde{\psi} = \psi \pm \psi_0$, и

$$\begin{aligned}
&\int_{-\psi_0}^{\frac{\pi}{2} - \psi_0} \cos(\zeta \sin \tilde{\psi}) d\tilde{\psi} + \int_{\psi_0}^{\frac{\pi}{2} + \psi_0} \cos(\zeta \sin \tilde{\psi}) d\tilde{\psi} = \\
&= \int_{-\psi_0}^0 \cos(\zeta \sin \tilde{\psi}) d\tilde{\psi} + \int_0^{\frac{\pi}{2} - \psi_0} \cos(\zeta \sin \tilde{\psi}) d\tilde{\psi} + \\
&+ \int_{\psi_0}^{\frac{\pi}{2}} \cos(\zeta \sin \tilde{\psi}) d\tilde{\psi} + \int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2} + \psi_0} \cos(\zeta \sin \tilde{\psi}) d\tilde{\psi} = \\
&= \int_0^{\psi_0} \cos(\zeta \sin \tilde{\psi}) d\tilde{\psi} + \int_0^{\frac{\pi}{2} - \psi_0} \cos(\zeta \sin \tilde{\psi}) d\tilde{\psi} +
\end{aligned}$$

$$+ \int_{\psi_0}^{\frac{\pi}{2}} \cos(\zeta \sin \tilde{\psi}) d\tilde{\psi} + \int_{\frac{\pi}{2}-\psi_0}^{\frac{\pi}{2}} \cos(\zeta \sin \tilde{\psi}) d\tilde{\psi} = 2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos(\zeta \sin \tilde{\psi}) d\tilde{\psi} = \pi J_0(\zeta),$$

где J_0 – функция Бесселя первого рода нулевого порядка.

Таким образом, окончательно получаем:

$$I_{cos} = \frac{\pi}{\sqrt{M_x^2 - 1}} \cos \left[\left(\lambda - \frac{\omega M_y}{\beta^2} \right) \left(y - \frac{(x - x_1) M_x M_y}{M_x^2 - 1} \right) \right] J_0(\zeta) \quad (1.51)$$

2) Рассмотрим интеграл I_{sin}

$$I_{sin} = \int_{y_{1a}}^{y_{1b}} \sin \left[\left(\lambda - \frac{\omega M_y}{\beta^2} \right) y_1 \right] \frac{\cos \left(\frac{\omega}{\beta^2} \sqrt{q} \right)}{\sqrt{q}} dy_1 \quad (1.52)$$

Аналогично выражению для интеграла I_{cos} (1.51) выводится выражение для интеграла I_{sin}

$$I_{sin} = \frac{\pi}{\sqrt{M_x^2 - 1}} \sin \left[\left(\lambda - \frac{\omega M_y}{\beta^2} \right) \left(y - \frac{(x - x_1) M_x M_y}{M_x^2 - 1} \right) \right] J_0(\zeta) \quad (1.53)$$

Таким образом, окончательно выражение для интеграла I_{y_1} имеет вид:

$$I_{y_1} = \frac{\pi}{\sqrt{M_x^2 - 1}} e^{i \left(\lambda - \frac{\omega M_y}{\beta^2} \right) \left(y - \frac{(x - x_1) M_x M_y}{M_x^2 - 1} \right)} \quad (1.54)$$

3) Преобразуем произведение экспонент, входящих в g (1.47) и I_{y_1} (1.54),

$$f_{exp} = e^{\frac{i \omega M_x (x - x_1)}{\beta^2}} e^{\frac{i \omega M_y y}{\beta^2}} e^{i \left(\lambda - \frac{\omega M_y}{\beta^2} \right) \left(y - \frac{(x - x_1) M_x M_y}{M_x^2 - 1} \right)} \quad (1.55)$$

Перемножим экспоненты:

$$\begin{aligned} f_{exp} &= \exp \left[i \left(\frac{\omega M_x}{\beta^2} (x - x_1) + \frac{\omega M_y y}{\beta^2} \right) \right] \times \\ &\times \exp \left[i \left(\lambda y - \frac{\lambda (x - x_1) M_x M_y}{M_x^2 - 1} - \frac{\omega M_y y}{\beta^2} + \frac{\omega (x - x_1) M_x M_y^2}{\beta^2 (M_x^2 - 1)} \right) \right] = \\ &= \exp \left[i \frac{M_x (x - x_1)}{\beta^2 (M_x^2 - 1)} (\omega (M_x^2 - 1) - \lambda M_y \beta^2 + \omega M_y^2) \right] \exp(i \lambda y) = \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \exp \left[i \frac{M_x(x-x_1)}{\beta^2(M_x^2-1)} (\omega(M_x^2-1+M_y^2) - \lambda M_y \beta^2) \right] \exp(i\lambda y) = \\
&= \exp \left[i \frac{M_x(x-x_1)}{\beta^2(M_x^2-1)} (\omega\beta^2 - \lambda M_y \beta^2) \right] \exp(i\lambda y) = \\
&= \exp \left[i \frac{M_x(x-x_1)}{M_x^2-1} (\omega - \lambda M_y) \right] \exp(i\lambda y)
\end{aligned}$$

В итоге получим, что выражение для потенциала возмущения скорости газа при $W(x, y) = W(x)e^{i\lambda y}$ имеет вид:

$$\begin{aligned}
\Phi_1(x, y, 0) = & \left[-\frac{1}{\sqrt{M_x^2-1}} \int_0^x \left(-i(\omega - \lambda M_y)W(x_1) \right. \right. \\
& \left. \left. + M_x \frac{\partial W(x_1)}{\partial x_1} \right) j_0(B_1(x-x_1)) e^{A_1(x-x_1)} dx_1 \right] e^{i\lambda y} = \chi_1(x) e^{i\lambda y},
\end{aligned} \tag{1.56}$$

где

$$B_1 = \frac{\sqrt{\lambda^2(M_x^2-1) + (\omega - \lambda M_y)^2}}{M_x^2-1}, \quad A_1 = i \frac{M_x(\omega - \lambda M_y)}{M_x^2-1} \tag{1.57}$$

Выражение для потенциала возмущения скорости при $W(x, y) = W(x)e^{-i\lambda y}$

Рассматриваем $W(x, y)$ в виде:

$$W(x, y) = W(x)e^{-i\lambda y} \tag{1.58}$$

Заменяя в выражении (1.56) и (1.57) λ на $-\lambda$, получаем выражение для потенциала возмущения скорости:

$$\begin{aligned}
\Phi_2(x, y, 0) = & \left[-\frac{1}{\sqrt{M_x^2-1}} \int_0^x \left(-i(\omega + \lambda M_y)W(x_1) \right. \right. \\
& \left. \left. + M_x \frac{\partial W(x_1)}{\partial x_1} \right) j_0(B_2(x-x_1)) e^{A_2(x-x_1)} dx_1 \right] e^{-i\lambda y} \\
& = \chi_2(x) e^{-i\lambda y},
\end{aligned} \tag{1.59}$$

где

$$B_2 = \frac{\sqrt{\lambda^2(M_x^2 - 1) + (\omega + \lambda M_y)^2}}{M_x^2 - 1}, A_2 = i \frac{M_x(\omega + \lambda M_y)}{M_x^2 - 1} \quad (1.60)$$

Выражение для потенциала возмущения скорости при $W = W(x) \sin(\lambda y)$

Потенциал возмущения скорости вычисляется следующим образом:

$$\Phi(x, y, 0) = \frac{\Phi_1(x, y, 0) - \Phi_2(x, y, 0)}{2i} \quad (1.61)$$

Окончательно, в частном случае, когда при шарнирном условии опирания форма колебания пластины имеет вид:

$$W(x, y) = \sin(\kappa x) \sin(\lambda y) \quad (1.62)$$

потенциал Φ вычисляется при подстановке в (1.56) и (1.59) выражений

$$W(x) = \sin(\kappa x), \quad \frac{\partial W(x)}{\partial x} = \kappa \cos(\kappa x) \quad (1.63)$$

1.4.2 Преобразование выражения возмущения давления

Используя выражения для возмущения пластины из системы (1.30) и выражение для потенциала (1.61), а также делая преобразование координат:

$$\begin{aligned} \Pi(x, y) &= -\mu \left(-i\omega + M_x \frac{\partial}{\partial x} + M_y \frac{\partial}{\partial y} \right) \Phi(x, y, 0) = \\ &= -\mu \left(-i\omega + M_x \frac{\partial}{\partial x} + M_y \frac{\partial}{\partial y} \right) \left[\frac{\Phi_1(x, y, 0) - \Phi_2(x, y, 0)}{2i} \right] = \\ &= -\frac{\mu}{2i} \left(-i\omega + M_x \frac{\partial}{\partial x} + M_y \frac{\partial}{\partial y} \right) \chi_1(x) e^{i\lambda y} + \\ &\quad + \frac{\mu}{2i} \left(-i\omega + M_x \frac{\partial}{\partial x} + M_y \frac{\partial}{\partial y} \right) \chi_2(x) e^{-i\lambda y} = \\ &= -\frac{\mu}{2i} \left(-i\omega \chi_1(x) e^{i\lambda y} + M_x \frac{\partial \chi_1(x)}{\partial x} e^{i\lambda y} + M_y i \kappa \chi_1(x) e^{i\lambda y} \right) + \\ &\quad + \frac{\mu}{2i} \left(-i\omega \chi_2(x) e^{-i\lambda y} + M_x \frac{\partial \chi_2(x)}{\partial x} e^{-i\lambda y} - M_y i \kappa \chi_2(x) e^{-i\lambda y} \right) = \\ &= \left[-\frac{\mu}{2i} \left(-i(\omega - M_y \lambda) + M_x \frac{\partial}{\partial x} \right) \chi_1(x) \right] e^{i\lambda y} - \end{aligned}$$

$$-\left[-\frac{\mu}{2i}\left(-i(\omega + M_y\lambda) + M_x\frac{\partial}{\partial x}\right)\chi_2(x)\right]e^{-i\lambda y}$$

получим выражение для возмущения давления при $W(x, y) = W(x) \sin(\lambda y)$:

$$\Pi(x, y) = \frac{\tilde{\Pi}_1(x)e^{i\lambda y} - \tilde{\Pi}_2(x)e^{-i\lambda y}}{2i} = \frac{\tilde{\Pi}_1(x, y) - \tilde{\Pi}_2(x, y)}{2i}, \quad (1.64)$$

где

$$\begin{aligned} \Pi_1(x, y) &= \tilde{\Pi}_1(x)e^{i\lambda y}, \quad \Pi_2(x, y) = \tilde{\Pi}_2(x)e^{-i\lambda y} \\ \tilde{\Pi}_1(x) &= \frac{\mu M_x}{\sqrt{M_x^2 - 1}} \left(-i(\omega - \lambda M_y)W(x) + M_x \frac{\partial W(x)}{\partial x} \right) + \\ &+ \frac{\mu}{(\sqrt{M_x^2 - 1})^3} \int_0^x \left(i(\omega - \lambda M_y)J_0 - M_x J_1 \sqrt{\lambda^2(M_x^2 - 1) + (\omega - \lambda M_y)^2} \right) \\ &\quad \times \left(-i(\omega - \lambda M_y)W(x_1) + M_x \frac{\partial W(x_1)}{\partial x_1} \right) e^{A_1(x-x_1)} dx_1 \\ \tilde{\Pi}_2(x) &= \frac{\mu M_x}{\sqrt{M_x^2 - 1}} \left(-i(\omega + \lambda M_y)W(x) + M_x \frac{\partial W(x)}{\partial x} \right) + \\ &+ \frac{\mu}{(\sqrt{M_x^2 - 1})^3} \int_0^x \left(i(\omega + \lambda M_y)J_0 \right. \\ &\quad \left. - M_x J_1 \sqrt{\lambda^2(M_x^2 - 1) + (\omega + \lambda M_y)^2} \right) \left(-i(\omega + \lambda M_y)W(x_1) \right. \\ &\quad \left. + M_x \frac{\partial W(x_1)}{\partial x_1} \right) e^{A(x-x_1)} dx_1 \end{aligned} \quad (1.65)$$

В частном случае шарнирного опирания, когда форма колебания пластины имеет вид (1.62), возмущение давления вычисляется с учетом выражений (1.63).

После подстановки полученного выражения для возмущения давления в уравнения движения пластины с учетом граничных условий шарнирного опирания, получаем интегро-дифференциальную задачу на собственные значения для нахождения собственных значений ω .

$$\begin{cases} D\Delta^2 W(x, y) - \omega^2 W(x, y) + \Pi(x, y) = 0 \\ W(x, y) = \frac{\partial^2 W(x, y)}{\partial x^2} = 0, x = 0, L_x \\ W(x, y) = \frac{\partial^2 W(x, y)}{\partial y^2} = 0, y = 0, L_y \\ \Pi(x, y) = \frac{\tilde{\Pi}_1(x, y) - \tilde{\Pi}_2(x, y)}{2i} \end{cases} \quad (1.66)$$

В следующем разделе описывается численный метод решения полученной задачи на собственные значения.

1.5 Метод расчета

Для численного расчета применяется метод [36], суть которого в следующем. Интегро-дифференциальная задача на собственные значения (1.66) решается численно с помощью процедуры Бубнова–Галеркина [36]. Прогиб пластины выражается как суперпозиция форм колебаний пластины в вакууме:

$$W(x, y) = \sum_{k=1}^{N_x} \sum_{l=1}^{N_y} C_l^k W_k(x) W^l(y) = \sum_{k=1}^{N_x} \sum_{l=1}^{N_y} C_l^k \sin(\kappa x) \sin(\lambda y), \quad (1.67)$$

где $\kappa = \frac{\pi k}{L_x}$, $\lambda = \frac{\pi l}{L_y}$

Это приводит к уравнению для комплексных собственных значений

$$\det \left(K - \frac{L_x \omega^2}{2} E + P(\omega) \right) = 0, \quad (1.68)$$

где E — единичная матрица, K — диагональная матрица жесткости, отражающая свойства пластины, P — аэродинамическая матрица. Элементы матрицы жесткости и аэродинамической матрицы вычисляются как

$$\begin{aligned} K_{kl} &= \frac{L_x}{2} D \left(\left(\frac{k\pi}{L_x} \right)^4 + 2 \left(\frac{k\pi}{L_x} \right)^2 \left(\frac{l\pi}{L_y} \right)^2 + \left(\frac{l\pi}{L_y} \right)^4 \right) \\ P_{mn} &= \frac{2}{L_y} \int_0^{L_x} \int_0^{L_y} \Pi(x, y, T_m, \omega) T_n(x, y) dx dy \end{aligned} \quad (1.69)$$

$$T_i = \sin \left(\frac{k\pi x}{L_x} \right) \sin \left(\frac{l\pi y}{L_y} \right), l = \left[\frac{i-1}{N_x} \right] + 1, k = i - N_x(l-1),$$

где квадратные скобки обозначают целую часть, Π – возмущение давления, вычисляемое по (1.64).

Частотное уравнение решается итерационным методом [36]. Итерации для n -й собственной частоты ω_n продолжаются до тех пор, пока относительная погрешность не станет достаточно малой:

$$\left| \frac{\omega_{np} - \omega_{n,p-1}}{\omega_{np}} \right| < \varepsilon, \quad (1.70)$$

где ω_{np} , $\omega_{n,p-1}$ — значения n -й собственной частоты на p -й и $(p-1)$ -й итерациях.

Положительный знак $\text{Im}(\omega_n)$ является критерием флаттера.

$$\text{Im}(\omega_n) > 0 \quad (1.71)$$

Внешний (в выражении для элементов аэродинамической матрицы (1.69) и внутренние интегралы (в выражении для возмущения давления (1.65)) вычисляются методом трапеции. Шаги интегрирования при вычислении внешнего интеграла имеют вид

$$\Delta_x = \frac{L_x}{qN_x}, \Delta_y = \frac{L_y}{qN_y}, \quad (1.72)$$

где q – число точек интегрирования, приходящееся на наименьшую длину полуволны. При расчете внутренних интегралов шаг интегрирования берется в q раз меньше.

Для определения параметров численного расчета сначала исследовалась сходимость. Результаты исследования представлены в следующем разделе.

1.6 Исследование сходимости

Рассматривались пластины с $L_y = 200, 500, 1000$. Расчеты проводились при углах скольжения $\theta = 5^\circ, 15^\circ$ и 30° .

Сначала исследовалась сходимость по числу базисных мод N_x и N_y . На Рис. 1.4 и Рис. 1.5 представлена зависимость действительной, мнимой части комплексных собственных значений, а также соответствующих относительных погрешностей от числа базисных мод. Здесь относительная погрешность δ определяется следующим образом (аналогичные определения используются для других параметров численного метода):

$$\delta_{\text{Re}}(N_x) = \left| \frac{\text{Re}\omega(N_x) - \text{Re}\omega(N_x - 1)}{\text{Re}\omega(N_x)} \right| \quad (1.73)$$

$$\delta_{\text{Im}}(N_x) = \left| \frac{\text{Im}\omega(N_x) - \text{Im}\omega(N_x - 1)}{\text{Im}\omega(N_x)} \right| \quad (1.74)$$

$$\delta_{\text{Re}}(N_y) = \left| \frac{\text{Re}\omega(N_y) - \text{Re}\omega(N_y - 1)}{\text{Re}\omega(N_y)} \right| \quad (1.75)$$

$$\delta_{\text{Im}}(N_y) = \left| \frac{\text{Im}\omega(N_y) - \text{Im}\omega(N_y - 1)}{\text{Im}\omega(N_y)} \right| \quad (1.76)$$

Рассмотрен диапазон N_x от 2 до 12 и диапазон N_y от 1 до 6. Видно, что $N_x = 6$ и $N_y = 4$ дают удовлетворительные результаты. Заметим, что количество базовых мод, необходимых для сходимости, больше, чем в случае с нулевым углом скольжения [36]. Это обусловлено взаимодействием высших мод, что не происходит при нулевом угле скольжения.

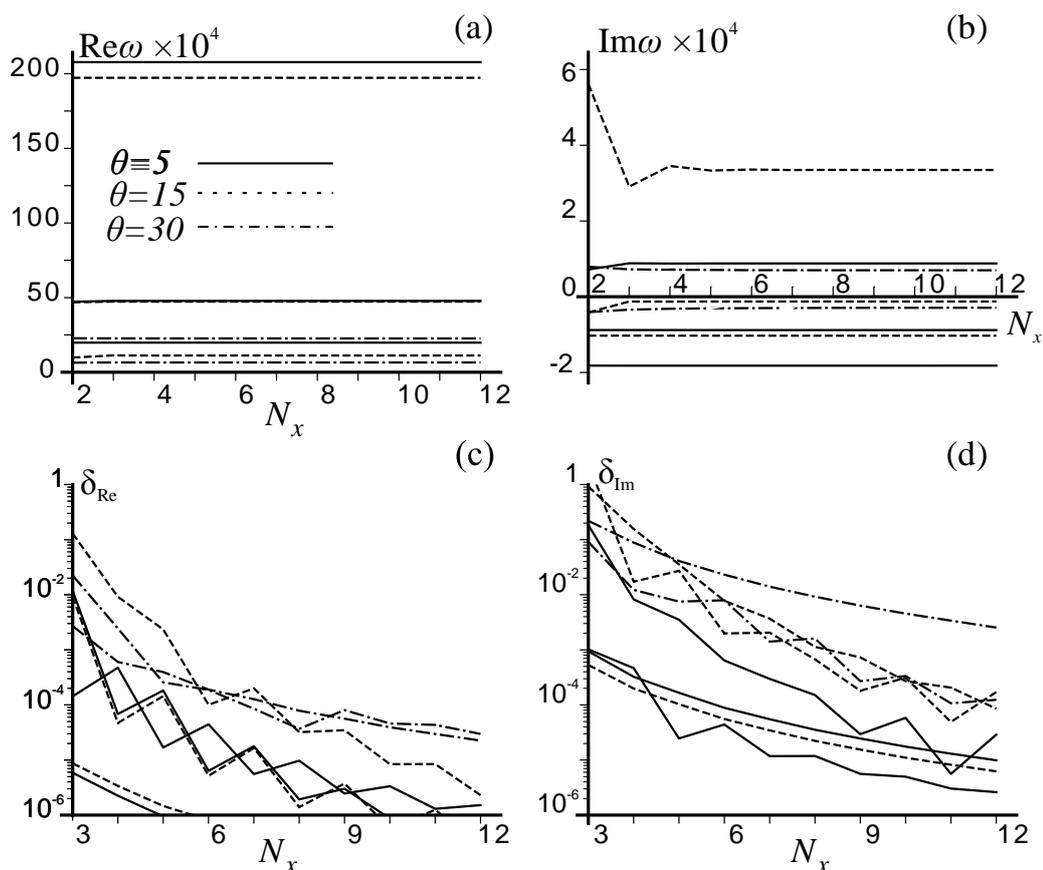


Рис. 1.4. Сходимость по числу базисных мод N_x для двух первых собственных мод. $N_y = 2$, $\varepsilon = 10^{-6}$, $q = 10$, $r = 3$. Действительная (а) и мнимая (б) части комплексной частоты и относительные погрешности (в, г) в зависимости от N_x .

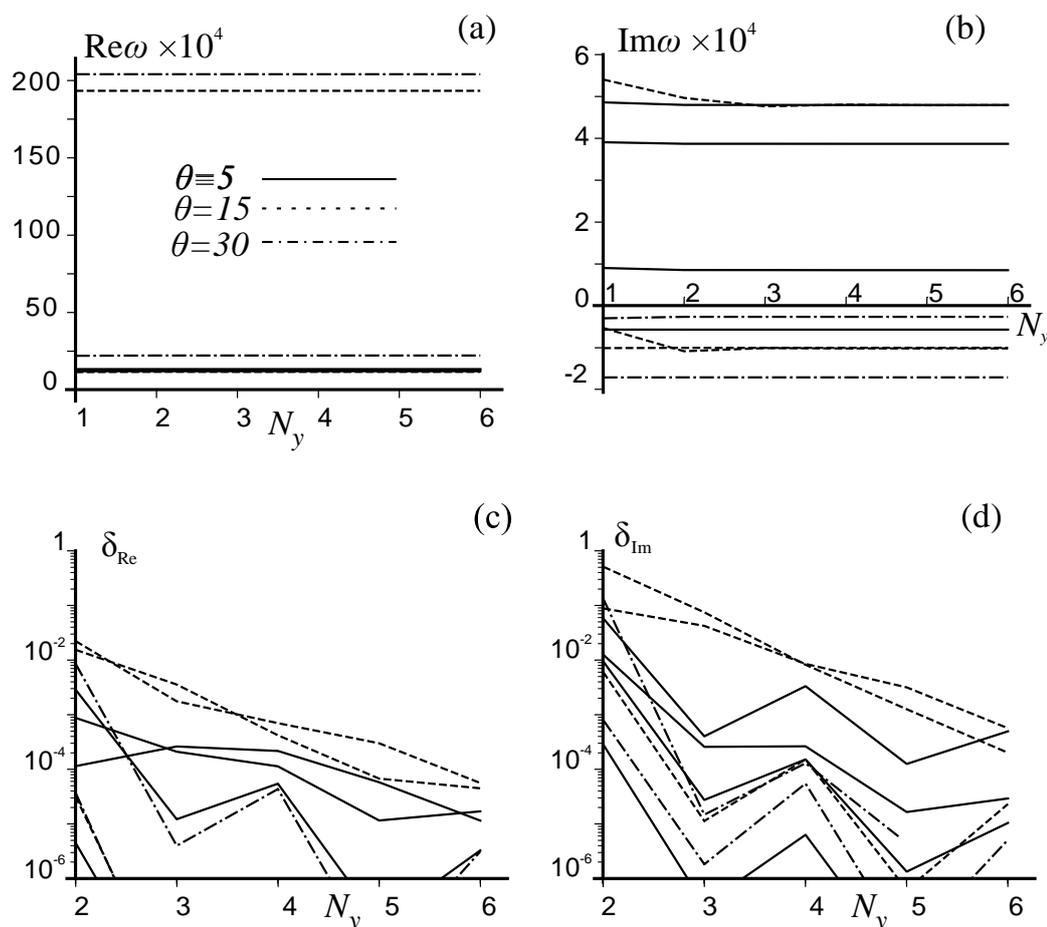


Рис. 1.5. Сходимость по числу базисных мод N_y для двух первых собственных мод. $N_x = 6$, $\varepsilon = 10^{-6}$, $q = 10$, $r = 3$. Действительная (а) и мнимая (б) части комплексной частоты и относительные погрешности (в, г) в зависимости от N_y .

Далее рассматривалась сходимость решения по величине относительной погрешности ε (1.70), числу точек интегрирования q внешнего интеграла, приходящемуся на наименьшую длину полуволны; и отношение внешнего (1.72) и внутреннего шагов интегрирования r .

Расчеты показали, что результаты сходятся при $\varepsilon \leq 10^{-4}$ (Рис. 1.6). Поэтому для расчетов достаточно $\varepsilon = 10^{-4}$.

На Рис. 1.7, Рис. 1.8 показана сходимость действительной и мнимой частей первых двух частот и их относительные погрешностей по q и r . Видно, что значения $q = 6$ и $r = 3$ дают удовлетворительную точность. Стоит отметить, что значения ε , q и r , достаточные для получения точных результатов, такие же, как и при расчете при нулевом угле скольжения [36].

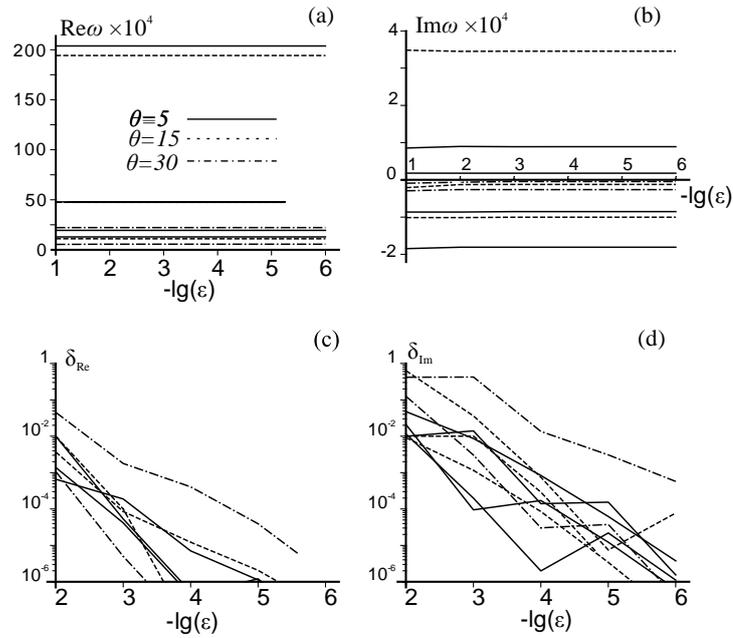


Рис. 1.6. Сходимость по величине относительной погрешности ε для двух первых собственных мод. $N_x = 6$, $N_y = 4$, $q = 10$, $r = 3$. Действительная (а) и мнимая (б) части комплексной частоты и соответствующие относительные погрешности (в, г) в зависимости от ε .

На основании исследования сходимости выбраны следующие параметры численного метода: $N_x = 6$, $N_y = 4$, $\varepsilon = 10^{-4}$, $q = 6$ и $r = 3$. Эти значения используются ниже при расчетах границ панельного флаттера.

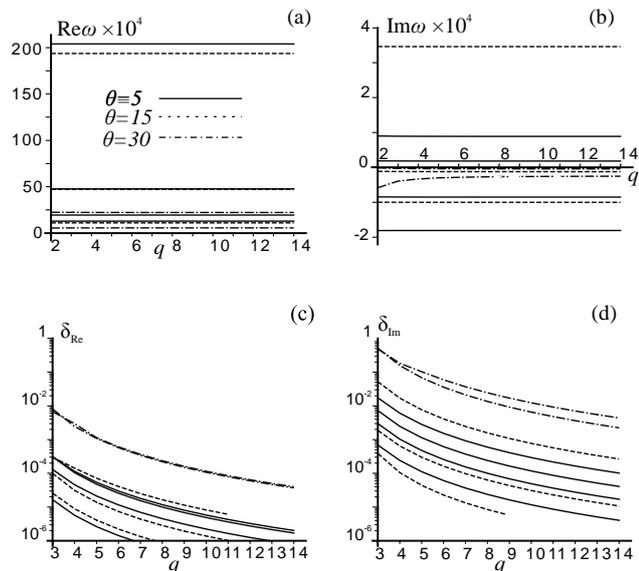


Рис. 1.7. Сходимость по числу точек интегрирования q внешнего интеграла, приходящегося на кратчайшую полуволну для двух первых собственных мод. $N_x = 6$, $N_y = 4$, $\varepsilon = 10^{-4}$, $r = 3$. Действительная (а) и мнимая (б) части комплексной частоты и относительные погрешности (в, г) в зависимости от q .

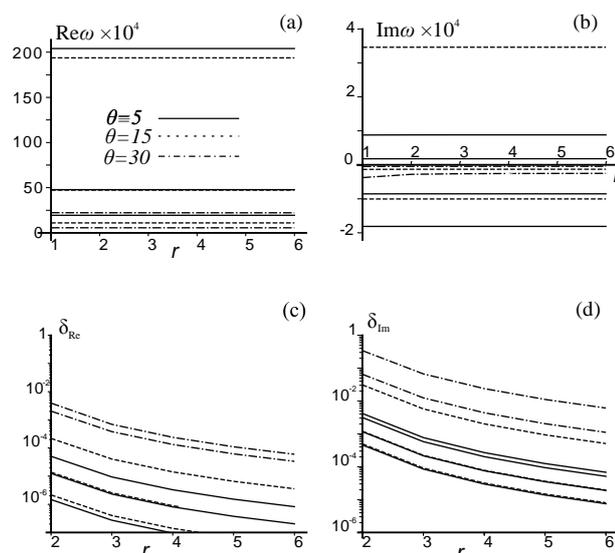


Рис. 1.8. Сходимость по величине отношения внешнего и внутреннего шага интегрирования r для двух первых собственных мод. $N_x = 6$, $N_y = 4$, $\varepsilon = 10^{-4}$, $q = 6$. Действительная (а) и мнимая (б) части комплексной частоты и относительные погрешности (в, г) в зависимости от r .

1.7 Результаты

Было проведено исследование панельного флаттера серии прямоугольных пластин различных размеров. Рассмотрены первая ($k = 1$, $l = 1$) и вторая ($k = 2$, $l = 1$) моды пластины. Численные расчеты проводились для угла скольжения $\theta = 0, 5, 10, 15, 20, 25$ и 30 градусов. Исследования проводились при M от 1,05 до 1,7; при каждом значении θ минимальное число Маха ограничивалось условием сверхзвуковой передней кромки ($M \cdot \cos(\theta) > 1$); в противном случае область интегрирования S становится бесконечной и решение (1.31) уравнения для нестационарного потенциала теряет смысл.

1.7.1 Первая мода

Сначала рассматривается случай нулевого угла скольжения. На Рис. 1.9 показано сравнение с результатами, полученными в работе [36]. На Рис. 1.9 (а также на Рис. 1.10 – Рис. 1.12, Рис. 1.16, Рис. 1.18 – Рис. 1.20, Рис. 1.22, Рис. 1.24, Рис. 1.25) по вертикальной оси отложено число Маха, по горизонтальной оси – безразмерная длина пластины. Сплошной линией обозначены границы, рассчитанные в работе [36], точками — результаты настоящей работы. Изолированная область неустойчивости с левой стороны (А) соответствует

одномодовому флаттеру, тогда как неограниченная область (В) представляет собой область связанного флаттера. Сравнение границ флаттера показывает, что результаты хорошо согласуются друг с другом.

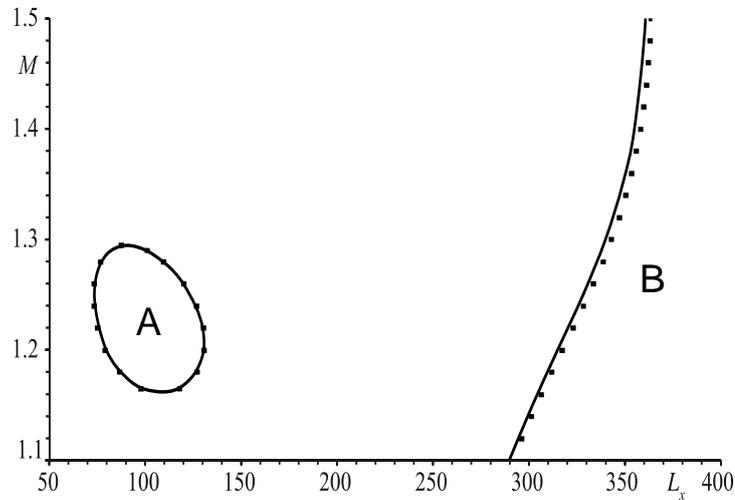


Рис. 1.9. Сравнение результатов данной работы (пунктирная линия) с результатами Шитова и Веденева [36] при нулевом угле скольжения для первой моды и $L_y = 350$.

Далее рассмотрим границы флаттера панели при ненулевом угле скольжения. Результаты при $\theta = 5^\circ$ для нескольких L_y показаны на Рис. 1.10. Области, заштрихованные серым цветом, представляют собой области неустойчивости по соответствующей моде.

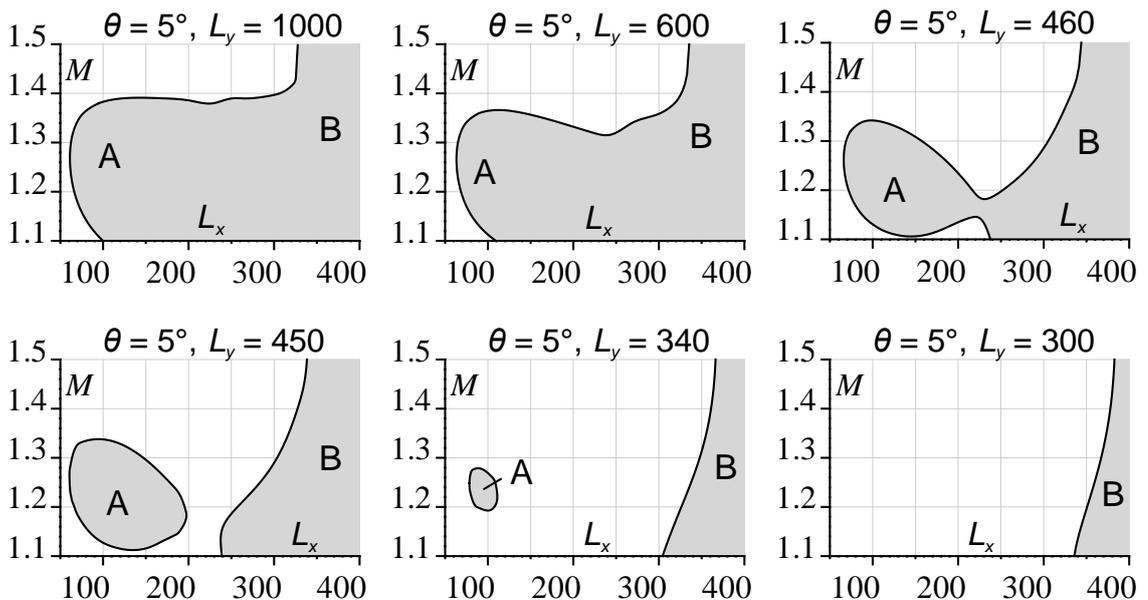


Рис. 1.10. Границы флаттера для первой моды при $\theta = 5^\circ$. Области неустойчивости заштрихованы серым цветом.

Видно, что результаты качественно близки к случаю при $\theta = 0^\circ$ [36]. Для достаточно больших значений ширины пластины и начиная с некоторого значения ее длины существует диапазон чисел Маха M , на котором возникает флаттер по первой форме. Серия более коротких пластин устойчива по отношению к первой моде. При уменьшении L_y происходит уменьшение области флаттера и наблюдается сужение (по числам Маха). Ниже определенного значения L_y область неустойчивости разделяется на область одномодового флаттера конечного размера (область А при более низких L_x) и область связанного флаттера В, неограниченную при $L_x \rightarrow \infty$.

При дальнейшем уменьшении L_y область одномодового флаттера сжимается в точку и исчезает (Таблица 1.1), а граница связанного флаттера сдвигается в сторону больших L_x .

Таблица 1.1. Параметры, при которых область одномодового флаттера исчезает:

θ	L_y
0	313
5	324
10	350
15	410
20	484
25	582
30	713

С увеличением угла скольжения результат несколько усложняется (Рис. 1.11, Рис. 1.12). В границах неустойчивости появляется некоторая нерегулярность. Для значений ширины и для длины больше определенного значения также существует диапазон чисел Маха, для которого имеет место панельный флаттер по первой моде. Далее, с уменьшением L_y , с одной стороны, происходит уменьшение области флаттера и также наблюдается сужение диапазона чисел Маха при определённых значениях длины; с другой стороны, появляются дополнительные области неустойчивости и устойчивости (область С на Рис. 1.11, С, D и E на Рис. 1.12). Как и при меньших углах скольжения, при уменьшении L_y область одномодового

флаттера сначала отделяется, затем уменьшается в размерах, сжимается в точку и, наконец, исчезает. Ниже определенного значения L_y исчезают и дополнительные области, обусловленные взаимодействием трех и более мод. Кроме того, граница флаттера связанных мод смещается в сторону больших L_x .

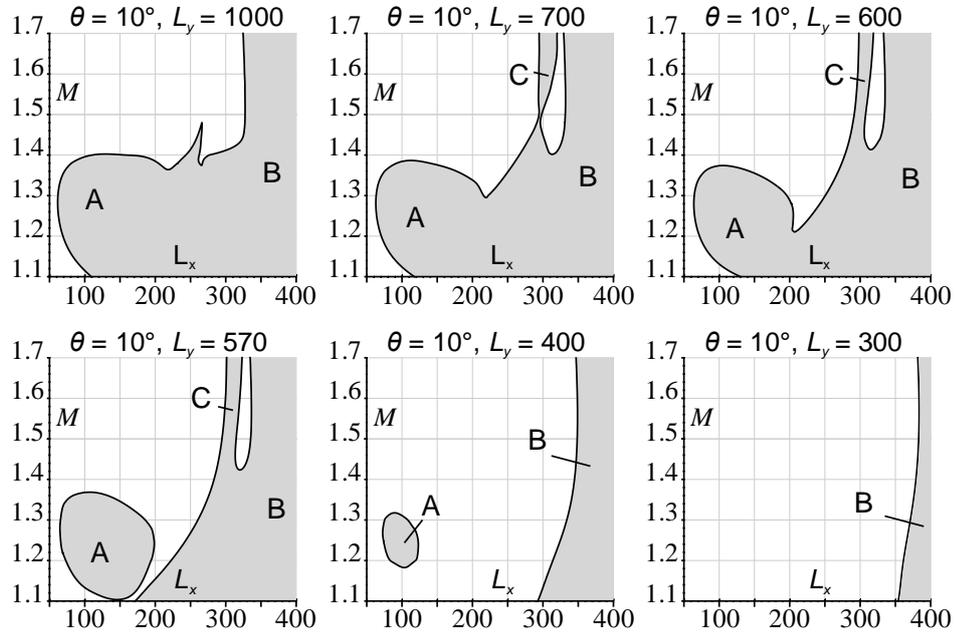


Рис. 1.11. Границы флаттера для первой моды при $\theta = 10^\circ$. Области неустойчивости заштрихованы серым цветом.

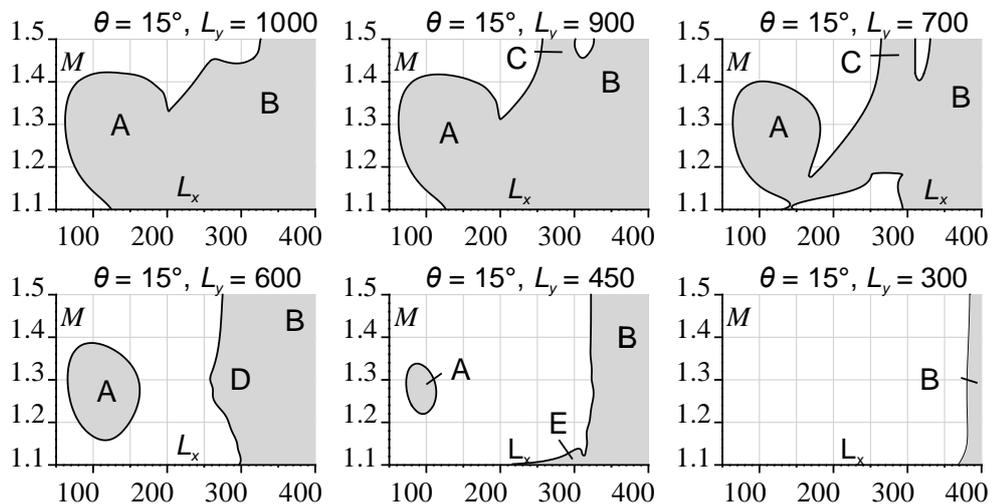


Рис. 1.12. Границы флаттера для первой моды при $\theta = 15^\circ$. Области неустойчивости заштрихованы серым цветом.

Чтобы определить механизм флаттера, вычисляются коэффициенты разложения прогиба пластины по собственным модам (1.67). Распределение значений этих коэффициентов показывает, какая из мод преобладает в колебаниях при условии, что амплитуда первой собственной моды равна 1 ($C_1^1 = 1$) (Рис. 1.13).

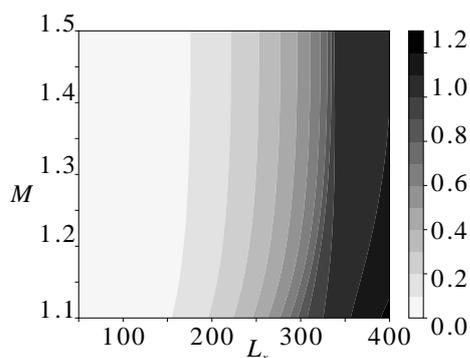


Рис. 1.13. Распределение величины коэффициента разложения прогиба пластины по собственным модам колебания, $|C_1^2|$ ($\theta = 0^\circ$, $L_y = 600$).

При нулевых и малых углах скольжения и при малых L_x доминирует первая мода, что соответствует одномодовому флаттеру (А на Рис. 1.10) по первой моде. При больших L_x доминируют две моды (первая и вторая), что говорит о связанном типе флаттера (Б на Рис. 1.10), обусловленным взаимодействием этих двух мод через аэродинамическую связь.

Отметим, что при $\theta = 0^\circ$ поперечные моды (количество полуволин в направлении поперек потока больше или равно двум) не взаимодействуют друг с другом [27, 70, 71], т.е. $|C_j^i| = 0$ для $j > 1$; взаимодействие происходит только между продольными модами (одна полуволна в направлении поперек потока) C_1^1 и C_1^2 (Рис. 1.13).

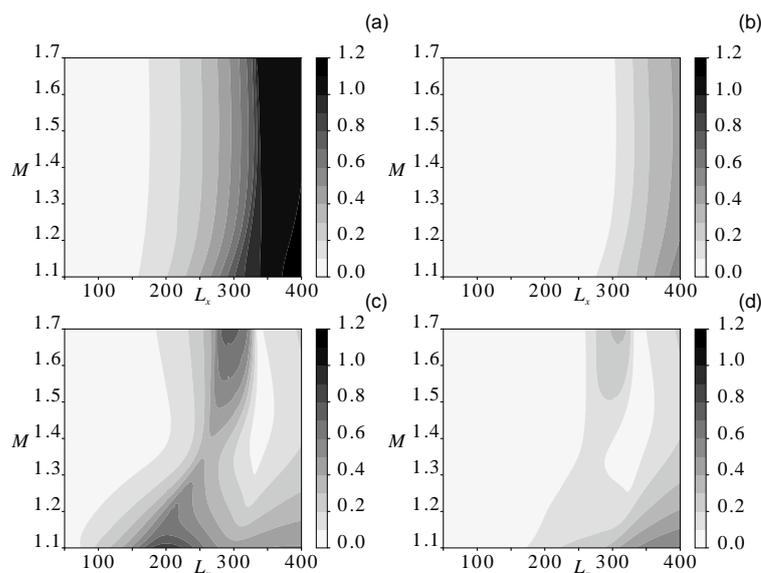


Рис. 1.14. Распределение величин коэффициентов разложения прогиба пластины по собственным модам колебания ($\theta = 10^\circ$, $L_y = 600$):

а) $|C_1^2|$, б) $|C_1^3|$, в) $|C_2^1|$, г) $|C_2^2|$.

При увеличении θ аэродинамическая связь приводит к взаимодействию и между поперечными модами (Рис. 1.14). Взаимодействие нескольких мод приводит к появлению дополнительных областей флаттера. А именно, в области С при $\theta = 10^\circ$ и $L_y = 600$ (Рис. 1.11) моды T_1^1 , T_1^2 , T_2^1 и T_2^2 имеют ненулевую амплитуду, то есть все четыре моды и их взаимодействие ответственны за соответствующую область неустойчивости. Но все же остаются области (А на Рис. 1.11, Рис. 1.12), где доминирует одна мода, а также области (В на рис. Рис. 1.11, Рис. 1.12), где доминируют две моды.

Когда несколько собственных поперечных мод взаимодействуют друг с другом в области С, имеет место поперечная бегущая волна (Рис. 1.15). Это явление не наблюдалось при нулевом угле скольжения, когда волна могла распространяться только в продольном направлении.

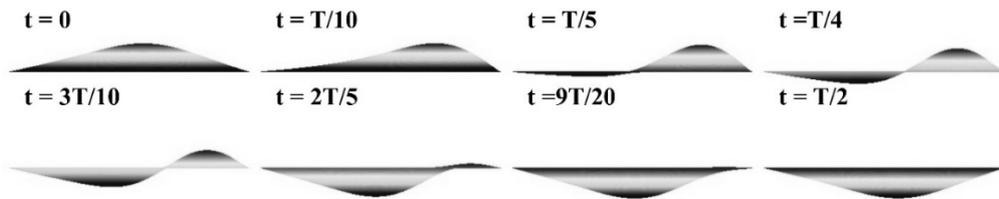


Рис. 1.15. Формы деформированной пластины на полупериоде колебаний.

Вид поперек потока (плоскость yz).

$\theta = 15^\circ$, $L_y = 700$, $L_x = 300$, $M = 1,46$ (область С на Рис. 1.12).

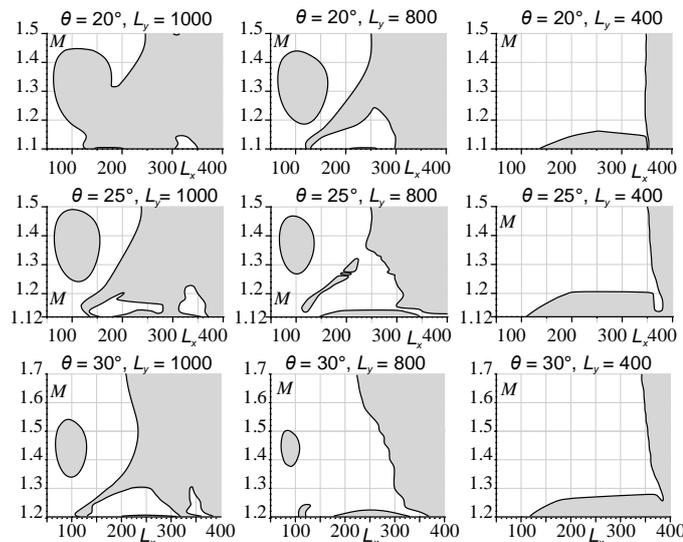


Рис. 1.16. Границы флаттера для первой моды при $\theta = 20^\circ$, 25° , 30° . Области неустойчивости заштрихованы серым цветом.

При больших значениях θ результаты становятся еще более сложными (Рис. 1.16). Достаточно сильная нерегулярность границ флаттера существует уже при больших L_y . С уменьшением безразмерной ширины появляются изолированные области как связанного флаттера, так и одномодового флаттера. В этой неоднородности ключевую роль играет взаимодействие нескольких поперечных мод (Рис. 1.17). Отметим, что L_y , при котором одномодовая область флаттера исчезает, продолжает увеличиваться с увеличением угла скольжения.

Таким образом, при малом угле скольжения границы панельного флаттера по первой моде мало отличаются от таковых при нулевом угле скольжения, но с увеличением θ взаимодействие нескольких мод, как по потоку, так и поперек него, приводит к появлению дополнительных областей неустойчивости и устойчивости. Из-за взаимодействия нескольких мод границы теряют гладкость и становятся нерегулярными.

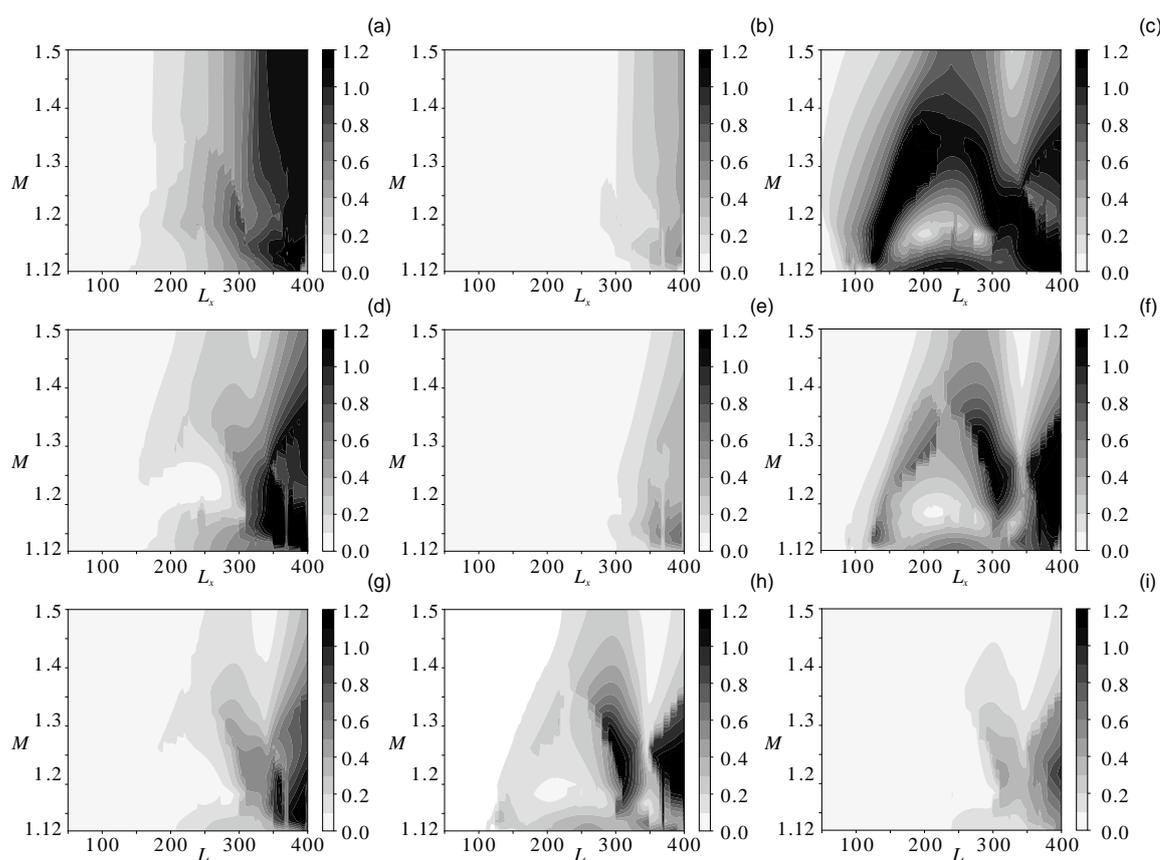


Рис. 1.17. Распределение величин коэффициентов разложения прогиба пластины

по собственным модам колебания ($\theta = 25^\circ$, $L_y = 800$):

а) $|C_1^2|$, б) $|C_1^3|$, в) $|C_2^1|$, г) $|C_2^2|$, д) $|C_2^3|$, е) $|C_3^1|$, ж) $|C_3^2|$, з) $|C_4^1|$, и) $|C_4^2|$.

1.7.2 Вторая мода

Для второй моды сначала также было проведено сравнение с результатами расчета [36] при нулевом угле скольжения (Рис. 1.18). Как и для первой моды, имеется хорошее совпадение границ флаттера.

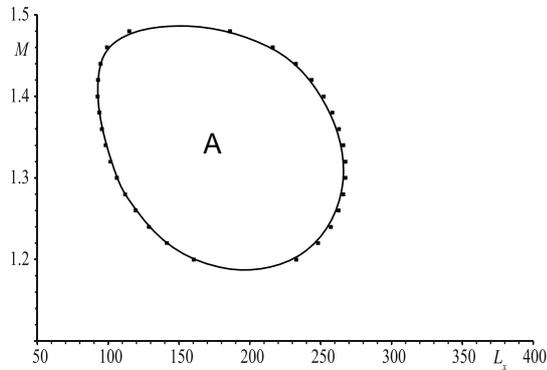


Рис. 1.18. Сравнение результатов настоящей работы (точки) и результатов Шитова и Веденеева [36] при нулевом угле скольжения для второй моды и $L_y = 300$.

При малых углах θ , но в несколько большем диапазоне, чем для первой моды, результаты остаются качественно близкими к результатам при нулевом угле (Рис. 1.19, Рис. 1.20). Для достаточно широких пластин имеется область одномодового флаттера по второй моде.

С уменьшением L_y область неустойчивости становится меньше. Затем при определенном значении L_y она сжимается в точку и исчезает (Таблица 1.2). Это значение L_y увеличивается с увеличением угла скольжения.

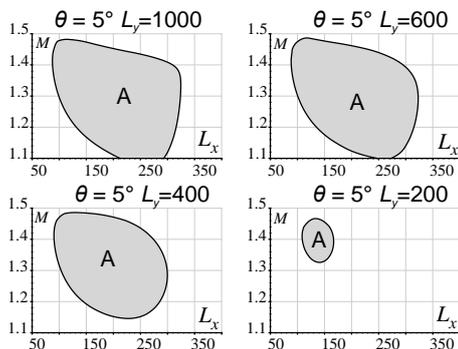


Рис. 1.19. Границы флаттера для второй моды при $\theta = 5^\circ$. Области неустойчивости заштрихованы серым цветом.

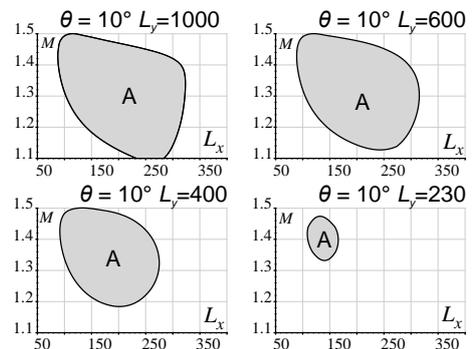


Рис. 1.20. Границы флаттера для второй моды при $\theta = 10^\circ$. Области неустойчивости заштрихованы серым цветом.

Таблица 1.2. Параметры, при которых область одномодового флаттера исчезает:

θ	L_y
5	183
10	211
15	256
25	386

С увеличением угла скольжения наблюдается появление новых областей неустойчивости (D, E на Рис. 1.21 и D, E, F и G на Рис. 1.22). Их появление обусловлено взаимодействием нескольких мод пластины, как продольных, так и поперечных, что видно из значений коэффициентов разложения прогиба пластины по собственным модам колебания при условии, что амплитуда второй собственной моды равна 1 ($C_1^2 = 1$) (Рис. 1.23). Во всех случаях область одномодового флаттера (A на Рис. 1.21, Рис. 1.22) постепенно уменьшается с уменьшением ширины пластины. С увеличением угла скольжения эта область смещается в сторону больших чисел Маха.

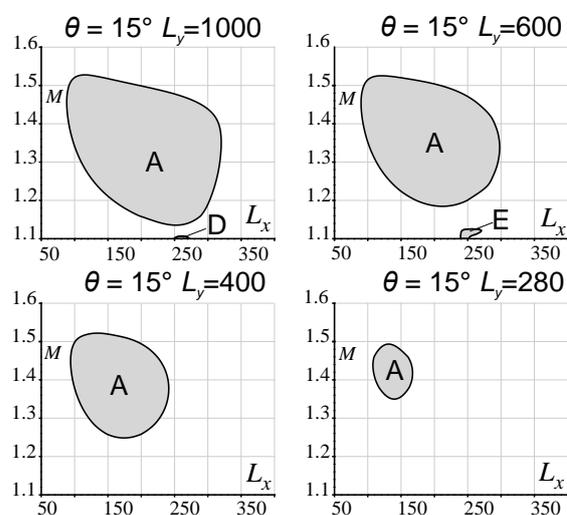


Рис. 1.21. Границы флаттера для второй моды при $\theta = 15^\circ$.
Области неустойчивости заштрихованы серым цветом

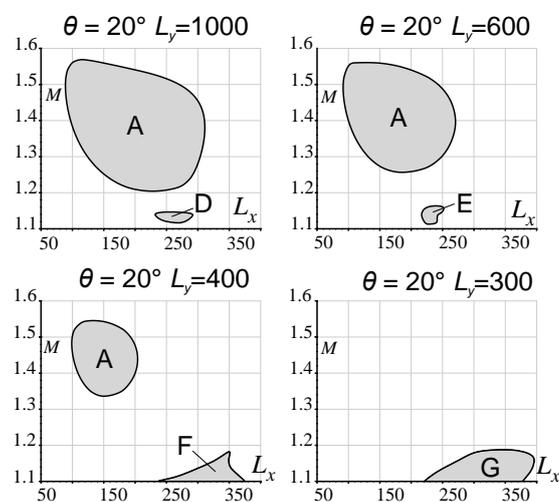


Рис. 1.22. Границы флаттера для второй моды при $\theta = 20^\circ$.
Области неустойчивости заштрихованы серым цветом.

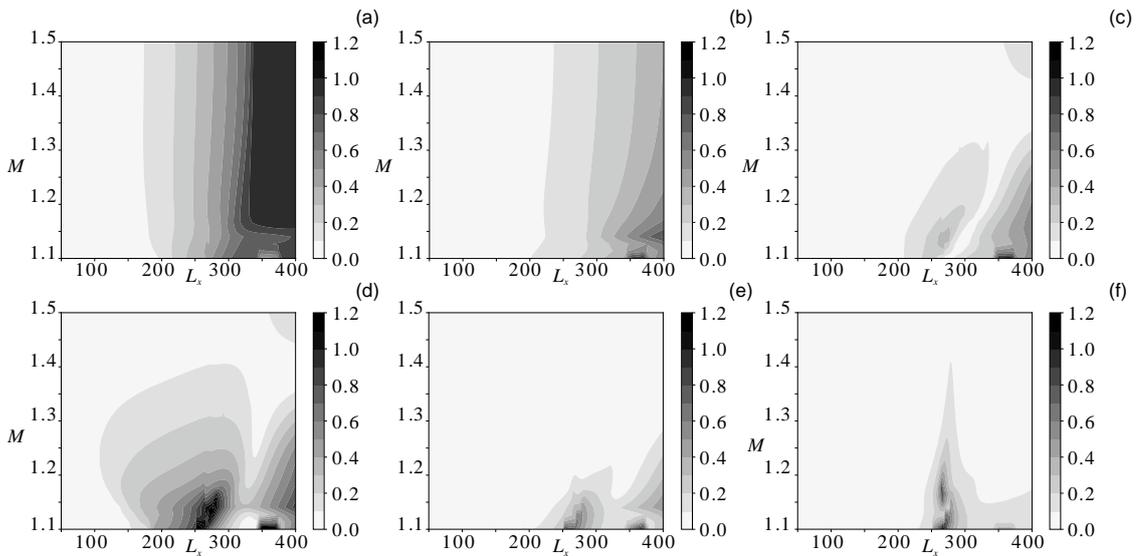


Рис. 1.23. Распределение величин коэффициентов разложения прогиба пластины по собственным модам колебания ($\theta = 15^\circ$, $L_y=600$): а) $|C_1^1|$, б) $|C_1^3|$, в) $|C_2^1|$, г) $|C_2^2|$, д) $|C_3^2|$, е) $|C_4^1|$.

При дальнейшем увеличении угла скольжения увеличивается количество областей флаттера, обусловленных взаимодействием нескольких мод пластины (Рис. 1.24, Рис. 1.25).

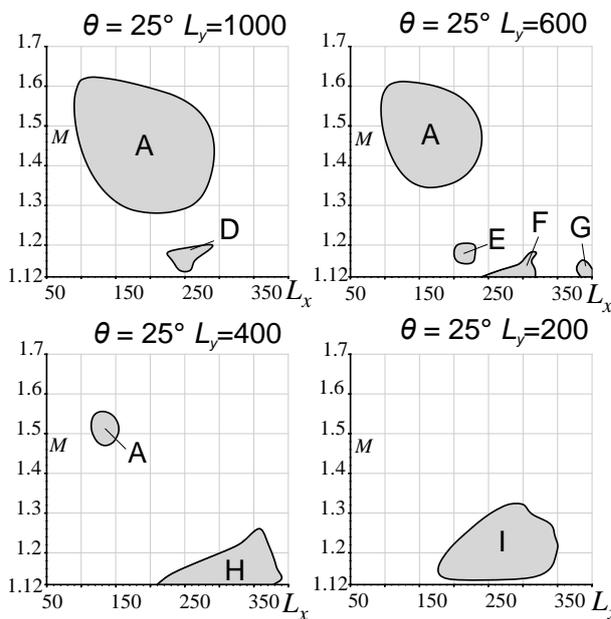


Рис. 1.24. Границы флаттера для второй моды при $\theta = 25^\circ$. Области неустойчивости заштрихованы серым цветом

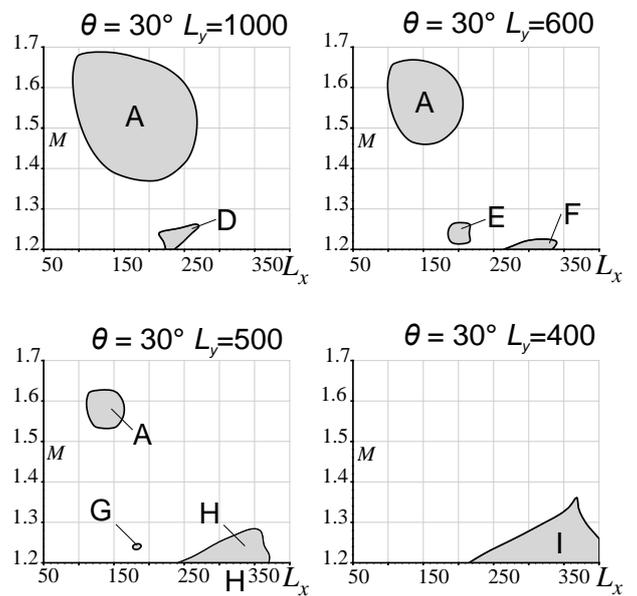


Рис. 1.25. Границы флаттера для второй моды при $\theta = 30^\circ$. Области неустойчивости заштрихованы серым цветом

Таким образом, при малых углах, но в несколько более широком диапазоне, чем для первой моды, граница флаттера близка к случаю нулевого угла. Однако при больших углах, как и для первой моды, появляются нерегулярные изолированные области неустойчивости.

1.8 Выводы

С помощью линеаризованной теории потенциального течения и процедуры Бубнова–Галеркина исследована устойчивость серии прямоугольных пластин при ненулевом угле скольжения по отношению к первой и второй модам.

При малых углах скольжения области флаттера качественно близки к таковым при нулевом угле и состоят из одномодовых и связанных областей флаттера, которые при больших L_y соединяются, а при меньших L_y разъединяются; при достаточно низких значениях L_y область одномодового флаттера сжимается в точку и исчезает. С увеличением угла скольжения увеличивается значение L_y , при котором исчезают одномодовые области флаттера, то есть панель в этом смысле стабилизируется.

Увеличение угла скольжения также приводит к нерегулярности границы связанного флаттера и к образованию дополнительных изолированных областей неустойчивости. По сравнению с нулевым углом эти новые области флаттера появляются из-за взаимодействия двух или более собственных поперечных мод пластины через аэродинамическую связь. Благодаря взаимодействию нескольких мод, флаттерные колебания пластины имеют форму бегущей в поперечном направлении волны.

Области флаттера, обусловленные взаимодействием нескольких мод, наблюдаемые в этом исследовании, получены в линейной постановке и включают как минимум две поперечные моды. Это отличается от колебаний при нулевом угле скольжения, изученных в работах [22, 25, 51], где все взаимодействующие моды являются продольными, а их взаимодействие является чисто нелинейным эффектом.

С точки зрения практических аспектов настоящие результаты показывают, что анализ флаттера только при нулевом угле скольжения не является

консервативным. Во-первых, скос потока приводит к смещению первичной области одномодового флаттера в сторону больших чисел Маха. Во-вторых, неожиданно появляются дополнительные области неустойчивости с нерегулярными, негладкими границами при параметрах, весьма далеких от тех, где существовал флаттер при нулевом угле. Следовательно, случай потока с ненулевым углом скольжения следует рассматривать с осторожностью, и включать его в расчетную модель флаттера, если типовой полетный цикл летательного аппарата имеет значительную часть косо обтекания панелей.

2 Флаттер панелей обшивки различной формы²

2.1 Постановка задачи

В линейном приближении исследуется устойчивость тонкой упругой пластины, одна сторона которой обтекается однородным сверхзвуковым потоком идеального совершенного газа (Рис. 2.1).

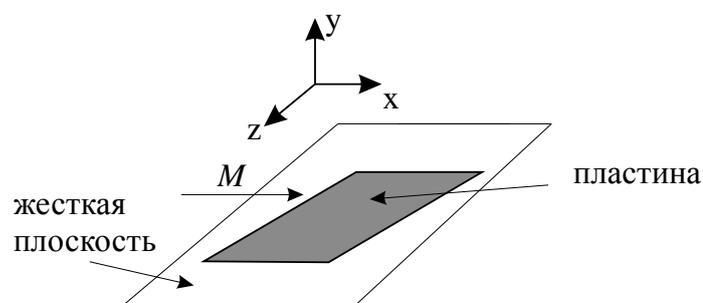


Рис. 2.1. Геометрическое описание задачи

Рассматриваются пластины, имеющие форму прямоугольника, трапеции и параллелограмма, шарнирно опертые по всем краям. Исследуется влияние угла скоса. Границы панельного флаттера исследуются для пластин различных размеров. При этом сравнение результатов численных расчетов проводится для пластин разной формы при одинаковой площади:

$$S = a \cdot b, \quad (2.1)$$

где a – линейный размер, отсчитываемый вдоль потока, b – линейный размер, отсчитываемый поперек потока.

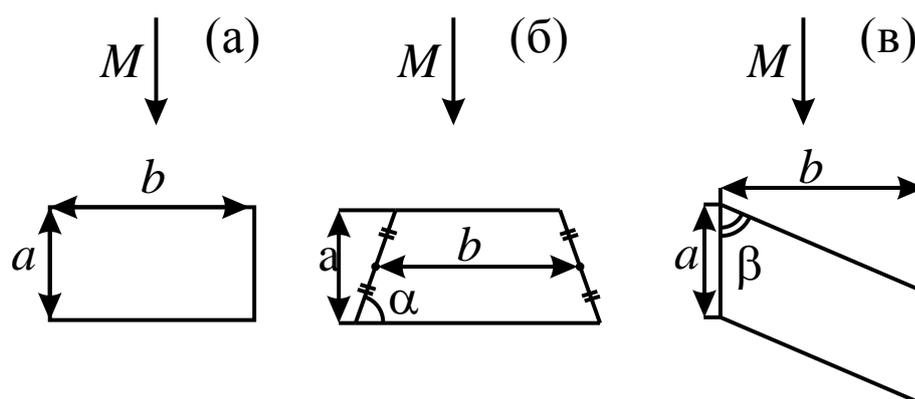


Рис. 2.2. Рассматриваемые пластины. а) прямоугольная, б) трапециевидная, в) в форме параллелограмма

² При подготовке данной главы диссертации использовались следующие публикации автора, в которых, согласно «Положению о присуждении ученых степеней в Московском государственном университете имени М.В.Ломоносова», отражены основные результаты, положения и выводы исследования: [139, 141, 145, 149, 156 – 163, 165 – 171].

Изучается одномодовый флаттер, при котором поток газа не влияет на формы и частоты собственных колебаний пластины. Так как вещественная часть частоты и форма колебания известны из расчета колебаний пластины в пустоте, то движение пластины в потоке принудительно задается по собственной моде, и рассчитывается нестационарное обтекание пластины при ее заданных колебаниях. В результате решения вычисляется работа, совершенная силами давления на одном периоде колебаний. Критерием флаттера является положительность этой работы.

Более подробно численный метод расчета флаттера описан в следующих разделах.

2.2 Энергетический метод

Будем предполагать, что влияние потока воздуха на собственные колебания конструкции незначительно. Тогда он может привести только к дополнительному аэродинамическому демпфированию (в случае устойчивости) или усилению (в случае флаттера) колебаний без изменения собственных форм и частот по сравнению с колебаниями в пустоте.

Приведем вывод уравнения изменения энергии в общем случае упругого тела и в случае пластины.

2.2.1 Уравнение изменения энергии

Упругое тело

Запишем уравнение сохранения импульса для линейного упругого тела при отсутствии массовых сил:

$$\rho_0 \frac{\partial^2 w^i}{\partial t^2} = \nabla_j p^{ij}, \quad (2.2)$$

где w^i – компоненты вектора перемещения, ρ_0 – начальная плотность материала упругого тела, p^{ij} – тензор напряжений.

Рассматривается декартова система координат. Умножим обе части уравнения (2.2)

на $\frac{\partial w^i}{\partial t}$, проинтегрируем по объему V и просуммируем по индексу i . Получим следующее уравнение:

$$\sum_i \int_V \rho_0 \frac{\partial w^i}{\partial t} \frac{\partial^2 w^i}{\partial t^2} dV = \sum_i \int_V \nabla_j p^{ij} \frac{\partial w^i}{\partial t} dV \quad (2.3)$$

Рассмотрим левую часть полученного уравнения:

$$\sum_i \int_V \rho_0 \frac{\partial w^i}{\partial t} \frac{\partial^2 w^i}{\partial t^2} dV = \sum_i \int_V \rho_0 \frac{\partial}{\partial t} \left[\frac{1}{2} \left(\frac{\partial w^i}{\partial t} \right)^2 \right] dV \quad (2.4)$$

Воспользуемся свойством линейности дифференцирования и интегрирования:

$$\sum_i \int_V \rho_0 \frac{\partial}{\partial t} \left[\frac{1}{2} \left(\frac{\partial w^i}{\partial t} \right)^2 \right] dV = \int_V \rho_0 \frac{\partial}{\partial t} \left[\frac{1}{2} \sum_i \left(\frac{\partial w^i}{\partial t} \right)^2 \right] dV = \int_V \rho_0 \frac{\partial}{\partial t} \left[\frac{1}{2} \left(\frac{\partial w}{\partial t} \right)^2 \right] dV$$

здесь $w^2 = \sum_i w^i{}^2$, w – длина вектора перемещения.

Так как масса $dm = \rho_0 dV$ постоянна, то знак дифференцирования можно вынести из-под интеграла:

$$\int_V \rho_0 \frac{\partial}{\partial t} \left[\frac{1}{2} \left(\frac{\partial w}{\partial t} \right)^2 \right] dV = \frac{\partial}{\partial t} \int_V \rho_0 \frac{1}{2} \left(\frac{\partial w}{\partial t} \right)^2 dV$$

Таким образом, получаем, что левая часть уравнения (2.3) – это изменение кинетической энергии упругого тела $E_{\text{кин}} = \int_V \rho_0 \frac{1}{2} \left(\frac{\partial w}{\partial t} \right)^2 dV$:

$$\sum_i \int_V \rho_0 \frac{\partial w^i}{\partial t} \frac{\partial^2 w^i}{\partial t^2} dV = \frac{d}{dt} E_{\text{кин}} \quad (2.5)$$

Теперь рассмотрим правую часть:

$$\sum_i \int_V \nabla_j p^{ij} \frac{\partial w^i}{\partial t} dV = \sum_i \int_V \nabla_j \left(p^{ij} \frac{\partial w^i}{\partial t} \right) dV - \sum_i \int_V p^{ij} \nabla_j \frac{\partial w^i}{\partial t} dV \quad (2.6)$$

Интеграл по объему V , входящий в первое слагаемое, преобразуем по теореме Гаусса-Остроградского [66] к поверхностному:

$$\sum_i \int_V \nabla_j \left(p^{ij} \frac{\partial w^i}{\partial t} \right) dV = \sum_i \int_S p^{ij} \frac{\partial w^i}{\partial t} n_j dS = \int_S \mathbf{p} \frac{\partial \mathbf{w}}{\partial t} dS$$

Полученное выражение – работа поверхностных сил на движениях упругого тела.

Преобразуем второе слагаемое:

$$\begin{aligned} \sum_i \int_V p^{ij} \nabla_j \frac{\partial w^i}{\partial t} dV &= \sum_i \int_V p^{ij} \frac{1}{2} \left(\nabla_j \frac{\partial w^i}{\partial t} + \nabla_i \frac{\partial w^j}{\partial t} \right) dV - \\ &- \sum_i \int_V p^{ij} \frac{1}{2} \left(\nabla_j \frac{\partial w^i}{\partial t} - \nabla_i \frac{\partial w^j}{\partial t} \right) dV = \\ &= \sum_i \int_V p^{ij} e_{ij} dV - \sum_i \int_V p^{ij} \omega_{ij} dV, \end{aligned}$$

где $e_{ij} = \frac{1}{2} \left(\nabla_j \frac{\partial w^i}{\partial t} + \nabla_i \frac{\partial w^j}{\partial t} \right)$ – тензор скоростей деформации, $\omega_{ij} = \frac{1}{2} \left(\nabla_j \frac{\partial w^i}{\partial t} - \nabla_i \frac{\partial w^j}{\partial t} \right)$. Поскольку ω_{ij} – антисимметричный тензор, а p^{ij} – симметричный тензор, то свертка $p^{ij} \omega_{ij} = 0$.

$$\sum_i p^{ij} e_{ij} = \sum_i p_{ij} e_{ij} = \frac{d}{dt} E_{\Pi},$$

где E_{Π} – упругая энергия тела.

Окончательно получим следующее уравнение:

$$\frac{dE(t)}{dt} = \int_S p v dS, \quad (2.7)$$

где $E(t) = E_{\text{кин}} + E_{\Pi}$ – полная энергия упругого тела.

Теперь рассмотрим случай тонкой упругой пластины.

Пластина

Уравнение движения пластины [69] имеет вид:

$$D_w \left(\frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial z^2} + \frac{\partial^4 w}{\partial z^4} \right) + \rho h \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} + p = 0 \quad (2.8)$$

$$w = 0, M_{n1} = 0 \quad \text{при } x = x_1, x = x_2 \quad (2.9)$$

$$w = 0, M_{n2} = 0 \quad \text{при } z = z_1(x), z = z_2(x), \quad (2.10)$$

где w – прогиб пластины, $D_w = \frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)}$ – цилиндрическая жесткость, E – модуль

Юнга, ν – коэффициент Пуассона, ρ – плотность материала, h – толщина пластины,

p – давление, действующее на поверхность пластины, M_{ni} - момент относительно нормали к границе.

Умножим обе части уравнения (2.8) на $\frac{\partial w}{\partial t}$ и возьмем двойной интеграл по области Ω , ограниченной контуром пластинки:

$$\iint_{\Omega} \left(D \frac{\partial w}{\partial t} \left(\frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial z^2} + \frac{\partial^4 w}{\partial z^4} \right) + \rho h \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} \frac{\partial w}{\partial t} + p \frac{\partial w}{\partial t} \right) dx dz = 0, \quad (2.11)$$

где Ω – прямоугольник, или трапеция, или параллелограмм.

Учитывая граничные условия (2.9) – (2.10), рассмотрим интегралы:

$$\iint_{\Omega} \frac{\partial^4 w}{\partial z^4} \frac{\partial w}{\partial t} dx dz, \quad \iint_{\Omega} \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} \frac{\partial w}{\partial t} dx dz, \quad \iint_{\Omega} \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial z^2} \frac{\partial w}{\partial t} dx dz \quad (2.12)$$

и перейдем к поверхностным интегралам по поверхности пластины S . Получим выражение для интегралов в случае трапециевидной пластины. В остальных случаях вывод аналогичен.

Рассмотрим первый интеграл (2.12):

$$\iint_{\Omega} \frac{\partial^4 w}{\partial z^4} \frac{\partial w}{\partial t} dx dz = \int_{x_1}^{x_2} dx \int_{z_1(x)}^{z_2(x)} \frac{\partial^4 w}{\partial z^4} \frac{\partial w}{\partial t} dz$$

Воспользуемся правилом интегрирования по частям для интеграла с переменными пределами:

$$\begin{aligned} \int_{x_1}^{x_2} dx \int_{z_1(x)}^{z_2(x)} \frac{\partial^4 w}{\partial z^4} \frac{\partial w}{\partial t} dz &= - \int_0^X \left(\int_{z_1(x)}^{z_2(x)} \frac{\partial^3 w}{\partial z^3} \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\partial w}{\partial t} \right) dz \right) dx + \\ &+ \int_{x_1}^{x_2} \left(\left(\frac{\partial^3 w}{\partial z^3} \frac{\partial w}{\partial t} \right) \Big|_{z=z_2(x)} \right) dx - \int_{x_1}^{x_2} \left(\left(\frac{\partial^3 w}{\partial z^3} \frac{\partial w}{\partial t} \right) \Big|_{z=z_1(x)} \right) dx \end{aligned}$$

С учетом граничных условий имеем:

$$\int_{x_1}^{x_2} dx \int_{z_1(x)}^{z_2(x)} \frac{\partial^4 w}{\partial z^4} \frac{\partial w}{\partial t} dz = \int_{x_1}^{x_2} \left(\int_{z_1(x)}^{z_2(x)} \frac{\partial^2 w}{\partial z^2} \frac{\partial^2}{\partial z^2} \left(\frac{\partial w}{\partial t} \right) dz \right) dx$$

Применим еще раз интегрирование по частям и, учитывая граничные условия, получим:

$$\int_{x_1}^{x_2} dx \int_{z_1(x)}^{z_2(x)} \frac{\partial^4 w}{\partial z^4} \frac{\partial w}{\partial t} dz = \int_{x_1}^{x_2} \left(\int_{z_1(x)}^{z_2(x)} \frac{\partial^2 w}{\partial z^2} \frac{\partial^2}{\partial z^2} \left(\frac{\partial w}{\partial t} \right) dz \right) dx$$

Поменяем порядок взятия производных и вынесем знак производной по времени из-под знака интеграла:

$$\begin{aligned} \int_{x_1}^{x_2} \left(\int_{z_1(x)}^{z_2(x)} \frac{\partial^2 w}{\partial z^2} \frac{\partial^2}{\partial z^2} \left(\frac{\partial w}{\partial t} \right) dz \right) dx &= \int_{x_1}^{x_2} \left(\int_{z_1(x)}^{z_2(x)} \frac{\partial^2 w}{\partial z^2} \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial^2 w}{\partial z^2} \right) dz \right) dx = \\ &= \int_{x_1}^{x_2} \left(\int_{z_1(x)}^{z_2(x)} \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial^2 w}{\partial z^2} \right)^2 dz \right) dx = \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{1}{2} \iint_{\Omega} \left(\frac{\partial^2 w}{\partial z^2} \right)^2 dx dz \right) \end{aligned}$$

Наконец, перейдя к интегралу по поверхности пластины S , получим следующее выражение для первого интеграла (2.12):

$$\iint_{\Omega} \frac{\partial^4 w}{\partial z^4} \frac{\partial w}{\partial t} dx dz = \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{1}{2} \int_S \left(\frac{\partial^2 w}{\partial z^2} \right)^2 ds \right) \quad (2.13)$$

Чтобы получить выражение для второго интеграла (2.12), предварительно перейдем к обратным функциям:

$$\begin{aligned} z = z_1(x) &\Rightarrow x = x_1(z) \\ z = z_2(x) &\Rightarrow x = x_2(z) \end{aligned} \quad (2.14)$$

После чего интеграл вычисляется аналогично предыдущему:

$$\iint_{\Omega} \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} \frac{\partial w}{\partial t} dx dz = \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{1}{2} \int_S \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right)^2 ds \right) \quad (2.15)$$

Аналогично выводится выражение для третьего интеграла (2.12):

$$\iint_{\Omega} \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial z^2} \frac{\partial w}{\partial t} dx dz = \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{1}{2} \int_S \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial z} \right)^2 ds \right) \quad (2.16)$$

Теперь рассмотрим интегралы:

$$\iint_{\Omega} \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} \frac{\partial w}{\partial t} dx dz, \iint_{\Omega} p \frac{\partial w}{\partial t} dx dz \quad (2.17)$$

Выполнив ряд преобразований, получим для выражения для первого интеграла (2.17):

$$\iint_{\Omega} \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} \frac{\partial w}{\partial t} dx dz = \iint_{\Omega} \frac{\partial w}{\partial t} \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial w}{\partial t} \right) dx dz = \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{1}{2} \int_S \left(\frac{\partial w}{\partial t} \right)^2 ds \right) \quad (2.18)$$

и второго интеграла (2.17):

$$\iint_{\Omega} p \frac{\partial w}{\partial t} dx dz = - \iint_{\Omega} \mathbf{p} \cdot \mathbf{v} dx dz = - \int_S \mathbf{p} \cdot \mathbf{v} ds, \quad (2.19)$$

где $\mathbf{p} = -p\mathbf{n}$, \mathbf{n} – нормаль к поверхности конструкции, $\mathbf{v} = \{0, \frac{\partial w}{\partial t}, 0\}$ – скорость движения точек пластины.

В результате получим уравнение:

$$\frac{d}{dt} E(t) = \int_S \mathbf{p}(x, y, z, t) \cdot \mathbf{v}(x, z, t) ds, \quad (2.20)$$

где $E(t)$ – полная энергия пластины:

$$E(t) = \frac{1}{2} \int_S \left(D_w \left(\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right)^2 + 2 \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial z} \right)^2 + \left(\frac{\partial^2 w}{\partial z^2} \right)^2 \right) + \rho h \left(\frac{\partial w}{\partial t} \right)^2 \right) ds \quad (2.21)$$

2.3 Работа сил давления на периоде колебания

Таким образом, уравнение изменения энергии конструкции имеет вид:

$$\frac{dE(t)}{dt} = N(t), \quad (2.22)$$

где $N(t) = \int_S \mathbf{p}(x, y, z, t) \cdot \mathbf{v}(x, z, t) ds$ – мощность сил давления.

Тогда изменение энергии за период колебания определяется так:

$$\Delta E = E(T) - E(0) = U = \int_{t_0}^{T+t_0} N dt = \int_{t_0}^{T+t_0} \int_S \mathbf{p}(x, y, z, t) \cdot \mathbf{v}(x, z, t) ds dt, \quad (2.23)$$

где T – период колебаний.

Работа U сил давления (2.23) на цикле колебаний вычисляется следующим образом. Проводится расчет нестационарного обтекания конструкции. Колебания конструкции задаются в виде перемещения соответствующей поверхности расчетной области (сопровождающегося деформацией расчетной сетки) по собственным модам в пустоте. В случае пластины задаваемое перемещение имеет вид:

$$w(x, z, t) = W(x, z) \cdot \sin(\omega t), \quad (2.24)$$

где $W(x, z)$ – собственная форма, ω – собственная круговая частота.

Колебание конструкции приводит к возмущению давления газа. Если спустя некоторое время после начала колебаний, отклик потока на гармоническое движение конструкции стал гармоническим, то расчет останавливается и вычисляется работа U , совершенная давлением газа на последнем периоде колебаний. Положительность работы будет критерием флаттера:

$$U > 0 \quad (2.25)$$

Собственные формы и частоты колебаний конструкции, которые совпадают в потоке и в пустоте, вычисляются стандартными методами. Аэродинамические расчеты проведены методом контрольных объемов [74] в Ansys CFX. Вычисление работы по результатам расчета осуществляются с помощью программы [73].

2.4 Расчет собственных частот

Рассматриваются пластины с толщиной $h = 0,001$ м. Свойства материала пластины соответствуют стали:

$$E = 2 \cdot 10^{11} \text{Па}, \quad \nu = 0.3, \quad \rho = 7800 \frac{\text{кг}}{\text{м}^3}, \quad (2.26)$$

где E – модуль Юнга, ν – коэффициента Пуассона, ρ – плотность материала пластины.

Собственные формы и частоты прямоугольных пластин рассчитываются аналитически. Для пластины, шарнирно опертой по всем краям, собственные формы $W(x, z)$ имеют вид [75]:

$$W(x, z) = A \sin\left(\frac{n\pi x}{a}\right) \sin\left(\frac{m\pi z}{b}\right), \quad (2.27)$$

где $|A| \ll 1$ – амплитуда колебаний, n и m – количество полуволн в направлении потока и поперек ему, a и b – длина и ширина пластины. Собственная частота ω , соответствующая этой форме, дается формулой [75]:

$$\omega = \sqrt{\frac{D}{\rho h} \left(\left(\frac{n\pi}{a}\right)^2 + \left(\frac{m\pi}{b}\right)^2 \right)} \quad (2.28)$$

Были рассмотрены первая ($n = 1, m = 1$) и вторая ($n = 2, m = 1$) моды колебания пластины.

Собственные частоты и формы колебания непрямоугольных пластин (Рис. 2.3, Рис. 2.4) рассчитываются в Abaqus методом конечных элементов [76]. Обзор исследований, в которых для расчета собственных частот и форм пластин и оболочек используются другие методы, можно найти, например, в работах [77 – 79]. Формы колебания интерполируются многочленами 10-й степени [72, 73]:

$$W(x, z) = A \cdot L(x, z), \quad (2.29)$$

где L – функция, интерполирующая собственную форму колебания.

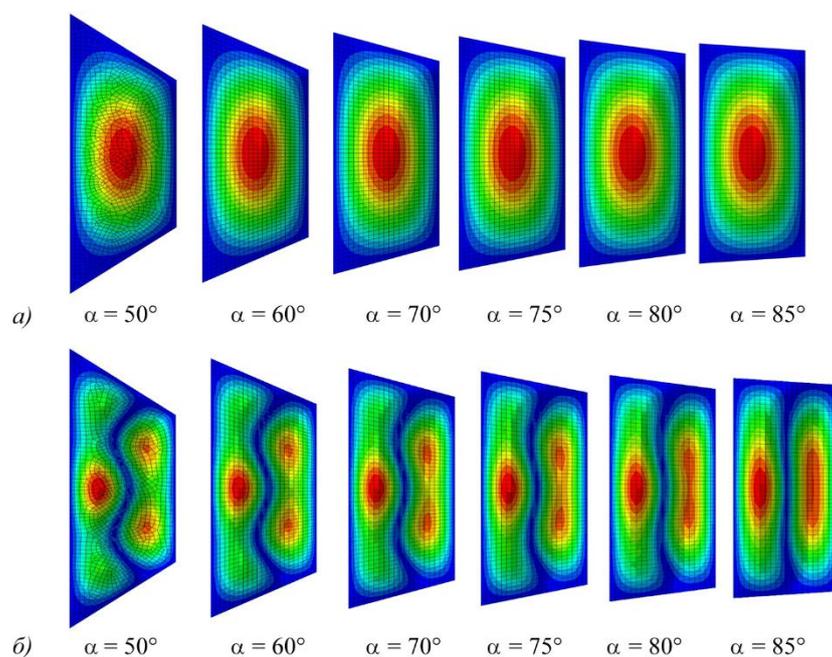


Рис. 2.3. Собственные формы колебаний трапециевидных пластин:

a) — мода (1,1); *б)* — мода (2,1)

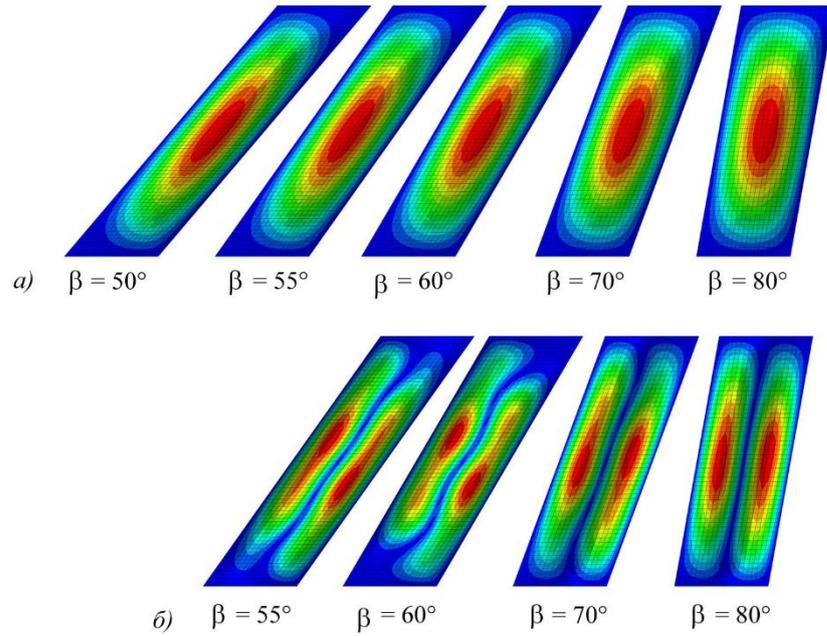


Рис. 2.4. Собственные формы колебаний пластин, имеющих форму параллелограмма: *a)* — мода (1,1); *б)* — мода (2,1)

2.5 Аэродинамический расчет

Аэродинамический расчет проводится методом контрольных объемов. Размер расчетной области (Рис. 2.5) поперек потока и по высоте выбран так, чтобы возмущения потока после отражения от стенок не попадали на пластину, в результате чего обтекание пластины соответствует безграничному потоку.

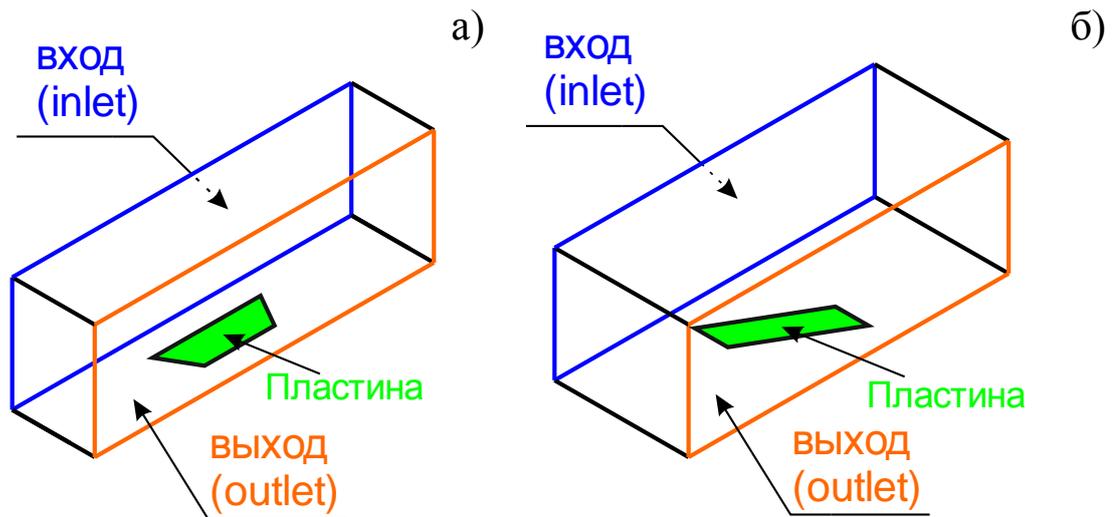


Рис. 2.5. Расчетная область.

a) трапециевидная пластина, *б)* пластина в форме параллелограмма

Внутри области решаются уравнения Навье-Стокса [66]. На входе задаются скорость, давление и температура газа, соответствующие стандартной атмосфере на уровне моря:

$$\begin{aligned} v_{\text{вх}} &= M \cdot 330 \frac{\text{м}}{\text{с}} \\ p_{\text{вх}} &= 1 \text{ атм} \\ T_{\text{вх}} &= 273.15 \text{ К} \end{aligned} \quad (2.30)$$

На выходе граничных условий не ставится. На остальных стенках расчетной области (включая пластину) задается условие проскальзывания:

$$\begin{aligned} v_n|_{\text{стенка}} &= 0 \\ \tau|_{\text{стенка}} &= 0, \end{aligned} \quad (2.31)$$

где v_n – нормальная составляющая скорости, τ – касательное напряжение. Начальное условие – невозмущенное однородное течение во всей области.

2.6 Результаты

Исследованы границы одномодового флаттера пластин в форме прямоугольника, трапеции и параллелограмма для моды (1,1) и (2,1).

2.6.1 Верификация

Для верификации численного метода результаты расчетов для прямоугольной пластины сравниваются с результатами вычислений с использованием теории потенциального течения [36], где рассматривалась та же задача и решалась связанная задача колебаний пластины в потоке идеального совершенного газа (Рис. 2.6, Рис. 2.7).

На Рис. 2.6 и Рис. 2.7 по вертикальной оси отложено число Маха, а по горизонтальной оси – безразмерная длина пластины L_x (длина, отнесенная к толщине). Штрихованной линией показаны границы области неустойчивости, рассчитанные численно методом Бубнова-Галеркина с использованием точной теории потенциального течения газа, а сплошной линией обозначены результаты расчета с помощью описываемого в данной работе метода.

Расчеты с использованием теории потенциального течения газа проведены при $L_y = 500$ и $D = 21.56$. Значение безразмерной плотности газа бралось достаточным маленьким ($\mu = 10^{-7}$ для первой моды и $\mu = 10^{-6}$ для второй моды), чтобы взаимодействие мод колебания не влияло на границу устойчивости (отодвинуть границу связанного флаттера). Значение μ подбиралось так, чтобы граница флаттера при дальнейшем уменьшении μ не менялась.

Расчеты границ флаттера проведены с учетом скорости точек пластины, полученной в численном расчете и вычисленной аналитически:

$$\frac{\partial w}{\partial t} = \omega W \cos(\omega t) \quad (2.32)$$

Моделирование показало, что при расчете скорости точек пластины аналитически, имеет место погрешность метода в определении границ одномодового флаттера по первой моде для достаточно коротких пластин, но при остальных рассмотренных параметрах результаты хорошо согласуются между собой (Рис. 2.6, а). При этом при расчете скорости точек численно погрешность метода возрастает (Рис. 2.6, б).

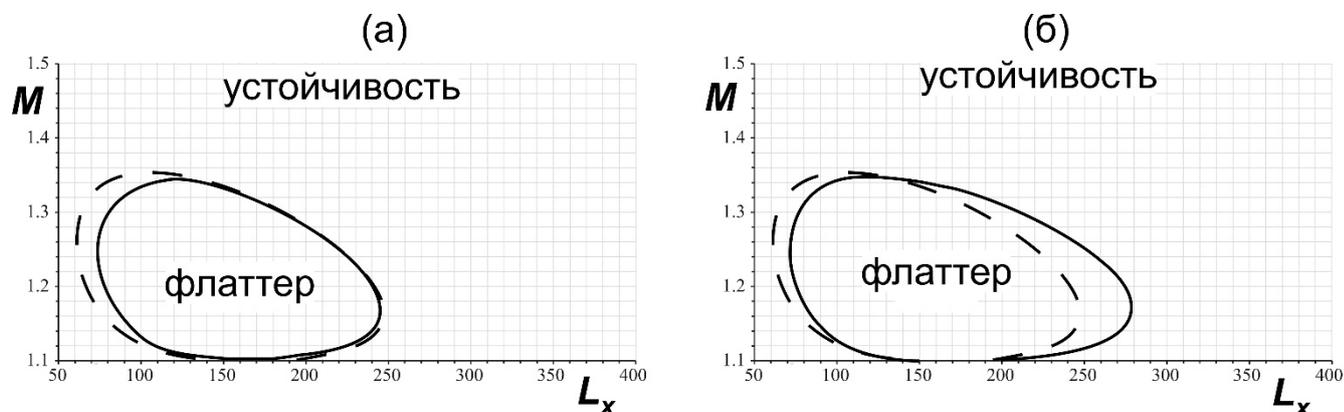


Рис. 2.6. Границы флаттера прямоугольной пластины. Первая мода. Сплошная кривая – результаты настоящей работы, штрихованная линия – результаты расчета с использованием теории потенциального течения [36] ($L_y = 500$, $D = 21.56$, $\mu = 10^{-7}$). а) Скорость точек пластины взяты из аналитического выражения, б) Скорость точек пластины взяты из численного расчета

При расчете границ неустойчивости по второй моде также видно (Рис. 2.7), что при некоторых параметрах возрастает погрешность метода, а при остальных – наблюдается хорошее соответствие.

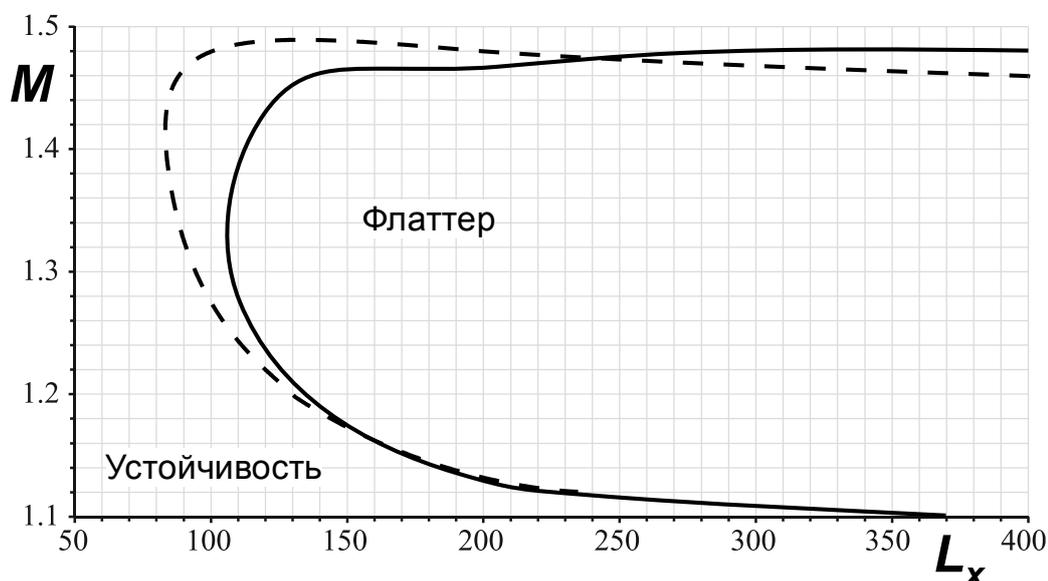


Рис. 2.7. Границы флаттера прямоугольной пластины. Вторая мода. Сплошная кривая – результаты настоящей работы, штрихованная линия – результаты расчета с использованием теории потенциального течения [36] ($L_y = 500$, $D = 21.56$, $\mu = 10^{-6}$). Скорость точек пластины взяты из аналитического выражения

Таким образом, соответствие результатов, полученных в данной работе, и результатов вычислений [36] в целом удовлетворительное, а при некоторых параметрах – хорошее.

2.6.2 Трапециевидная пластина

Далее были изучены трапециевидные пластины с углом скоса $\alpha = 50^\circ$, 70° при различных размерах. (Рис. 2.8, Рис. 2.9).

На Рис. 2.8, Рис. 2.9 по вертикальной оси отложено число Маха, а по горизонтальной оси – безразмерная длина пластины L_x . Сплошной линией показана граница области неустойчивости, рассчитанные для трапециевидной пластины, а штрихованной - обозначен результат расчета границ одномодового флаттера прямоугольных пластин. Границы флаттера определены при $L_y = 500$, $D = 21.56$.

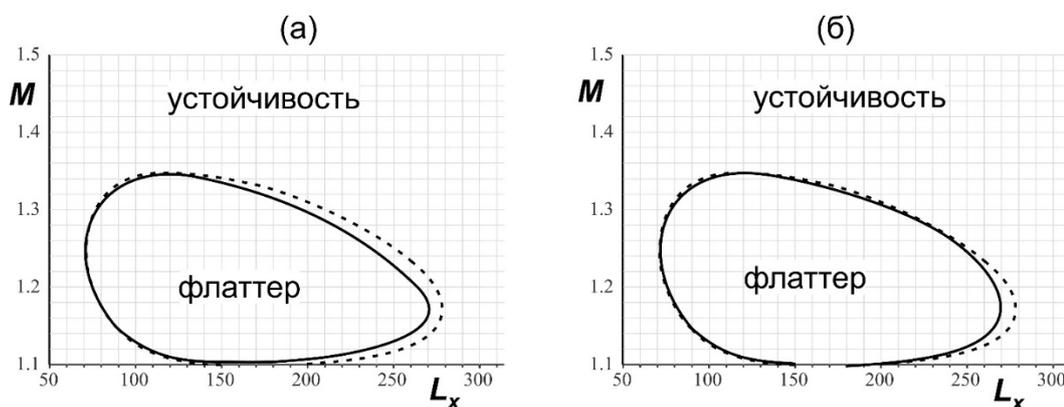


Рис. 2.8. Границы одномодового флаттера по моде (1,1). Сравнение результатов для трапециевидной (сплошная линия) и прямоугольной (пунктирная линия).

Скорость точек пластины взяты из численного расчета. $L_y = 500$, $D = 21.56$

а) $\alpha = 50^\circ$, б) $\alpha = 70^\circ$

Результаты расчетов (Рис. 2.8) для моды (1,1) показывают, что, как и для прямоугольной пластины, так и для трапециевидной пластины при некотором значении длины пластины, существует определенный диапазон чисел Маха, при котором возникает одномодовый флаттер по первой моде. При достаточно коротких и длинных пластинах наблюдается устойчивость по первой моде. Также видно, что при изменении угла скоса границы области одномодового флаттера трапециевидных пластин по первой моде изменяются незначительно и близки к соответствующим границам для прямоугольной пластины.

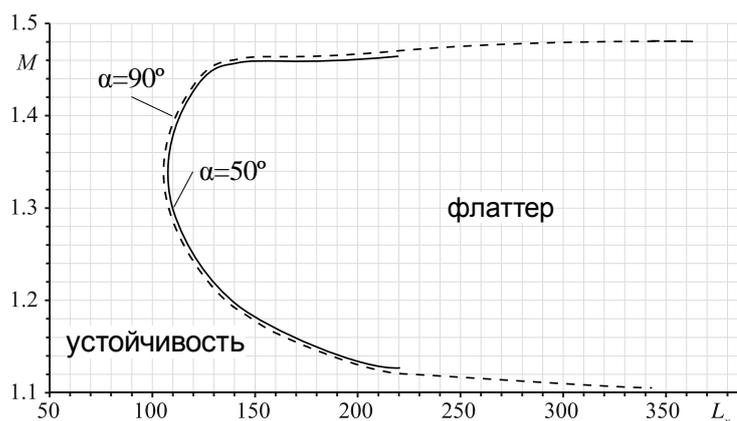


Рис. 2.9. Границы одномодового флаттера по моде (2,1). Трапециевидная пластина. $\alpha = 50^\circ$. Скорость точек пластины взяты из численного расчета.

Сплошная кривая – результаты настоящей работы, штрихованная линия – результаты расчета с использованием теории потенциального течения [36].

Скорость точек пластины взяты из аналитического выражения. $L_y = 500$, $D = 21.56$

Аналогичная картина наблюдается в результатах расчета для моды (2,1) (Рис. 2.9). Границы одномодового флаттера по второй моде прямоугольной пластины и трапециевидной пластины близки друг к другу. Также стоит отметить, что достаточно короткие пластины устойчивы по второй моде.

Таким образом, границы одномодового флаттера по первой и второй моде для трапециевидных пластин близки к границам флаттера для прямоугольной пластины, а изменение угла скоса слабо влияет на границы устойчивости.

2.6.3 Пластина в форме параллелограмма

При разных значениях угла скоса β исследованы границы одномодового флаттера. Рассмотрены пластины с углом скоса $\beta = 80^\circ, 70^\circ, 66^\circ, 65^\circ, 60^\circ$. Скорость движения точек пластины бралась из численного расчета и аналитических вычислений. Границы одномодового флаттера определены при $L_y = 500, D = 21.56$.

Области одномодового флаттера по первой моде (Рис. 2.10, Рис. 2.11) для пластин в форме параллелограмма с острым углом скоса замкнуты аналогично прямоугольной пластине ($\beta = 90^\circ$). То есть при малых и больших значениях длины пластина устойчива по первой моде, а при определенных значениях L_x возникает флаттер по первой моде в некотором диапазоне чисел Маха.

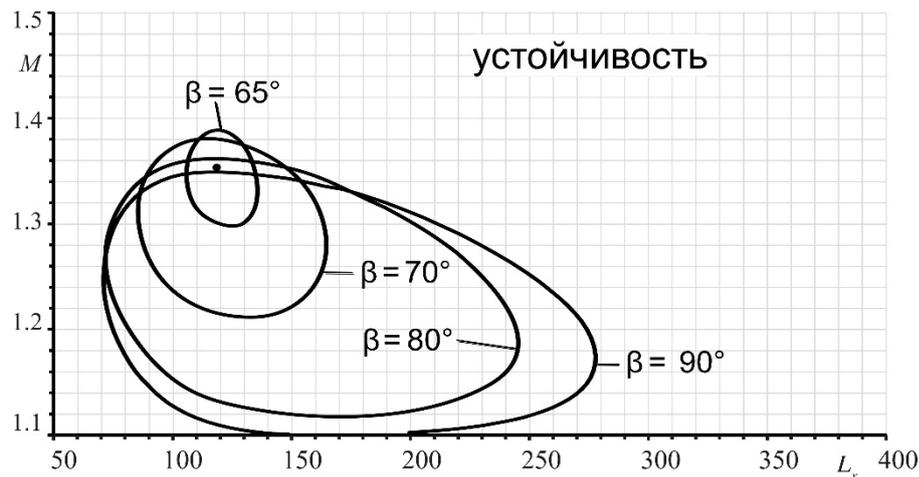


Рис. 2.10. Границы одномодового флаттера по моде (1,1). Пластина в форме параллелограмма. Скорость точек пластины взяты из численного расчета.

$$L_y = 500, D = 21.56$$

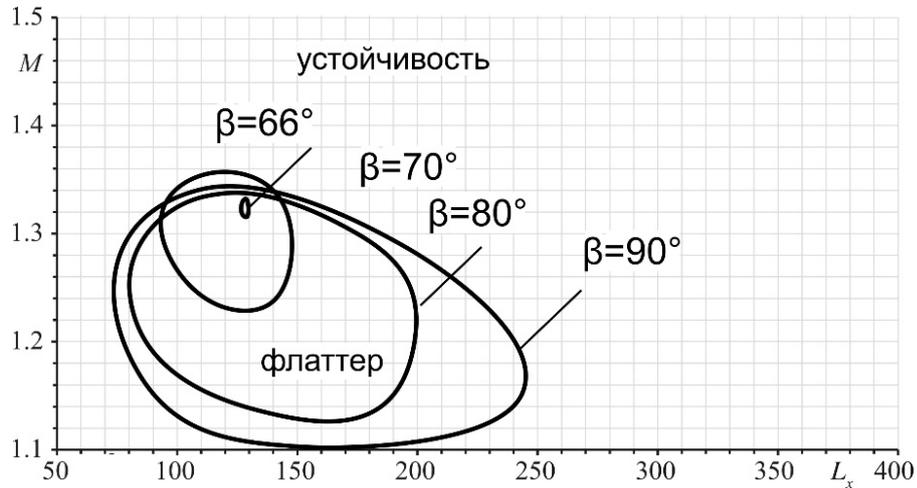


Рис. 2.11. Границы одномодового флаттера по моде (1,1). Пластина в форме параллелограмма. Скорость точек пластины взяты из аналитического выражения.

$$L_y = 500, D = 21.56$$

При уменьшении угла скоса область одномодового флаттера по первой моде уменьшается и одновременно сдвигается в сторону больших чисел Маха. Далее область неустойчивости сжимается в точку и исчезает. Стоит отметить, что при аналитическом вычислении скорости движения точек пластины области панельного флаттера меньше, чем в случае численного расчета. Значение угла скоса, при котором не возникает одномодовый флаттер по первой моде, при этом увеличивается.

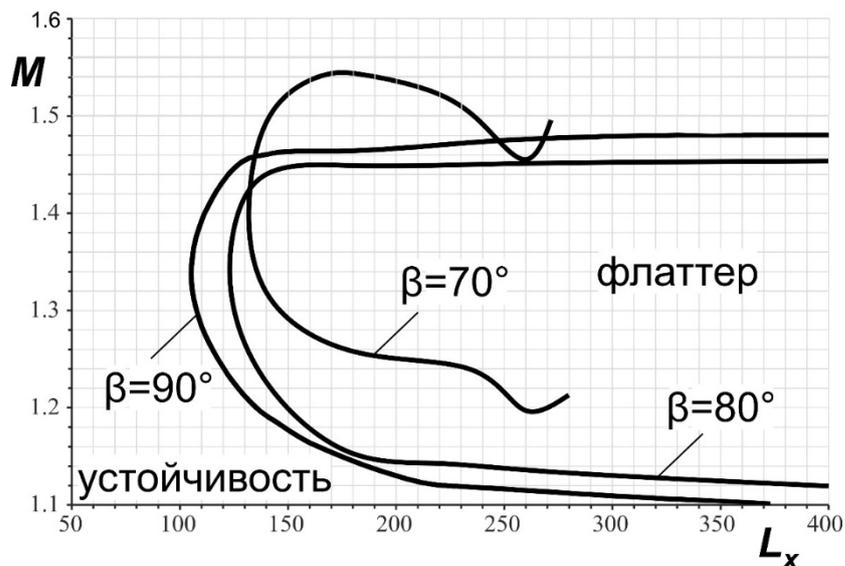


Рис. 2.12. Границы одномодового флаттера пластин в форме параллелограмма. Вторая мода. Скорость точек пластины взяты из аналитического выражения. $L_y = 500, D = 21.56$.

Результаты показывают, что достаточно короткие пластины устойчивы по второй моде, а далее при увеличении значения L_x существует диапазон чисел Маха, при котором возникает одномодовый тип панельного флаттера по второй моде. При уменьшении угла скоса области неустойчивости аналогично первой моде уменьшается и сдвигаются в сторону больших M . При этом появляется некоторая нерегулярность в границах флаттера.

Таким образом, границы одномодового флаттера по первой и второй моде в случае пластин в форме параллелограмма в отличие от трапециевидных пластин начинают сильно отличаться от границ флаттера для прямоугольной пластины уже при небольшом изменении угла скоса. Следовательно, при уменьшении угла скоса повышается аэроупругая устойчивость пластин в форме параллелограмма при трансзвуковых и малых сверхзвуковых скоростях потока.

2.7 Выводы

С помощью энергетического метода в линейном приближении численно исследована устойчивость тонкой упругой пластины, одна сторона которой обтекается однородным сверхзвуковым потоком идеального совершенного газа. Определены границы одномодового флаттера для моды (1,1) и (2,1).

Сравнение результатов, полученных в данной работе, и результатов вычислений [36] для прямоугольной пластины показывает удовлетворительное совпадение. Таким образом, энергетический метод может быть применен к конструкциям более сложной формы.

Проведено исследование устойчивости пластин, имеющих форму пластин в форме трапеции и параллелограмма, шарнирно опертых по всем краям. Пластины были рассмотрены при различных значениях длины и угла скоса.

Сравнение результатов расчетов для пластин в форме трапеции с результатами расчета прямоугольных пластин показывает, что границы флаттера трапециевидных пластин при различных значениях угла скоса близки к границам флаттера прямоугольных пластин. Также незначительно меняется работа, совершаемая газом на периоде колебаний. Таким образом, можно заключить, что

придание панелям обшивки летательного аппарата формы трапеции не является эффективным средством борьбы с одномодовым флаттером.

Для пластин в форме параллелограмма наблюдается другая картина. При уменьшении значения угла скоса увеличивается различие между границами флаттера пластин в форме параллелограмма и прямоугольных пластин. Область одномодового флаттера уменьшается при уменьшении угла скоса, сжимается в точку и исчезает.

Таким образом, придание панелям обшивки летательного аппарата формы параллелограмма даже с незначительным углом скоса существенно повышает их аэроупругую устойчивость при трансзвуковых и малых сверхзвуковых скоростях.

3 Флаттер лопаток компрессоров газотурбинных двигателей³

В предыдущей главе с помощью энергетического метода было проведено исследование устойчивости панели обшивки, имеющей прямоугольную форму. В настоящей главе энергетический метод применяется для изучения устойчивости лопатки компрессора газотурбинного двигателя.

3.1 Обзор литературы

В разделе приводится классификация основных типов флаттера лопаток, методы прогнозирования флаттера и соответствующие ключевые работы по данной теме. Более полный и развернутый обзор можно найти в работах [3, 80 – 84].

Различают несколько видов флаттера лопаток. При определенных условиях в компрессорах газотурбинных двигателей могут возникать срывные типы флаттера. Дозвуковой срывной флаттер возникает при дозвуковой скорости и обусловлен срывом потока, возникающего из-за превышения критического угла атаки профиля лопатки [3, 80, 85]. В работах [80, 82, 86] указывается, что на границы данного типа флаттера лопаток оказывает влияние число Маха, значение угла атаки, приведенная частота колебаний (частота колебания, обезразмеренная на отношение скорости потока и полухорды лопатки), а также условия течения газа на входе в ступень компрессора.

Увеличение коэффициента повышения давления выше линии основных режимов может привести к сверхзвуковому срывному флаттеру [80, 85, 86]. Существенное влияние на границы неустойчивости оказывает число Маха и приведенная частота колебания [80, 82, 87].

Сверхзвуковой безотрывной флаттер [84, 86, 90] возникает при увеличении мощности установки на рабочих режимах. На границы флаттера оказывает влияние положение скачка уплотнения, а также число Маха и приведенная частота [80, 84, 86, 90].

³ При подготовке данной главы диссертации использовались следующие публикации автора, в которых, согласно «Положению о присуждении ученых степеней в Московском государственном университете имени М.В.Ломоносова», отражены основные результаты, положения и выводы исследования: [140 – 142, 144, 154, 156 – 158, 161, 164].

Также выделяют такие виды флаттера лопаток, как флаттер запираания, связанный изгибно-крутильный флаттер и флаттер на режиме помпажа [3, 80, 86, 91 – 94]. Флаттер запираания, как правило, возникает при отрицательных углах атаки при дозвуковых или трансзвуковых скоростях обтекания лопаток [85]. На границы флаттера запираания существенно влияют число Маха и приведенная частота колебаний [80, 82, 85]. Границы связанного изгибно-крутильного флаттера обуславливаются собственными частотами и формами колебаний лопатки [91 – 93].

Стоит отметить, что потеря устойчивости при дозвуковом срывном и сверхзвуковом безотрывном типах флаттера, а также при флаттере запираания происходит по изгибным и крутильным формам колебания лопаток [3, 80, 82, 88, 89]. Дозвуковой срывной флаттер проявляется также при изгибно-крутильных формах колебания [80, 89].

Рассмотрим основные методы прогнозирования флаттера лопаток.

Инженеры и конструкторы, как правило, используют при проектировании упрощённые критерии (число Струхаля, изгибно-крутильная связанность, угол атаки, число Маха и т.п.), основанные на опыте, накопленном в конструкторских бюро при конструировании двигателя и его доводке [82, 94, 95]. Более точные результаты даёт статистический метод [86, 96], основанный на обработке большого числа проведённых испытаний и прогнозировании на их основе флаттера лопаток новых компрессоров.

Другим методом прогнозирования флаттера лопаток является частотный метод, основанный на вычислении собственных частот связанной системы поток-лопатка [82, 83]. Критерием возникновения флаттера при таком подходе является положительность мнимой части собственной частоты. Однако, возникающая при этом задача вычисления комплексных собственных значений несимметричных матриц требует больших вычислительных ресурсов. Частотный метод и его вариации используется в работах [97 – 102]. В [97] показано, что взаимодействие изгибной и крутильной форм колебания лопатки оказывает сильное влияние на границы флаттера. Был рассмотрен случай дозвукового течения и сверхзвукового с дозвуковой передней кромкой. Расчеты проводились с учетом конструкционного

демпфирования. Было указано, что в основном конструкционное демпфирование оказывает стабилизирующее воздействие. В работе [99] изучено влияния угла стреловидности лопатки вентилятора на границы флаттера. Было получено, что при малых углах флаттер возникает по крутильным формам колебания лопаток, в то время как, при увеличении стреловидности наблюдается неустойчивость по изгибным формам. Воздействие скачка уплотнения на флаттер исследовался в [100]. Рассматривался как сверхзвуковой режим течения, так и трансзвуковой. Показано, что нестационарные силы, обусловленные движением скачков уплотнения, существенно влияют на границы флаттера. При этом это воздействие как стабилизирующее, так и дестабилизирующее в зависимости от структуры скачка уплотнения, приведенной частоты колебания лопатки, числа Маха и фазового угла. В исследовании [101] приведены параметры, существенно влияющие на границы флаттера лопаток вентилятора или не оказывающие воздействие. Рассмотрены различные параметры, в том числе взаимодействие мод, угол установки лопаток, фазовый угол, число Маха и конструкционное демпфирование.

Проблеме прогнозирования флаттера посвящены также работы [103, 104], где применяется прямой метод, суть которого заключается в моделировании движения во времени связанной системы лопатка-поток. При этом численные расчеты также требуют значительных вычислительных ресурсов. В [103] результаты расчета прямым методом сравнивались с результатами расчета частотным методом. Лопатки рассматривались как двухстепенные модели. Было получено хорошее соответствие результатов.

Наконец, в работах [72, 73, 105 – 113] применяется энергетический метод, основанный на вычислении работы, совершаемой аэродинамическими силами на поверхности лопатки, гармонически колеблющейся по собственной форме, за период колебаний.

В работе [72, 73] применялся разработанный численный алгоритм прогнозирования флаттера, основанный на энергетическом методе. Его применимость ограничена условием безотрывности течения воздуха в

межлопаточном канале, что характерно для области рабочих режимов компрессора. Проведено исследование сходимости и приведены параметры численного моделирования, обеспечивающие корректное выполнение расчётов. Представлена валидация полученных результатов по натурным испытаниям компрессора.

В данной главе развивается подход, использованный в [72, 73], и с его помощью анализируется влияние конструктивных факторов лопаток на границу флаттера.

Ранее в известных подходах к прогнозированию флаттера [72, 73, 86, 114] в числе определяющих параметров границы устойчивости к флаттеру учитывались «основные», наиболее очевидные параметры: изгибно-крутильная связность форм колебания, приведенные частоты и другие. Однако, более «тонкие» конструктивные параметры, такие как радиальный зазор между торцом лопатки и корпусом компрессора, угол прикрытия и открытия входного направляющего аппарата, радиальная неравномерность потока на входе в двигатель и величина монтажного натяга в бандажных полках, ранее не рассматривались и их влияние на флаттер неизвестно. Исследование этих параметров является целью этой главы.

3.2 Постановка задачи

Исследуется устойчивость лопаток рабочего колеса компрессора (Рис. 3.1) двухвального, то есть имеющего два вала с установленными каскадами компрессоров и турбин [116], газотурбинного двигателя. Исследуемый компрессор является компрессором низкого давления, соответственно представляет собой первый каскад газотурбинного двигателя, осуществляющий сжатие атмосферного воздуха и передачу в последующий каскад. Рассматривается рабочее колесо (подвижная, вращающаяся часть компрессора) с 37 бандажированными лопатками (Рис. 3.1).

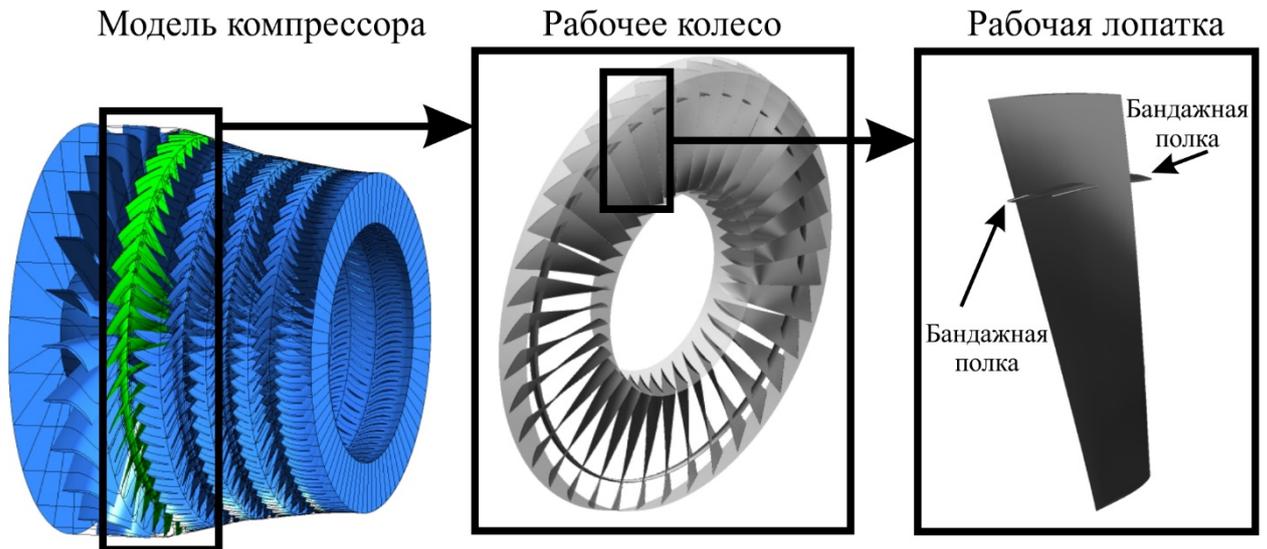


Рис. 3.1. Исследуемая модель компрессора

Изучается влияние различных конструктивных и аэродинамических параметров на границы флаттера лопатки рабочего колеса компрессора. В качестве таких параметров рассматривается радиальный зазор между торцом лопатки и корпусом компрессора, угол прикрытия и открытия входного направляющего аппарата. Кроме того, изучается влияние радиальной неравномерности потока на входе в двигатель (Рис. 3.2). Также исследуется влияние величины монтажного натяга в бандажных полках.

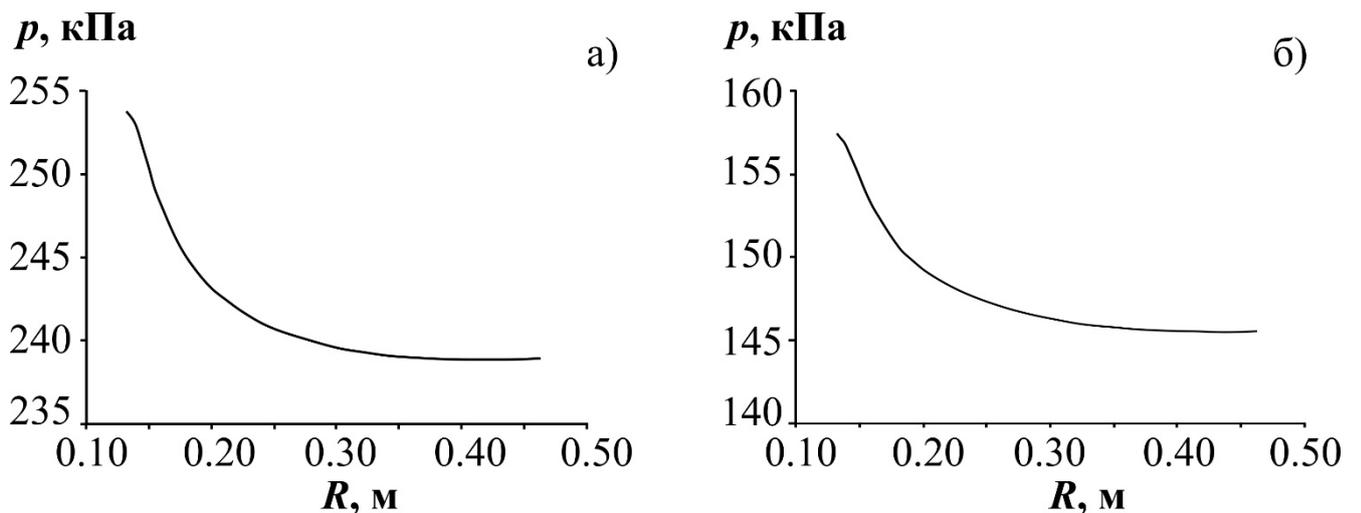


Рис. 3.2. Зависимость давления от радиуса на входе в компрессор.

а) Режим 1, б) режим 2

Рассматриваются следующие конфигурации расчетной аэродинамической модели:

1. Радиальный зазор между лопаткой и корпусом 0,5 мм.
2. Радиальный зазор 0,5 мм, а также прикрытый на $1,5^\circ$ входной направляющий аппарат.
3. Радиальный зазор 0,5 мм, а также открытый на 2° входной направляющий аппарат.
4. Увеличенный радиальный зазор до 1 мм.
5. Радиальный зазор 0,5 мм, а также учет радиальной неравномерности на входе в компрессор (Рис. 3.2).

Во всех конфигурациях аэродинамической модели воспроизводятся бандажные полки лопаток. Также рассмотрены различные значения монтажного натяга в бандажных полках, отражающиеся на формах и частотах колебаний лопаток: 0 мм, 0.27 мм, 0.54 мм, 0.8 мм.

Газодинамические расчеты проводятся методом контрольных объемов в Ansys CFX. Течение вязкого совершенного газа в межлопаточных каналах считается турбулентным. В аэродинамических расчетах использована модель турбулентности $k - \omega$ [119].

Исследования проводятся на двух режимах, на первом из которых при испытаниях двигателя в термобарокамере был диагностирован флаттер, а на втором – было зафиксировано его отсутствие. Характеристики режимов, на которых проводились расчеты, приведены в Таблица 3.1.

Таблица 3.1. Параметры расчетных режимов компрессора низкого давления двухвального газотурбинного двигателя.

Параметр	Режим 1 Флаттер	Режим 2 флаттер отсутствует
Температура торможения на входе в двигатель, $T^*_{вх}$ (К)	423,4	383,9

Полное давление на входе в двигатель, $P^*_{вх.}$ (атм)	2,6	1,6
Степень сжатия (отношение полного давления воздуха в сечении за компрессором к полному давлению воздуха в сечении на его входе), π_k	2	2,235
Физическая частота вращения, (об/мин)	9393,2	8833,2

3.3 Метод прогнозирования флаттера

Численное исследование по прогнозированию флаттера лопаток проводится с применением алгоритма, разработанного на основе энергетического метода [72, 73].

Настоящий раздел посвящен особенностям применения этого метода при исследовании устойчивости лопатки компрессора, которые заключаются в следующем. Предварительно методом конечных элементов [75] проводится численный расчет собственных частот и форм колебаний упругой системы диск – лопатки – бандажные связи выбранной ступени компрессора при действии центробежных сил и температурных нагрузок. Рассчитанные формы интерполируются с помощью разработанной программы [72, 73] полиномами Лагранжа 10-й степени, которые служат для передачи собственных форм в аэродинамический расчет.

Для определения параметров течения газа на входе и выходе исследуемой ступени проводится газодинамический расчет установившегося течения воздуха во всем компрессоре. Далее проводится расчет установившегося течения воздуха для выбранной ступени, результаты которого используются в качестве начальных условий для нестационарного аэродинамического расчета течения воздуха в выбранной ступени. Геометрическая модель течения газа состоит из трех

последовательно идущих межлопаточных каналов одного рабочего колеса (Рис. 3.3). Аэродинамический численный расчет проводится методом контрольных объемов [74].

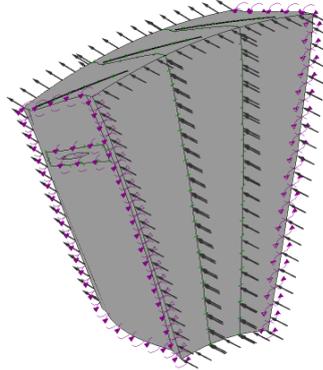


Рис. 3.3. Геометрическая модель течения газа в рабочем колесе

3.3.1 Собственное колебание лопасти

Форма собственного колебания лопасти в перемещениях имеет вид [117]:

$$\mathbf{U}(x, y, z) = \mathbf{U}_1(x, y, z) \cos(k\alpha) - \mathbf{U}_2(x, y, z) \sin(k\alpha), \quad (3.1)$$

где $\alpha = 2\pi t/N$, m – число узловых диаметров, N – число лопаток рабочего колеса, \mathbf{U}_1 , \mathbf{U}_2 – распределение перемещений в пучности и узле поворотно-симметричной системы (облопаченного диска) [117], $k = 0..N-1$ – номер лопатки, x , y , z – пространственные координаты, t – время.

Тогда перемещение колеблющейся лопасти можно представить в виде:

$$\mathbf{u}(x, y, z) = \sin(\omega t)(\mathbf{U}_1(x, y, z) \cos(k\alpha) - \mathbf{U}_2(x, y, z) \sin(k\alpha)), \quad (3.2)$$

где ω – круговая собственная частота.

Стоячая волна колебаний (3.2) может быть представлена суперпозицией вперед и назад бегущей волны:

$$\begin{aligned} \mathbf{u} = & (\tilde{\mathbf{U}}_1 \sin(\omega t - k\alpha) + \tilde{\mathbf{U}}_1 \sin(\omega t + k\alpha)) - \\ & - (\tilde{\mathbf{U}}_2 \cos(\omega t - k\alpha) - \tilde{\mathbf{U}}_2 \cos(\omega t + k\alpha)), \end{aligned} \quad (3.3)$$

где $\tilde{\mathbf{U}}_i = 0.5\mathbf{U}_i$, $i=1,2$.

Преобразуем это выражение:

$$\begin{aligned} \mathbf{u} = & (\tilde{U}_1 \sin(\omega t - k\alpha) - \tilde{U}_2 \cos(\omega t - k\alpha)) + \\ & + (\tilde{U}_1 \sin(\omega t + k\alpha) + \tilde{U}_2 \cos(\omega t + k\alpha)) \end{aligned} \quad (3.4)$$

Первое слагаемое представляет собой бегущую вперед по вращению колеса волну, второе — назад бегущую волну. Известно, что меньший запас устойчивости лопатки компрессора имеет форма с вперед бегущей волной. Поэтому при исследовании флаттера ограничимся исследованием вперед бегущей волны, описываемой первым слагаемым в (3.4).

$$\mathbf{u} = \tilde{U}_1 \sin(\omega t - k\alpha) - \tilde{U}_2 \cos(\omega t - k\alpha) \quad (3.5)$$

В работах [72, 73] рассматривалось перемещение только в пучности диска ($\tilde{U}_2 = 0$), то есть не учитывалось изменение формы колебания при движении волны по диску. В настоящей работе это изменение формы колебания учитывается ($\tilde{U}_2 \neq 0$).

3.3.2 Работа нестационарных сил давления

Предполагается, что влияние потока воздуха на собственные колебания лопаток незначительно и может привести только к дополнительному демпфированию (в случае устойчивости) или усилению (в случае флаттера) колебаний без изменения собственных форм и частот по сравнению с колебаниями в пустоте. Это утверждение верно для большинства типов лопаток, кроме длинных полых лопаток.

В соответствии с этим предположением и с учетом выражения (3.5) при численном расчете нестационарного обтекания на поверхности лопатки задаётся перемещение границы расчетной области в виде собственного колебания колеса (бегущей волны) с заданным числом узловых диаметров:

$$\mathbf{w}(x, y, z, t) = A \cdot (L_1(x, z) \cdot \sin(\omega t - \varphi) - L_2(x, z) \cdot \cos(\omega t - \varphi)), \quad (3.6)$$

где \mathbf{w} – перемещение границы расчетной области, A и ω – амплитуда и круговая частота колеблющейся лопатки, $L_1(x, z)$, $L_2(x, z)$ – функции, интерполирующие собственные формы колебания, соответствующие узлу и пучности системы «диск-лопатки-бандажные связи», $\varphi = k \alpha$ – сдвиг фазы, $k = 0$ для центральной лопатки,

$k = \pm 1$ для боковых лопаток. Соответственно, для моделирования бегущей по рабочему колесу волны на боковых лопатках задано запаздывание $\omega \cdot t - \varphi$ или опережение $\omega \cdot t + \varphi$ фазы по отношению к средней лопатке.

В результате нестационарного обтекания системы колеблющихся лопаток вычисляется работа, совершённая нестационарным давлением над центральной лопаткой за один период колебаний:

$$W = \int_{t_0}^{t_0+T} \int_S p(x, y, z, t) \cdot \mathbf{n}(x, y, z, t) \mathbf{v}(x, y, z, t) ds dt, \quad (3.7)$$

где $T = 1/f$ – период колебаний лопатки, $f = \omega/(2\pi)$ – собственная физическая частота, S – поверхность лопатки, p – давление, \mathbf{n} – нормаль к поверхности лопатки, \mathbf{v} – скорость точек лопатки, t_0 – начальный момент времени.

В случае, если эта работа положительна, то на каждом периоде колебаний происходит подкачка энергии из потока к лопатке и увеличение амплитуды колебаний. Если работа отрицательна, то на каждом периоде часть энергии лопатки, наоборот, рассеивается в потоке. Конструкционным демпфированием консервативно пренебрегаем. Таким образом, критерием флаттера служит положительность работы:

$$W > 0 \quad (3.8)$$

Для вычисления работы нестационарных аэродинамических сил используется модифицированный программный код [72, 73].

3.4 Расчет собственных форм и частот

Расчет собственных частот и форм колебаний системы «диск-лопатки-бандажные связи» проведен для обоих расчетных режимов (Таблица 3.1). Для каждой собственной формы колебания исследовался полный диапазон чисел узловых диаметров. Расчет проведен с помощью конечно-элементного программного кода Ansys Mechanical APDL.

При определении собственных форм и частот решается следующее дискретизированное уравнение движения [120]:

$$[-\omega^2[M] + [K]]\boldsymbol{\phi} = 0, \quad (3.9)$$

где $[M]$ – матрица масс, $[K]$ – матрица жесткости, ω – круговая собственная частота колебания, $\boldsymbol{\phi}$ – собственный вектор, соответствующий собственной частоте колебания.

Расчет собственных частот и форм лопаток проведен с учетом центробежных и температурных нагрузок, а также геометрической нелинейности.

3.4.1 Конечно-элементная модель

Конечно-элементная модель включает лопатку с бандажными полками и диск. По всем узлам, соответствующим месту крепления колеса, задано условие жесткой заделки:

$$U_i = 0, i = 1..6, \quad (3.10)$$

где U_i – компоненты перемещения, i – степень свободы.

На боковых поверхностях диска и бандажной полки задано условие циклической симметрии.

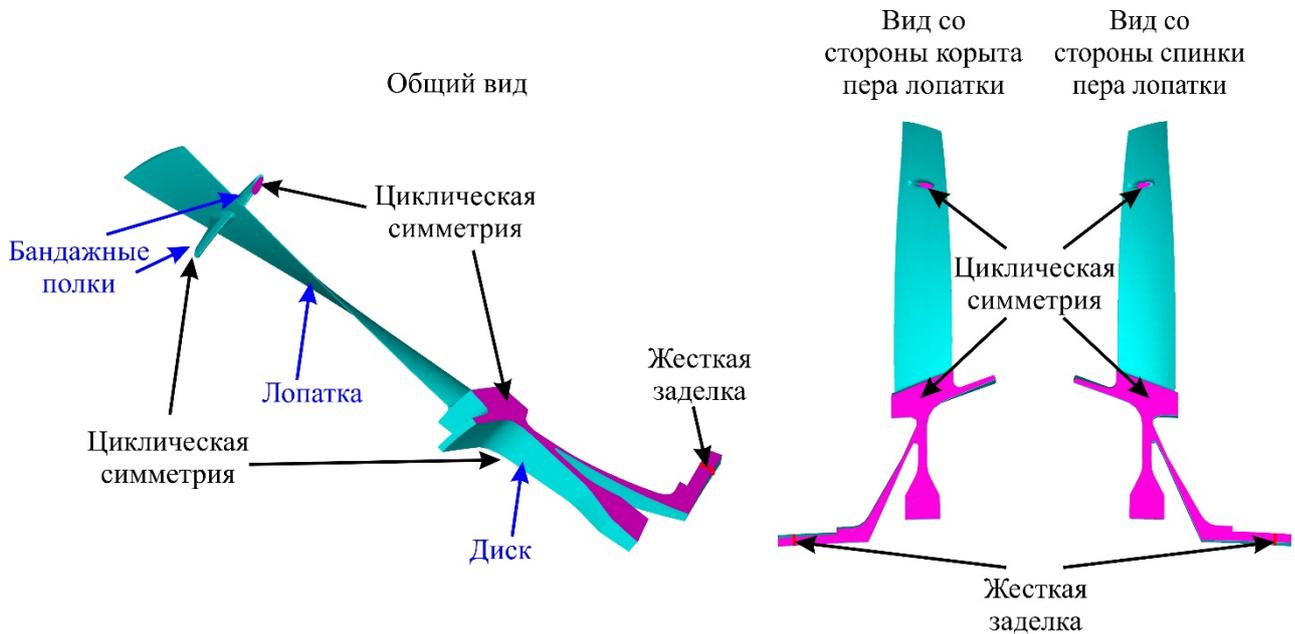


Рис. 3.4. Конечно-элементная модель лопатки и диска. Граничные условия

Расчетная сетка (Рис. 3.5) для определения собственных форм и частот лопаток состоит из ~ 29000 объемных элементов второго порядка точности, преимущественно гексаэдров. Переходы пера в хвостовик и в бандажную полку

моделируются с помощью тетра-элементов. Расчетная сетка имеет сгущение в концентраторах напряжений.

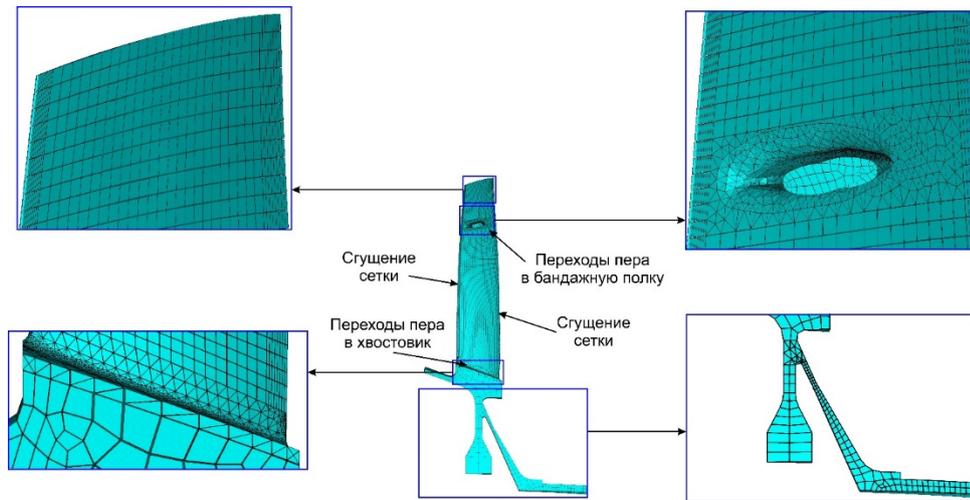


Рис. 3.5. Расчетная сетка

3.4.2 Результаты

Рассматриваются второе и третье семейство форм колебаний системы «диск-лопатки-бандажные связи», так как между этими формами имеет место интерференция (перестроение) между изгибной и крутильной формами колебаний [117], что говорит о предрасположенности форм к флаттеру. В основных расчетах учитывался монтажный натяг, вызванный перекрытием бандажных полок недеформированных лопаток на 0,54 мм. На Рис. 3.6 показаны дисперсионные диаграммы (зависимость собственной частоты колебания f от числа узловых диаметров m) для режимов 1 и 2, соответственно. Собственные частоты и формы колебания лопаток приведены в приложении В.

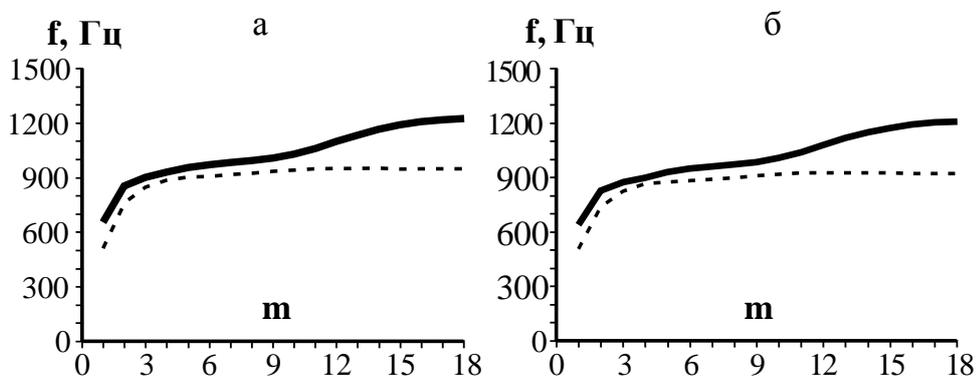


Рис. 3.6. Дисперсионная диаграмма для второго (штрихованная линия) и третьего (сплошная линия) семейства форм колебаний. а) режим 1; б) режим 2.

Для исследования влияния монтажного натяга на границы флаттера также вычислены собственные частоты и формы колебаний при различных значениях натяга для режима 1. На дисперсионной диаграмме, построенной для второго и третьего семейства при разных значениях натяга (Рис. 3.7), видно, что как для 2-й, так и для 3-й формы наблюдается уменьшение собственных частот при увеличении натяга. Отметим, что частоты второго семейства форм колебаний при отсутствии натяга и при натяге, вызванном перекрытием лопаток на 0.27 мм, практически неразличимы, а частоты по третьему семейству колебаний при тех же значениях монтажного натяга близки друг другу.

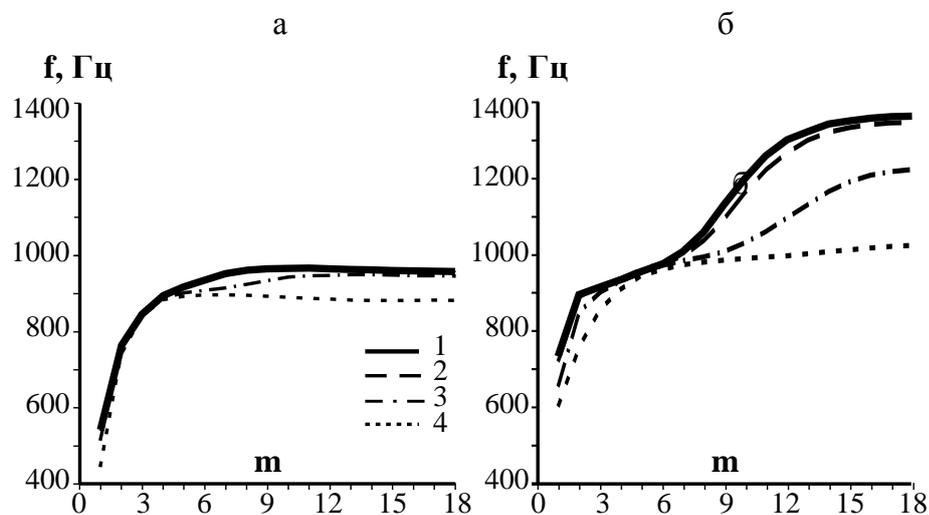


Рис. 3.7. Дисперсионная диаграмма при различных значениях монтажного натяга, режим 1. Кривая 1 (сплошная) – 0 (натяг отсутствует), кривая 2 (штрихованная) – 0.27 мм, кривая 3 (штрихпунктирная) – 0,54 мм, кривая 4 (пунктирная) – 0.8 мм.

а) второе семейство форм колебаний, б) третье семейство форм колебаний.

3.5 Аэродинамический расчет

Для расчёта течения воздуха используется программный комплекс конечно-объемного анализа Ansys CFX. Решаются уравнения Навье-Стокса, осредненные по Рейнольдсу, с моделью турбулентности $k-\omega$ [119]:

$$\frac{\partial(\rho k)}{\partial t} + \frac{\partial(\rho \bar{U}_j)}{\partial x_j} = 0$$

$$\frac{\partial(\rho \bar{U}_i)}{\partial t} + \frac{\partial(\rho \bar{U}_i \bar{U}_j)}{\partial x_j} = -\frac{\partial \bar{p}}{\partial x_i} + \frac{\partial(\tau_{ij} - \rho \overline{u_i u_j})}{\partial x_j}$$
(3.11)

$$\frac{\partial(\rho\bar{h}_{tot})}{\partial t} - \frac{\partial\bar{p}}{\partial t} + \frac{\partial(\rho\bar{U}_j\bar{h}_{tot})}{\partial x_j} = \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\lambda \frac{\partial\bar{T}}{\partial x_j} - \rho\bar{u}_j\bar{h} \right) + \frac{\partial[\bar{U}_i(\tau_{ij} - \rho\bar{u}_i\bar{u}_j)]}{\partial x_j} \quad (3.12)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial(\rho k)}{\partial t} + \frac{\partial(\rho\bar{U}_j k)}{\partial x_j} &= \frac{\partial}{\partial x_j} \left[\left(\mu + \frac{\mu_t}{\sigma_k} \right) \frac{\partial k}{\partial x_j} \right] + \\ + \mu_t \left(\frac{\partial\bar{U}_i}{\partial x_j} + \frac{\partial\bar{U}_j}{\partial x_i} \right) \frac{\partial\bar{U}_i}{\partial x_j} - \frac{2}{3} \frac{\partial\bar{U}_l}{\partial x_l} \left(3\mu_t \frac{\partial\bar{U}_l}{\partial x_l} + \rho k \right) - \beta' \rho k \omega \end{aligned} \quad (3.13)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial(\rho\omega)}{\partial t} + \frac{\partial(\rho\bar{U}_j\omega)}{\partial x_j} &= \frac{\partial}{\partial x_j} \left[\left(\mu + \frac{\mu_t}{\sigma_\omega} \right) \frac{\partial\omega}{\partial x_j} \right] + \\ + \alpha \frac{\omega}{k} \left(\mu_t \left(\frac{\partial\bar{U}_i}{\partial x_j} + \frac{\partial\bar{U}_j}{\partial x_i} \right) \frac{\partial\bar{U}_i}{\partial x_j} - \frac{2}{3} \frac{\partial\bar{U}_l}{\partial x_l} \left(3\mu_t \frac{\partial\bar{U}_l}{\partial x_l} + \rho k \right) \right) - \beta\rho\omega^2 \end{aligned} \quad (3.14)$$

$$-\rho\bar{u}_i\bar{u}_j = \mu_t \left(\frac{\partial\bar{U}_i}{\partial x_j} + \frac{\partial\bar{U}_j}{\partial x_i} \right) - \frac{2}{3} \delta_{ij} \left(\mu_t \frac{\partial\bar{U}_l}{\partial x_l} + \rho k \right) \quad (3.15)$$

$$\bar{h}_{tot} = \bar{h} + \frac{1}{2} \bar{U}_i \bar{U}_i + k, \mu_t = \rho \frac{k}{\omega}, \quad (3.16)$$

где ρ – плотность газа, \bar{U}_l – осредненные по времени компоненты скорости газа, \bar{p} – осредненное по времени давление газа, \bar{T} – осредненная по времени температура газа, x_i – пространственные координаты, t – время, \bar{h} – осредненная по времени удельная энтальпия, \bar{h}_{tot} – осредненная по времени по времени полная энтальпия, $k = \frac{1}{2} \bar{u}_i^2$ – турбулентная кинетическая энергия, u_i – пульсации скорости, ω – скорость диссипации турбулентной кинетической энергии, μ – динамический коэффициент вязкости, μ_t – динамический коэффициент турбулентной вязкости, λ – коэффициент теплопроводности, $\alpha = 5/9$, $\beta = 0.075$, $\beta' = 0.09$, $\sigma_k = 2$, $\sigma_\omega = 2$.

3.5.1 Расчет установившегося течения в компрессоре

Моделируется по одному межлопаточному каналу (расчетной области) каждой ступени. Расчетные модели состоят из выходного направляющего аппарата (ВНА), рабочих колес (РК) и направляющих аппаратов (НА) четырех ступеней (Рис. 3.8). Между вращающимся и не вращающимся расчетными областями задается условие протекания воздуха с осреднением параметров течения в окружном направлении.

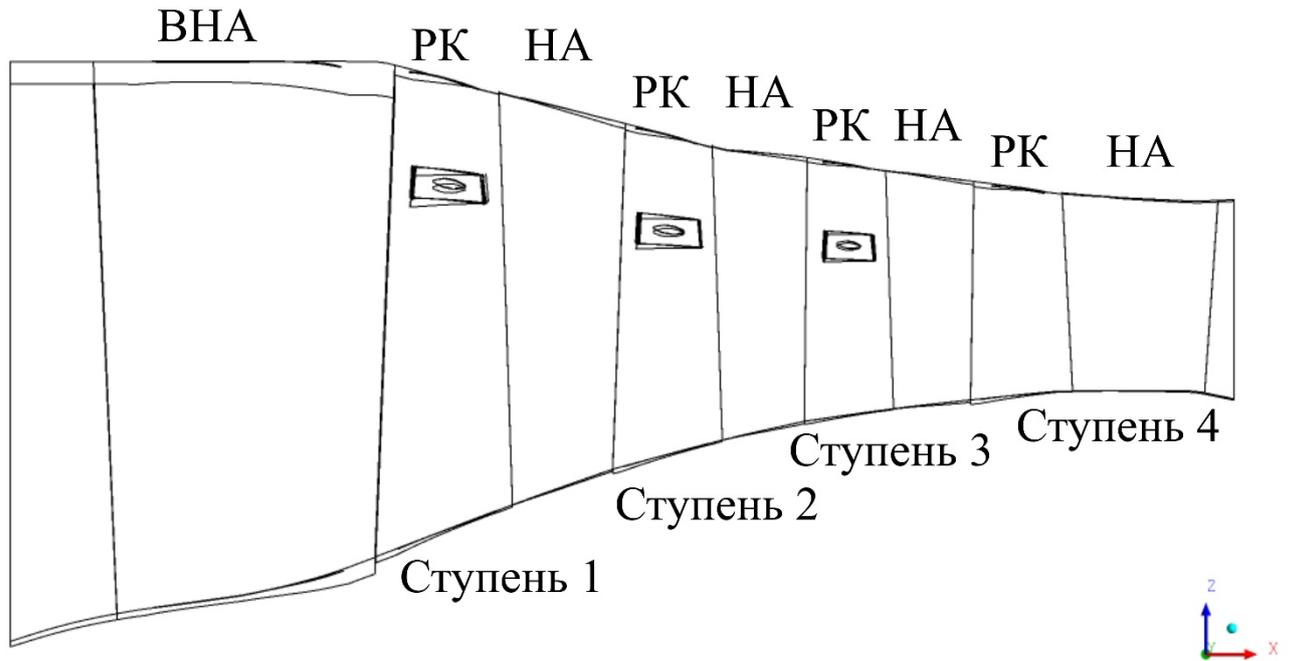


Рис. 3.8. Аэродинамическая модель компрессора.

Компоновка (продольный разрез)

На входе (Рис. 3.9, а) задаются полное давление $T_{\text{вход}}^*$, температура торможения $P_{\text{вход}}^*$:

$$P_{\text{вход}}^* = P \quad (3.17)$$

$$T_{\text{вход}}^* = T \quad (3.18)$$

а также направление вектора скорости газа, перпендикулярно поверхности входа.

На выходе (Рис. 3.9, а) задается статическое давление газа $P_{\text{стат, выход}}$:

$$P_{\text{стат, выход}} = p \quad (3.19)$$

На поверхностях твердых тел: ступицах, лопатках и корпусе (Рис. 3.9, б – г) задается условие прилипания:

$$V_{\text{поверхность твердых тел}} = 0 \quad (3.20)$$

На внешних боковых границах (Рис. 3.9, е) модели компрессора задается условие циклической симметрии.

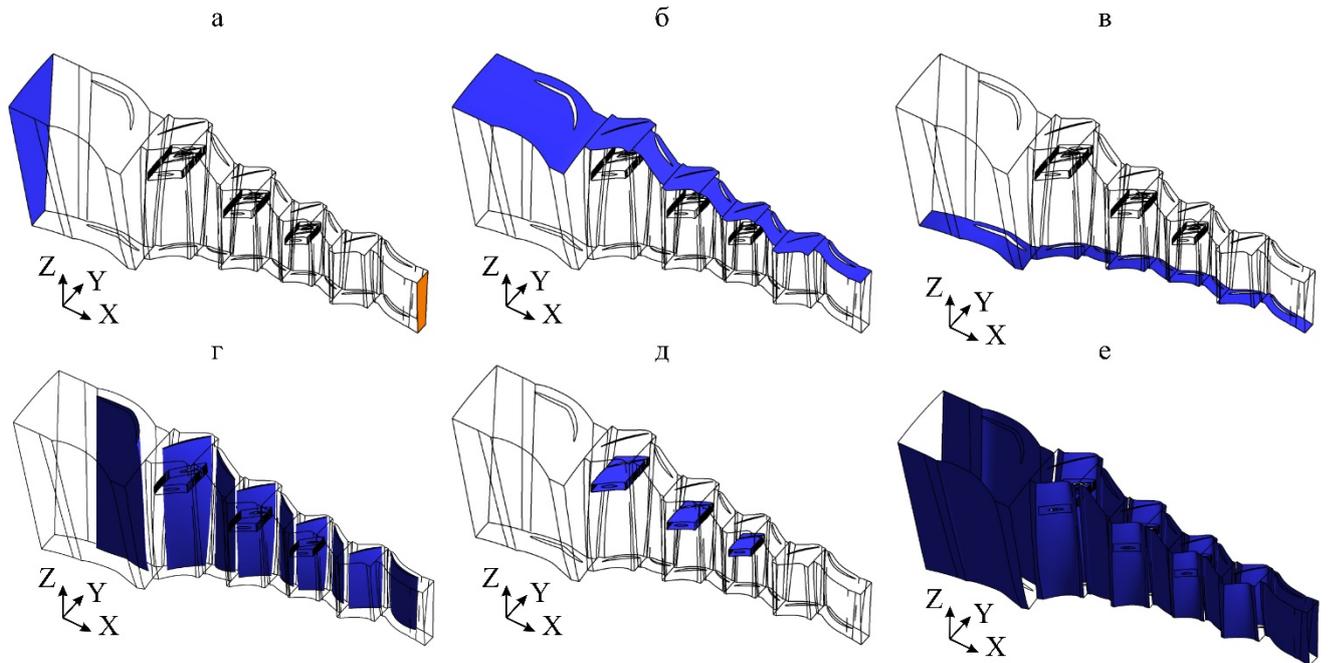


Рис. 3.9. Аэродинамическая модель компрессора. Цветом выделены области: а) вход (синим) и выход (оранжевым), б) корпус, в) ступицы, г) лопатки, д) около бандажных полок, е) внешние боковые границы

Расчет проводится до достижения среднеквадратичной невязки (RMS) 10^{-5} .

Расчетная сетка состоит в основном из гексаэдров, кроме области около бандажных полок, где присутствуют тетраэдры и пирамиды, а также призмы (для разрешения пограничного слоя). Для сопряжения участков сетки вокруг бандажных полок на границах между соответствующими областями задается условие протекания воздуха. Общая размерность сетки для исследуемых конфигураций представлена в Табл. 3.2.

Таблица 3.2. Размерность аэродинамических сеток

Модель	Число контрольных объемов (тысяч)
1	~4406
2	~4406
3	~4412
4	~4367
5	~4406

3.5.2 Расчет установившегося течения для ступени

Предварительно из аэродинамической модели всего компрессора выделяется исследуемое рабочее колесо. А затем создается модель, состоящая из нескольких подряд стоящих лопаток данного рабочего колеса (Рис. 3.10). Такая модель необходима, чтобы моделировать волну, бегущую по лопаточному венцу, в виде которой проявляется решетчатый флаттер [86]. В работе [72, 73] было показано, что на результаты расчета флаттера влияют только лопатки, соседние к центральной лопатке. В соответствии с этим, в настоящем исследовании используется трехлопаточная модель.

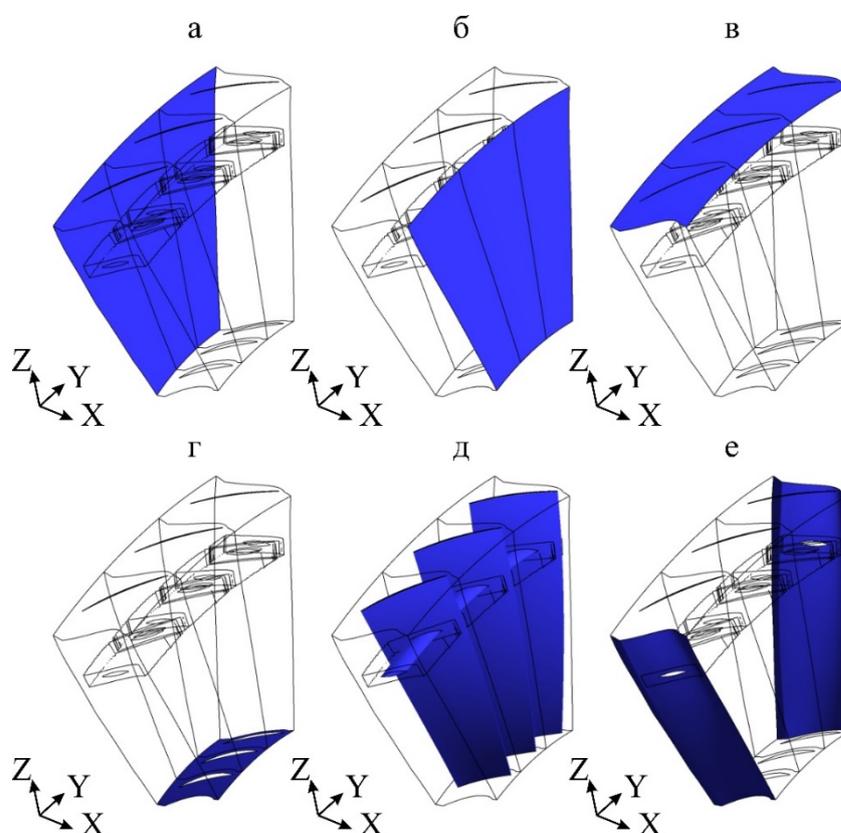


Рис. 3.10. Расчетная модель рабочего колеса. Цветом выделены области: а) вход, б) выход, в) корпус, г) ступицы, д) лопатки, е) внешние боковые границы

В качестве граничных условий на входе (Рис. 3.10, а) и выходе (Рис. 3.10, б) каждого межлопаточного канала задаются параметры течения, полученные из расчета установившегося течения воздуха во всем компрессоре. А именно, распределение в неподвижной системе координат полного давления, температуры

торможения, направления вектора скорости и турбулентных параметров на входе в межлопаточный канал:

$$P_{\text{вход}}^* = P_{\text{к}}(x, y, z) \quad (3.21)$$

$$T_{\text{вход}}^* = T_{\text{к}}(x, y, z) \quad (3.22)$$

$$D_{v, \text{вход}} = D_v(x, y, z) \quad (3.23)$$

и распределение статического давления на выходе из него:

$$P_{\text{стат, выход}} = p_{\text{к}}(x, y, z) \quad (3.24)$$

На твёрдых поверхностях (Рис. 3.10, в – г) ставится условие прилипания. Условие циклической симметрии задается уже на внешних боковых границах модели (Рис. 3.10, д). Расчет проводится до достижения максимальной невязки (MAX) 10^{-4} .

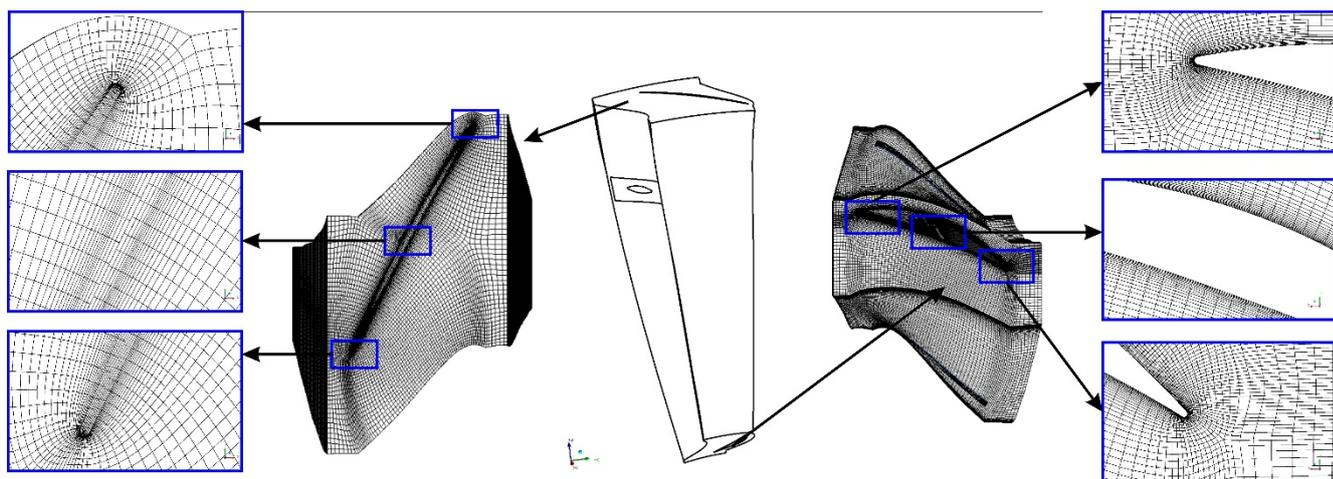


Рис. 3.11. Расчетная сетка одного межлопаточного канала

Размер сетки для аэродинамических расчетов для одного межлопаточного канала – около 850000 контрольных объемов (Рис. 3.11). Вблизи твердых стенок для разрешения турбулентного пограничного слоя построены сгущения сетки так, что во всех расчетах на большей части твердых стенок значение y^+ лежит в диапазоне от 5 до 282.

3.5.3 Нестационарный расчет

Граничные и начальные условия задаются из расчета установившегося течения воздуха в трехлопаточной модели. Рассчитывается три периода колебаний лопаток. На каждом периоде колебания лопатки делается 100 шагов по времени.

Расчет проводится до достижения среднеквадратичной невязки (RMS) 10^{-5} . На поверхности каждой лопатки задаётся перемещение границы расчетной области в виде собственного колебания колеса.

3.6 Результаты расчета флаттера

Для второго и третьего семейства собственных форм колебаний бандажированного рабочего колеса первой ступени компрессора низкого давления определена работа сил давления при различных конструктивных параметрах. Для каждого семейства собственных форм колебаний рассмотрен полный диапазон чисел узловых диаметров. Амплитуда колебания во всех расчетах задавалась так, чтобы максимальное перемещение в лопатке составило 0,001 м. Монтажный натяг в основной серии расчётов равен 0,54 мм. Рассматриваются два режима, на первом из которых при испытаниях двигателя был диагностирован флаттер (Режим 1), а на втором – было зафиксировано его отсутствие (Режим 2).

3.6.1 Фиксированное значение натяга

На графике зависимости работы сил давления от числа узловых диаметров по второму семейству форм колебания для режима 1 при различных конфигурациях (Рис. 3.12, а) видно, что флаттер наблюдается при $m=5$. При остальных значениях узловых диаметров по второму семейству форм колебаний работа сил давления отрицательная.

На формах колебаний по третьему семейству работа отрицательна при всех узловых диаметрах (Рис. 3.12, б).

На режиме 2 на второй и третьей формах работа сил давления для всех конфигураций при всех узловых диаметрах оказалась отрицательной (Рис. 3.12, б, в), что свидетельствует об аэроупругой устойчивости лопаток по исследованным формам.

Как видно из представленных данных, результаты расчетов при различных конструктивных и аэродинамических параметрах отличаются незначительно. Таким образом, влияние этих факторов на границы флаттера лопаток не существенно.

Кроме того, исследование показало, что на режиме 1, также как и при испытаниях, наблюдается флаттер, а на режиме 2 – его отсутствие.

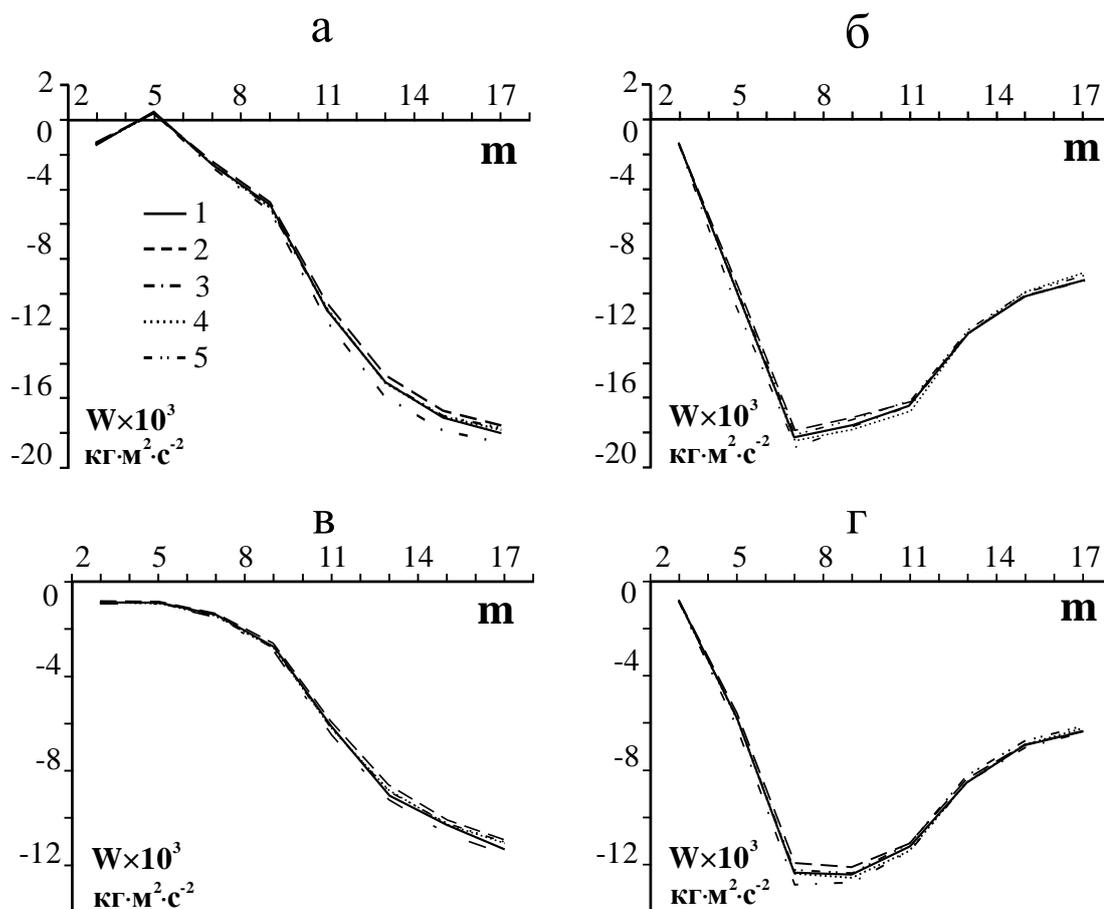


Рис. 3.12. Зависимость работы сил давления от числа узловых диаметров.

Номер кривой соответствует номеру конфигурации.

(а) режим 1, второе семейство форм колебаний; (б) режим 1, третье семейство форм колебаний; (в) режим 2, второе семейство форм колебаний, (г) режим 2, третье семейство форм колебаний.

3.6.2 Влияние монтажного натяга

Отдельная серия расчётов проведена для исследования влияния монтажного натяга в бандажных полках. Сравнивались результаты расчета на Режиме 1 при отсутствии натяга и при натяге 0.27 мм, 0.54 мм и 0.8 мм (Рис. 3.13).

Результаты показали, что на формах колебаний по второму семейству при отсутствии натяга и при значениях натяга 0.27 мм, 0.8 мм работа сил давления по

всем узловым диаметрам отрицательна, в отличие от расчета с натягом 0.54 мм. На формах колебаний по третьему семейству работа сил давления отрицательна во всех расчетах. При этом значение работы при каждом узловом диаметре сильно отличается при разных значениях натяга. Следует отметить, что при отсутствии натяга и при натяге, вызванном перекрытием лопаток на 0.27 мм результаты практически при всех узловых диаметрах близки друг к другу. Это обусловлено близостью собственных форм и частот.

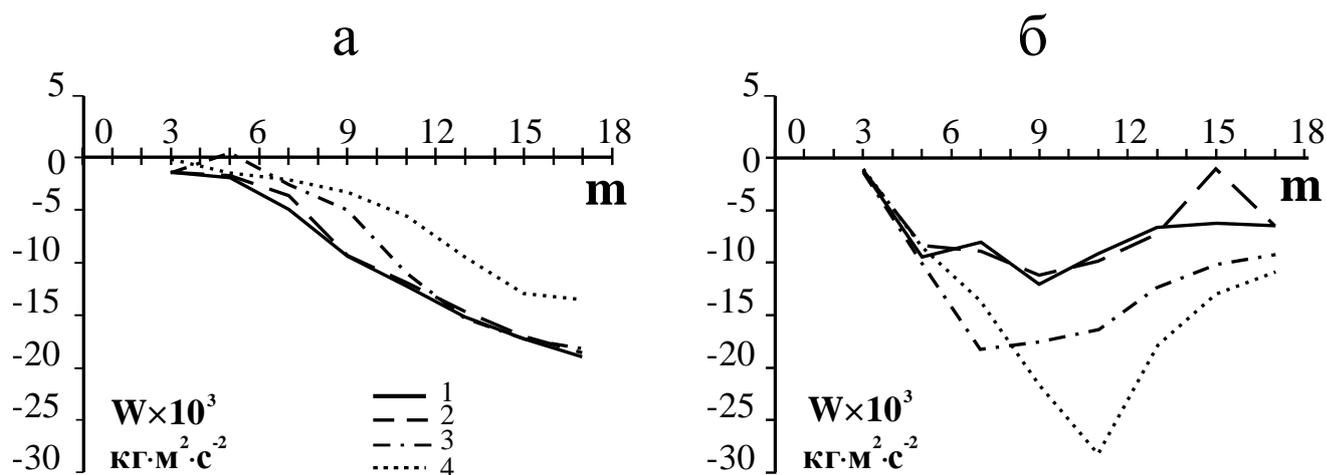
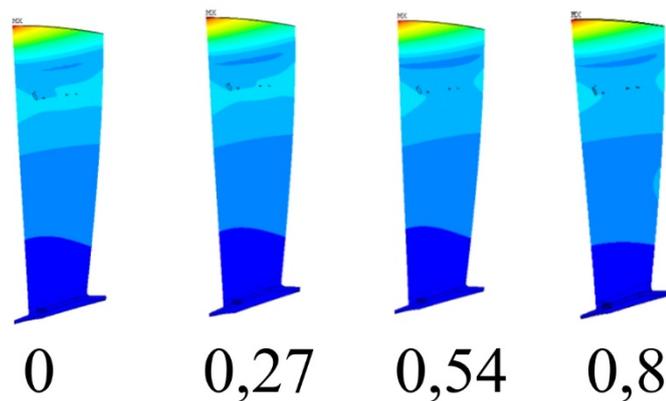


Рис. 3.13. Зависимость работы сил давления от числа узловых диаметров при различных значениях монтажного натяга. Модель с воспроизведением бандажных полок и радиального зазора 0,5 мм. Кривая 1 (сплошная): монтажный натяг отсутствует. Кривая 2 (штрихованная): монтажный натяг равен 0.27 м. Кривая 3 (штрихпунктирная): монтажный натяг равен 0.54 м. Кривая 4 (пунктирная): монтажный натяг равен 0.8 м. (а) Второе семейство форм колебаний; (б) третье семейство форм колебаний

Таким образом, величина натяга существенно влияет на результат прогноза флаттера. Это вызвано существенным изменением формы колебаний лопатки при различных значениях монтажного натяга, особенно для лопатки, находящейся в пучности, которая меняет характер колебаний периферийных сечений с крутильной на изгибную (Рис. 3.14).

а



б

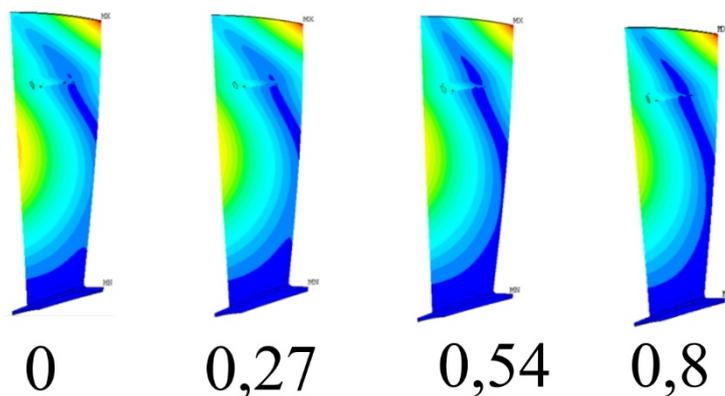


Рис. 3.14. Распределение перемещений в пере лопатки по второму семейству форм колебаний системы «диск-лопатки-бандажные связи», соответствующие пучности и узлу диска при разных значениях натяга, $m = 5$. а) пучность, б) узел.

3.7 Выводы

Проведено численное исследование влияния различных конструктивных параметров и параметров течения газа на прогнозирование флаттера лопаток с применением энергетического метода.

Рассчитаны собственные частоты и формы колебания лопаток. Определены границы флаттера для второго и третьего семейства колебаний системы «диск-лопатки-бандажные связи». Для каждой из форм колебаний были рассмотрены все узловые диаметры. При этом, развивая ранее разработанный метод прогнозирования флаттера лопаток [72, 73], учитывалось изменение формы колебания при движении бегущей волны по лопаточному венцу.

Получено, что результаты совпадают с экспериментом как в факте прогнозирования флаттера, так и в устойчивости.

Показано, что влияние таких параметров, как величина радиального зазора, угла прикрытия/открытия входного направляющего аппарата, радиальной неравномерности потока незначительно влияют на определение границ флаттера лопаток.

В тоже время, величина монтажного натяга существенно влияет на результаты расчета флаттера вследствие изменения формы колебания лопатки.

Так как монтажный натяг в бандажных полках лопаток падает при эксплуатации двигателя, а поведение границ флаттера нетривиально, то на этапе проектирования необходимо учитывать влияние натяга и проводить соответствующие расчеты.

4 Флаттер лопастей несущих винтов вертолета⁴

В главе 3 было изучено влияние параметров течения воздуха и различных конструктивных параметров на границы флаттера лопаток компрессоров. При этом предполагалось, что лопатки достаточно жесткие и формы колебания не изменяются под действием потока газа. Обтекание лопаток было рассмотрено в трехмерной постановке. В настоящей главе исследуется флаттер другого типа конструкции – несущего винта вертолета. Устойчивость лопастей несущей системы изучается с использованием метода-конечных элементов в трехмерной постановке с учетом центробежных и аэродинамических сил. Аэродинамические нагрузки на лопасть определяются по квазистатической теории. Но в отличие от рассмотренных в Главе 3 предположений касательно лопаток, в настоящей главе считается, что формы колебания лопастей при обтекании течения воздуха изменяются, а поток на бесконечности - однороден.

Далее приведем краткий обзор работ по аэроупругим исследованиям лопастей несущего винта вертолета.

4.1 Обзор литературы

Аэроупругий анализ лопастей ротора представляет собой широкую область исследований, требующую все более точных методов и подходов. Общей теории флаттера посвящена работа Ильичева [123]. Широкий спектр аэроупругих задач был объединен в работе [124]. Книги [4, 121, 122] содержат информацию о конструкции вертолетов, анализе напряжений, аэродинамике, динамике конструкции и аэроупругости. Подробный обзор исследований аэроупругости несущего винта был представлен Фридманом [125]. Другой подробный анализ дан в работе [126]. В работе [4] рассматривается флаттер как с учетом только изгибных колебаний, так и с учетом крутильных деформаций лопасти. Приводится метод расчета изгибно-крутильных колебаний лопасти в потоке, позволяющий также исследовать флаттер. При этом не учитываются колебания в плоскости вращения.

⁴ При подготовке данной главы диссертации использовались следующие публикации автора, в которых, согласно «Положению о присуждении ученых степеней в Московском государственном университете имени М.В.Ломоносова», отражены основные результаты, положения и выводы исследования: [147, 148].

Одним из методов для исследования флаттера лопасти является метод Флоке, применяемый к простой двухстепенной системе для сечения лопасти, который может предсказать флаттер на первых изгибных и первых крутильных модах [4, 121, 122]. Другой метод, применяемый к высшим модам, заключается в осреднении поля течения по циклу вращения и анализе флаттера лопасти в нестационарном потоке [4, 122]. Оба подхода имеют существенные недостатки: первый применим только к простейшим модам флаттера, а второй не учитывает периодичность течения.

Подход к рассмотрению нестационарной аэродинамики показан в работе [127]. Некоторые подходы и предположения, основанные на аэродинамике поступательного полета, были включены в аэроупругий анализ в [128]. Анализ флаттера вертолета с анизотропными опорами рассмотрен в работе [129, 130]. Проанализирована роль нестационарной аэродинамики, в том числе динамического срыва, а также рассмотрены нелинейные аэроупругие задачи при поступательном полете. Также было проведено решение методом конечно-элементов вместе с рассмотрением связанных задач винт-фюзеляж в [131].

Исследование флаттера лопастей несущего винта проведено в работах [132 – 135]. В работе [134] для исследования устойчивости применяется метод конечных элементов. Для аэродинамических нагрузок рассматривается движение тонкого профиля в плоскопараллельном потоке. Исследовано влияние жесткости проводки на границы флаттера. Работа [135] посвящена влиянию конструкционного демпфирования на возникновение хордового флаттера. Показано, что увеличение демпфирования за счет добавление демпфера в конструкцию втулки винта приводит к подавлению хордового флаттера.

В отечественном вертолетостроении применяются различные расчетные методы для исследования флаттера лопастей. При этом для одних методов необходимо уточнение аэродинамических моделей, а для других – упругих моделей. В настоящей главе приводится разработанная математическая модель, учитывающая периодичность течения и возможность возникновения флаттера по

высшим модам колебания. Исследуется влияние упругого взаимодействия лопастей через систему тяг и валов на границы флаттера.

4.2 Постановка задачи

Исследуется устойчивость лопасти несущего винта пассажирского вертолета. Рассматривается двухвинтовая соосная схема вертолета (Рис. 4.1).

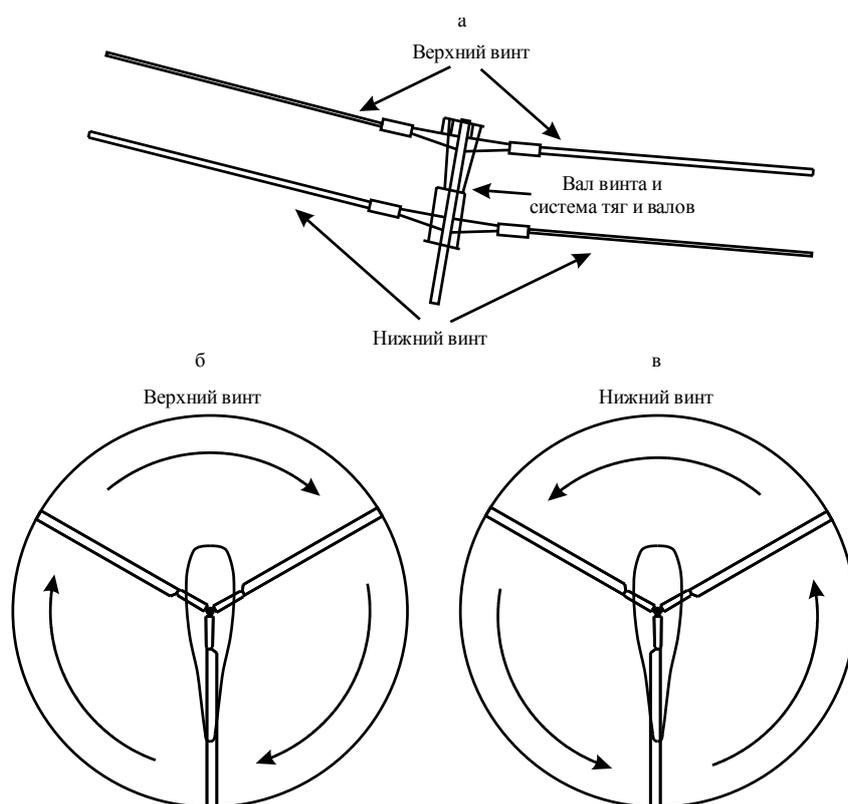


Рис. 4.1. а) Верхний и нижний винты состоят из трех лопастей. Вращение винтов происходит в противоположные стороны: верхний винт вращается по часовой стрелке, нижний – против, если смотреть сверху

Рассматриваются три режима горизонтального полета и режим висения (Таблица 4.1). На режиме висения скорость несущего винта относительно невозмущенного течения воздуха и угол между плоскостью вращения винта и направлением потока равны нулю.

Предполагается, что поток воздуха однороден на бесконечности, но при этом учитывается изменение форм колебания лопастей в потоке. Границы флаттера определяются в квазистатической постановке с учетом центробежных и аэродинамических нагрузок, а также конструкционного демпфирования.

Таблица 4.1. Параметры расчетных режимов

Параметр	Режим 1	Режим 2	Режим 3	Режим 4
Скорость полета, км/ч	0	230	250	277,5
Угол атаки несущего винта, градусов	0	-5,35	-5,68	-6,16
Общий шаг, градусов	0,27	2,2	4,7	5,7
Частота вращения, об/мин	453	453,1	453,1	453,1

В следующем разделе приводится описание численного метода прогнозирования флаттера.

4.3 Численный метод

Суть метода исследования устойчивости лопасти несущей системы вертолета состоит в следующем. Вычисление границ флаттера проводится с использованием метода конечных элементов [76]. На первом шаге определяется среднее напряженно-деформированное состояние лопасти в трёхмерной постановке с учётом геометрической нелинейности при действии центробежной и усредненной за период вращения аэродинамической силы. С учетом рассчитанного состояния лопасти проводится уменьшение степеней свободы (редуцирование) ее конечно-элементной модели. Тем самым лопасть несущего винта моделируется с помощью суперэлемента [132, 138]. На основе суперэлемента (редуцированной модели) лопасти создается расчетная модель всей несущей системы вертолета.

Исследование устойчивости проводится в двух постановках: с учетом совершаемых лопастью маховых колебаний и без их учета.

Численный расчет флаттера проводится для напряженно – деформированного состояния лопасти, определенного на первом шаге, и

стационарного состояния потока воздуха, параметры которого соответствуют средним значениям параметров реального периодически колеблющегося потока. Исследуется устойчивость малых колебаний лопасти, для чего колебания считаются геометрически линейными (малые деформации), а аэродинамические силы линеаризовываются как функции скорости и поворота профиля сечения. Таким образом, для прогнозирования флаттера решается задача на определение комплексных собственных значений полученной связанной линейной аэроупругой системы. Вещественная часть вычисленных собственных значений отвечает за рост или затухание каждого колебания. Критерием флаттера при таком подходе является наличие хотя бы одного растущего со временем собственного движения лопасти.

Численный расчет флаттера лопастей несущей системы, совершающих маховые колебания, проводится с помощью теории Флоке [136], поскольку невозмущенное состояние, исследуемое на устойчивость, является периодически зависящим от времени. А именно, решается серия задач о развитии малого возмущения лопасти за один период вращения, после чего составляется матрица монодромии [136]. Комплексные собственные значения этой матрицы — мультипликаторы Флоке. Критерием флаттера является наличие хотя бы одного мультипликатора, лежащего вне единичного круга.

Для расчета нагрузок и проведения расчетов, а также для формирования общей модели несущей системы разработано программное обеспечение.

Рассмотрим каждый из приведенных шагов численного исследования флаттера более подробно.

4.3.1 Нелинейный статический расчет

На первом шаге аэроупругого анализа рассчитывается деформированное состояние лопасти под действием центробежной силы и осреднённой (за период вращения) аэродинамической нагрузки. Нелинейный статический расчет связанной аэроупругой задачи проводится для твердотельной упругой модели лопасти. Аэродинамические нагрузки вычисляются в квазистационарной

постановке в предположении, что каждое сечение лопасти обтекается двумерно, и соответствующие коэффициенты подъёмной силы и силы сопротивления, а также положение центра давления известны из экспериментальных продувок плоских профилей. Вычисленные нагрузки прикладываются как статические сосредоточенные силы и моменты к узлам конечно-элементной модели на строительной оси лопасти, соединенными с узлами на границе профиля сечения.

Поскольку аэродинамические нагрузки зависят от деформированного состояния лопасти, то решение задачи проводится методом последовательных приближений (итерационным методом). Алгоритм расчетов следующий: на первой итерации рассчитываются аэродинамические силы, действующие на недеформированную лопасть, и проводится расчёт напряжённо-деформированного состояния под действием этих сил; на следующей итерации проводится пересчёт аэродинамических сил, действующих на деформированный винт, и проводится пересчёт состояния лопасти под действием пересчитанных нагрузок. Итерации повторяются до достижения сходимости.

Далее описываются вычисления нагрузок, действующих на лопасть.

Нагрузки на лопасть

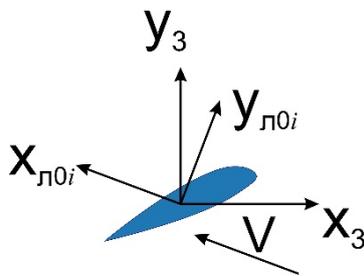


Рис. 4.2. Системы координат для профиля при вращении винта против часовой стрелки (нижний винт)

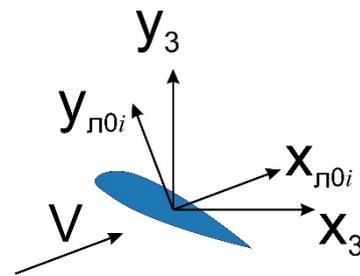


Рис. 4.3. Системы координат для профиля при вращении винта по часовой стрелке (верхний винт)

Определение нагрузок будем проводить в следующих системах координат (Рис. 4.2, Рис. 4.3). Система координат $x_3y_3z_3$ вращается вместе с валом лопасти и определена следующим образом. Ось y_3 направлена вдоль вала несущего винта

вверх, а ось z_3 — вдоль оси лопасти. Ось x_3 перпендикулярна осям y_3 и z_3 и дополняет их до правой тройки. Далее данную систему координат будем называть глобальной. В каждом сечении задана система $x_{l0i}y_{l0i}z_{l0i}$, ось x_{l0i} которой направлена по потоку, ось z_{l0i} — вдоль лопасти, y_{l0i} дополняет систему до правой тройки и направлена поперек потока.

Выражение для вычисления центробежной нагрузки имеет вид:

$$F_{ци} = m_i \omega^2 R_i, \quad (4.1)$$

где ω — угловая скорость, R_i — радиус сечения, m_i — масса в i -ом сечении.

Аэродинамические силы, действующие на лопасть, определяются с учетом ряда предположений. Во-первых, согласно гипотезе плоских сечений, аэродинамические коэффициенты подъемной силы и профильного сопротивления в сечении лопасти несущего винта определяются по экспериментальным аэродинамическим характеристикам профиля лопасти, полученным в плоскопараллельном потоке (Рис. 4.4). Во-вторых, не учитывается влияние нестационарности обтекания на аэродинамические характеристики сечения лопасти несущего винта. В-третьих, принимается равномерное распределение индуктивных скоростей в плоскости ометаемого диска несущего винта, в том числе на режимах косоугольного обтекания несущего винта. Наконец, в-четвертых, пренебрегается поворотами плоских сечений лопасти относительно осей x_3 , y_3 , вызванными деформациями оси лопасти.

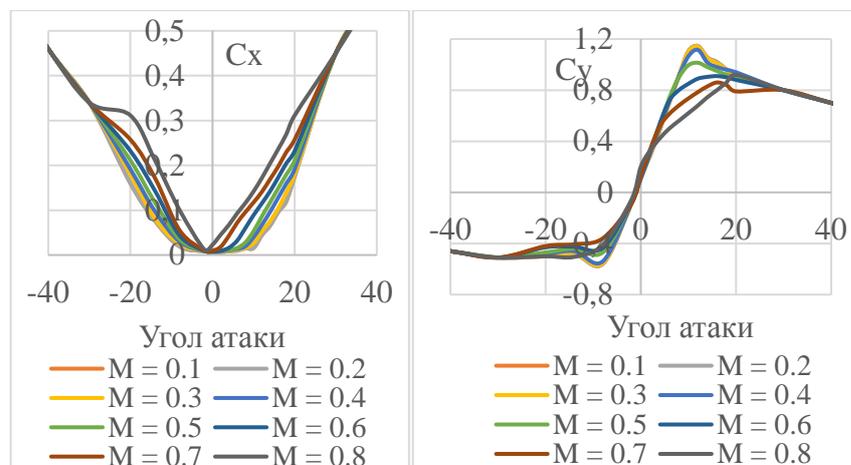


Рис. 4.4. Зависимость аэродинамических коэффициентов от угла атаки и числа Маха

Таким образом, с учетом сделанных предположений компоненты вектора аэродинамической силы в заданном сечении лопасти (то есть в заданном узле конечно-элементной модели, расположенном на оси лопасти) вычисляется следующим образом:

$$\mathbf{F}_{\text{аэро } i}^{glob} = \overline{\mathbf{F}_{0i}^{glob}} \cdot l_i, \quad (4.2)$$

где l_i — расстояние между рассматриваемым узлом и ближайшим узлом на оси лопасти, расположенным ближе к оси вращения винта, i -номер сечения лопасти (Рис. 4.5). $\overline{\mathbf{F}_{0i}^{glob}}$ — погонные нагрузки, осредненные по периоду вращения $T = \frac{2\pi}{\omega}$:

$$\overline{\mathbf{F}_{0i}^{glob}} = \begin{pmatrix} \frac{1}{T} \int_0^T F_{0i}^{x, glob}(t) dt \\ \frac{1}{T} \int_0^T F_{0i}^{y, glob}(t) dt \\ 0 \end{pmatrix} \quad (4.3)$$

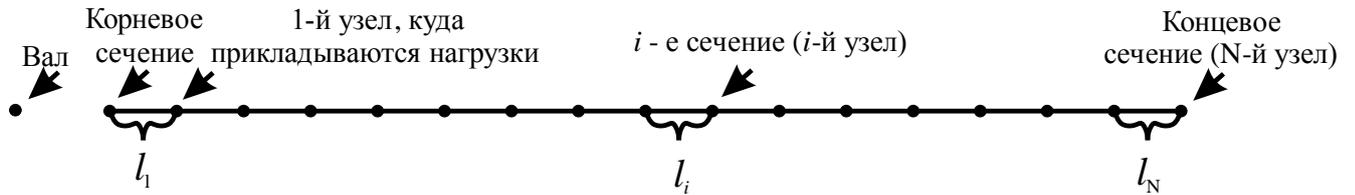


Рис. 4.5. К определению нагрузок

Вычисление интегралов в выражении (4.3) проводится методом трапеций.

Компоненты вектора погонных нагрузок в глобальной системе координат $\mathbf{F}_{0i}^{glob}(t)$, связаны компонентами вектора в системе координат, связанной с потоком $\mathbf{F}_{0i}(t)$, следующим образом:

$$\mathbf{F}_{0i}^{glob}(t) = \begin{pmatrix} F_{0i}^{glob x}(t) \\ F_{0i}^{glob y}(t) \\ 0 \end{pmatrix} = C^{-1} \mathbf{F}_{0i}(t) = C^{-1} \begin{pmatrix} F_{0i}^x(t) \\ F_{0i}^y(t) \\ 0 \end{pmatrix}, \quad (4.4)$$

где матрица преобразования C имеет вид

$$C = \begin{pmatrix} \pm \cos \alpha_{flow} & \sin \alpha_{flow} & 0 \\ \mp \sin \alpha_{flow} & \cos \alpha_{flow} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (4.5)$$

α_{flow} – угол между вектором полной скорости обтекания профиля и плоскостью вращения винта, здесь и в других выражениях, где встречается знак « \pm » или « \mp » верхний знак выбирается для верхнего винта, а нижний – для нижнего винта.

Компоненты вектора погонных нагрузок в системе, связанной с потоком, в свою очередь, вычисляются следующим образом:

$$F_{0i}^x(t) = C_{xi}(\alpha_i(t), M_i(t)) \frac{\rho \cdot |V_{0i}^{\text{полн}}(t)|^2}{2} \cdot b \quad (4.6)$$

$$F_{0i}^y(t) = C_{yi}(\alpha_i(t), M_i(t)) \frac{\rho \cdot |V_{0i}^{\text{полн}}(t)|^2}{2} \cdot b, \quad (4.7)$$

где ρ – плотность воздуха, b – длина хорды сечения лопасти,

$|V_{0i}^{\text{полн}}(t)| = \sqrt{(V_{0i x}^{\text{полн}}(t))^2 + (V_{0i y}^{\text{полн}}(t))^2}$ – длина вектора полной скорости обтекания

сечения лопасти, $V_{0i x}^{\text{полн}}$ и $V_{0i y}^{\text{полн}}$ – компоненты вектора полной скорости обтекания сечения лопасти, C_{xi} и C_{yi} – коэффициенты профильного сопротивления и подъемной силы в сечении лопасти, α_i – угол атаки профиля сечения лопасти, M_i – число Маха набегающего потока в сечении лопасти.

Так как место приложения нагрузок отличается от центра давления, то кроме сил в каждом сечении задается аэродинамический момент. Вектор момента сил, действующего на i -е сечение, определяется так:

$$M_i = (X_{\text{цд}} - X_0) \cdot X_{\text{пр } i} \times F_{\text{аэро } i}^{\text{glob}} \quad (4.8)$$

$X_{\text{пр } i}$ — единичные векторы, направленные в каждом сечении вдоль хорды от узла к центру давления, $X_{\text{цд}}$ — расстояние по хорде от носа профиля до центра давления, X_0 — расстояние по хорде от носа профиля до точки пересечения строительной оси лопасти с сечением (то есть до узла конечно-элементной модели лопасти).

Рассмотрим, как вычисляются вектор полной скорости обтекания профиля сечений лопасти и аэродинамические коэффициенты.

Вектор полной скорости

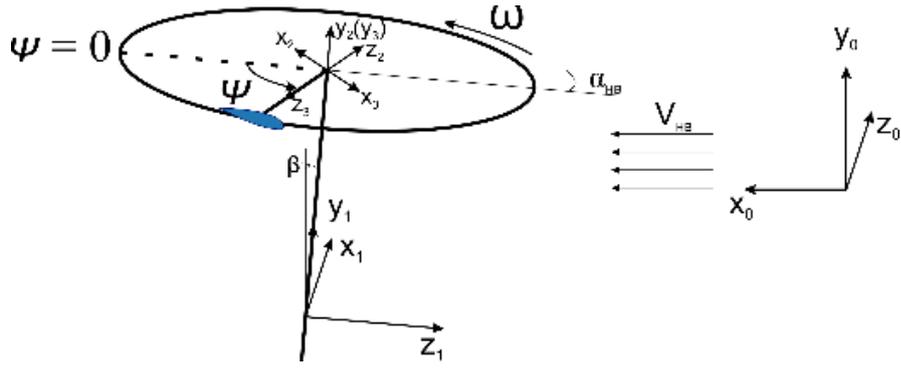


Рис. 4.6. Обтекание профиля лопасти нижнего винта

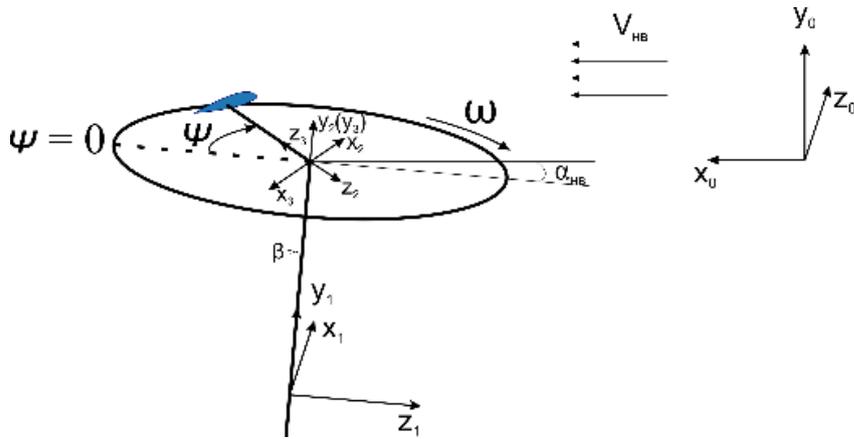


Рис. 4.7. Обтекание профиля лопасти верхнего винта

Компоненты вектора полной скорости обтекания профиля i -го сечения лопасти в системе координат $x_3y_3z_3$ для нижнего и верхнего винта (Рис. 4.6, Рис. 4.7) находится при последовательном преобразовании вектора скорости от системы координат $x_пy_пz_п$, связанной с потоком, к системе координат $x_3y_3z_3$, связанной с валом лопасти (Рис. 4.8).

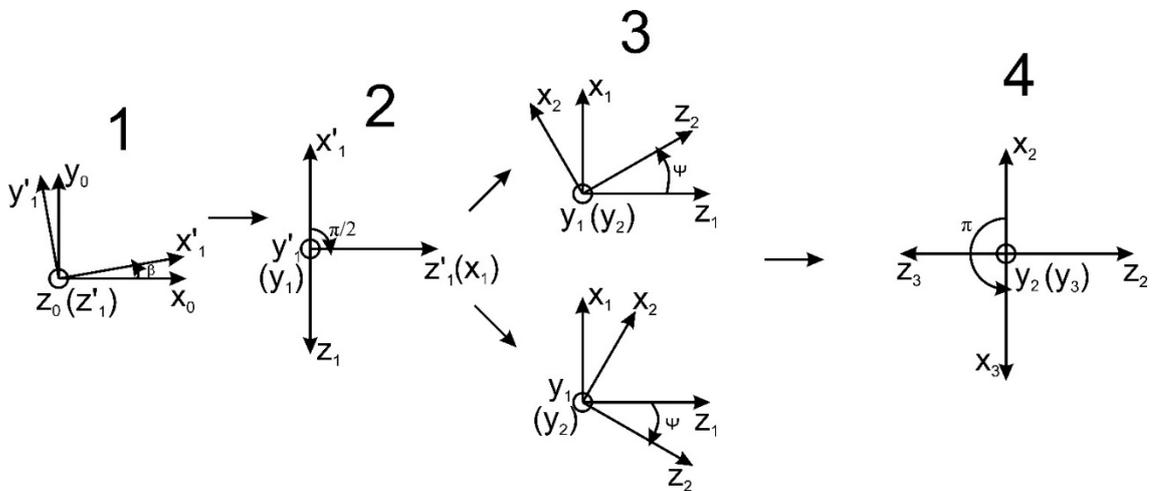


Рис. 4.8. Поворот системы $x_0y_0z_0$

Последовательное преобразование вектора скорости $x_{\Pi}y_{\Pi}z_{\Pi}$ к системе координат $x_3y_3z_3$ выглядит следующим образом. Сначала система координат поворачивается на угол $\beta = -\alpha_{\text{НВ}}$ вокруг z_0 для учета наклона плоскости вращения. Затем осуществляется поворот на угол $\pi/2$ (по часовой стрелке) вокруг y'_1 . Далее происходит поворот на азимутальный угол где $\psi = \omega t$. вокруг y_1 против часовой стрелки (в случае нижнего винта) или по часовой стрелке (для верхнего винта). Наконец, чтобы получить нужное направление оси z_3 система поворачивается на угол π вокруг y_2 .

Получаем в итоге следующее преобразование вектора скорости от системы координат $x_{\Pi}y_{\Pi}z_{\Pi}$ к системе координат $x_3y_3z_3$:

$$V_{\text{НВ}}^{x_3y_3z_3} = C_4 C_3 C_2 C_1 V_{\text{НВ}}^{x_0y_0z_0}, \quad (4.9)$$

где матрицы соответствующих преобразований вычисляется следующим образом:

$$C_1 = \begin{pmatrix} \cos \beta & \sin \beta & 0 \\ -\sin \beta & \cos \beta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (4.10)$$

$$C_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (4.11)$$

$$C_3 = \begin{pmatrix} \cos \psi & 0 & \pm \sin \psi \\ 0 & 1 & 0 \\ \mp \sin \psi & 0 & \cos \psi \end{pmatrix} \quad (4.12)$$

$$C_4 = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \quad (4.13)$$

Верхний знак соответствует верхнему винту, а нижний – нижнему винту):

Таким образом, выражения для вычисления компонент вектора полной скорости обтекания профиля сечения в системе $x_3y_3z_3$ с учетом вращения винта и индуктивной скорости θ_1 имеет вид:

$$\begin{cases} V_{0i x}^{\text{полн}} = \pm V_{\text{НВ}} \cos \alpha_{\text{НВ}} \sin \psi \pm \omega R_i \\ V_{0i y}^{\text{полн}} = V_{\text{НВ}} \sin \alpha_{\text{НВ}} - \theta_1 \end{cases}, \quad (4.14)$$

где R_i – радиус сечения.

Индуктивная скорость

Индуктивная скорость ϑ_1 , согласно принятым допущениям, является равномерно распределенной по ометаемому диску, направлена по оси вала винта и противоположна силе тяги. Индуктивная скорость в плоскости ометаемого диска определяется из выражения:

$$\vartheta_1 = \bar{\vartheta}_1 \omega R, \quad (4.15)$$

где $\omega = 2\pi\nu$ – угловая скорость вращения несущего винта, ν – частота вращения несущего винта, R – радиус несущего винта, $\bar{\vartheta}_1$ – относительная индуктивная скорость, определяемая из системы уравнений на основе импульсной теории винта и теории элемента лопасти [4]:

$$\begin{cases} \bar{\vartheta}_1 = \frac{0,25 \cdot C_T}{\chi^2 \sqrt{\mu^2 + \lambda^2}} \\ C_T = a_\infty \cdot \sigma_B \left(\frac{\varphi_{0,7-\alpha}}{3} \cdot \left(1 + \frac{3}{2} \mu^2 \right) + \frac{\lambda}{2} \right) \\ \lambda = \mu \cdot \operatorname{tg} \alpha_{\text{НВ}} - \bar{\vartheta}_1 \end{cases} \quad (4.16)$$

где λ – коэффициент протекания, $\mu = V^{\text{НВ}} \cdot \cos \alpha_{\text{НВ}} / \omega R$ – коэффициент режима работы несущего винта, $\alpha_{\text{НВ}}$ – угол атаки несущего винта, то есть угол между конструктивной плоскостью несущего винта, перпендикулярной валу несущего винта, и вектором скорости набегающего потока, C_T – коэффициент тяги несущего винта, a_∞ – производная коэффициента подъемной силы профиля лопасти по углу атаки, $\sigma_B = \frac{k_{\text{лоп}} \cdot b}{\pi R}$ – коэффициент заполнения несущего винта, χ – коэффициент концевых потерь несущего винта, $V^{\text{НВ}}$ – скорость движения вертолета относительно потока, $k_{\text{лоп}}$ – количество лопастей несущего винта, b – хорда лопасти несущего винта, $\varphi_{0,7-\alpha}$ – угол установки недеформированной лопасти на относительном радиусе $\bar{r} = 0,7$ с учетом угла нулевой подъемной силы профиля, определяемый выражением $\varphi_{0,7-\alpha} = \varphi_{\text{ош}} - \alpha_0 + \varphi_d$, $\varphi_{\text{ош}}$ – угол общего шага, устанавливаемого системой управления несущим винтом, α_0 – угол нулевой подъемной силы профиля, φ_d – угол геометрической закрутки лопасти на относительном радиусе $\bar{r} = 0,7$.

Из всех решений системы в качестве $\bar{\vartheta}_1$ принимается действительный корень, положительный или отрицательный, в зависимости от того, создает ли винт положительную или отрицательную подъёмную силу:

$$\begin{cases} \bar{\vartheta}_1 > 0, & \varphi_{0,7-\alpha} > -\frac{3\mu \cdot \operatorname{tg}\alpha_{\text{НВ}}}{2 \cdot 1 + \frac{3}{2}\mu^2} \\ \bar{\vartheta}_1 < 0, & \varphi_{0,7-\alpha} < -\frac{3\mu \cdot \operatorname{tg}\alpha_{\text{НВ}}}{2 \cdot 1 + \frac{3}{2}\mu^2} \end{cases} \quad (4.17)$$

Аэродинамические коэффициенты

Определение коэффициентов подъёмной силы C_y и профильного сопротивления C_x производится на основании экспериментальных данных, содержащих зависимости C_y и C_x от угла атаки α и числа Маха M .

Число Маха M_i набегающего потока в рассматриваемом сечении лопасти вычисляется согласно соотношению:

$$M_i(t) = \frac{|\mathbf{V}_{0i}^{\text{полн}}(t)|}{a_{\text{ЗВ}}}, \quad (4.18)$$

где $a_{\text{ЗВ}}$ – местная скорость звука.

Угол атаки профиля вычисляется следующим образом (Рис. 4.9):

$$\alpha_i(t) = \varphi_{\text{ош}} + \varphi_{\text{сеч } i} \mp R_{\text{зи}} + \Phi_{\text{цикл}} + \alpha_{\text{flow } i}(t), \quad (4.19)$$

где $\varphi_{\text{ош}}$ – угол общего шага, устанавливаемого системой управления несущим винтом, $\varphi_{\text{сеч } i}$ – геометрическая закрутка сечения, $R_{\text{зи}}$ – угловые перемещения (закрутка) вокруг оси Z для i -го сечения, $\alpha_{\text{flow } i}(t)$ – угол между вектором полной скорости обтекания профиля сечения лопасти и плоскостью ометаемого диска.

$$\Phi_{\text{цикл}} = \begin{cases} \varphi_{\text{цикл}} \sin(\omega t) \\ -\varphi_{\text{цикл}} \sin(\omega t) \\ \varphi_{\text{цикл}} \cos(\omega t) \\ -\varphi_{\text{цикл}} \cos(\omega t) \end{cases}, \quad (4.20)$$

где каждый из четырёх вариантов соответствует сдвигу фазы циклического шага на $0, \pi/2, \pi, 3\pi/2$ по азимуту, что соответствует созданию винтом силы тяги вперёд или назад, или крену вправо или влево.

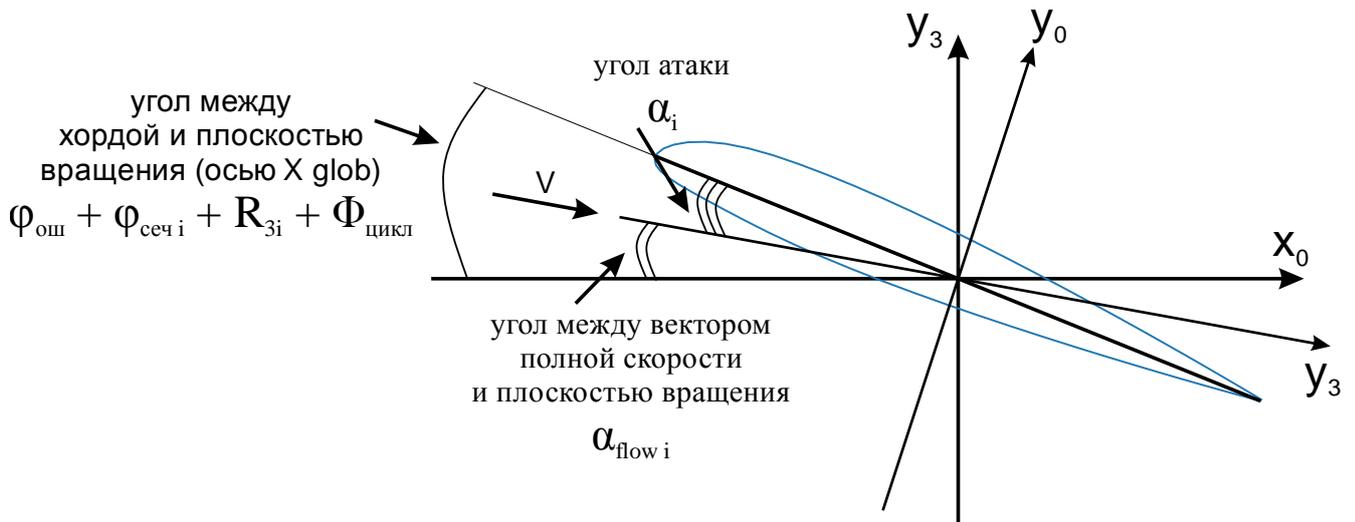


Рис. 4.9. К определению угла атаки

Численный расчет

Статический расчет связанной аэроупругой задачи проводится для твердотельной модели лопасти с учетом геометрической нелинейности.

Решение связанной задачи проводится итерационным методом: на первой итерации рассчитываются аэродинамические силы, действующие на недеформированную лопасть, и определяется напряженно-деформированное состояние лопасти под действием этих сил; на каждой следующей итерации проводится расчет состояния лопасти под действием нагрузок, вычисленных с учетом напряженно-деформированного состояния, определенного на предшествующей итерации.

Итерационный процесс продолжается до тех пор, пока невязки по линейным перемещениям и угловому перемещению вокруг оси Z лопасти не достигнут заданных значений:

$$\begin{aligned}
 \max_i |u_{ix,j} - u_{ix,j-1}| &< \varepsilon_x, \\
 \max_i |u_{iy,j} - u_{iy,j-1}| &< \varepsilon_y, \\
 \max_i |u_{iz,j} - u_{iz,j-1}| &< \varepsilon_z, \\
 \max_i |R_{iz,j} - R_{iz,j-1}| &< \varepsilon,
 \end{aligned}
 \tag{4.21}$$

где $u_{ix,j}, u_{iy,j}, u_{iz,j}$ – перемещения вдоль соответствующих осей в i -ом узле на j -ой итерации, $R_{iz,j}$ – поворот вокруг оси лопасти в i -ом узле на j -ой итерации.

4.3.2 Редукция модели

Для уменьшения размерности модели был использован метод статической конденсации [137, 138], в котором редуцируемые степени свободы выражаются через граничные степени свободы из линейной статической системы уравнений.

Уравнение равновесия

$$K\mathbf{u} = \mathbf{F}, \quad (4.22)$$

где K – матрица жесткости, \mathbf{u} – вектор перемещений, \mathbf{F} – вектор нагрузок. Рассматривая редуцируемые и граничные степени свободы получаем уравнение равновесия в виде:

$$\begin{aligned} K_{bb}\mathbf{u}_b + K_{br}\mathbf{u}_r &= \mathbf{F}_b \\ K_{rb}\mathbf{u}_b + K_{rr}\mathbf{u}_r &= \mathbf{F}_r, \end{aligned} \quad (4.23)$$

где индекс b соответствует граничным степеням свободы, а r – редуцированным.

Выразим из второго уравнения \mathbf{u}_r через \mathbf{u}_b :

$$\mathbf{u}_r = -K_{rr}^{-1}K_{rb}\mathbf{u}_b + K_{rr}^{-1}\mathbf{F}_r \quad (4.24)$$

Подставляя полученное выражение в первое уравнение (4.23), получим уравнения для редуцированной модели:

$$K_{\text{ред}}\mathbf{u}_b = \mathbf{F}_{\text{ред}}, \quad (4.25)$$

где $K_{\text{ред}} = K_{bb} - K_{br}K_{rr}^{-1}K_{rb}$, $\mathbf{F}_{\text{ред}} = \mathbf{F}_b - K_{br}K_{rr}^{-1}\mathbf{F}_r$.

Выбираются наборы узлов на границе профиля сечения (6-10 узлов на сечение), и к ним редуцируются матрицы жесткости и масс, а также матрицы восстановления.

Таким образом, создается редуцированная (суперэлементная) модель лопасти несущего винта, которая используется в последующих расчетах флаттера. Границы флаттера рассчитывается с учетом возмущения действующих на лопасть сил, обусловленных колебанием лопасти, вычисление которых приведено в следующем разделе.

4.3.3 Силы, обусловленные колебанием лопасти

Далее покажем, что возмущения аэродинамических сил, вызванные колебанием профиля сечения лопасти, можно представить в линейном приближении как функции скоростей и поворота профиля сечения. В тоже время сила Кориолиса линейризуется как функции линейных и угловых скоростей профиля сечения. Сначала рассмотрим аэродинамические нагрузки.

Аэродинамические силы

Выражения для нагрузок в системе, связанной с потоком, с учетом малых колебаний имеют вид:

$$F_i^x = C_{xi} \left(\alpha_{\text{пр } i}^0 + \alpha'_{\text{пр } i} + \alpha'_{vi} \frac{|\vec{V}_i^{\text{полн}}|}{a_{3B}} \right) \frac{\rho |\vec{V}_i^{\text{полн}}|^2}{2} b, \quad (4.26)$$

$$F_i^y = C_{yi} \left(\alpha_{\text{пр } i}^0 + \alpha'_{\text{пр } i} + \alpha'_{vi} \frac{|\vec{V}_i^{\text{полн}}|}{a_{3B}} \right) \frac{\rho |\vec{V}_i^{\text{полн}}|^2}{2} b, \quad (4.27)$$

где $\alpha_{\text{пр } i}^0$ – угол атаки без учета малых колебаний, $\alpha'_{\text{пр } i}$ – изменение угла атаки, обусловленное вращательным движением профиля α'_{vi} – изменение угла атаки, вызванное поступательным движением профиля, $\vec{V}_i^{\text{полн}}$ – вектор полной скорости воздуха относительно профиля при малых колебаниях, который определяется таким образом:

$$\mathbf{V}_i^{\text{полн}} = \mathbf{V}_{0i}^{\text{полн}} - \mathbf{v}_i, \quad (4.28)$$

где $\mathbf{V}_{0i}^{\text{полн}}$ — вектор полной скорости воздуха относительно профиля без учета малых колебаний, \mathbf{v}_i — малая скорость профиля, вызванная его колебаниями.

Пренебрегая квадратами скорости профиля \mathbf{v}_i , получим выражения для длины вектора полной скорости при малых колебаниях профиля и изменения угла атаки, вызванного поступательным движением профиля.

Вычислим квадрат вектора полной скорости, пренебрегая квадратом скорости профиля:

$$|\mathbf{V}_i^{\text{полн}}|^2 = |\mathbf{V}_{0i}^{\text{полн}} - \mathbf{v}_i|^2 \approx |\mathbf{V}_{0i}^{\text{полн}}|^2 - 2\mathbf{V}_{0i}^{\text{полн}} \cdot \mathbf{v}_i \quad (4.29)$$

Тогда длина вектора полной скорости вычисляется в первом приближении:

$$|\mathbf{V}_{0i}^{\text{полн}} - \mathbf{v}_i| = \sqrt{1 - \frac{2|\mathbf{V}_{0i}^{\text{полн}}||\mathbf{v}_i|}{|\mathbf{V}_{0i}^{\text{полн}}|^2}} |\mathbf{V}_{0i}^{\text{полн}}| \approx |\mathbf{V}_{0i}^{\text{полн}}| - \frac{\mathbf{V}_{0i}^{\text{полн}} \cdot \mathbf{v}_i}{|\mathbf{V}_{0i}^{\text{полн}}|} \quad (4.30)$$

Изменение угла атаки, вызванное поступательным движением профиля, имеет вид:

$$\alpha'_{vi} = \arctg\left(\frac{V_{iy}^{\text{полн}}}{V_{ix}^{\text{полн}}}\right) - \arctg\left(\frac{V_{0iy}^{\text{полн}}}{V_{0ix}^{\text{полн}}}\right) \quad (4.31)$$

Рассмотрим первое слагаемое:

$$\arctg\left(\frac{V_{iy}^{\text{полн}}}{V_{ix}^{\text{полн}}}\right) = \arctg\left(\frac{V_{0ix}^{\text{полн}} - v_{yi}}{V_{0ix}^{\text{полн}} - v_{xi}}\right) = \arctg\left(\frac{V_{0iy}^{\text{полн}} - v_{yi}}{V_{0ix}^{\text{полн}}\left(1 - \frac{v_{xi}}{V_{0ix}^{\text{полн}}}\right)}\right)$$

Раскладывая в ряд Тейлора $\left(1 - \frac{v_{xi}}{V_{0ix}^{\text{полн}}}\right)^{-1}$, получим:

$$\begin{aligned} \arctg\left(\frac{V_{iy}^{\text{полн}}}{V_{ix}^{\text{полн}}}\right) &\approx \arctg\left(\frac{V_{0iy}^{\text{полн}} - v_{yi}}{V_{0ix}^{\text{полн}}}\left(1 + \frac{v_{xi}}{V_{0ix}^{\text{полн}}}\right)\right) \approx \\ &\approx \arctg\left(\frac{V_{0iy}^{\text{полн}}}{V_{0ix}^{\text{полн}}} - \frac{v_{yi}}{V_{0ix}^{\text{полн}}} + \frac{V_{0iy}^{\text{полн}}}{(V_{0ix}^{\text{полн}})^2} v_{xi}\right) = \\ &= \arctg\left(\frac{V_{0iy}^{\text{полн}}}{V_{0ix}^{\text{полн}}} + \frac{v_{xi}V_{0iy}^{\text{полн}} - v_{yi}V_{0ix}^{\text{полн}}}{(V_{0ix}^{\text{полн}})^2}\right) \end{aligned} \quad (4.32)$$

Наконец, используя разложения в ряд Тейлора арктангенса, выведем:

$$\arctg\left(\frac{V_{0iy}^{\text{полн}}}{V_{0ix}^{\text{полн}}}\right) \approx \arctg\left(\frac{V_{0iy}^{\text{полн}}}{V_{0ix}^{\text{полн}}}\right) + \frac{1}{1 + \left(\frac{V_{0iy}^{\text{полн}}}{V_{0ix}^{\text{полн}}}\right)^2} \frac{v_{xi}V_{0iy}^{\text{полн}} - v_{yi}V_{0ix}^{\text{полн}}}{(V_{0ix}^{\text{полн}})^2}$$

Тогда окончательно получаем следующее выражения для изменения угла атаки, обусловленного поступательным движением:

$$\alpha'_{vi} = \frac{v_{xi}V_{0iy}^{\text{полн}} - v_{yi}V_{0ix}^{\text{полн}}}{(V_{0ix}^{\text{полн}})^2} \quad (4.33)$$

Разложим в ряд Тейлора относительно $\alpha_{\text{пр } i}^0, \frac{|\vec{V}_{\text{полн } i}^0|}{a_{\text{зв}}}$. Отсюда в линейном приближении получим следующие выражения:

$$F_i^x \approx \left[C_{xi} \left(\alpha_{\text{пр } i}^0, \frac{|\mathbf{V}_{0i}^{\text{ПОЛН}}|}{a_{3B}} \right) + \frac{\partial C_{xi}}{\partial \alpha} (\alpha'_{\text{пр } i} + \alpha'_{vi}) + \frac{\partial C_{xi}}{\partial M} \left(\frac{|\mathbf{V}_{0i}^{\text{ПОЛН}} - \mathbf{v}_i|}{a_{3B}} - \frac{|\mathbf{V}_{0i}^{\text{ПОЛН}}|}{a_{3B}} \right) \right] \times \\ \times \frac{\rho b}{2} |\mathbf{V}_{0i}^{\text{ПОЛН}} - \mathbf{v}_i|^2 =$$

Подставим полученные ранее выражения для длины вектора скорости и изменения угла атаки:

$$F_i^x \approx \left[C_{xi} + \frac{\partial C_{xi}}{\partial \alpha} \left(\alpha'_{\text{пр } i} + \frac{v_{xi} V_{0i y}^{\text{ПОЛН}} - v_{yi} V_{0i x}^{\text{ПОЛН}}}{(V_{0i}^{\text{ПОЛН}})^2} \right) \right. \\ \left. + \frac{\partial C_{xi}}{\partial M} \left(\frac{|\vec{V}_{0i}^{\text{ПОЛН}}|}{a_{3B}} - \frac{\mathbf{V}_{0i}^{\text{ПОЛН}} \cdot \mathbf{v}_i}{|\mathbf{V}_{0i}^{\text{ПОЛН}}| a_{3B}} - \frac{|\mathbf{V}_{0i}^{\text{ПОЛН}}|}{a_{3B}} \right) \right] \times \\ \times \frac{F_{0i}^x}{C_{xi} |\mathbf{V}_{0i}^{\text{ПОЛН}}|^2} (|\mathbf{V}_{0i}^{\text{ПОЛН}}|^2 - 2\mathbf{V}_{0i}^{\text{ПОЛН}} \cdot \mathbf{v}_i)$$

Перемножим выражения в квадратных скобках на выражения, стоящее вне их:

$$F_i^x \approx F_{0i}^x + \frac{F_{0i}^x}{C_{xi}} \frac{\partial C_{xi}}{\partial \alpha} \left(\alpha'_{\text{пр } i} + \frac{v_{xi} V_{0i y}^{\text{ПОЛН}} - v_{yi} V_{0i x}^{\text{ПОЛН}}}{(V_{0i}^{\text{ПОЛН}})^2} \right) - \frac{F_{0i}^x}{C_{xi}} \frac{\partial C_{xi}}{\partial M} \frac{\mathbf{V}_{0i}^{\text{ПОЛН}} \cdot \mathbf{v}_i}{|\mathbf{V}_{0i}^{\text{ПОЛН}}| a_{3B}} - \\ - F_{0i}^x \frac{2\mathbf{V}_{0i}^{\text{ПОЛН}} \cdot \mathbf{v}_i}{|\mathbf{V}_{0i}^{\text{ПОЛН}}|^2} - \frac{F_{0i}^x}{C_{xi}} \frac{2\mathbf{V}_{0i}^{\text{ПОЛН}} \cdot \mathbf{v}_i}{|\mathbf{V}_{0i}^{\text{ПОЛН}}|^2} \frac{\partial C_{xi}}{\partial \alpha} \left(\alpha'_{\text{пр } i} + \frac{v_{xi} V_{0i y}^{\text{ПОЛН}} - v_{yi} V_{0i x}^{\text{ПОЛН}}}{(V_{0i}^{\text{ПОЛН}})^2} \right) + \\ + \frac{F_{0i}^x}{C_{xi}} \frac{2\mathbf{V}_{0i}^{\text{ПОЛН}} \cdot \mathbf{v}_i}{|\mathbf{V}_{0i}^{\text{ПОЛН}}|^2} \frac{\partial C_{xi}}{\partial M} \frac{\mathbf{V}_{0i}^{\text{ПОЛН}} \cdot \mathbf{v}_i}{|\mathbf{V}_{0i}^{\text{ПОЛН}}| a_{3B}}$$

Отбрасывая члены второго и более порядка, а также учитывая, что в системе, связанной с потоком $V_{0i y}^{\text{ПОЛН}} = 0$, получим в итоге следующее выражение для F_i^x :

$$F_i^x = F_{0i}^x + \frac{F_{0i}^x}{C_{xi}} \frac{\partial C_{xi}}{\partial \alpha} \left(\alpha'_{\text{пр } i} + \frac{-v_{yi}}{|\mathbf{V}_{0i}^{\text{ПОЛН}}|} \right) - \frac{F_{0i}^x}{C_{xi}} \frac{\partial C_{xi}}{\partial M} \frac{v_{xi}}{a_{3B}} - F_{0i}^x \frac{2v_{xi}}{|\mathbf{V}_{0i}^{\text{ПОЛН}}|} \quad (4.34)$$

Аналогично получаем выражения для компоненты F_i^y :

$$F_i^y \approx F_{0i}^y + \frac{F_{0i}^y}{C_{xi}} \frac{\partial C_{yi}}{\partial \alpha} \left(\alpha'_{\text{пр } i} + \frac{-v_{yi}}{|\mathbf{V}_{0i}^{\text{ПОЛН}}|} \right) - \frac{F_{0i}^y}{C_{xi}} \frac{\partial C_{yi}}{\partial M} \frac{v_{xi}}{a_{3B}} - F_{0i}^y \frac{2v_{xi}}{|\mathbf{V}_{0i}^{\text{ПОЛН}}|} \quad (4.35)$$

Тогда выражение для возмущений аэродинамических сил в системе, связанной с потоком, принимает вид:

$$\mathbf{F}'_i = \mathbf{F}_i - \mathbf{F}_{0i} = A_i \mathbf{v}_i + A_{\alpha i} \boldsymbol{\alpha}'_i, \quad (4.36)$$

где

$$A_i = \begin{pmatrix} a_{xi}^x & a_{yi}^x & 0 \\ a_{xi}^y & a_{yi}^y & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, A_{\alpha i} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & a_{\alpha i}^x \\ 0 & 0 & a_{\alpha i}^y \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad (4.37)$$

$$\mathbf{v}_i = \begin{pmatrix} v_{xi} \\ v_{yi} \\ v_{zi} \end{pmatrix}, \boldsymbol{\alpha}'_i = \begin{pmatrix} R_x \\ R_y \\ \alpha'_{\text{пр } i} \end{pmatrix}, \alpha'_{\text{пр } i} = \mp R_z$$

$$a_{xi}^y = -F_i^{0y}(t) \left(\frac{\partial C_{yi}}{\partial M_i} \cdot \frac{1}{C_{yi} a_{3B}} + \frac{2}{|\vec{V}_{0i}^{\text{ПОЛН}}|} \right),$$

$$a_{xi}^x = -F_i^{0y}(t) \left(\frac{\partial C_{yi}}{\partial M_i} \cdot \frac{1}{C_{yi} a_{3B}} + \frac{2}{|\vec{V}_{0i}^{\text{ПОЛН}}|} \right),$$

$$a_{yi}^x = -F_i^{0x}(t) \frac{\partial C_{xi}}{\partial \alpha_i} \cdot \frac{1}{C_{xi}} \cdot \frac{1}{|\vec{V}_{0i}^{\text{ПОЛН}}|}, a_{yi}^y = -F_i^{0y}(t) \frac{\partial C_{yi}}{\partial \alpha_i} \cdot \frac{1}{C_{yi}} \cdot \frac{1}{|\vec{V}_{0i}^{\text{ПОЛН}}|}$$

$$a_{\alpha i}^x = F_i^{0x}(t) \frac{\partial C_{xi}}{\partial \alpha_i} \cdot \frac{1}{C_{xi}}, a_{\alpha i}^y = F_i^{0y}(t) \frac{\partial C_{yi}}{\partial \alpha_i} \cdot \frac{1}{C_{yi}}$$

R_x, R_y, R_z – угловые перемещения вокруг осей x_3, y_3, z_3 соответственно.

Теперь перейдем в глобальную систему координат. Выражение для преобразования вектора скорости профиля, вызванного его колебаниями и вектора угловых перемещений, имеет вид:

$$\mathbf{v}_{0i} = C \mathbf{v}_i^{\text{glob}}, \boldsymbol{\alpha}'_i = C \boldsymbol{\alpha}'_i^{\text{glob}}, \quad (4.38)$$

$$\text{где } C = \begin{pmatrix} \pm \cos \alpha_{\text{flow}} & \sin \alpha_{\text{flow}} & 0 \\ \mp \sin \alpha_{\text{flow}} & \cos \alpha_{\text{flow}} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

а преобразования вектора возмущений сил осуществляется так:

$$\mathbf{F}'_i{}^{\text{glob}} = C^{-1} \mathbf{F}'_i \quad (4.39)$$

Таким образом, возмущения аэродинамических сил в глобальной системе координат выражаются через компоненты скорости и перемещения следующим образом:

$$\mathbf{F}'_i{}^{\text{glob}} = C^{-1} (A_i \mathbf{v}_i + A_{\alpha i} \boldsymbol{\alpha}'_i) = C^{-1} A_i C \mathbf{v}_i^{\text{glob}} + C^{-1} A_{\alpha i} C \boldsymbol{\alpha}'_i{}^{\text{glob}} = \quad (4.40)$$

$$= A_i^{glob} \mathbf{v}_i^{glob} + A_{\alpha i}^{glob} \boldsymbol{\alpha}_i^{glob},$$

где $A_i^{glob} = \begin{pmatrix} A_{xi}^x & A_{yi}^x & 0 \\ A_{xi}^y & A_{yi}^y & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = C^{-1} A_i C$, $A_{\alpha i}^{glob} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & A_{\alpha i}^x \\ 0 & 0 & A_{\alpha i}^y \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = C^{-1} A_{\alpha i} C$

Возмущения моментов сил вычисляется следующим образом:

$$\mathbf{M}_i^{\prime glob} = (X_{цд} - X_0) \cdot \mathbf{X}_{пр i} \times \mathbf{F}_i^{\prime glob} \quad (4.41)$$

Учитывая это, имеем следующие выражения для вычисления возмущений моментов:

$$\mathbf{M}_i^{\prime glob} = G_i^{glob} \mathbf{v}_i^{glob} + G_{\alpha i}^{glob} \boldsymbol{\alpha}_i^{glob} \quad (4.42)$$

Вычисленные коэффициенты осредняются по периоду вращения лопасти:

$$\overline{A_i^{glob}} = \frac{1}{T} \int_0^T A_i^{glob}(t) dt, \overline{A_{\alpha i}^{glob}} = \frac{1}{T} \int_0^T A_{\alpha i}^{glob}(t) dt \quad (4.43)$$

$$\overline{G_i^{glob}} = \frac{1}{T} \int_0^T G_i^{glob}(t) dt, \overline{G_{\alpha i}^{glob}} = \frac{1}{T} \int_0^T G_{\alpha i}^{glob}(t) dt$$

Тогда для i -го сечения лопасти (то есть для i -го узла конечно-элементной модели, расположенном на оси лопасти) вычисляется следующим образом:

$$A_{\text{аэро } i}^{glob} = \overline{A_i^{glob}} l_i, A_{\text{аэро } \alpha i}^{glob} = \overline{A_{\alpha i}^{glob}} l_i \quad (4.44)$$

$$G_{\text{аэро } i}^{glob} = \overline{G_i^{glob}} l_i, G_{\text{аэро } \alpha i}^{glob} = \overline{G_{\alpha i}^{glob}} l_i$$

Коэффициенты являются элементами аэродинамических матриц жесткости ($A_{\text{аэро } \alpha i}^{glob}, G_{\text{аэро } \alpha i}^{glob}$) и демпфирования ($A_{\text{аэро } i}^{glob}, G_{\text{аэро } i}^{glob}$), которые используются для расчета флаттера.

Теперь перейдем к вычислению сил Кориолиса.

Сила и момент Кориолиса

Выражения для скорости и вращение точки сечения при малых колебаниях имеют вид:

$$\mathbf{v}_0 = \begin{pmatrix} V_{0x} \\ V_{0y} \\ V_{0z} \end{pmatrix} e^{i\omega t} \quad (4.45)$$

$$\boldsymbol{\alpha} = \begin{pmatrix} A_x \\ A_y \\ A_z \end{pmatrix} e^{i\omega t} \quad (4.46)$$

Отсюда скорость вращения точки сечения при малых колебаниях определяется следующим образом:

$$\frac{d\boldsymbol{\alpha}}{dt} = \begin{pmatrix} i\omega A_x \\ i\omega A_y \\ i\omega A_z \end{pmatrix} e^{i\omega t} = \begin{pmatrix} \omega_{\alpha x} \\ \omega_{\alpha y} \\ \omega_{\alpha z} \end{pmatrix} e^{i\omega t} \quad (4.47)$$

Тогда относительная скорость точки сечения лопасти можно определить так:

$$\begin{aligned} \mathbf{v}_r &= \mathbf{v}_0 + \frac{d\boldsymbol{\alpha}}{dt} \times \mathbf{r} = \begin{pmatrix} V_{0x} \\ V_{0y} \\ V_{0z} \end{pmatrix} e^{i\omega t} + \begin{vmatrix} \mathbf{e}_x & \mathbf{e}_y & \mathbf{e}_z \\ \omega_{\alpha x} & \omega_{\alpha y} & \omega_{\alpha z} \\ x & y & 0 \end{vmatrix} = \\ &= \left(\begin{pmatrix} V_{0x} \\ V_{0y} \\ V_{0z} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -y\omega_{\alpha x} \\ x\omega_{\alpha z} \\ y\omega_{\alpha x} - x\omega_{\alpha y} \end{pmatrix} \right) e^{i\omega t}, \end{aligned} \quad (4.48)$$

где \mathbf{r} – радиус-вектор от узла КЭМ до данной точки.

Учитывая выражения для относительной скорости (4.48), получаем, что сила Кориолиса в точке сечения лопасти вычисляется следующим образом:

$$\begin{aligned} \mathbf{F}_{\text{кор}} &= -2\rho_T \tilde{\omega} \times \mathbf{v}_r = -2m\delta \begin{vmatrix} \mathbf{e}_x & \mathbf{e}_y & \mathbf{e}_z \\ 0 & \tilde{\omega} & 0 \\ v_x & v_y & v_z \end{vmatrix} = \\ &= -2m\delta \tilde{\omega} v_z \mathbf{e}_x + 2m\delta \tilde{\omega} v_x \mathbf{e}_z = \\ &= \left(-2m\delta \tilde{\omega} (V_{0z} + y\omega_{\alpha x} - x\omega_{\alpha y}) \mathbf{e}_x + 2m\delta \tilde{\omega} (V_{0x} - y\omega_{\alpha z}) \mathbf{e}_z \right) e^{i\omega t} = \\ &= f_x \mathbf{e}_x + f_z \mathbf{e}_z, \end{aligned} \quad (4.49)$$

где $\tilde{\omega}$ – угловая скорость вращения лопасти вокруг вала, $\delta = \delta(x - x^*, y - y^*)$ – дельта-функция (поскольку масса профиля сосредоточена в точке – центре масс сечения).

Следовательно, выражение для определения суммарной силы Кориолиса имеет вид:

$$\mathbf{F}_{\text{кор сумм}} = \int_S \mathbf{F}_{\text{кор}} ds = \quad (4.50)$$

$$\begin{aligned}
&= \left((-2m\tilde{\omega}V_{0z} - 2m\tilde{\omega}y_0^*\omega_{\alpha_x} + 2m\tilde{\omega}x_0^*\omega_{\alpha_y}) \mathbf{e}_x \right. \\
&\quad \left. + (2m\tilde{\omega}V_{0x} - 2m\tilde{\omega}y_0^*\omega_{\alpha_z}) \mathbf{e}_z \right) e^{i\omega t} \\
&= F_{\text{кор},x} \mathbf{e}_x + F_{\text{кор},z} \mathbf{e}_z,
\end{aligned}$$

где (x_0^*, y_0^*) – расстояние между узлом КЭМ и центром масс.

Тогда для определения момент силы Кориолиса в точке сечения лопасти имеем:

$$\mathbf{M}_{\text{кор}} = \mathbf{r} \times \mathbf{F}_{\text{кор}} = \begin{vmatrix} \mathbf{e}_x & \mathbf{e}_y & \mathbf{e}_z \\ x & y & 0 \\ f_x & 0 & f_z \end{vmatrix} = yf_z \mathbf{e}_x + (-xf_z) \mathbf{e}_y + (-yf_x) \mathbf{e}_z \quad (4.51)$$

В итоге, суммарный момент силы Кориолиса в сечении вычисляется следующим образом:

$$\begin{aligned}
\mathbf{M}_{\text{кор сумм}} &= \int_S \mathbf{M}_{\text{кор}} ds = \\
&= \left(y_0^* (2m\tilde{\omega}V_{0x} - 2m\tilde{\omega}y_0^*\omega_{\alpha_z}) \mathbf{e}_x + (-x_0^* (2m\tilde{\omega}V_{0x} - 2m\tilde{\omega}y_0^*\omega_{\alpha_z})) \mathbf{e}_y \right. \\
&\quad \left. + (-y_0^* (-2m\tilde{\omega}V_{0z} - 2m\tilde{\omega}y_0^*\omega_{\alpha_x} + 2m\tilde{\omega}x_0^*\omega_{\alpha_y})) \mathbf{e}_z \right) e^{i\omega t} \quad (4.52)
\end{aligned}$$

4.3.4 Несущая система вертолета

Для создания общей аэроупругой модели несущей системы предварительно проводятся расчеты для учета конструкционного демпфирования в дальнейших расчетах. Причем расчеты проводятся для получения матриц конструкционного демпфирования для трех лопастей нижнего и верхнего винта.

Формирование матрицы конструкционного демпфирования

При анализе линейных систем прямыми (немодалными) методами определенную практическую трудность вызывает задание матрицы конструкционного демпфирования $[B]$ в системе уравнений

$$[M]\ddot{\mathbf{u}} + [B]\dot{\mathbf{u}} + [K]\mathbf{u} = \mathbf{F}(t) \quad (4.53)$$

поскольку коэффициенты демпфирования определяются экспериментально для каждой формы колебаний с частотой ω и собственным вектором $\boldsymbol{\varphi}$.

В модальных координатах q эта система будет иметь вид:

$$\ddot{\mathbf{q}} + 2g\dot{\mathbf{q}} + \omega^2 \mathbf{q} = [\varphi]^T \mathbf{F}(t), \quad (4.54)$$

где g — коэффициент демпфирования по выбранной моде, ω и φ — собственные частоты и собственные векторы системы без демпфирования:

$$[M]\ddot{\mathbf{u}} + [K]\mathbf{u} = 0 \quad (4.55)$$

причем $[\varphi]^T [M][\varphi] = I$ — нормировка по матрице масс.

Если коэффициенты демпфирования определены, то матрицу демпфирования можно задать следующим образом:

$$[B] = [M][\varphi] \begin{bmatrix} \ddots & 0 & 0 \\ 0 & 2g_i & 0 \\ 0 & 0 & \ddots \end{bmatrix} [\varphi]^T [M], \quad (4.56)$$

где $[\varphi]$ — матрица, состоящая из столбцов — собственных векторов, $[\varphi]^T$ — матрица, состоящая из строк — собственных векторов, g_i — демпфирование по i -ой моде.

При задании матрицы демпфирования для предварительно нагруженной (раскрученной) лопасти предполагалось, что доля от критического демпфирования по определенной форме колебания не меняется с увеличением собственной частоты. Таким образом, коэффициенты диагональной матрицы определяются как:

$$2g_i = 2\omega_i \gamma_i, \quad (4.57)$$

где ω_i — круговая собственная частота нагруженной системы по соответствующей форме колебания, γ_i — доля от критического демпфирования по этой форме для ненагруженной конструкции (определённая экспериментально).

Конструкция лопасти верхнего и нижнего винта симметрична относительно плоскости YZ системы координат, связанной с лопастью (Рис. 4.10).

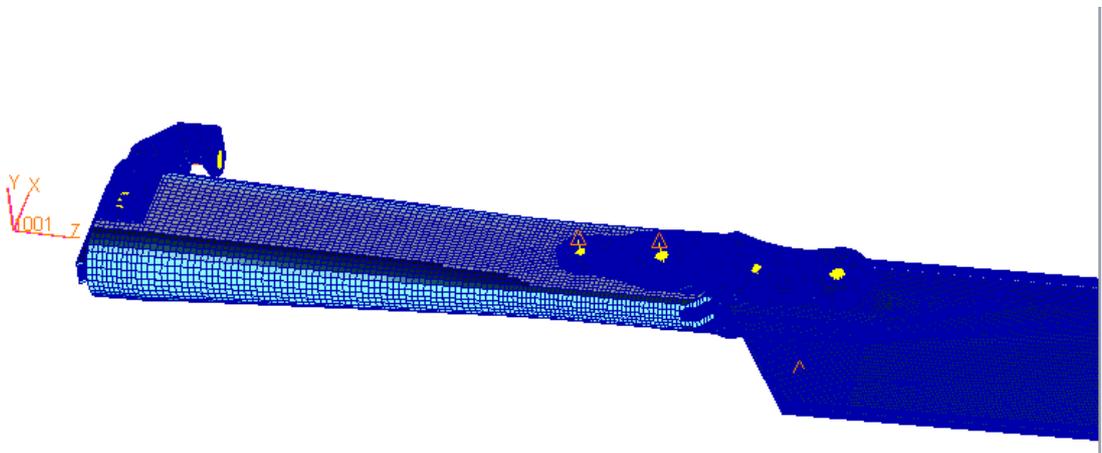


Рис. 4.10. Система координат, связанная с лопастью

Поэтому модель лопасти верхнего винта создавалась на основе модели лопасти нижнего винта. Матрица отражения относительно плоскости YZ для перемещений и сил в одном узле:

$$M_{YZ}^G = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \quad (4.58)$$

Система уравнений статического равновесия для исходной и отраженной систем:

$$\begin{aligned} Ku &= P \\ K_{YZ}u_{YZ} &= P_{YZ} \\ u_{YZ} &= M_{YZ}^G u \\ P_{YZ} &= M_{YZ}^G P \\ M_{YZ}^{G^{-1}} K_{YZ} M_{YZ}^G u &= P \\ M_{YZ}^{G^{-1}} K_{YZ} M_{YZ}^G u &= K \end{aligned} \quad (4.59)$$

Создание общей расчетной модели

Далее на основе расчетной модели одной лопасти нижнего винта (Рис. 4.11) создаются модели трех лопастей нижнего винта и трех лопастей верхнего винта. После чего создается общая модель несущей системы (Рис. 4.12). Узлы каждой лопасти задаются в собственной системе координат, которая используется для последующего анализа. Создается упругая связь лопастей через систему валов и тяг.

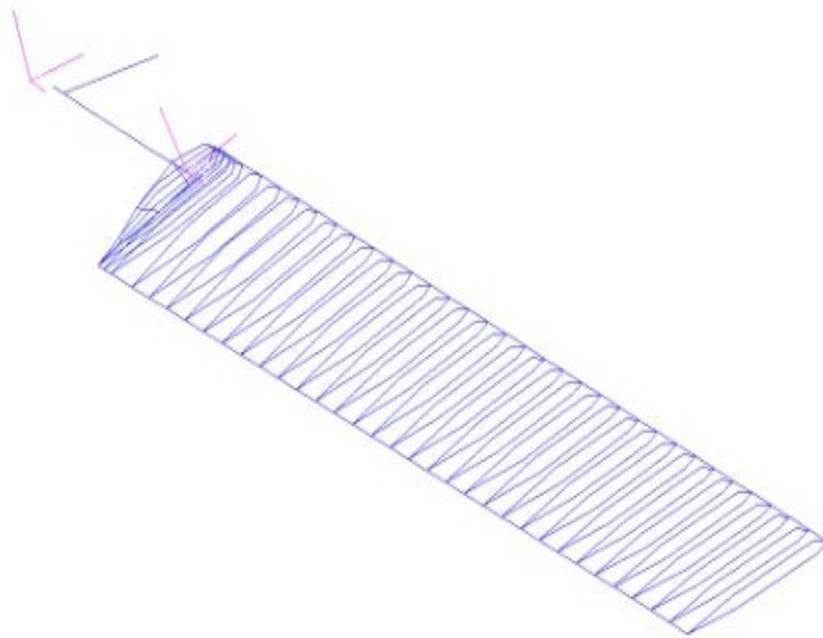


Рис. 4.11. Суперэлементная модель одной лопасти

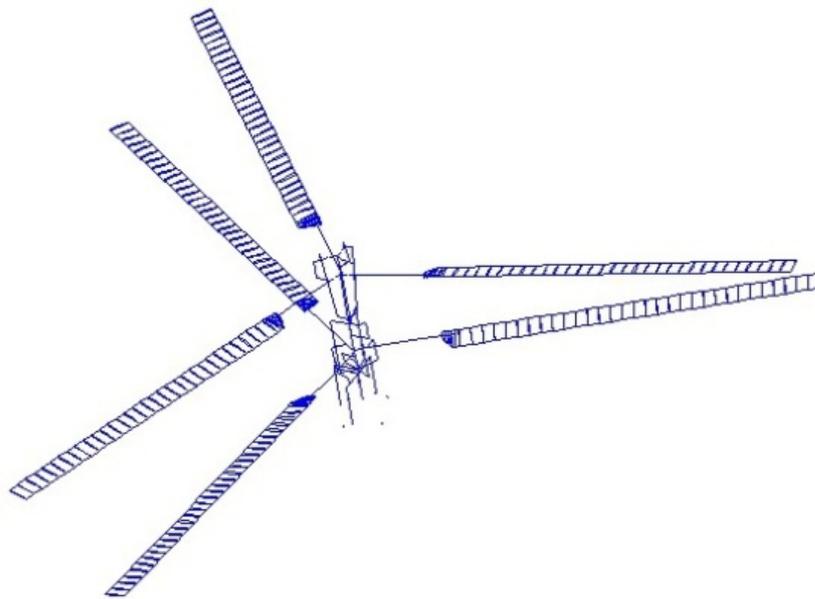


Рис. 4.12. Общая динамическая модель несущей системы

4.3.5 Численный расчет флаттера без учета маховых колебаний

Определение границ флаттера проводится для статического состояния лопасти, полученного на первом шаге аэроупругого анализа, и установившегося течения воздуха, параметры которого соответствуют средним значениям параметров реального периодически колеблющегося потока. Система уравнений с учетом выше сказанного имеет вид:

$$[M]\ddot{\mathbf{x}} + [B - B_a - B_c]\dot{\mathbf{x}} + [K - K_a]\mathbf{x} = 0, \quad (4.60)$$

где B_a, K_a – аэродинамические матрицы демпфирования и жесткости, B_c – Кориолисова матрица демпфирования. Ненулевыми элементами этих матриц являются соответствующие коэффициенты в выражениях для линеаризованных сил. B – матрица конструкционного демпфирования.

Вектор перемещения представим в виде:

$$\mathbf{u}(t) = \boldsymbol{\phi} e^{pt}, \quad (4.61)$$

где $p = \alpha + i\omega$ – комплексное собственное значение, $\boldsymbol{\phi}$ – собственный вектор.

Тогда матричное уравнения для расчета комплексных собственных значений имеет вид:

$$[p^2 M + p\tilde{B} + \tilde{K}]\boldsymbol{\phi} = 0, \quad (4.62)$$

где $\tilde{B} = B - B_a - B_c$, $\tilde{K} = K - K_a$.

Для полученной таким образом связанной линейной аэроупругой системы проводится расчет комплексных собственных значений, вещественная часть которых отвечает за рост ($\alpha > 0$) или затухание ($\alpha < 0$) каждого колебания.

Критерием флаттера является наличие хотя бы одного растущего со временем собственного движения лопасти.

4.3.6 Маховые колебания

Считается, что под действием периодической аэродинамической нагрузки лопасть совершает малые колебания вокруг статического положения равновесия. При этом предполагается, что доминирующий вклад в процесс колебаний даёт гармоника частоты вращения винта.

Кроме переменной аэродинамической нагрузки, рассчитанной без учёта колебаний, в линейном приближении учитывается изменение аэродинамических нагрузок, вызванное движением профиля в процессе колебаний. Кроме того, в расчете учитывается конструкционное демпфирование винта. Расчет маховых колебаний проводится в частотной области.

Система уравнений с учетом выше сказанного имеет вид:

$$[M]\ddot{\mathbf{u}} + [B - B_a - B_c]\dot{\mathbf{u}} + [K - K_a]\mathbf{u} = \mathbf{P}(t) \quad (4.63)$$

Векторы перемещения и нагрузок представим в виде:

$$\mathbf{u}(t) = \hat{\mathbf{u}}(\omega)e^{i\omega t}, \mathbf{P}(t) = \hat{\mathbf{P}}(\omega)e^{i\omega t} \quad (4.64)$$

$$\hat{\mathbf{u}}(\omega) = Re(\hat{\mathbf{u}}(\omega)) + i \cdot Im(\hat{\mathbf{u}}(\omega)), \hat{\mathbf{P}}(\omega) = Re(\hat{\mathbf{P}}(\omega)) + i \cdot Im(\hat{\mathbf{P}}(\omega))$$

Тогда матричное уравнения для численного расчета маховых колебаний (расчет частотного отклика) имеет вид:

$$[-\omega^2 M + i\omega B + K]\hat{\mathbf{u}} = \mathbf{P}(\omega) \quad (4.65)$$

Так как предполагается, что основной вклад в периодическую нагрузку \mathbf{P}_Π дают первые гармоники $\mathbf{P}_{\cos}, \mathbf{P}_{\sin}$:

$$\mathbf{P}_\Pi = \mathbf{P}_{\cos} \cos(\omega t) + \mathbf{P}_{\sin} \sin(\omega t)$$

$$\mathbf{P}_{\cos} = \frac{2}{T} \int_0^T \mathbf{P}^{glob}(t) \cos(\omega t) dt, \mathbf{P}_{\sin} = \frac{2}{T} \int_0^T \mathbf{P}^{glob}(t) \sin(\omega t) dt, \quad (4.66)$$

где \mathbf{P}^{glob} – аэродинамические нагрузки (силы и моменты) в глобальной системе координат, то

$$Re(\hat{\mathbf{P}}(\omega)) = \mathbf{P}_{\cos}, Im(\hat{\mathbf{P}}(\omega)) = -\mathbf{P}_{\sin} \quad (4.67)$$

4.3.7 Численный расчет флаттера лопасти, совершающей маховые колебания

На режимах горизонтального полета лопасти совершают маховые колебания. Следовательно, на устойчивость исследуется невозмущённое состояние, периодически зависящее от времени. Поэтому численный расчет флаттера проводится с помощью теории Флоке [136].

Уравнение движения

Рассмотрим уравнение:

$$L\mathbf{u} = \mathbf{P}, \quad (4.68)$$

где L – дифференциальный оператор, \mathbf{u} – вектор перемещений и поворотов, \mathbf{P} – вектор внешних сил и моментов (аэродинамические силы, кориолисова сила и порождаемые ими моменты).

Будем всегда считать, что L – линейный оператор. Причем это линейный оператор относительно среднего статического положения. Перемещение \mathbf{u} также отсчитывается от этого среднего состояния.

$$\mathbf{u} = \mathbf{u}_M + \mathbf{u}', \quad (4.69)$$

где $\mathbf{u}_M = \mathbf{u}_M(t)$ – маховые колебания, $\mathbf{u}' = \mathbf{u}'(t)$ – малое возмущение, которое либо затухает (устойчивость), либо растет (флаттер).

Получим уравнение для $\mathbf{u}'(t)$.

$$\mathbf{P} = \mathbf{P}(\mathbf{u}) = \mathbf{P}_a(\mathbf{u}) + \mathbf{P}_k(\mathbf{u}) \quad (4.70)$$

Линеаризуем внешнюю силу относительно маховых колебаний. Учитывая, что кориолисова сила и порождаемый ею момент всегда линейны, имеем:

$$\mathbf{P}(\mathbf{u}) = \mathbf{P}(\mathbf{u}_M + \mathbf{u}') = \mathbf{P}_a(\mathbf{u}_M) + \frac{\partial \mathbf{P}_a}{\partial \mathbf{u}} \mathbf{u}' + \mathbf{P}_k(\mathbf{u}_M) + \mathbf{P}_k(\mathbf{u}') \quad (4.71)$$

$$L\mathbf{u}_M + L\mathbf{u}' = \mathbf{P}_a(\mathbf{u}_M) + \frac{\partial \mathbf{P}_a}{\partial \mathbf{u}} \mathbf{u}' + \mathbf{P}_k(\mathbf{u}_M) + \mathbf{P}_k(\mathbf{u}') \quad (4.72)$$

Так как

$$L\mathbf{u}_M = \mathbf{P}_a(\mathbf{u}_M) + \mathbf{P}_k(\mathbf{u}_M) \quad (4.73)$$

то получим следующее уравнение:

$$L\mathbf{u}' = \frac{\partial \mathbf{P}_a}{\partial \mathbf{u}} \mathbf{u}' + \mathbf{P}_k(\mathbf{u}'), \quad (4.74)$$

где $\frac{\partial \mathbf{P}_a}{\partial \mathbf{u}}$ – матрицы аэродинамической жесткости и демпфирования:

$$\widetilde{A}_i^{glob}(t) \cdot l_i = \left[\widetilde{A}_{i,cp}^{glob} + \widetilde{A}_{i,cos}^{glob} \cos(\omega t) + \widetilde{A}_{i,sin}^{glob} \sin(\omega t) \right] \cdot l_i \quad (4.75)$$

$$\widetilde{A}_{\alpha i}^{glob}(t) \cdot l_i = \left[\widetilde{A}_{\alpha i,cp}^{glob} + \widetilde{A}_{\alpha i,cos}^{glob} \cos(\omega t) + \widetilde{A}_{\alpha i,sin}^{glob} \sin(\omega t) \right] \cdot l_i \quad (4.76)$$

$$\widetilde{G}_i^{glob}(t) \cdot l_i = \left[\widetilde{G}_{i,cp}^{glob} + \widetilde{G}_{i,cos}^{glob} \cos(\omega t) + \widetilde{G}_{i,sin}^{glob} \sin(\omega t) \right] \cdot l_i \quad (4.77)$$

$$\widetilde{G}_{\alpha i}^{glob}(t) \cdot l_i = \left[\widetilde{G}_{\alpha i,cp}^{glob} + \widetilde{G}_{\alpha i,cos}^{glob} \cos(\omega t) + \widetilde{G}_{\alpha i,sin}^{glob} \sin(\omega t) \right] \cdot l_i \quad (4.78)$$

Матрицы $\overline{A}_i^{glob}(t), \overline{A}_{\alpha i}^{glob}(t), \overline{G}_i^{glob}(t), \overline{G}_{\alpha i}^{glob}(t)$ и $\overline{A}_{i,cp}^{glob}, \overline{A}_{\alpha i,cp}^{glob}, \overline{G}_{i,cp}^{glob}, \overline{G}_{\alpha i,cp}^{glob}$ (осредненные коэффициенты) вычисляются согласно выражениям

с учетом вычисления компонент вектора скорости обтекания сечения и угла атаки на основе результатов расчета (амплитуд V_x, V_y, R_z и фаз $\phi_{Vx}, \phi_{Vy}, \phi_{Rz}$)

$$\begin{cases} V_{ix}^{полн}(t) = V_{0ix}^{полн}(t) - V_x \cos(\omega t + \phi_{Vx}) \\ V_{iy}^{полн}(t) = V_{0iy}^{полн}(t) - V_y \cos(\omega t + \phi_{Vy}) \end{cases}, \quad (4.79)$$

$$\alpha_i(t) = \alpha_{0i}(t) \mp R_z \cos(\omega t + \phi_{Rz}), \quad (4.80)$$

где $V_{0ix}^{полн}(t), V_{0iy}^{полн}(t), \alpha_{0i}(t)$ – параметры без учета маховых колебаний.

Матрицы $\overline{A}_{i,cos}^{glob}(t), \overline{A}_{\alpha i,cos}^{glob}(t), \overline{G}_{i,cos}^{glob}(t), \overline{G}_{\alpha i,cos}^{glob}(t)$ и $\overline{A}_{i,sin}^{glob}, \overline{A}_{\alpha i,sin}^{glob}, \overline{G}_{i,sin}^{glob}, \overline{G}_{\alpha i,sin}^{glob}$ вычисляются следующим образом:

$$\overline{A}_{i,cos}^{glob} = \frac{2}{T} \int_0^T \overline{A}_i^{glob}(t) \cos(\omega t) dt, \quad \overline{A}_{i,sin}^{glob} = \frac{2}{T} \int_0^T \overline{A}_i^{glob}(t) \sin(\omega t) dt \quad (4.81)$$

$$\overline{A}_{\alpha i,cos}^{glob} = \frac{2}{T} \int_0^T \overline{A}_{\alpha i}^{glob}(t) \cos(\omega t) dt, \quad \overline{A}_{\alpha i,sin}^{glob} = \frac{2}{T} \int_0^T \overline{A}_{\alpha i}^{glob}(t) \sin(\omega t) dt \quad (4.82)$$

$$\overline{G}_{i,cos}^{glob} = \frac{2}{T} \int_0^T \overline{G}_i^{glob}(t) \cos(\omega t) dt, \quad \overline{G}_{i,sin}^{glob} = \frac{2}{T} \int_0^T \overline{G}_i^{glob}(t) \sin(\omega t) dt \quad (4.83)$$

$$\overline{G}_{\alpha i,cos}^{glob} = \frac{2}{T} \int_0^T \overline{G}_{\alpha i}^{glob}(t) \cos(\omega t) dt, \quad \overline{G}_{\alpha i,sin}^{glob} = \frac{2}{T} \int_0^T \overline{G}_{\alpha i}^{glob}(t) \sin(\omega t) dt \quad (4.84)$$

После дискретизации получаем:

$$\begin{aligned} M\dot{\mathbf{u}} + [B - \tilde{B}_a - B_k]\dot{\mathbf{u}} + [K - \tilde{K}_a]\mathbf{u} = \\ = \tilde{B}_{a\cos}\dot{\mathbf{u}} \cos(\omega t) + \tilde{B}_{a\sin}\dot{\mathbf{u}} \sin(\omega t) + \\ + \tilde{K}_{a\cos}\mathbf{u} \cos(\omega t) + \tilde{K}_{a\sin}\mathbf{u} \sin(\omega t), \end{aligned} \quad (4.85)$$

где M, B, K – конструкционные матрицы масс, демпфирования и жесткости, \tilde{B}_a, \tilde{K}_a – аэродинамические матрицы демпфирования, B_k – матрицы демпфирования, порожденная силой Кориолиса, $B_{a\cos} \cos(\omega t), B_{a\sin} \sin(\omega t), K_a \cos(\omega t), K_a \sin(\omega t)$ – аэродинамические матрицы, задающие периодически меняющиеся коэффициенты системы уравнений.

Критерий флаттера

Для полученной системы матрица монодромии вычисляется в модальных координатах. Рассматриваются первые k мод колебаний лопасти. Система интегрируется по периоду вращения $2k$ раз с начальными условиями

$$\begin{Bmatrix} \dot{\mathbf{u}}(0) \\ \mathbf{u}(0) \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{\varphi}_k & 0 \\ 0 & \boldsymbol{\varphi}_k \end{bmatrix}, \quad (4.86)$$

где $\boldsymbol{\varphi}_k$ – собственные формы колебания лопасти.

Тогда матрица монодромии в модальных координатах имеет вид:

$$X(\omega) = \begin{bmatrix} [\boldsymbol{\varphi}_k]^T [M] [u(\omega)] \\ [\boldsymbol{\varphi}_k]^T [M] [u(\omega)] \end{bmatrix} \quad (4.87)$$

Если собственные значения λ (мультипликаторы Флоке) матрицы лежат в единичном круге $|\lambda| \leq 1$, то система устойчива, иначе – возникает флаттер.

4.4 Результаты

4.4.1 Статический расчет

Нелинейный статический расчет проведен для твердотельной (трехмерной) модели лопасти с учетом центробежных и аэродинамических нагрузок

Твердотельная модель (Рис. 4.13) состоит из одной лопасти нижнего винта, торсиона, кожуха, элементов крепления. Лопасть и остальные части моделируется в основном трехмерными гексаэдральными и двумерными четырехугольными элементами. Торсион и элементы крепления также содержат тетраэдральные и балочные элементы.

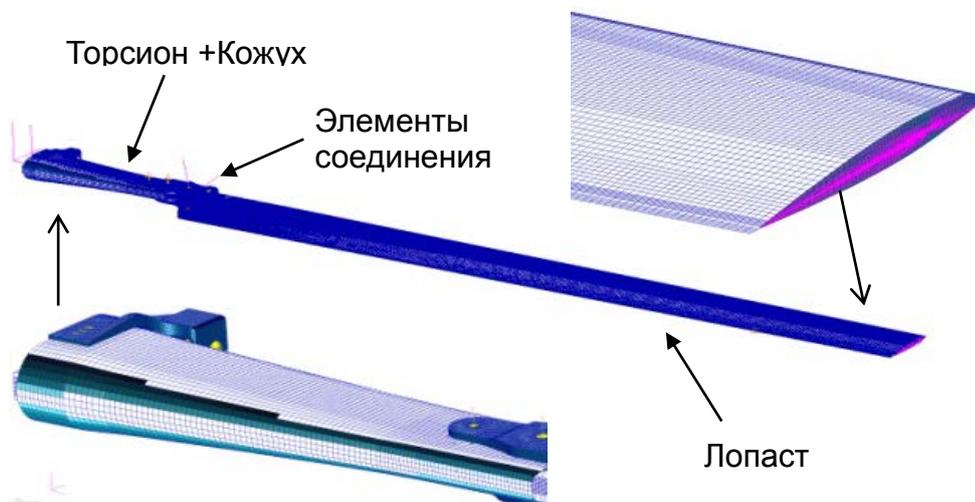


Рис. 4.13. Твердотельная модель лопасти

Общий размер расчетной твердотельной модели составляет ~590000 элементов.

Вдоль строительной оси лопасти расположены узлы, к которым прикладываются аэродинамические силы и моменты. Каждый из этих узлов прикреплен кинематической связью к поверхностным узлам в поперечных сечениях лопасти.

Численные расчеты статической аэроупругости проведены с целью получения деформированного состояния лопасти. Для режимов горизонтального полета проведен расчет конечно-элементной модели с параметрами для нижнего и верхнего винта.

На Рис. 4.14 представлено распределения угловых перемещений вокруг оси для всех расчетных случаев. На всех режимах получено, что упругие перемещения закручивают (увеличивают угол атаки) лопасть.

Рассчитанные состояния лопасти сохраняются в конструкционные матрицы масс и жесткости, которые используются в дальнейших расчетах.

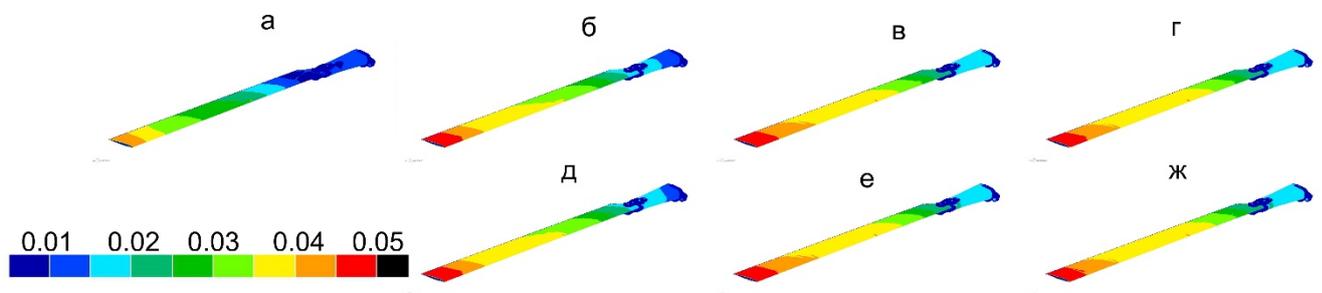


Рис. 4.14. Распределение угловых перемещений вокруг оси Z.

а) Режим 1 (висение);

параметры соответствуют нижнему винту: б) режим 2, в) режим 3, г) режим 4;

параметры соответствуют верхнему винту: д) режим 2, е) режим 3, ж) Режим 4.

4.4.2 Расчет собственных форм и частот

Расчеты собственных частот и форм проведены для суперэлементной модели одной лопасти нижнего винта и для общей модели несущей системы. при расчёте учитывается растяжение лопасти центробежной силой и действие силы Кориолиса.

На Рис. 4.15 показаны первые две формы колебания для модели одной лопасти (первая изгибная форма в плоскости вращения и первая изгибная форма в плоскости тяги).

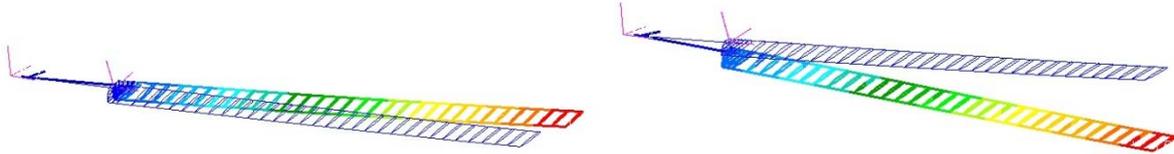


Рис. 4.15. Формы колебания отдельной лопасти.

- а) Первая изгибная форма в плоскости вращения, частота 4.46 Гц, б) Первая изгибная форма в плоскости тяги, частота 7.93 Гц.

Моделирование показывает, что каждая собственная частота одной лопасти “распыляется” на семейство из шести собственных частот несущей системы (Рис. 4.16, Рис. 4.17). Кроме того, происходит падение значений частот из-за податливости валов и тяг системы управления, на которых они закреплены. Формы колебания лопастей несущей системы несимметричны.

Таким образом, лопасти взаимодействуют между собой через упругие валы и приводы системы управления. Это взаимодействие приводит к изменению собственных форм и частот колебаний.

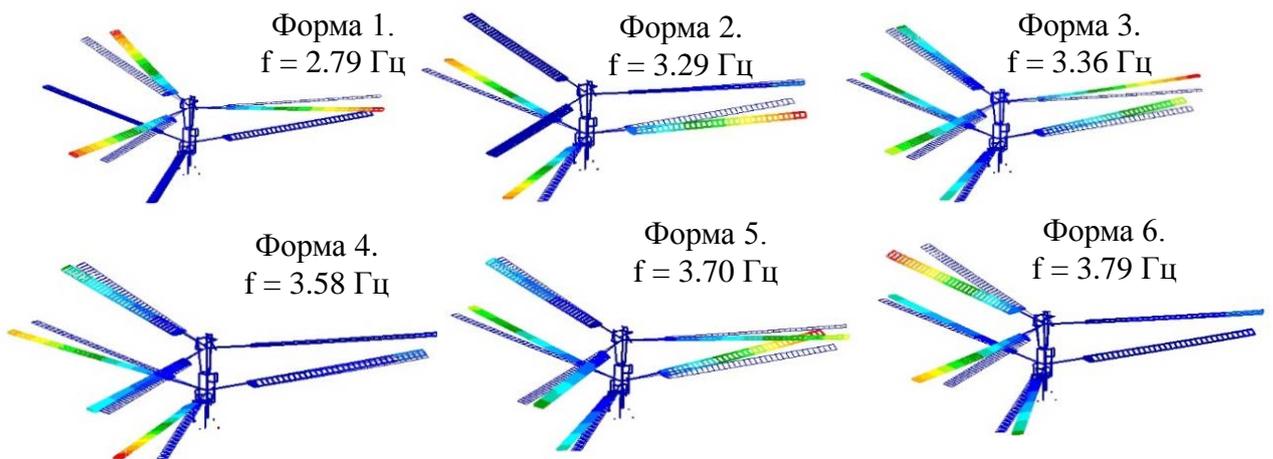


Рис. 4.16. Первые изгибные формы в плоскости вращения. Несущая система.

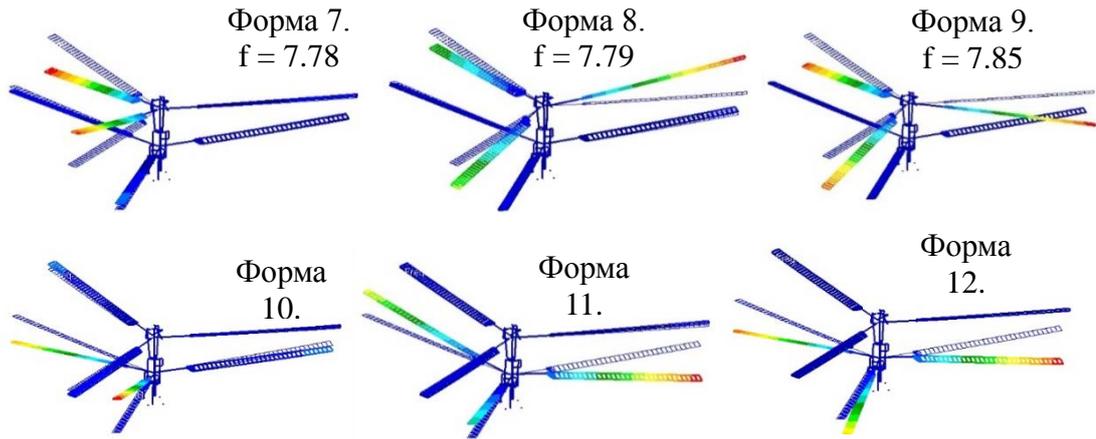


Рис. 4.17. Первые изгибные формы в плоскости тяги. Несущая система.

4.4.3 Флаттер

Исследование устойчивости лопастей несущей системы осуществлено для режима висения и трех режимов горизонтального полета с учетом напряженно-деформированного состояния, полученного в результате нелинейного статического расчета. Аэроупругий анализ проведен в квазистатической постановке с учетом сил, обусловленных колебанием лопасти. Эти силы учитываются с помощью матриц аэродинамической жесткости и аэродинамического демпфирования, а также кориолисовой матрицы демпфирования. Кроме того, учитывается конструкционное демпфирование.

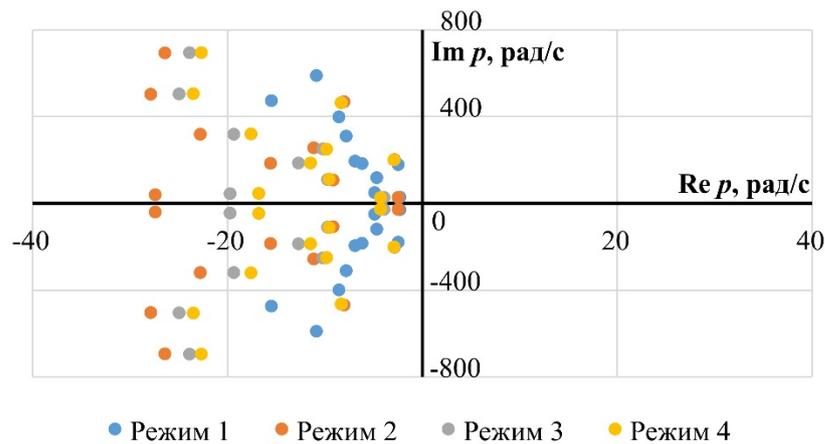


Рис. 4.18. Распределение собственных значений на комплексной плоскости p .

Отдельная лопасть

Результаты численного расчета флаттера по четырем режимам представлены на Рис. 4.18 и Рис. 4.19. Исследование устойчивости проведено как для отдельной

лопасти (Рис. 4.18), так и для несущей системы (Рис. 4.19). На Рис. 4.18 и Рис. 4.19 показана комплексная плоскость собственного значения p . По формам, соответствующим собственным значениям, которые находятся слева от мнимой оси (вещественная часть меньше нуля) наблюдается устойчивость, а по формам, для которых собственные значения лежат справа от мнимой оси (вещественная часть больше нуля), возникает флаттер.

На Рис. 4.18 видно, что для отдельной лопасти на режиме висения и режимах горизонтального полета по всем рассмотренным модам колебания наблюдается устойчивость.

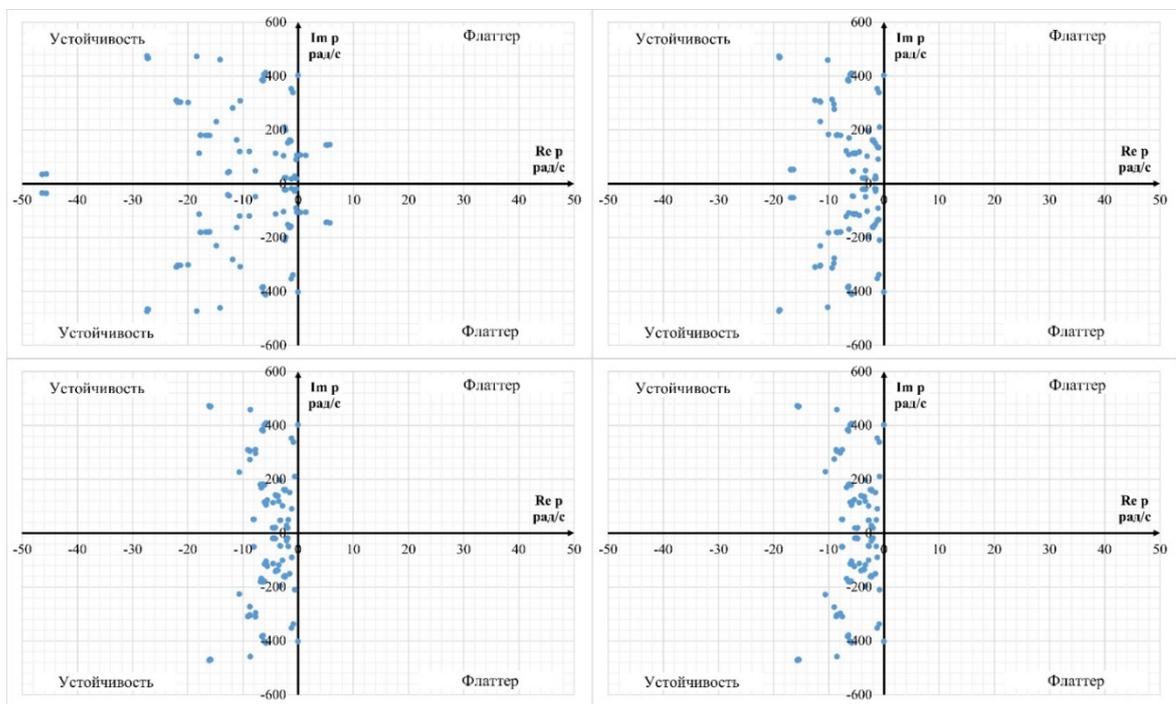


Рис. 4.19. Распределение собственных значений на комплексной плоскости p .

Несущая система. а) Режим 1, б) Режим 2, в) Режим 3, г) Режим 4

Численные расчеты лопастей в составе несущей системы на режиме висения показывает, что флаттер возникает на 3-й и 4-й формах (2-я и 3-я изгибная в плоскости тяги, Рис. 4.20). На остальных режимах по всем рассмотренным формам вещественные части комплексных собственных значений отрицательны, что свидетельствует об устойчивости по этим формам. При этом на режимах горизонтального полета по некоторым формам собственные частоты близки к границам устойчивости. Также стоит отметить, что результаты по последним двум режимам незначительно отличаются друг от друга.

Таким образом, упругое взаимодействие лопастей через систему тяг и валов оказывает влияние на границы флаттера.

Отметим, что коэффициенты демпфирования для форм, на которых наблюдается флаттер на режиме висения, существенно ниже, чем на более низких формах. Таким образом, флаттер по 2-й и 3-й изгибной форме может быть подавлен с помощью реальных характеристик демпфирования на этих формах, уточненных на основе экспериментальных данных, или повышением демпфирования по этим формам другим способом. Другим возможным способом отстройки от флаттера может быть изменение жесткостных и массовых характеристик лопасти путем установки противоплаттерных грузов.

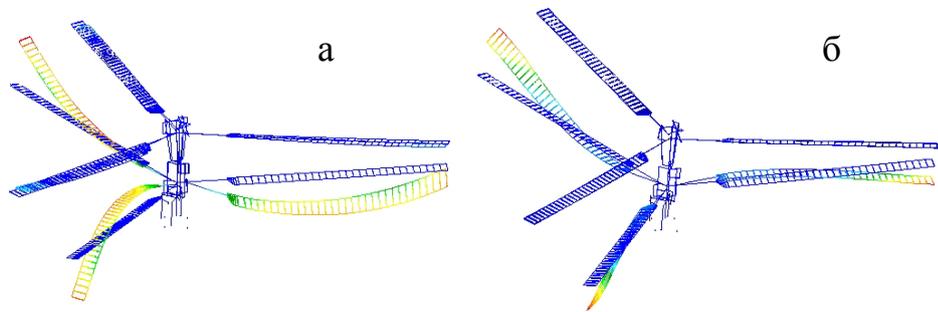


Рис. 4.20. Флаттерные формы колебания в потоке. а) Вторая и б) третья изгибная

На трех режимах горизонтального полета проведен расчет флаттера отдельной лопасти, совершающей маховые колебания, с помощью теории Флоке [136]. По всем рассмотренным режимам наблюдается устойчивость (Рис. 4.21), что соответствует расчетам без учета маховых колебаний.

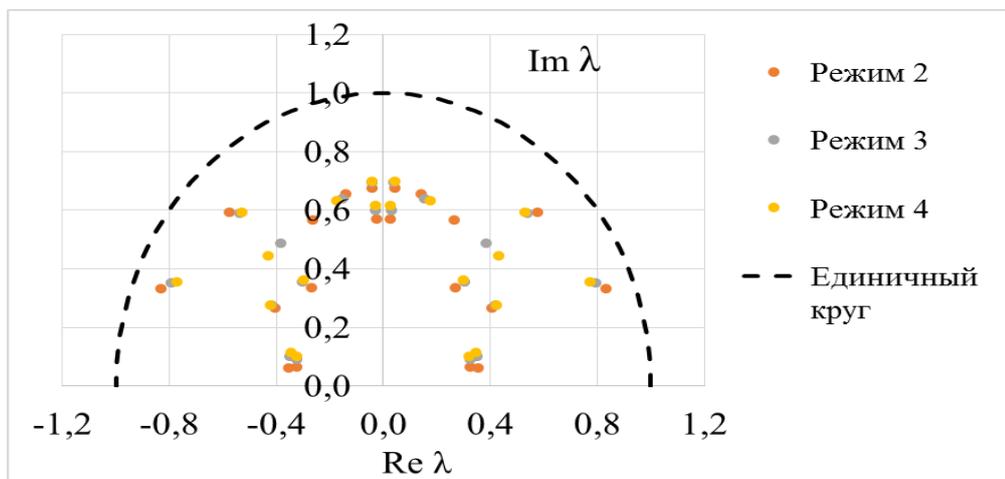


Рис. 4.21. Распределение значений мультипликаторов Флоке

4.5 Выводы

Разработана математическая модель и ее программная реализация для исследования флаттера несущей системы вертолета, позволяющая выявить возникновение хордового флаттера, флаттера по высшим модам и учесть взаимодействие лопастей через валы и систему тяг.

Проведён аэроупругий анализ несущей системы разрабатываемой модели вертолётa на режиме висения и на трёх полётных режимах.

Результаты исследования устойчивости для отдельной лопасти при учете маховых колебаний с использованием теории Флоке и по квазистационарной теории находятся в соответствии друг с другом для рассмотренных режимов.

Получено, что упругое взаимодействие лопастей через валы и систему тяг приводит к изменению форм и частот колебания лопастей. В свою очередь, изменение форм колебания может привести к изменению границ флаттера.

При заданных параметрах режимов обнаружена возможность возникновения флаттера по 3 и 4 формам колебаний лопастей (вторая и третья изгибная форма в плоскости тяги), с частотами 17 и 23 Гц, соответственно. Для исключения флаттера необходимо повышение конструкционного демпфирования лопастей по этим формам колебаний. Кроме того, отстройка от флаттера возможна с помощью установки противофлаттерных грузов для изменения массовых и жесткостных характеристик лопасти.

Заключение

В линейном приближении с помощью теории потенциального течения исследована устойчивость серии прямоугольных пластин при ненулевом угле скольжения. Определены границы флаттера при малых сверхзвуковых и трансзвуковых скоростях. Показано, что изменение угла скольжения приводит к нерегулярности границ флаттера и образованию дополнительных изолированных областей неустойчивости и устойчивости. Обоснована важность расчета панельного флаттера летательного аппарата при ненулевых углах скольжения, так как флаттер в таком случае может возникать при параметрах, на которых панель устойчива при нулевом угле.

Изучено влияние формы панели на границы флаттера при трансзвуковых и малых сверхзвуковых скоростях с использованием энергетического метода. Показано, что границы одномодового флаттера трапецевидных панелей незначительно меняются при изменении угла скоса. Получено, что придание панелям обшивок летательного аппарата формы параллелограмма может быть эффективным методом подавления одномодового флаттера.

Разработанная ранее методика расчета флаттера лопаток развита для учета изменения формы колебаний лопаток при движении бегущей волны по лопаточному венцу. Исследовано влияние конструктивных параметров на прогнозирование флаттера лопаток компрессора. Определено, что величина монтажного натяга существенно влияет на результат расчёта флаттера из-за изменения формы колебаний лопаток, в то время как величина радиального зазора, угол прикрытия/открытия входного направляющего аппарата и радиальная неравномерность потока незначительно влияют на границы флаттера.

Разработана математическая модель и ее программная реализация для расчета флаттера несущей системы вертолета в трехмерной постановке. Проведены расчеты на нескольких режимах. Методика позволила определить возникновение флаттера на высших формах колебания лопасти. Получено, что взаимодействие лопастей через упругие валы и систему тяг оказывает существенное влияние при аэроупругом анализе несущей системы вертолета.

Список литературы

1. *Пановко Я.Г., Губанова И.И.* Устойчивость и колебания упругих систем. Современные концепции, парадоксы и ошибки. М.: Наука. 1987. 352 с.
2. *Dowell E. H.* Aeroelasticity of Plates and Shells. Noordhoff International Publishing, Leyden. 1974. 160 p.
3. *Fleeter S.* Aeroelasticity Research for Turbomachine Applications // Journal of Aircraft. 1979. V. 16(5) P. 320 – 342.
4. *Миль М. Л., Некрасов А. В., Браверман А. С., Гродно Л.Н., Лейканд М.А.* Расчет и проектирование. Том 1. М.: Машиностроение. 1966. 456 с.
5. *Amabili M.* Nonlinear Vibrations and Stability of Shells and Plates. Cambridge University Press. New York, USA. 2008, 374 p.
6. *Алгазин С. Д., Кийко И. А.* Флаттер пластин и оболочек. М.: Наука. 2006. 247 с.
7. *Болотин В.В.* Неконсервативные задачи теории упругой устойчивости. М.: Физматгиз, 1961. 339 с.
8. *Григолюк Э.И., Лампер Р.Е., Шандаров Л.Г.* Флаттер панелей и оболочек // Итоги науки. Механика. 1965. С. 34 – 90.
9. *Новичков Ю.Н.* Флаттер пластин и оболочек// Итоги науки и техники. Серия «Механика деформируемого твёрдого тела». 1978. Т. 11. С. 67 – 122.
10. *Mei C., Abdel-Motagaly K., Chen R.R.* Review of nonlinear panel flutter at supersonic and hypersonic speeds // Applied Mechanics Reviews. 1999. V. 10. P. 321 – 332.
11. *Goland M. Luke Y. L.* An exact solution for two-dimensional linear panel flutter at supersonic speeds // J. Aeronaut. Sci. 1954. V. 21(4). P. 275 – 276.
12. *Nelson H.C., Cunningham H. J.* Theoretical investigation of flutter of two dimensional flat panels with one surface exposed to supersonic potential flow // NASA. 1956. Report № 1280. 24 p.
13. *Мовчан А.А.* О колебаниях пластинки, движущейся в газе // ПММ. 1956. Т. 20. Вып. 2. С. 211-222.
14. *Мовчан А.А.* Об устойчивости панели, движущейся в газе // ПММ. 1957. Т. 21. Вып. 2. С. 231— 243.

15. Дун Мин-Дэ. Об устойчивости упругой пластинки при сверхзвуковом обтекании // Докл. АН СССР. 1958. Т 120. № 4. С. 726-729.
16. Dowell E.H. Nonlinear oscillations of fluttering plate. II // AIAA Journal. 1967. V. 5(10). P. 1856 – 1862.
17. Dowell E.H. Generalized aerodynamic forces on a flexible plate undergoing transient motion in a shear flow with an application to panel flutter // AIAA Journal. 1971. V. 9(5). P. 834 – 841.
18. Yang T.Y. Flutter of flat finite element panels in supersonic potential flow // AIAA Journal. 1975. V. 13(11). P. 1502 – 1507. = Янг. Исследование флаттера панелей в сверхзвуковом потенциальном потоке методом конечных элементов // Ракетная техника и космонавтика. 1975. Т. 13. № 11. С. 110 – 117.
19. Bendiksen O.O., Seber G. Fluid–Structure Interactions with both Structural and Fluid Nonlinearities // Journal of Sound and Vibration. 2008. V. 315(3). P. 664 – 684.
20. Vedeneev V., Guvernyuk S., Zubkov A., Kolotnikov, M. Experimental Observation of Single Mode Panel Flutter in Supersonic Gas Flow // Journal of Fluids and Structures. 2010. V. 26(5). P. 764 – 779.
21. Alder M. Development and Validation of a Fluid–Structure Solver for Transonic Panel Flutter // AIAA Journal. 2015. V. 53(12). P. 3509 – 3521.
22. Shishaeva A., Vedeneev V., Aksenov, A. Nonlinear Single-Mode and Multi-Mode Panel Flutter Oscillations at Low Supersonic Speeds // Journal of Fluids and Structures. 2015. V. 56. P. 205 – 223.
23. Hejranfar K., Azampour M.H. Simulation of 2D fluid–structure interaction in inviscid compressible flows using a cell-vertex central difference finite volume method // Journal of Fluids and Structures. 2016. V. 67. P. 190 – 218.
24. Bondarev V., Vedeneev V. Influence of the Viscous Boundary Layer Perturbations on Single-Mode Panel Flutter at Finite Reynolds Numbers // Journal of Fluid Mechanics. 2018. V. 852. P. 578 – 601.

25. *Shishaeva A., Vedeneev V., Aksenov A., Sushko G.* Transonic Panel Flutter in Accelerating or Decelerating Flow Conditions // *AIAA Journal*. 2018. V. 56(6). P. 997 – 1010.
26. *An X., Qi B., Sun W., Deng B.* Numerical simulation of nonlinear aeroelastic behaviors of composite panels in transonic flow // *Journal of Sound and Vibration*. 2020. V. 469. 115143
27. *Zhou H., Wang G., Mian H. H., Qin M.* Fluid-structure coupled analysis of tandem 2D elastic panels // *Aerospace Science and Technology*. 2021. V. 111. 106521.
28. *Веденеев В. В.* Флаттер пластины, имеющей форму широкой полосы, в сверхзвуковом потоке газа// *Изв. РАН. МЖГ*. 2005. № 5. С. 155-169.
29. *Куликовский А.Г.* Об устойчивости однородных состояний // *ПММ*. 1966. Т. 30. Вып. 1. С. 148-153.
30. *Лифшиц Е.М., Питаевский Л.П.* Теоретическая физика. Т. 10. Физическая кинетика. М.: Наука. 1979. 528 с.
31. *В. В. Веденеев.* О высокочастотном флаттере пластины// *Изв. РАН. МЖГ*. 2006. № 2. С. 163-172.
32. *В. В. Веденеев.* Высокочастотный флаттер прямоугольной пластины// *Изв. РАН. МЖГ*. 2006. № 4. С. 173-181.
33. *В. В. Веденеев.* Численное исследование сверхзвукового флаттера пластины с использованием точной аэродинамической теории// *Изв. РАН. МЖГ*. 2009. № 2. С. 169-178.
34. *Vasily V. Vedeneev.* Panel flutter at low supersonic speeds // *Journal of fluids and structures*. 2012. V. 29. P. 79 – 96.
35. *Vasily V. Vedeneev.* Effect of damping on flutter of simply supported and clamped panels at low supersonic speeds // *Journal of fluids and structures*. 2013. V. 40. P. 366 – 372.
36. *Sergey Shitov, Vasily Vedeneev.* Flutter of rectangular simply supported plates at low supersonic speeds // *Journal of fluids and structures*. 2017. V. 69. P. 154 – 173.
37. *Майлс Дж. У.* Потенциальная теория неустановившихся сверхзвуковых течений. М.: Физматгиз, 1963. 272 с.

38. *Muhlstein, L., Jr., Gaspers, P.A., Jr., Riddle, D.W.* An experimental study of the influence of the turbulent boundary layer on panel flutter. NASA TN D-4486. 1968. 52 p.
39. Gaspers P.A., Jr., Muhlstein L., Jr., Petroff D.N. Further results on the influence of the turbulent boundary layer on panel flutter. NASA TN D-5798. 1970. 45 p.
40. *Веденеев В. В., Гувернюк С. В., Зубков А. Ф., Колотников М. Е.* Экспериментальное исследование одномодового панельного флаттера в сверхзвуковом потоке газа// Изв. РАН. МЖГ. 2010. № 2. С. 161-175.
41. *Miles J. W.* On panel flutter in the presence of a boundary layer // Journal of the aero/space sciences. 1959. V. 26(2) P. 81 — 93, 107. = Дж. Майлс. О флаттере панелей с учетом пограничного слоя // Механика. Сб. переводов. 1959. № 4, с. 97 — 122.
42. *Dowell, E. H.* Aerodynamic boundary layer effect on flutter and damping of plates// J. Aircraft. 1973. V. 10(12). P. 734 – 738.
43. *Hashimoto A., Aoyama T., Nakamura Y.* Effects of turbulent boundary layer on panel flutter // AIAA Journal. 2009. V. 47(12). P. 2785 — 2791.
44. *Vedeneev V. V.* Interaction of panel flutter with inviscid boundary layer instability in supersonic flow // J. Fluid Mech. 2013. V. 736. P. 216 — 249.
45. *Visbal M.* Viscous and inviscid interactions of an oblique shock with a flexible panel // J. of Fluids and Structures. 2014. V. 48. P. 27 — 45.
46. *Vsevolod Bondarev, Vasily Vedeneev.* Short-wave instability of an elastic plate in supersonic flow in the presence of the boundary layer // Journal of fluid mechanics. 2016. V. 802. P. 528 – 552.
47. *Bendiksen O.O., Davis G.A.* Nonlinear Traveling Wave Flutter of Panels in Transonic Flow // AIAA Paper. 1995. P. 95 – 1486.
48. *Gordnier R.E., Visbal M.R.* Development of a three-dimensional viscous aeroelastic solver for nonlinear panel flutter // Journal of Fluids and Structures. 2002. V. 6(4). P. 497 – 527.

49. *Anastasia Shishaeva, Vasily Vedeneev, Andrey Aksenov.* Nonlinear single-mode and multi-mode panel flutter oscillations at low supersonic speeds // *Journal of fluids and structures.* 2015. V. 56. P. 205 – 223.
50. *Anastasia Shishaeva, Vasily Vedeneev, Andrey Aksenov, Gennady Sushko.* Transonic Panel Flutter in Accelerating or Decelerating Flow Conditions // *AIAA Journal.* 2018. V. 56(6). P. 997 – 1010.
51. *Anastasia Shishaeva, Andrey Aksenov, Vasily Vedeneev.* The effect of external perturbations on nonlinear panel flutter at low supersonic speed// *Journal of fluid and structures.* 2022. V. 111. 103570.
52. *Abdel-Motaglay K., Chen R., Mei C.* Nonlinear Flutter of Composite Panels Under Yawed Supersonic Flow Using Finite Elements // *AIAA Journal.* 1999. V. 37(9). P. 1025 – 1032.
53. *Guo X., Mei C.* Using Aeroelastic Modes for Nonlinear Panel Flutter At Arbitrary Supersonic Yawed Angle // *AIAA Journal.* 2003. V. 41(2). P. 272 – 279.
54. *Abdel-Motagaly K., Guo X., Mei C.* Active Control of Nonlinear Panel Flutter under Yawed Supersonic Flow // *AIAA Journal.* 2005. V. 43(2). P. 671 – 680.
55. *Марченко Г. А.* Исследование колебаний несимметричных пластин в потоке газа // *Динамика и прочность машин. Респ. межвед. науч.-техн. сб.* 1967, вып. 6. С. 37—41.
56. *Durvasula S.* Flutter of simply supported parallelogrammic, flat panels in supersonic flow // *AIAA Journal.* 1967. V. 5(9). P. 1668 — 1673.
57. *Durvasula S.* Flutter of clamped skew panels with mid-plane forces in supersonic flow // *J. Indian Inst. Sci.* 1970. V. 52(4). P. 192 — 208 — *РЖМех.* 1971. 6B529.
58. *Durvasula S.* Flutter of clamped skew panels in supersonic flow // *J. Aircraft.* 1971. V. 8(6). P. 461 — 466.
59. *Kariappa, Somashekar B. R.* Application of matrix displacement methods in the study of panel flutter // *NAL Techn. Note.* 1968. V.7.
60. *Kariappa, Somashekar B. R.* Flutter of skew panels by the matrix displacement approach // *Aeronaut. Journal,* 1970, V. 716, P. 672 — 675.

61. *Kariappa, Somashekar B. R., Shah C. G.* Discrete element approach to flutter of skew panels with in-plane under yawed supersonic flow // *AIAA Journal*. 1970. V. 8(11). P. 2017 — 2022.
62. *Метсавээр Я. А.* О флаттере заземленных пластин // *Изв. АН СССР. Мех. тверд. тела*. 1969, № 4 С. 179—180.
63. *Выслоух В. А., Кандидов В. П., Чесноков С. С.* Применение МКЭ для исследования устойчивости треугольных пластин в сверхзвуковом потоке // *Уч. зап. Центр, аэрогидродинам. ин-та*. 1976, Т. 7. № 1. С. 160—164.
64. *Асаи С.* Изгиб, собственные колебания и сверхзвуковой панельный флаттер ортотропных эллиптических пластин. *Нихон коку утю гаккайси, j. Jap. Soc. Aeronaut, and Space Sci.*, 1977, 25, № 280, 248—256 (япон.).
65. *Reddy J. N.* Theory and analysis of elastic plates and shells, CRC Press, Taylor and Francis. 2007. 568 p.
66. *Седов Л.И.* Механика сплошной среды. Том 1. М.: Наука. 1970. 492 с.
67. *Седов Л.И.* Механика сплошной среды. Том 2. М.: Наука. 1970. 568 с.
68. *Стулов В. П.* Лекции по газовой динамике: Учебник. М.: ФИЗМАТЛИТ. 2004. 192 с.
69. *Вольмир А. С.* Гибкие пластинки и оболочки. М.: Государственное издательство технико-теоретической литературы. 1956. 419 с.
70. *Веденеев В. В.* Нелинейный высокочастотный флаттер пластины// *Изв. РАН. МЖГ*. 2007. № 5. С. 197-208.
71. *Веденеев В. В.* Предельные циклы колебаний при одномодовом флаттере пластины// *Прикладная математика и механика*. 2013. Т. 77. Вып. 3. С. 355-370.
72. *Веденеев В.В., Колотников М.Е., Макаров П.В., Фирсанов В.В.* Трехмерное моделирование флаттера лопаток компрессоров современных ГТД // *Вестник СГАУ*. 2011. №3(27). С.47-56.
73. *Vedeneev V.V., Kolotnikov M.E., Makarov P.V.* Experimental validation of numerical blade flutter prediction // *Journal of propulsion and power*. 2015. V. 31(5). P. 1281 – 1291.

74. *Патанкар С. В.* Численное решение задач теплопроводности и конвективного теплообмена при течении в каналах = Computation of conduction and Duct Flow Heat Transfer: Пер. с англ. — М.: Издательство МЭИ. 2003. 312 с.
75. *Биргера И.А., Пановко. Я. Г.* Прочность, устойчивость, колебания - Справочник в трех томах. Том 3. М.: Издательство "Машиностроение". 1968. 567 с.
76. *Галлагер Р.* Метод конечных элементов. Основы. Пер. с англ. М.: Мир. 1984. 428 с.
77. *X. Wang, S. Xu.* Free vibration analysis of beams and rectangular plates with free edges by the discrete singular convolution // *Journal of Sound and Vibration*. 2010. V. 329. Is. 10. P 1780 – 1792.
78. *Сухотерин М.В., Барышников С.О., Аксенов Д.А.* Собственные колебания тонких прямоугольных элементов судовых конструкций // *Вестник ГУМРФ*, 2016. №4. С. 105 – 113.
79. *Алексеева А.А., Белая Л.А., Лавит И.М.* Решение методом Ритца–Галеркина задачи о свободных колебаниях прямоугольной в плане полой оболочки // *Изв. ТулГУ. Технические науки*. 2023. Вып. 7. С. 6 – 10.
80. *Макаров П.В.* Прогнозирование и исследование условий возникновения флаттера рабочих колес компрессоров газотурбинных двигателей и установок на этапе их проектирования: дис. ... канд. технических наук: 01.02.06, 05.07.05. – Москва, 2012. – 160 с.
81. *Bartels, R. E., Sayma, A. I.* Computational Aeroelastic Modelling of Airframes and Turbomachinery: Progress and Challenges // *Philosophical Transactions of the Royal Society A: Mathematical, Physical and Engineering Sciences*. 2007. V. 365. P. 2469 – 2499.
82. *Shrinivasan A.V.* Flutter and Resonant Vibration Characteristics of Engine Blades // *Journal of Engineering for Gas Turbines and Power*. 1997. V. 119(3). P. 742 – 775

83. *Marshall J.G., Imregun M.* A Review of Aeroelasticity Methods with Emphasis on Turbomachinery Applications // *Journal of Fluids and Structures*. 1996. V. 10(3). P. 237 – 267.
84. *Bendiksen O.* Recent Developments in Flutter Suppression Techniques for Turbomachinery Rotors // *Journal of Propulsion and Power*. 1988. V. 4(2). P. 164 – 172.
85. *Doi H.* Fluid/Structure Coupled Aeroelastic Computations for Transonic Flows In Turbomachinery. Ph.D. Thesis – Stanford University, Department of Aeronautics and Astronautics. 2002. 167 p.
86. *Хориков А.А.* Прогнозирование и диагностика флаттера лопаток осевых компрессоров авиационных ГТД. М.: ЦИАМ, Труды №1311. 2002. 352 с.
87. *Halliwell D.G.* Fan Supersonic Flutter: Prediction and Test Analysis // Report and Memoranda № 3789. 1975.
88. *Jeffers J.D., Meece C.E.* F 100 fan stall flutter problem review and solution // *Journal of Aircraft*. 1971. V. 12(4). P. 350 – 357.
89. *Хориков А.А., Данилкин С.Ю.* Исследование флаттера рабочих лопаток вентилятора на режиме срывного обтекания. // *Вестник СГАУ – Самара*. 2011. –№ 3(27), Ч. 2. С. 57 - 63.
90. *Petrie-Repar P., McGhee A., Jacobs P., Gollan R.* Analytical Maps of Aerodynamic Damping as a Function of Operating Condition for a Compressor Profile // *Proceedings of ASME Turbo Expo*. 2006. Barselona, Spain.
91. *Bendiksen O., Freidmann P.* Coupled Bending-Torsion Flutter in Cascades // *AIAA Journal*. 1980. V. 18(2). P. 194 – 201.
92. *Хориков А.А.* О возможности возникновения «классического» флаттера рабочих лопаток турбомашин // *Проблемы прочности*. 1976. №3. С. 25-28.
93. *Хориков А.А.* О влиянии близости собственных частот колебаний лопатки по различным формам на устойчивость однородного компрессорного венца к флаттеру // *Проблемы прочности*. 1974. №8. С. 83-87.

94. *Fransson T.H.* Analysis of Experimental Time-Dependent Blade Surface Pressures from an Oscillating Turbine Cascade Using the Influence-Coefficient Technique // *Journal de Physique III*. 1992. V. 2(4). P. 575 – 594.
95. *Montgomery M., Tartibi M., Eulitz F., Shmitt S.* Application of Unsteady Aerodynamics and Aeroelasticity in Heavy-Duty Gas Turbines // *Proceedings of ASME Turbo Expo*. 2005. Reno-Tahoe, Nevada, USA.
96. *Локитанов Е.А., Михайлов В.М., Хориков А.А.* Статистическое прогнозирование флаттера лопаток турбомашин / *Аэроупругость турбомашин*. Киев:
97. *Bendiksen O. O. Friedmann P. P.* The effect of bending-torsion coupling on fan and compressor blade flutter // *J. Eng. Power*. 1982. V. 104(3). P. 617 – 623
98. *Srinivasan A. V., Fabunmi J. A.* Cascade flutter analysis of cantilevered blades // *ASME journal of engineering for gas turbines and power*. 1984. V. 106. P. 34 – 43.
99. *Kielb R.E., Kaza K. R. V.* Flutter of swept fan blades // *ASME journal of turbomachinery*. 1985. V. 107. P. 395 – 398.
100. *Bendiksen O. O.* Role of shocks in transonic / supersonic compressor rotor flutter // *AIAA journal*. 1986. V. 24. P. 1179 – 1186.
101. *Kielb R.E., Ramsey J. K.* Flutter of a fan blade in supersonic axial flow // *ASME journal of turbomachinery*. 1989. V. 111. P. 462 – 467.
102. *Temis J. M., Fedorov I. M.* Simulation of Turbomachine Blade Bending-Torsion Flutter Using a Pretwisted Beam Finite Element // *EUROMECH Nonlinear Dynamics: Proc. of the 6th International Conference*. Saint Petersburg, 2008. P. 235 – 240.
103. *Bakhle M. A., Reddy T. S. R., Keith T. G.* Time domain flutter analysis of cascades using a full-potential solver // *AIAA Journal*. 1992. V. 30(1). P. 163.
104. *Gnesin V., Rzadkowski R.* A coupled fluid–structure analysis for 3-D inviscid flutter of IV standard configuration // *Journal of Sound and Vibration*. 2002. V. 251(2). P. 315 – 327.
105. *Carta F. O.* Coupled blade-disc-shroud flutter instabilities in turbojet engine rotors // *ASME Journal of Engineering for Power*. 1967. V. 89. P. 419 – 426.

106. *Mikolajczak A. A., Arnoldi R. A., Snyder L. E. Stargardter H.* Advances in fan and compressor blade flutter analysis and predictions // *AIAA Journal of Aircraft*. 1975. V. 12. P. 325 – 332.
107. *Буюкли Т.В., Шорстов В.А.* К вопросу о постановке задачи расчета колебаний решеток компрессоров для определения аэроупругих характеристик [Электронный ресурс] // *Труды МАИ*. 2010. №39. URL: <http://www.mai.ru/science/trudy/>
108. *McBean I., Hourigan K., Thompson M., Liu F.* Prediction of Flutter of Turbine Blades in a Transonic Annular Cascade // *Journal of Fluids Engineering*. 2005. V. 127(4). P. 1053 – 1058.
109. *Reddy T.S.R., Bakhle M.A., Trudell J.J., Mehmed O., Stefko G.L.* LINFLUX-AE: A Turbomachinery Aeroelastic Code Based on a 3-D Linearized Euler Solver // *National Aeronautics and Space Administration, Washington, DC*. 2002.
110. *Reddy T.S.R., Srivastava R., Mehmed O., Stefko G.L.* Flutter and forced response analysis of cascades using a two dimensional linearized Euler Solver // *National Aeronautics and Space Administration, Washington, DC*. 1999.
111. *Sadeghi M., Liu F.* Computation of cascade flutter by uncoupled and coupled methods // *International Journal of Computational Fluid Dynamics*. 2005. V. 19(8). P. 559 – 569.
112. *Srivastava R., Bakhle M.A., Keith T.G., Stefko G.L.* Aeroelastic stability computations for turbomachinery // *National Aeronautics and Space Administration, Washington, DC*. 2002.
113. *Srivastava R., Bakhle M.A., Keith T.G., Stefko G.L.* Flutter Analysis of a Transonic Fan // *National Aeronautics and Space Administration, Washington, DC*. 2002.
114. *Августинович В.Г., Шмотин Ю.Н., Сипатов А.М., Румянцев Д.Б., Ташлыков Д.Н., Старков Р.Ю., Повышев И.А., Полулях А.И.* Численное моделирование нестационарных явлений в газотурбинных двигателях. М.: Машиностроение, 2005. 534 с.

115. *Колотников М.Е., Макаров П.В., Сачин В.М.* Исследование динамической напряженности широкохордного вентилятора при стендовых испытаниях // *Авиационно-космическая техника и технология*. 2008. №9 (56). С. 58-64.
116. ГОСТ 23851-79. Двигатели газотурбинные авиационные. Термины и определения. Введ. 1980 -01-07. М.: Изд-во стандартов. 1980.
117. *Иванов В.П.* Колебания рабочих колес турбомашин. М.: Машиностроение. 1983. 224 с.
118. *Скубачевский Г.С.* Авиационные газотурбинные двигатели. М.: Машиностроение. 1969. 546 с.
119. *Wilcox D.C.* Multiscale model for turbulent flows // In *AIAA 24th Aerospace Sciences Meeting*. American Institute of Aeronautics and Astronautics. 1986.
120. Ansys Mechanical APDL documentation.
121. *Миль М.Л., Некрасов А.В., Браверман А.С., Гродно Л.Н., Лейканд М.А.* Расчет и проектирование. Том 2. М.: Машиностроение. 1967. 424 с.
122. *Браверман А.С., Вайнтруб А.П.* Динамика вертолета. Предельные режимы полета. М: Машиностроение. 1988. 280 с.
123. *Ильичев В.Д.* О флаттере несущего винта вертолета // *Труды ЦАГИ*. 1959. Вып. 748. С. 36-46.
124. *Loewy R. G.* Review of Rotary-Wing V/STOL Dynamic and Aeroelastic Problems// *Journal of the American Helicopter Society*. 1969. V. 14(3). P. 3 – 23.
125. *Peretz P. Friedmann*, Rotary-Wing Aeroelasticity: Current Status and Future Trends// *AIAA Journal*. 2010. V. 42(10). P. 1953 – 1972.
126. *Ormiston R.A.* Investigation of Hingeless Rotor Stability // *Vertica*. 1983. V. 7(2). P. 143 – 180.
127. *David A. Peters*. Modeling of unsteady aerodynamics for rotary-wing Aeroelasticity// *Math Comput. Modelling*. 1988. V. 2. P. 293 – 297.
128. *Nixon M.W.* Aeroelastic Response and Stability of Tiltrotors with Elastically-Coupled Composite Rotor Blades. Ph.D. Dissertation, Dept. of Aerospace Engineering, University of Maryland. 1993

129. *Pavlenko N.S.* Anisotropic rotor stability // 19th European rotorcraft forum. Cernobbio (Como), Villa Erba. 1993.
130. *Zvolanek I.* Stability of the Helicopter Rotor on Anisotropic Supports // Journal of the American Helicopter Society. 1979.
131. *Friedmann, P.P.* Formulation and Solution of Rotary-Wing Aeroelastic Stability and Response Problems // Vertica. 1983 V. 7(2). P. 101 – 141.
132. *Бурцев Б.Н., Левин И.А.* Метод и результаты расчета флаттера несущей системы соосного вертолета // Труды XIII Н.Т.К. по аэродинамике, динамике вертолетов. ЦАГИ. 1985. С. 186 – 191.
133. *Бурцев Б.Н., Соболев Б.П., Левин И.А., Якеменко Г.В., Ахкамов Р.А.* Основные результаты исследования флаттера соосных несущих систем // Труды XIV Н.Т.К. по аэродинамике и динамике винтокрылых ЛА. ЦАГИ. 1989. С. 525 – 534.
134. *Левин И.А.* Метод расчета динамических характеристик лопасти несущего винта // Проблемы проектирования несущих винтов вертолетов. Москва. 1991. С. 31 – 51.
135. *Павленко С.Ф.* Выбор параметров втулки несущего винта вертолета из условий обеспечения потребного демпфирования в плоскости вращения // Труды МАИ. 2015. №81. С. 1 – 19.
136. *Демидович Б.П.* Лекции по математической теории устойчивости. М.: Наука. 1967. 472 с.
137. *Zu-Qing Qu.* Model Order Reduction Techniques with Applications in Finite Element Analysis. Springer, London. 2004. 257 p.
138. MSC Nastran 2016 Superelements User's Guide
139. *Абдухакимов Ф.А., Веденеев В.В.* Исследование одномодового флаттера пластин различной формы при малой сверхзвуковой скорости // Ученые записки ЦАГИ. 2017. Т. 48. № 1. С. 86 – 98.
140. *Vedeneev V.V., Kolotnikov M.E., Mossakovskii P.A., Kostyreva L.A., Abdukhakimov F.A., Makarov P.V., Pyhalov A.A., Dudaev M.A.* A comprehensive solution of the problems of ensuring the strength of gas turbine engine compressor

- at the design stage // IOP Conference Series: Materials Science and Engineering 2018. V. 302. 012079
141. *Abdukhakimov F. and Vedeneev V.* Investigation of a flutter of structures in gas flows with using energy method // Journal of Physics: Conf. Series. 2018. V. 1129. 012001.
142. *Абдухакимов Ф.А., Веденеев В.В., Колотников М.Е., Макаров П.В.* Численное исследование влияния конструктивных параметров на прогнозирование флаттера лопаток // Проблемы машиностроения и надёжности машин. 2019. № 2. С. 17-26.
143. *Abdukhakimov F.A., Vedeneev V.V.* Effect of Yaw Angle on Flutter of Rectangular Plates at Low Supersonic Speeds // AIAA Journal. 2022. V. 60(7). P. 4256 – 4266.
144. *Mikhail Kolotnikov, Pavel Makarov, Farrukh Abdukhakimov, Vasily Vedeneev.* Flutter prediction in modern aircraft engines and gas turbines // Proceedings of the First International Symposium on Flutter and its Application. 2016. Tokyo. P. 431 – 440.
145. *Веденеев В.В., Шишаева А.С., Абдухакимов Ф.А., Бондарев В.О.* Исследование панельного флаттера в аэродинамически усложненных постановках: эффекты трансзвукового потока, пограничного слоя, искривленности панелей, аэродинамической и конструкционной нелинейностей // Сборник трудов Всероссийской конференции, посвящённой 85-летию Игоря Анатольевича Кийко «Вопросы прикладной математики и проблема взаимодействия твердых тел с жидкой и газовой средой». 2017. С. 209 – 233.
146. *Abdukhakimov Farrukh, Vedeneev Vasily.* Flutter of Rectangular Plate at Non-Zero Flow Yaw Angle // Proceedings of the ASME 2021 Pressure Vessels & Piping Conference. 2021. P. 1 – 4.
147. *Abduhakimov F., Bondarev V., Dadunashvili S., Konovalov A., Vedeneev V.* Advanced coupled aeroelastic analysis of helicopter rotor system // 45th European Rotorcraft Forum 2019 (ERF). 2019. V. 2. P. 787 – 800.

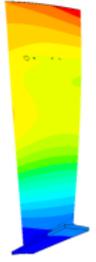
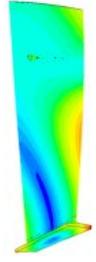
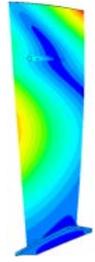
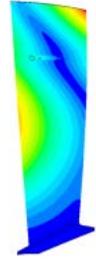
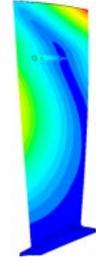
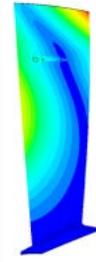
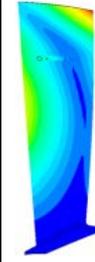
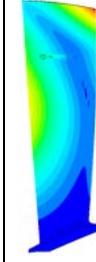
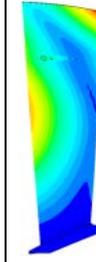
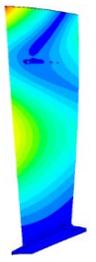
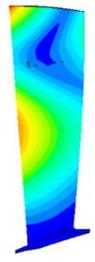
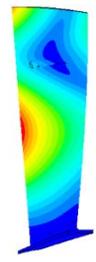
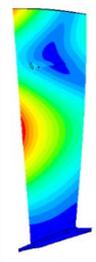
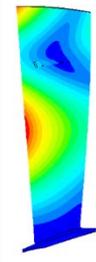
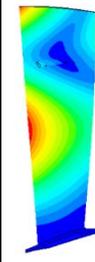
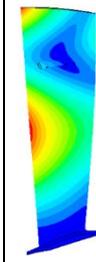
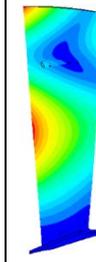
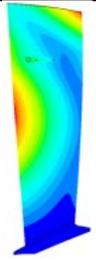
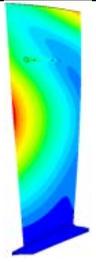
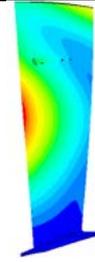
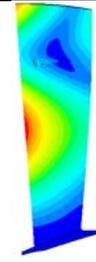
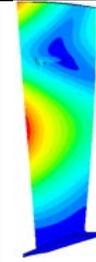
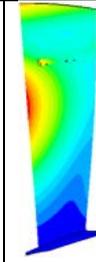
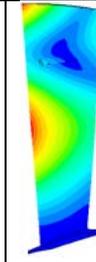
148. *Абдухакимов Ф.А., Веденеев В.В., Жидяев К.А.* Аэроупругий анализ несущей системы вертолета // Всероссийская конференция молодых ученых-механиков YSM-2022. 2022. С. 28.
149. *Абдухакимов Ф.А.* Влияние формы пластины на границы флаттера при малой сверхзвуковой скорости // Труды конференции-конкурса молодых ученых. Москва. 2018. С. 79 – 86.
150. *Abdukhakimov F., Vedeneev V.* Investigation of flutter of rectangular plate at non-zero flow yaw angle // XLIX International Summer School – Conference Advanced Problems in Mechanics. Book of abstracts. Great St. Petersburg. 2021 P.2.
151. *Абдухакимов Ф.А., Веденеев В.В.* Исследование флаттера прямоугольной пластины при ненулевом угле скольжения// Тезисы докладов XV Всероссийской школы-конференции молодых ученых. Новосибирск. 2021. С. 3-4.
152. *Абдухакимов Ф.А., Веденеев В.В.* Исследование флаттера прямоугольной пластины со сверхзвуковой передней кромкой при ненулевом угле скольжения // Ломоносовские чтения. Научная конференция. Секция механики. Тезисы докладов. Москва. 2021. С. 21 – 22.
153. *Абдухакимов Ф.А., Веденеев В.В.* Флаттер прямоугольной пластины при ненулевом угле скольжения// Тезисы Всероссийской конференция молодых учёных-механиков YSM-2021. Москва. 2021. С. 21.
154. *Абдухакимов Ф.А., Веденеев В.В., Колотников М.Е., Макаров П.В., Филиппенко В.А., Чепига С.А.* Энергетический метод расчета флаттера лопаток турбомашин: опыт использования и перспективы// Международная научно-техническая конференция «Проблемы и перспективы развития двигателестроения»: сборник докладов. Том 1. Самара. 2021. С. 12 – 13.
155. *Абдухакимов Ф.А., Веденеев В.В.* Флаттер прямоугольной пластины со сверхзвуковой передней кромкой при ненулевом угле атаки // Ломоносовские чтения. Научная конференция. Секция механики. Тезисы докладов. Москва 2020. С. 19.

156. *Абдухакимов Ф.А.* Исследование флаттера конструкций в газовых потоках // XII Всероссийский съезд по фундаментальным проблемам теоретической и прикладной механики. Расширенные тезисы докладов. Уфа, 2019. С. 274-276.
157. *Абдухакимов Ф.А.* Решение задач флаттера конструкций в газовых потоках с использованием энергетического метода // Ломоносовские чтения. Научная конференция. Секция механики. Тезисы докладов. Москва. 2019. С. 20.
158. *Абдухакимов Ф.А.* Флаттер конструкций в газовых потоках // Тезисы XIX Всероссийской школы-семинара «Современные проблемы аэрогидродинамики». Москва. 2019. С. 10.
159. *Farrukh Abdukhakimov, Vasily Vedeneev.* Single mode flutter of non-rectangular flat panels at low supersonic speeds // Proceedings of 9th International Symposium on Fluid-Structure Interactions, Flow-Sound Interactions, Flow-Induced Vibration & Noise. Toronto, Ontario, Canada. 2018. P. 4.
160. *Абдухакимов Ф.А.* Исследование одномодового флаттера плоских панелей, имеющих непрямоугольную форму // Ломоносовские чтения. Научная конференция. Секция механики. Тезисы докладов. Москва. 2018. С. 19
161. *Абдухакимов Ф.А.* Исследование флаттера конструкций в газовых потоках с применением энергетического метод // Тезисы Всероссийской конференции молодых ученых-механиков YSM-2018, Сочи. 2018 С. 29.
162. *Абдухакимов Ф.А.* Влияние формы панели обшивки на границы флаттера при малой сверхзвуковой скорости // Труды четвертой Всероссийской научно-технической конференции "Динамика и прочность конструкций аэрогидроупругих систем. Численные методы". Москва. 2017. С. 10.
163. *Абдухакимов Ф.А.* Влияние формы пластины на границы флаттера при малой сверхзвуковой скорости // Тезисы конференции-конкурса молодых учёных Научно-исследовательского института механики МГУ имени М.В. Ломоносова Москва. 2017. С. 2.
164. *Макаров П.В., Абдухакимов Ф.А., Веденеев В.В., Колотников М.Е.* Исследование влияния конструктивных параметров на прогнозирование флаттера лопаток // Труды четвертой Всероссийской научно-технической

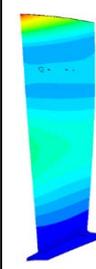
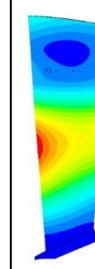
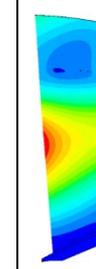
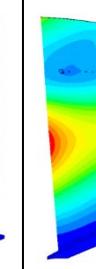
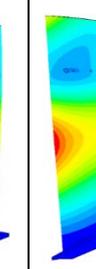
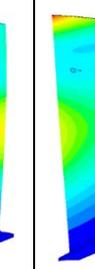
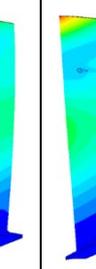
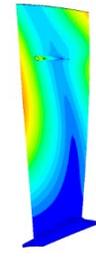
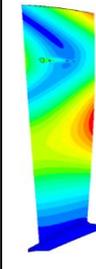
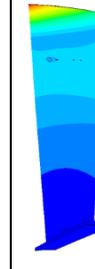
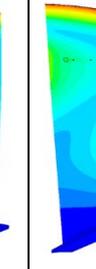
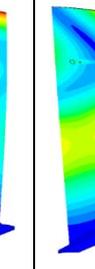
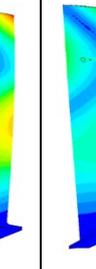
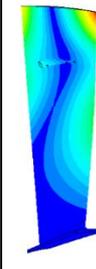
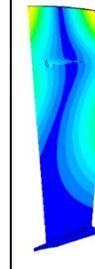
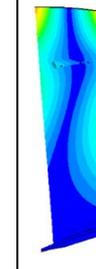
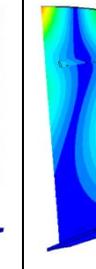
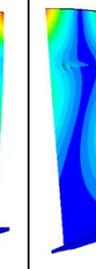
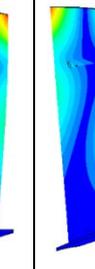
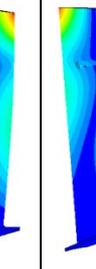
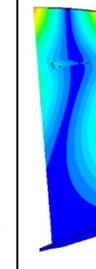
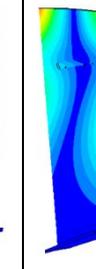
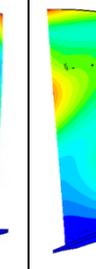
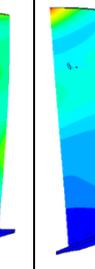
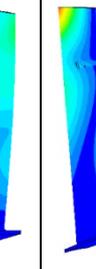
- конференции "Динамика и прочность конструкций аэрогидроупругих систем. Численные методы". Москва. 2017. С. 36.
165. *Абдухакимов Ф.А.* Исследование влияния формы пластины на границы одномодового флаттера // Тезисы Всероссийской конференции молодых-ученых механиков. Москва. 2017. С. 23.
166. *Абдухакимов Ф.А., Веденеев В.В.* Исследование одномодового флаттера панелей обшивки различных форм при малой сверхзвуковой скорости // Материалы XXIII Международного симпозиума «Динамические и технологические проблемы механики конструкций и сплошных сред» им. А.Г. Горшкова. Том 1. Москва. 2017. С. 4 – 5.
167. *Абдухакимов Ф.А.* Одномодовый флаттер панелей обшивки различных форм при малой сверхзвуковой скорости // Материалы XXVII научно-технической конференции по аэродинамике, Жуковский. 2016. С. 17 – 18.
168. *Абдухакимов Ф.А., Веденеев В.В.* Одномодовый флаттер пластин различных форм при малой сверхзвуковой скорости // Современные проблемы аэрогидродинамики: Тезисы докладов XVIII Всероссийской конференции. Москва 2016. С. 11.
169. *Абдухакимов Ф.А., Веденеев В.В.* Одномодовый флаттер пластин, имеющих форму прямоугольника, трапеции и параллелограмма. // Материалы XXII Международной конференции «Нелинейные задачи теории гидродинамической устойчивости и турбулентность». Москва. 2016. 311 с.
170. *Абдухакимов Ф.А., Веденеев В.В.* Флаттер пластин в форме прямоугольника, трапеции и параллелограмма при малой сверхзвуковой скорости // Материалы XXII Международного симпозиума «Динамические и технологические проблемы механики конструкций и сплошных сред» им. А.Г. Горшкова. Том 1. Москва. 2016. С. 15 – 16.
171. *Абдухакимов Ф.А., Веденеев В.В.* Флаттер пластин различных форм при малой сверхзвуковой скорости // Ломоносовские чтения. Секция механики. Тезисы докладов. Москва. 2016. С. 18.

Приложение А

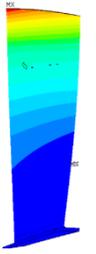
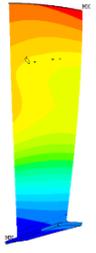
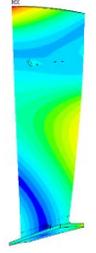
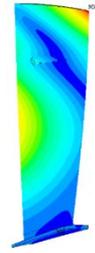
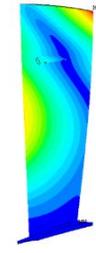
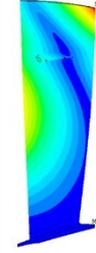
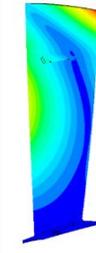
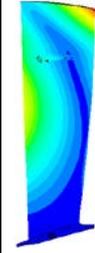
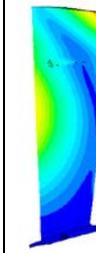
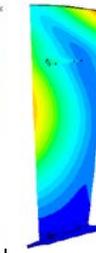
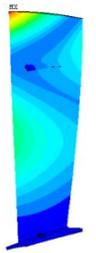
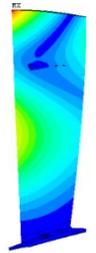
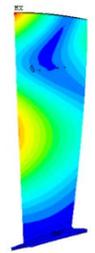
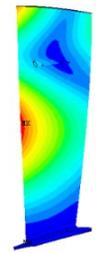
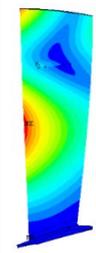
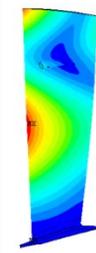
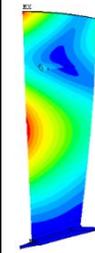
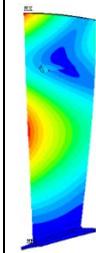
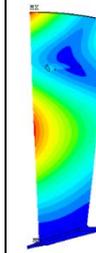
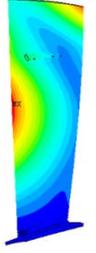
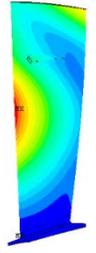
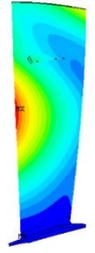
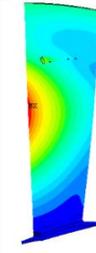
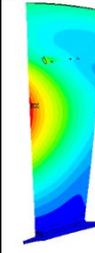
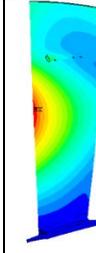
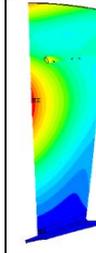
Собственные формы колебания. $n1\phi=86.6\%$, вторая форма

m	0	1	2	3	4	5	6	7	8
f, Гц	506,89	739,11	824,54	865,48	875,79	882,01	889,03	898,11	908,54
Собственная форма колебания, пучность									
Собственная форма колебания узел									
m	9	10	11	12	14	15	16	17	18
f, Гц	917,58	923,11	925,43	925,76	925,05	923,92	922,78	921,88	921,39
Собственная форма колебания, пучность									
Собственная форма колебания, узел									

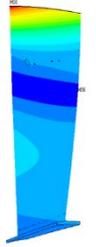
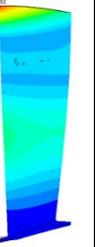
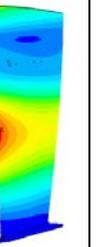
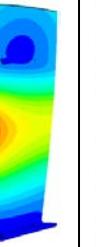
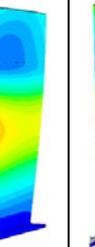
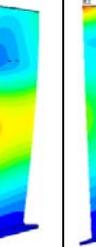
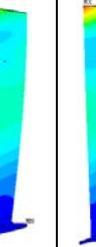
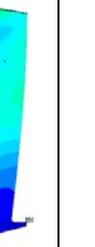
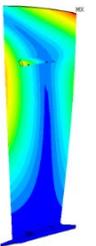
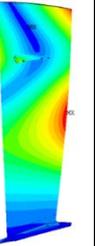
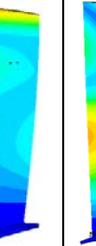
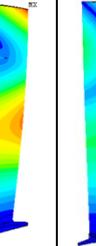
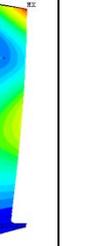
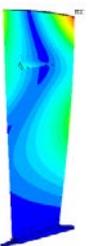
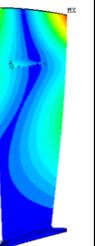
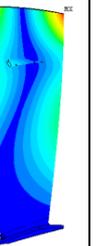
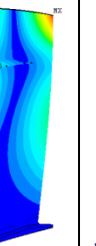
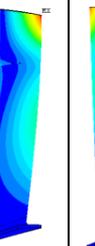
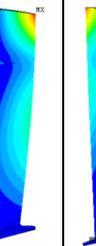
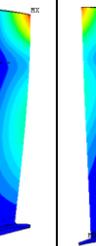
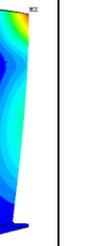
Собственные формы колебания. $n_1 f = 86.6\%$, третья форма.

m	0	1	2	3	4	5	6	7	8
f, Гц	641,34	829,34	873,03	903,19	930,43	947,43	959,17	970,04	984,52
Собственная форма колебания, пучность									
Собственная форма колебания, узел									
m	9	10	11	12	14	15	16	17	18
f, Гц	1007,3	1039,6	1077,6	1115,2	1147,8	1173,2	1191,3	1202,7	1208,2
Собственная форма колебания, пучность									
Собственная форма колебания, узел									

Собственные формы колебания. $n1\phi=92.5\%$, вторая форма.

m	0	1	2	3	4	5	6	7	8
f, Гц	514,49	762,16	846,39	888,98	901,45	908,26	915,27	923,98	933,82
Собственная форма колебания пучность									
Собственная форма колебания узел									
m	9	10	11	12	14	15	16	17	18
f, Гц	942,31	947,53	949,78	950,14	949,5	948,46	947,39	946,56	946,1
Собственная форма колебания пучность									
Собственная форма колебания узел									

Собственные формы колебания. $n_1\phi=92.5\%$, третья форма.

m	0	1	2	3	4	5	6	7	8
f, Гц	654,51	851,82	901,25	929,75	954,65	970,87	982,34	993,08	1007,4
Собственная форма колебания пучность									
Собственная форма колебания узел									
m	9	10	11	12	14	15	16	17	18
f, Гц	1029,5	1060,8	1097,4	1133,5	1164,8	1189,2	1206,6	1217,6	1222,9
Собственная форма колебания пучность									
Собственная форма колебания узел	