

Отзыв научного руководителя на диссертационную работу Чикина  
Владимира Максимовича «Деформации метрик, локальные и глобальные  
аспекты» на соискание учёной степени кандидата физико-математических  
наук по специальности 01.01.04 — геометрия и топология

В диссертации Владимира Максимовича Чикина изучается ряд тесно связанных друг с другом задач. В работе рассматриваются некоторые виды деформаций функционалов длины и метрик, и изучается взаимосвязь непрерывности длин кривых и непрерывности расстояний при таких деформациях, а также изучаются свойства отображений пространства Громова—Хаусдорфа в себя, индуцированных деформациями метрик, заданными функциями, сохраняющими метрики. Несмотря на то, что на сегодняшний день взаимосвязь внутренних метрик и функционалов длины хорошо изучена, существует много открытых вопросов, связанных с влиянием деформаций метрик на индуцированные ими функционалы длины, а также много открытых вопросов, связанных с влиянием деформаций функционалов длины на порождаемые ими внутренние метрики. В настоящей диссертации разрабатывается специальная теория деформаций внутренних метрик, которая имеет нетривиальные приложения в различных областях, таких как геометрия финслеровых и римановых многообразий, теория минимальных сетей и геометрия пространства Громова—Хаусдорфа.

В первой главе диссертации даются необходимые определения и предварительные сведения из теории функционалов длины и внутренних метрик, теории минимальных сетей, теории функций, сохраняющих метрики, а также приводятся предварительные сведения о пространстве Громова—Хаусдорфа.

Во второй главе диссертации изучаются однопараметрические деформации внутренних метрик. Более подробно, в диссертации рассматриваются топологические пространства с заданными на них семействами функционалов длины. Предполагается, что все функционалы этих семейств определены на одном и том же классе допустимых кривых, а также, что для любой допустимой кривой ее длина конечна и непрерывно зависит от параметра, определяющего соответствующее семейство функционалов длины. Рассматриваются соответствующие семейства внутренних метрик, порожденные этими функционалами длины. В работе изучаются дополнительные условия, которых будет достаточно для непрерывности расстояний, и приводятся примеры однопараметрических семейств как не локально компактных, так и компактных метрических пространств, в которых длины кривых непрерывно зависят от параметра, а функции расстояния — нет. Помимо этого, в работе приводятся ряд специальных условий, достаточных для непрерывности расстояний в совокупности с ограниченной компактностью пространства, а также ряд специальных условий, достаточных для непрерывности расстояний в случае произвольного метрического пространства с внутренней метрикой.

В качестве приложения, в диссертации рассматриваются финслеровы многообразия, метрики которых непрерывно зависят от параметра. В работе показывается, что на таких компактных финслеровых многообразиях выполнены достаточные условия непрерывности расстояния, из чего следует, что функция расстояния на таких многообразиях также непрерывно зависит от параметра. Последний результат обобщается на полные финслеровы многообразия. Поскольку финслеровы многообразия являются обобщением римановых многообразий, в качестве следствия в диссертации показывается, что на компактных римановых многообразиях, метрики которых непрерывно зависят от параметра, выполнены достаточные условия непрерывности расстояния, а также показывается, что на полных римановых многообразиях, метрики которых непрерывно зависят от параметра, расстояния между точками непрерывно зависят от этого параметра.

В третьей главе настоящей работы изучается приложение разработанной теории деформаций внутренних метрик к решению задач из теории минимальных сетей. Сеть фиксированного бинарного типа с фиксированным множеством граничных вершин минимально возможной длины называется *минимальной параметрической сетью*. *Кратчайшим деревом*, или *кратчайшей сетью*, соединяющей данное множество, называется минимальная параметрическая сеть, длина которой не превосходит длин любых других сетей, соединяющих это множество. Отметим, что для фиксированного множества граничных вершин существует лишь конечное число возможных бинарных типов. Таким образом, кратчайшая сеть, соединяющая данное множество — это самая короткая сеть из всех минимальных параметрических сетей, соединяющих это множество. Кратчайшие сети также называются *минимальными деревьями Штейнера*. С помощью разработанных техник получен результат, описывающий типы минимальных сетей для произвольных малых границ на полном римановом многообразии. В качестве следствия из этого результата, в диссертации полностью описаны кратчайшие сети, соединяющие вершины достаточно малых правильных  $n$ -угольников на полных римановых многообразиях для  $n > 6$ . Помимо прочего, в работе получено полное описание типов кратчайших деревьев, лежащих в достаточно малых шаровых окрестностях точек полных римановых многообразий постоянной кривизны. Еще одна серия новых результатов, приводимых в диссертации, касается обобщения известной теоремы о минимальных деревьях Штейнера на евклидовой плоскости, утверждающей, что такие деревья всегда лежат в выпуклой оболочке своей границы. В работе показывается, что аналогичный результат имеет место для достаточно малых окрестностей двумерных римановых многообразий, а также для открытых двумерных полусфер и для плоскости Лобачевского.

В четвертой главе изучаются преобразования метрических пространств, индуцированные функциями, сохраняющими метрики. Показывается, что непрерывные и только непрерывные функции, сохраняющие метрики, корректно определяют отображения пространства Громова—Хаусдорфа в себя, причем эти отображения обладают рядом интересных свойств, в частности они непрерывны и являются липшицевыми отображениями метрических пространств тогда и только тогда, когда липшицевыми являются соответствующие функции, сохраняющие метрики. В главе

описываются образы этих отображений и показывается, что такие отображения сохраняют топологические свойства. Также в этой главе изучаются однопараметрические деформации произвольных метрик, заданные функциями, сохраняющими метрику, и доказывается критерий непрерывности длин кривых при таких деформациях метрик.

Диссертация В.М. Чикина представляет собой законченное научное исследование, в котором решены актуальные задачи метрической геометрии и теории оптимальных сетей. Основные результаты диссертации являются новыми, получены автором самостоятельно, опубликованы в ведущих научных журналах и неоднократно представлялись автором на научных семинарах и конференциях всероссийского и международного уровней.

Диссертация В.М. Чикина соответствует критериям, установленным в «Положении о присуждении учёных степеней в Московском государственном университете имени М.В. Ломоносова» и рекомендуется к защите в диссертационном совете МГУ.01.17 ФГБОУ ВО МГУ по специальности 01.01.04 – геометрия и топология (физико-математические науки).

5 апреля 2022

Профессор,  
доктор физико-математических наук

А.А. Тужилин