

Отзыв научного руководителя на диссертационную работу
Хрыстика Михаила Андреевича
«Длины групповых алгебр»,
представленную на соискание ученой степени
кандидата физико-математических наук
по специальности 1.1.5 - математическая логика, алгебра, теория чисел и
дискретная математика (01.01.06 - Математическая логика, алгебра и теория чисел)

Хрыстик Михаил Андреевич поступил в очную аспирантуру, окончив механико-математический факультет МГУ имени М.В. Ломоносова в 2018 г.

Перед диссертантом был поставлен ряд открытых проблем исследования функции длины групповых алгебр конечных групп над различными полями. Поставленные задачи касались нахождения взаимосвязи функции длины групповых алгебр с другими числовыми характеристиками рассматриваемых алгебр, групп и полей коэффициентов и явного вычисления значений длины для групповых алгебр классических серий групп.

Исследование функции длины началось в середине 20 века в связи с вычислительными методами теории матриц, используемыми в механике сплошных сред. Данная характеристика является важной для исследования, поскольку длину можно рассматривать как некоторую меру сложности умножения в алгебре. Как направление исследований в современной алгебре данная область активно развивается в течение последних четырёх десятилетий и в настоящий момент остаётся в центре внимания исследователей по всему миру. Вместе с тем, открытых вопросов в этой теории очень много, что объясняет безусловную актуальность темы диссертации. Вычисление или оценка длины алгебры сопряжены со значительными техническими трудностями даже в случае классических алгебр. Так, например, самой известной открытой проблемой в данной области является проблема Паза 1984 г. о вычислении длины полной матричной алгебры как функции порядка матриц. Полученные М.А. Хрыстиком результаты о длине групповых алгебр в терминах прямых сумм матричных алгебр можно считать продвижением в решении вышеозначенной проблемы.

Перед диссертантом были поставлены задачи исследования систем порождающих и их числовых характеристик для групповых алгебр конечных абелевых групп и групп диэдра. В отличие от коммутативного случая, общее исследование групповых алгебр всех неабелевых групп представляется слишком трудным ввиду разнообразия их структур. Из некоммутативных групп для исследования были выбраны именно диэдральные группы, поскольку эта серия групп в полупростом случае является естественным следующим шагом после абелевого случая. Действительно, для групповых алгебр абелевых групп в разложении в прямую сумму матричных алгебр все слагаемые имеют порядок один, в то время как размеры матричных алгебр в разложении в прямую сумму групповых алгебр диэдральных групп не превышают двух. В задачах установления соотношений между функцией длины и другими числовыми характеристиками диссертанту были предложены для изучения такие параметры, как порядок и экспонента группы, размерность, максимальная степень минимальных многочленов

элементов алгебры и индекс нильпотентности её радикала Джекобсона, мощности и характеристики полей коэффициентов.

В ходе исследования для доказательств утверждений М.А. Хрыстик использовал методы линейной и общей алгебры и комбинаторики. Ему удалось успешно решить поставленные перед ним проблемы, а также разработать новые методы. В частности, диссертантом была разработана методы доказательства, связанные с заменой эквивалентных подслов. С помощью данных методов получена новая общая оценка длины произвольных алгебр, удовлетворяющих некоторым условиям на элементы – в виде функции от размерности и максимальной степени минимальных многочленов элементов алгебры, которая улучшает все ранее известные оценки. Также была разработана техника работы с коммутаторами от образующих, позволившая находить длины прямых сумм полных матричных и коммутативных алгебр.

Диссертация М.А. Хрыстика состоит из введения, четырёх глав, заключения, списка литературы и списка публикаций автора. Первая глава диссертации является вводной и содержит основные определения, обозначения, описание истории вопроса изучения длин групповых алгебр и вспомогательные результаты, которые используются в дальнейшем.

Вторая глава диссертации посвящена исследованию длины групповых алгебр конечных абелевых групп. Показано, что в полупростом случае над всеми достаточно большими полями длина групповой алгебры произвольной абелевой группы равна порядку группы без единицы, в частности, достигает максимального возможного значения. Над малыми конечными полями найдены как примеры групп с максимальным значением длины алгебр, так и серии примеров, для которых длина выражается логарифмической функцией порядка группы. В модулярном случае найдено точное равенство для длины групповых алгебр p -групп и некоторые оценки длин в общем случае. Доказана их точность. Вычислены длины групповых алгебр над полем характеристики p в случае, когда p -компонента раскладывается в прямое произведение не более двух циклических сомножителей. Интересно, что в этом случае, для одного сомножителя длина является линейной функцией порядка группы, а для двух — логарифмической.

В третьей главе диссертации вычислены длины групповых алгебр диэдральных групп над различными полями. Показано, что для группы симметрий правильного n -угольника значение длины её групповой алгебры равно n . Отметим, что данное значение длины всегда достигается на групповых системах образующих. Для доказательства основного результата развита новая техника вычисления длины прямых сумм полных матричных и коммутативных алгебр. Полученные результаты и разработанные методы представляют самостоятельный интерес для дальнейшего исследования длин матричных подалгебр.

В четвёртой главе диссертации полностью решена задача нахождения длин групповых алгебр всех групп, порядков, не превосходящих девяти, над всевозможными полями. Как следствие установлено, что для фиксированной группы заданного порядка длина может не быть монотонной функцией от мощности поля. Также в данной главе представлен альтернативный матричный

метод вычисления длины групповых алгебр абелевых групп над полями характеристики ноль.

Диссертация М.А. Хрыстика представляет полное решение поставленных перед ним актуальных задач в рассматриваемой области алгебры. Диссертантом получены интересные и важные результаты и развиты новые перспективные методы исследования, которые могут применяться также и для решения других задач. Они корректно доказаны и хорошо оформлены. Считаю, что М.А. Хрыстиком проделана существенная работа. Диссертация демонстрирует высокий уровень научных способностей, широту познаний и большой творческий потенциал её автора.

В целом работа М.А. Хрыстика имеет большое теоретическое и практическое значение и является серьёзным вкладом в современную алгебру. Рассматриваемая диссертация представляет собой законченное научное исследование. Все включенные в неё результаты получены лично автором, прошли всестороннюю квалифицированную апробацию и опубликованы в ведущих научных журналах.

Основные результаты диссертации М.А. Хрыстика изложены в пяти статьях в рецензируемых научных изданиях, определенных п. 2.3 Положения о присуждении ученых степеней в Московском государственном университете имени М.В. Ломоносова. Представленные публикации полно и правильно отражают результаты выполненных исследований. На протяжении обучения в аспирантуре М.А. Хрыстик неоднократно принимал участие в международных математических конференциях и выступал на научных семинарах с высокопрофессиональными докладами об основных результатах диссертации.

Считаю, что диссертация Хрыстика Михаила Андреевича полностью соответствует критериям, установленным в «Положении о присуждении ученых степеней в Московском государственном университете имени М.В. Ломоносова», и рекомендую её к защите в диссертационном совете МГУ.011.4(МГУ.01.17) ФГБОУ ВО МГУ по специальности 1.1.5 - математическая логика, алгебра, теория чисел и дискретная математика (01.01.06 - Математическая логика, алгебра и теория чисел) (физико-математические науки).

Научный руководитель:
кандидат физико-математических наук,
доцент

О.В. Маркова

19 февраля 2024 г.