МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
имени М. В. ЛОМОНОСОВА

На правах рукописи

*УДК 519.214.8*

Бакай Гавриил Андреевич

# БОЛЬШИЕ УКЛОНЕНИЯ ДЛЯ РЕГЕНЕРИРУЮЩИХ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТЕЙ

Специальность 1.1.4 —

«Теория вероятностей и математическая статистика»

Диссертация на соискание учёной степени

кандидата физико-математических наук

Научный руководитель:

к.ф.-м.н. Шкляев Александр Викторович

Москва — 2024

# Оглавление

## Введение

Исследование асимптотики локальных вероятностей для сумм случайных величин было начато в работах Б.В. Гнеденко и А.Н. Колмогорова. В работе [1] Б.В. Гнеденко получены результаты в случае, когда случайные величины являются независимыми и одинаково распределенными (н.о.р.) и имеют конечный второй момент. Так, если $X_i$, $i \in \mathbb{N}$, – н.о.р. случайные величины с арифметическим распределением и $\mu = \mathbf{E}X_1$, $\sigma^2 = \mathbf{D}X_1 > 0$, то справедливо соотношение

$$\mathbf{P}(X_1 + \ldots + X_n = k) = \frac{1}{\sqrt{2\pi n}\sigma} \exp\left(-\frac{(k-\mu n)^2}{2n\sigma^2}\right) + o\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right), \quad n \to \infty.$$

Соотношение выполняется равномерно по $k \in \mathbb{Z}$.

Методы, предложенные Х. Крамером в работе [2], а именно, крамеровское преобразование мер, позволили расширить соответствующие результаты в случае н.о.р. величин на более широкую зону, включающую нормальные, умеренные и большие уклонения. В многомерном случае данная задача рассматривалась, например, А.А. Боровковым в работе [3].

В работе А.Н. Колмогорова [4] получены аналогичные результаты в том случае, когда случайные величины образуют марковскую цепь с конечным множеством состояний. Однако, разработанный аппарат позволяет исследовать вероятности для сумм случайных величин только в окрестности среднего.

Одним из основных результатов настоящей работы является теорема об асимптотике вероятностей больших уклонений в локальной форме для первого момента достижения уровня случайным блужданием в случайной среде (СБСС). Модель случайного блуждания в случайной среде была впервые введена в работе [5], в которой исследовались критерии для возвратности и транзиентности блуждания. Предельные теоремы для СБСС были получены в статье [6]. Принцип больших уклонений был получен в [7], его дальнейшие обобщения на случай сред, не представляющих набор н.о.р. величин, были произведены в работе [8]. Отметим также работу [9] (теоремы 1.2 и 1.4), где получены результаты о нижних уклонениях СБСС.

Известно, что в модели СБСС последовательность первых моментов достижения уровней $n$, которую мы обозначим $\{T_n, n \geq 0\}$, можно представить в виде последовательности, обладающей свойством регенерации (см., например, [10]). Более формально, можно ввести вспомогательное вероятностное пространство, на котором задать такие величины $\widehat{T}_n$, что при каждом натуральном $n$ величины $T_n$ и $\widehat{T}_n$ совпадают по распределению. При этом величины $\widehat{T}_n$ допускают следующее представление:

$$\widehat{T}_n = \sum_{i=1}^{N_n} \xi_i + \zeta_n, \quad N_n := \max\{k \in \mathbb{N} : \ \eta_1 + \ldots + \eta_k \leq n\}.$$

Здесь случайные векторы $(\xi_i, \eta_i), i \in \mathbb{N}$, являются н.о.р. случайными векторами, случайные величины $\zeta_n$ таковы, что для произвольных $r,n \in \mathbb{N}$, $k \leq n$ условное распределение $\zeta_n$ при условии событий

$$\{(\xi_i,\eta_i), \, i \leq r, \, \eta_1 + \ldots + \eta_r = n - k, \eta_{r+1} > k\}$$

зависит только $k$, но не от значений $(\xi_i,\eta_i)$. Так, если величины $\zeta_n$ равны нулю почти наверное, то процесс является обобщенным процессом восстановления. Таким образом, первым шагом к решению задачи о больших уклонениях момента достижения уровня $n$ в модели СБСС стало исследование в области теории больших уклонений для обобщенных процессов восстановления.

Для исследования вероятностей больших уклонений обобщенных процессов восстановления применяется анализ так называемой меры восстановления, а именно функции

$$E(k, n) := \sum_{j=1}^{+\infty} \mathbf{P}\left(S_j^{\xi} = k, \, S_j^{\eta} = n\right), \, k \in \mathbb{Z}^d, \, n \in \mathbb{N},$$

$$S_j^{\xi} := \sum_{i=1}^{j} \xi_i, \, S_j^{\eta} := \sum_{i=1}^{j} \eta_i.$$

В случае нерешетчатого распределения вектора $(\xi_1,\eta_1)$ локальные вероятности заменяются интегро-локальными.

Функция $E(k,n)$ в более общей постановке

$$H(V) = \sum_{j=1}^{+\infty} \mathbf{P}\left(\left(S_j^{\xi}, S_j^{\eta}\right) \in V\right), \, V \in \mathbb{B}\left(\mathbb{R}^{d+1}\right),$$

изучалась в работе [11], в которой получены точные асимптотики и асимптотические разложения для различных типов множеств $V$, растущих к бесконечности, в частности, для функции $E(k,n)$. По всей видимости, в указанной работе впервые введена вторая функция уклонений для случайного вектора $(\xi_1,\eta_1)$ и изучены ее свойства.

Дальнейшие продвижения в этом направлении, теории больших уклонений для обобщенных процессов восстановления, содержатся в серии работ А.А. Боровкова, А.А. Могульского и Е.И. Прокопенко. Пусть

$$U_T := \sum_{i=0}^{N_T} \xi_i, \quad N_T = \max\{k \in \mathbb{N} : \eta_0 + S_k^{\eta} \le T\}, T \in \mathbb{R}.$$

Случайный процесс $U_T$ является неоднородным обобщенным процессом восстановления. Здесь случайный вектор $(\xi_0,\eta_0)$ не зависит от последовательности $\{(\xi_i,\eta_i)\}_{i\in\mathbb{N}}$ и имеет, вообще говоря, отличное от $(\xi_1,\eta_1)$ распределение. Наряду с процессом $U_T$ рассматривался также процесс $Y_T$, задаваемый формулой $Y_T = \sum_{i=0}^{N_T+1} \xi_i$. В нерешетчатом одномерном случае ($d = 1$, где $d$ – размерность вектора $\xi_1$) в работах [12]-[13] получены точные асимптотики вероятностей больших уклонений в интегро-локальной форме (равномерные по $k/n$ в широком диапазоне значений $k = k(n)$) для величин $U_T$ и $Y_T$ в *регулярной зоне уклонений*, также получены асимптотики вероятностей больших уклонений для конечномерных распределений соответствующих процессов.

В многомерном ($d \ge 2$) нерешетчатом случае получены аналоги этих результатов для процесса $U_T$ в *регулярной* ([14]) и *нерегулярной зонах уклонений* ([15]). В работе [16] получены точные асимптотики больших уклонений для процесса $Y_T$.

В арифметическом случае аналоги этих результатов получены в работе [17] (в одномерном случае) и в работе [18] (в многомерном случае).

Отметим, что в работах [12]-[18] используется метод, основанный на анализе асимптотики меры восстановления.

Родственные результаты получены автором совместно с А.В. Шкляевым в работе [19]. В указанной работе в арифметическом случае получена асимптотика вероятностей больших уклонений процесса с регенерацией, который пред-

ставим в виде
$$\widetilde{U}_n = \sum_{i=0}^{N_n} \xi_i + \zeta_n$$
для достаточно общего вида $\zeta_n$.

Результаты первой главы дополняют указанные теоремы об асимптотиках вероятностей больших уклонений, распространяя их на случай обрывающихся процессов восстановления. В данном случае случайная величина $\eta_1$ является несобственной, а именно, справедливо соотношение
$$\mathbf{P}(\eta_1 < +\infty) \in (0,1).$$
Результаты автора в этом направлении позволяют исследовать асимптотику вероятностей больших уклонений для момента достижения уровня $n$ в модели СБСС в том случае, когда блуждание уходит в минус бесконечность с вероятностью 1.

Однако, при применении полученных результатов теории больших уклонений для обобщенных процессов восстановления возникает ряд сложностей. Во-первых, выражение для функций в асимптотиках вероятностей, и, во-вторых, условия применимости данных теорем (условие Крамера на регенерирующую последовательность) в описанных выше работах, были получены в терминах распределений случайных векторов
$$(\xi_0,\eta_0),\ (\xi_1,\eta_1), \quad \zeta_n,\ n \geq 0.$$
В модели СБСС непосредственная проверка условий теорем, а также вычисление параметров асимптотики вероятностей больших уклонений в терминах распределений указанных векторов не представляется возможным. Чтобы обойти данное затруднение, в [20] автором получены результаты, дающие новое выражение функций в асимптотиках вероятностей больших уклонений для регенерирующих последовательностей, и позволяющие, среди прочего, проверить выполнение условия Крамера для регенерирующей последовательности. Вторая глава настоящей диссертации содержит результаты в этом направлении.

Доказательство содержащихся во второй главе теорем 5 и 6, посвященных этому вопросу, основано на анализе асимптотического поведения производящей функции моментов регенерирующей последовательности. При этом ключевым условием является следующее: найдется такое открытое множество $H \subset \mathbb{R}^d$, что для любого его компактного подмножества $K$ найдется такое $\delta = \delta(K)$, что справедливо соотношение

$$\mathbf{E} \exp\left(h\widehat{T}_n\right) = \rho_0(h)\rho^n(h) + o(\delta^n \rho^n(h)), \quad n \to \infty,$$

где $o(1)$ равномерно мало по $h \in K$.

Данное условие сходно с условием (A.2) работы [21]. В указанной работе исследуются асимпотики вероятностей больших уклонений для произвольных случайных величин. Однако, условия на поведение функций $\rho$ и $\rho_0$ в ней значительно более ограничительные. Так, функция $\rho$ должна быть трижды дифференцируемой, функция $\rho_0$ – непрерывно-дифференцируемой. В теореме автора от функции $\rho$ требуется непрерывность на $H$, от функции $\rho_0$ – отделенность от нуля и бесконечности на $K$.

Еще одним качественным отличием является то, что наличие регенерационной структуры позволяет обойти введенное в работе [21] условие (A.3), а именно, поведение функции $\rho(h)$ на комплексной плоскости. В работе [22] методами, схожими с методами работы [21], исследуется асимпотика вероятностей больших уклонений в многомерном случае, что, опять же, требует существенно более сложных для проверки условий, чем в настоящей работе.

Вторая глава также содержит пример приложения разработанного аппарата к задаче о больших уклонениях максимума случайного блуждания. Данная задача, уже решенная ранее в работах [23], [24], [25] и [26], приведена в настоящей работе как иллюстрация подхода к отысканию параметров асимптотики вероятностей больших уклонений регенерирующей последовательности (максимум случайного блуждания обладает свойством регенерации), а также к проверке выполнения условия Крамера для такого рода последовательностей.

В заключительной, третьей, главе приведены теоремы об асимптотиках вероятностей больших уклонений для первого момента достижения уровня $n$ случайным блужданием в случайной среде. Для применения результатов второй главы к данной задаче, автором показано, что математическое ожидание

$$\mathbf{E}\left(\exp\left(h\widehat{T}_n\right);\ G_n\right), \quad h<0,\, n\in\mathbb{N},$$
$$G_n=\bigsqcup_{k=1}^{+\infty}\{\omega:\ \eta_1+\ldots+\eta_k=n\},$$

можно представить как действие $n$-ной степени некоторого оператора, действующего на некотором банаховом пространстве на некоторые вектор и ковектор. Таким образом, асимптотическое поведение указанного математического ожидания может быть исследовано методами спектральной теории. При этом, автором были применены результаты работ [27], [28], [29] и [30].

**Целью** данной работы является доказательство теоремы об асимптотике вероятностей больших уклонений первого момента достижения уровня $n$ случайным блужданием в случайной среде и получение нового представления для параметров асимптотики вероятностей больших уклонений регенерирующих последовательностей в терминах производящих функций моментов настоящих последовательностей.

Для достижения поставленной цели необходимо было решить следующие **задачи**.

1. Доказать теорему об асимптотике вероятностей больших уклонений для обрывающегося процесса восстановления.
2. Разработать отличный от известных ранее подход для проверки условия Крамера и выражения функций в асимптотиках вероятностей больших уклонений для регенерирующих последовательностей.
3. Применить полученный подход к модели СБСС, используя спектральную теорию линейных операторов.

**Основные положения, выносимые на защиту:**

1. Для обрывающегося обобщенного процесса восстановления в нерегулярной зоне уклонений получена точная асимптотика вероятностей больших уклонений в локальной форме.
2. Найдены альтернативные выражения параметров асимптотики вероятностей больших уклонений регенерирующих последовательностей.

3. Для первого момента достижения далекого уровня случайным блужданием в случайной среде получена точная асимптотика вероятностей больших уклонений.

**Научная новизна:**

1) впервые получены точные асимптотики вероятностей больших уклонений для обрывающегося обобщенного процесса восстановления;
2) впервые получены теоремы, которые позволяют проверить условие Крамера и получить выражение для функций в асимптотиках вероятностей больших уклонений для регенерирующих последовательностей, не обращаясь напрямую к распределению цикла регенерации;
3) впервые получены точные асимптотики вероятностей больших уклонений для момента достижения уровня $n$ случайным блужданием в случайной среде.

**Научная и практическая значимость**. Результаты главы 1 продолжают исследования в области теории больших уклонений для обобщенных процессов восстановления в случае обрывающейся регенерации. Таким образом, они продолжают цикл работ А.А. Боровкова, А.А. Могульского и Е.И. Прокопенко, опубликованных в последнем десятилетии.

Разработанный в главе 2 аппарат для проверки условия Крамера и выражения параметров асимптотики вероятностей больших уклонений для регенерирующих последовательностей открывает дорогу для исследования широкого класса моделей: случайного блуждания в случайной среде, возмущенного случайного блуждания, случайного блуждания в случайном сценарии (случайном медиа) и других. Задача о больших уклонениях для случайного блуждания в случайной среде является достаточно сложной и интересной. Грубая (логарифмическая) асимптотика исследовалась ранее рядом авторов ([7], [8]). Точная асимптотика вероятностей больших уклонений, по-видимому, была получена впервые.

**Степень достоверности** полученных результатов обусловлена знакомством с ним научного сообщества. Результаты неоднократно излагались на научных семинарах, всероссийских и международных конференциях, публиковались в ведущих рецензируемых журналах и согласуются с результатами, полученными другими авторами.

**Апробация работы.** Основные результаты работы докладывались на семинаре "Случайные блуждания, ветвящиеся процессы" кафедры математической статистики и случайных процессов механико-математического факультета МГУ имени М.В. Ломоносова, семинаре отдела дискретной математики МИАН, конференциях "Ломоносов 2018", "Ломоносовские чтения 2019", "Пятая Санкт-Петербургская зимняя молодёжная конференция по теории вероятностей и математической физике" (21-24 декабря 2021 г.) и "Branching Processes, Random Walks and Probability on Discrete Structures" (21–24 июня 2022 г.). Приложения методов, разработанных в разделе 2, излагались на конференции "Вторая конференция Математических центров России. Секция «Теория вероятностей»" (7-11 ноября 2022 г.)

**Личный вклад.** Автором лично доказаны все теоремы, выносимые на защиту.

**Соответствие паспорту научной специальности.** Тема диссертации соответствует паспорту специальности 1.1.4 - «Теория вероятностей и математическая статистика» (физико-математические науки).

Области исследований: 6. Предельные теоремы. 12. Теория восстановления и теория массового обслуживания.

**Публикации.** Основные результаты по теме диссертации изложены в 6 печатных изданиях, из них четыре, [20; 31—33], – работы в журналах, рекомендованных ВАК, и два, [34; 35], – сборники тезисов международных конференций.

**Объем и структура работы.** Диссертация состоит из введения, трёх глав и заключения. Полный объём диссертации составляет 79 страниц. Список литературы содержит 37 наименований.

# Глава 1. Общая задача в собственном и несобственном случае

## 1.1 Основы теории больших уклонений

Прежде чем излагать собственные результаты по теории больших уклонений для регенерирующих последовательностей, обратимся к известным результатам о больших уклонениях для случайных блужданий.

Пусть случайные величины $\kappa_i, i \in \mathbb{N}$, являются независимыми одинаково распределенными (н.о.р.) случайными величинами с $\mathbf{E}\kappa_1 = \mu < +\infty$. Назовем распределение случайной величины $\kappa_1$ *решетчатым*, если найдутся $a$,$b \in \mathbb{R}$, что $\mathbf{P}(\kappa_1 \in a + b\mathbb{Z}) = 1$. В противном случае распределение будем называть *нерешетчатым*.

Положим

$$S_0 := 0, \quad S_n := \sum_{i=1}^{n} \kappa_i, \quad n \in \mathbb{N}.$$

В работе [36] получена точная асимптотика вероятности

$$\mathbf{P}(S_n \geq \theta n), \quad n \to \infty,$$

при фиксированном $\theta$. Доказательство того, что указанное сотношение в тех же условиях выполняется равномерно по $\theta$ в некоторой области, получено в [37]. Для описания асимптотики исследуемой вероятности нам потребуются дополнительные обозначения.

Положим

$$R(h) := \mathbf{E}\exp(h\kappa_1), \quad h^+ := \sup\{h \geq 0 : \ R(h) < +\infty\}.$$

Следуя работе [37], будем предполагать, что величина $h^+$ больше нуля. Введем

$$m(h) := (\ln R(h))', \quad m^+ := \lim_{h \to h^+-} m(h). \tag{1.1}$$

На интервале $(0, h^+)$ функция $\ln R(h)$ аналитична и выпукла, следовательно, функция $m(h)$ монотонна. Таким образом, корректно определена обратная функция к $m(h)$, которую мы обозначим следующим образом:

$$h_\theta : \ m(h_\theta) = \theta, \quad \theta \in (\mu, m^+). \tag{1.2}$$

Положим

$$\sigma^2(h) := m'(h). \tag{1.3}$$

Сформулируем основной результат работы [37].

**Теорема 1.** *Справедливо соотношение*

$$\mathbf{P}(S_n \geq \theta n) \sim \frac{C(\theta)}{\sqrt{2\pi n}\sigma(h_\theta)} \exp(-\Lambda(\theta)n), \quad n \to \infty, \tag{1.4}$$

*которое выполняется равномерно по $\theta$ при $\theta \in [a,b] \in (\mu, m^+)$. Здесь $[a,b]$ – произвольный отрезок, не зависящий от $n$, и*

$$\Lambda(\theta) := \theta h_\theta - \ln R(h_\theta), \quad \theta \in (\mu, m^+). \tag{1.5}$$

*В решетчатом случае дополнительно предполагается, что $\theta n$ принадлежит решетке распределения $\kappa_1$.*

Дальнейшие продвижения в области больших уклонений связаны с результатами, которые носят локальный (в случае решетчатого распределения) или так называемый интегро-локальный характер (нерешетчатый случай), а также по обобщению на многомерный случай сумм н.о.р. случайных векторов.

Пусть $Y_i = (\xi_i, \ \eta_i), i \in \mathbb{N}$, – н.о.р. случайные векторы со значениями в $\mathbb{R}^{d+1}$, $d \geq 1$. Здесь случайный вектор $\xi_1$ принимает значения в $\mathbb{R}^d$. Распределение вектора $Y_1$ будем называть нерешетчатым, если для произвольного вектора $0 \neq \vec{e} \in \mathbb{R}^{d+1}$ распределение случайной величины $\langle Y_1, \vec{e} \rangle$ нерешетчатое. Отметим, что мы разделяем вектор $Y_i$ на $d$-мерную и одномерную часть для удобства последующего использования результатов в отношении регенерирующих последовательностей. Непосредственно для результатов в области теории уклонений это деление несущественно.

Распределение вектора $Y_1$ будем называть арифметическим, если $\mathbf{P}\left(Y_1 \in \mathbb{Z}^{d+1}\right) = 1$ и для произвольной матрицы $C$ с $\det(C) > 1$ выполнено соотношение

$$\mathbf{P}\left(Y_1 \in C\mathbb{Z}^{d+1}\right) < 1.$$

Положим

$$S_k^{\xi} := \sum_{i=1}^{k} \xi_i, \quad S_k^{\eta} := \sum_{i=1}^{k} \eta_i, \quad k \in \mathbb{N}.$$

В работе [3] получены точные асимптотики вероятностей

$$\mathbf{P}\left(S_n^{\xi} = x,\, S_n^{\eta} = s\right)$$

в случае арифметического распределения случайного вектора $Y_1$ и

$$\begin{aligned}&\mathbf{P}\left(S_n^{\xi} \in I_{\Delta_n}(x),\, S_n^{\eta} \in [s,s+\Delta_n)\right),\\ &I_{\Delta_n}(x) := \{y \in \mathbb{R}^d:\ x_i \le y_i < x_i + \Delta_n,\, i = 1,\ldots,d\},\end{aligned}$$

в случае нерешетчатого распределения. Здесь $(x,s) = (x(n), s(n))$ изменяется таким образом, что отношение $(x(n)/n, s(n)/n)$ принадлежит некоторому компакту, описание которого будет дано ниже. Полученные соотношения выполняются равномерно при указанном изменении $(x,s)$.

Как и в одномерном случае, для описания асимптотики вероятностей больших уклонений нам потребуются дополнительные обозначения. Положим

$$\begin{aligned}&R(h,t) := \mathbf{E}\exp\left(\langle h, \xi_1\rangle + t\eta_1\right),\\ &A_R := \operatorname{int}\left\{h \in \mathbb{R}^d, t \in \mathbb{R}:\ R(h,t) < +\infty\right\}.\end{aligned} \tag{1.6}$$

Здесь $\langle\cdot,\cdot\rangle$ используется для обозначения скалярного произведения в $\mathbb{R}^d$, int обозначает внутренность множества.

В работе [3] предполагается, что множество $A_R$ непусто и для любых

$$\vec{e} \in \mathbb{R}^d,\, c \in \mathbb{R}:\ (\vec{e}, c) \ne \left(\vec{0}, 0\right)$$

распределение случайной величины $\langle\vec{e}, \xi_1\rangle + c\eta_1$ является невырожденным. Иными словами, не существует гиперплоскости в $\mathbb{R}^{d+1}$ такой, в которую почти наверно попадает случайный вектор $Y_1$. Введем

$$m(h,t) := \operatorname{grad}\left(\ln R(h,t)\right), \quad M_R := \{m(h,t):\ (h,t) \in A_R\}. \tag{1.7}$$

На множестве $A_R$ функция $\ln R\,(h,t)$ аналитична и выпукла, следовательно, $m\,(h,t)$ взаимно-однозначно отображает множество $A_R$ в $M_R$. Таким образом, корректно определено обратное отображение к $m(h,t)$, которое мы обозначим следующим образом:

$$(h(\theta,\tau),\, t(\theta,\tau)) :\; m\,(h(\theta,\tau),\, t(\theta,\tau)) = (\theta,\, \tau), \quad (\theta,\tau) \in M_R. \tag{1.8}$$

Обозначим матрицу Якоби отображения $m(h,t)$ (или, что то же самое, матрицу Гессе функции $\ln R(h,t)$) следующим образом:

$$\Sigma^2\,(h,t) := m'\,(h,t)\,. \tag{1.9}$$

Сформулируем основной результат работы [3].

**Теорема 2.** *Пусть $Y_i = (\xi_i,\eta_i)$, $i \in \mathbb{N}$, – н.о.р. случайные векторы, $\xi_1 \in \mathbb{R}^d$, $\eta_1 \in \mathbb{R}$. Пусть множество $A_R$, определенное в (1.6), непусто, и при некотором $(h,t) \in A_R$ матрица $\Sigma^2(h,t)$ является невырожденной.*

*1) Пусть распределение $Y_1$ нерешетчатое. Тогда существует такая последовательность $\widehat{\Delta}_n > 0$, $\widehat{\Delta}_n \to 0$, что для произвольной последовательности $\Delta_n > \widehat{\Delta}_n$, $\Delta_n \to 0$ при $n \to \infty$, выполнено соотношение*

$$\mathbf{P}\left(S_n^\xi \in I_{\Delta_n}(x),\, S_n^\eta \in [s,s+\Delta_n)\right) \sim \frac{\Delta_n^{d+1}\exp(-\Lambda\left(\frac{x}{n},\frac{s}{n}\right)n)}{\left(\sqrt{2\pi n}\right)^{d+1}\sqrt{\det\left(\Sigma^2\left(h(\frac{x}{n},\frac{s}{n}),t(\frac{x}{n},\frac{s}{n})\right)\right)}}. \tag{1.10}$$

*2) Пусть распределение $Y_1$ арифметическое и при всех $n$ $(x(n),s(n)) \in \mathbb{Z}^{d+1}$. Тогда при $n \to \infty$*

$$\mathbf{P}\left(S_n^\xi = x,\, S_n^\eta = s\right) \sim \frac{\exp(-\Lambda\left(\frac{x}{n},\frac{s}{n}\right)n)}{\left(\sqrt{2\pi n}\right)^{d+1}\sqrt{\det\left(\Sigma^2\left(h\left(\frac{x}{n},\frac{s}{n}\right),t\left(\frac{x}{n},\frac{s}{n}\right)\right)\right)}}. \tag{1.11}$$

*Здесь*

$$\Lambda\,(\theta,\tau) := \langle\theta, h(\theta,\tau)\rangle + \tau t(\theta,\tau) - \ln R\,(h(\theta,\tau),t(\theta,\tau))\,, \quad (\theta,\tau) \in M_R.$$

*Данные соотношения выполняются равномерно по $(x,s) = (x(n),s(n))$ таким, что $(x,s)/n \in K'$, где $K'$ — произвольное компактное подмножество $M_R$, не зависящее от $n$.*

**Замечание 1.** Отметим здесь, что утверждения теоремы 2 остаются в силе, когда величины $\eta_i$, $i \in \mathbb{N}$, несобственные. Соотношения (1.10) и (1.11) имеют тот же вид.

*Доказательство.* Проведем доказательство в сильно арифметическом случае, в нерешетчатом доказательство аналогично. Заметим, что

$$\mathbf{P}\left(\sum_{i=1}^{n} Y_i = (x,s)\right) = \mathbf{P}\left(\sum_{i=1}^{n} Y_i = (x,s) \middle| \eta_i < +\infty,\, i \le n\right) \mathbf{P}(\eta_1 < +\infty)^n.$$

К первому сомножителю в правой части последнего равенства можно применить теорему 2. Для краткости введем н.о.р. случайные векторы $\widetilde{Y}_i$, имеющие распределение

$$\mathbf{P}\left(\widetilde{Y}_i \in \ A\right) = \mathbf{P}\left(Y_i \in A | \eta_i < +\infty\right).$$

В терминах введенных распределений

$$\mathbf{P}\left(\sum_{i=1}^{n} Y_i = (x,s) \middle| \eta_i < +\infty,\, i \le n\right) = \mathbf{P}\left(\sum_{i=1}^{n} \widetilde{Y}_i = (x,s)\right).$$

Сохраняя обозначения, имеем $\widetilde{R}(h,t) = R(h,t)/\mathbf{P}(\eta < +\infty)$, $\widetilde{M}(h,t) = M(h,t)$, $\widetilde{\Sigma}^2(h,t) = \Sigma^2(h,t)$, $\widetilde{\Lambda}(\theta,\tau) = \Lambda(\theta,\tau) + \ln\left(\mathbf{P}(\eta < +\infty)\right)$. Таким образом, в силу Теоремы А имеем

$$\mathbf{P}\left(\sum_{i=1}^{n} \widetilde{Y}_i = (x,s)\right) \sim \frac{\exp\left(-\widetilde{\Lambda}\left(\frac{x}{n}, \frac{s}{n}\right) n\right)}{\left(\sqrt{2\pi n}\right)^{d+1} \sqrt{\det\left(\widetilde{\Sigma}^2\left(h\left(\frac{x}{n}, \frac{s}{n}\right), t\left(\frac{x}{n}, \frac{s}{n}\right)\right)\right)}} =$$

$$= \frac{\exp(-\Lambda\left(\frac{x}{n}, \frac{s}{n}\right) n)}{\left(\sqrt{2\pi n}\right)^{d+1} \sqrt{\det\left(\Sigma^2\left(h\left(\frac{x}{n}, \frac{s}{n}\right), t\left(\frac{x}{n}, \frac{s}{n}\right)\right)\right)}} \left(\mathbf{P}(\eta_1 < +\infty)\right)^{-n}, \ n \to \infty.$$

Следовательно,

$$\mathbf{P}\left(\sum_{i=1}^{n} Y_i = (x,s)\right) \sim \frac{\exp(-\Lambda\left(\frac{x}{n},\frac{s}{n}\right)n)}{\left(\sqrt{2\pi n}\right)^{d+1}\sqrt{\det\left(\Sigma^2\left(h\left(\frac{x}{n},\frac{s}{n}\right),t\left(\frac{x}{n},\frac{s}{n}\right)\right)\right)}},\ n\to\infty.$$

$\square$

## 1.2 Регенерирующие последовательности

Будем говорить, что последовательность случайных векторов $\{U_n\}_{n\geq 0}$, определенная на некотором вероятностном пространстве $(\Omega,\mathcal{F},\mathbf{P})$, $U_n\in\mathbb{R}^d$, обладает *регенерационной структурой*, если $U_0=0$ и при $n>0$

$$U_n=\begin{cases}\xi_0;\ \eta_0\geq n,\\ \xi_0+\zeta;\ \eta_0=n-k,\,\eta_1>k,\,0<k\leq n,\\ \xi_0+\sum\limits_{j=1}^{r}\xi_j+\zeta;\ \eta_0+\sum\limits_{j=1}^{r}\eta_j=n-k,\,\eta_{r+1}>k,\,0\leq k\leq n,\,r\in\mathbb{N},\end{cases} \tag{1.12}$$

где $\xi_j$, $j\geq 0$, – $d$-мерные случайные векторы, $\eta_0$ – неотрицательная собственная случайная величины, $\eta_j$ – положительные, но, возможно, несобственнные величины, $\zeta$ – случайный вектор в $\mathbb{R}^d$ со следующими свойствами.

1. Векторы $(\xi_j,\eta_j)$, $j\in\mathbb{N}$, одинаково распределены и независимы в совокупности, $\xi_1\in\mathbb{R}^d$, $\eta_1\in\mathbb{N}\cup\{+\infty\}$.
2. Вектор $(\xi_0,\eta_0)$ не зависит от последовательности $\{(\xi_j,\eta_j)\}_{j\in\mathbb{N}}$, $\xi_0\in\mathbb{R}^d$, $\eta_0\in\mathbb{N}_0$, где
$$\mathbb{N}_0:=\mathbb{N}\cup\{0\}.$$
3. Случайный вектор $\zeta$ при любом $r$ при условии события
$$\left\{\eta_0+\sum_{j=1}^{r}\eta_j=n-k,k<\eta_{r+1}<+\infty\right\},\quad n\in\mathbb{N}_0,\,0\leq k\leq n,\,r\in\mathbb{N}_0.$$

имеет распределение, не зависящее от $r$ и $n$, и не зависит от случайных векторов $\{(\xi_j,\eta_j)\}_{j=0}^{r}$ при условии того же события при любом $r \in \mathbb{N}_0$. Будем использовать обозначение $\widehat{\xi}_k$ для вектора с описанным выше распределением. На событии

$$\left\{\eta_0 + \sum_{j=1}^{r} \eta_j = n-k,\ \eta_{r+1} = +\infty\right\}$$

вектор $\zeta$ полагаем равным нулю.

Будем использовать обозначение $(\xi,\eta)$ в качестве общего обозначения для величин с тем же распределением $(\xi_j,\eta_j)$, $j \in \mathbb{N}$. Если

$$\mathbf{P}(\eta < +\infty) = 1,$$

то регенерационную структуру будем называть собственной, если же

$$\mathbf{P}(\eta < +\infty) \in (0,1),$$

то регенерационную структуру будем называть обрывающейся или несобственной.

### Примеры регенерирующих последовательностей

Рассмотрим некоторые примеры процессов, которые допускают представление (1.12), то есть обладают регенерационной структурой.

Самым естественным примером является последовательность н.о.р. случайных векторов $\{X_i,\ i \geq \mathbb{N}\}$. Полагая в данном случае $\eta_0 = 0$, $\eta_i = 1$, $i \in \mathbb{N}$, мы получим, что процесс $\{U_n,\ n \geq 0\}$ является случайным блужданием.

Менее тривиальным примером регенерирующей последовательности является последовательность максимумов случайного блуждания на отрезке $[0,n], n \in \mathbb{N}$.

Пусть $e$ – некоторый ненулевой фиксированный вектор в $\mathbb{R}^d$ такой, что

$$0 < \mathbf{P}(\langle e, X_1\rangle > 0) < 1.$$

Положим $\eta_0 = 0$,

$$S_0^\eta = 0,\ S_k^\eta := \min\{j \geq T_{i-1}:\ \langle e, S_j - S_{T_{i-1}}\rangle > 0\},\ \eta_k = S_k^\eta - S_{k-1}^\eta,\ k \in \mathbb{N}.$$

Здесь

$$S_0 = 0, \quad S_k = \sum_{j=1}^{k} X_j, \quad k \in \mathbb{N}.$$

Положим

$$M_n = \sum_{i=1}^{N_n} \xi_i = \max_{0 \leq k \leq n} \{\langle e, S_k\rangle\}, \quad \xi_i = \langle e, S_{T_i} - S_{T_{i-1}}\rangle,\ N_n = \max\{k:\ S_k^\eta \leq n\}.$$

Процесс $\{M_n,\ n \geq 0\}$ является максимумом случайного блуждания на отрезке $[0,n]$ с шагами $\langle e, X_i\rangle$, $i \in \mathbb{N}$. Отметим, что в случае $\mathbf{E}\langle e, X_i\rangle \geq 0$ регенерация является собственной, в то время как в случае $\mathbf{E}\langle e, X_i\rangle < 0$ – несобственной. При этом,

$$\mathbf{P}(\eta_1 = +\infty) = \mathbf{P}(\langle e, S_i\rangle \leq 0,\ i \in \mathbb{N}) > 0.$$

Отметим, что, во-первых, для одного и того же процесса $\{X_i, i \in \mathbb{N}\}$ регенерация может быть выбрана различными способами. Во-вторых, использование различных регенераций приводит к различным процессам, которые могут быть исследованы схожими методами.

Еще одним естественным примером регенерирующей последовательности является однородная марковская цепь с конечным или счетным множеством состояний. Пусть $g$ – некоторый функционал, отображающий пространство состояний цепи в $\mathbb{R}^d$ и

$$U_n = \sum_{k=1}^{n} g(\varkappa_i).$$

Пусть цепь $\{\varkappa_i,\ i \geq 0\}$ с вероятностью 1 стартует из состояния $x_0$. Положим

$$T_0 = 0,\ T_i = \min\{k > T_{i-1}:\ \varkappa_k = x_0\}, \quad i \in \mathbb{N}.$$

Используя последовательность $\{T_i, i \geq 0\}$, определим случайные векторы $(\xi_i, \eta_i)$, $i \geq 1$:

$$\xi_i = \sum_{j=1+T_{i-1}}^{T_i} g(\varkappa_j),\ \eta_i = T_i - T_{i-1}.$$

В силу марковского свойства случайные векторы $(\xi_i, \eta_i), i \in \mathbb{N}$, являются н.о.р. случайными векторами.

Таким образом, при любом $n \in \mathbb{N}$ выполнено

$$U_n = \sum_{i=1}^{N_n} \xi_i + \zeta_n, \quad N_n = \max\{k \in \mathbb{N}: \ T_k \le n\}.$$

Здесь для произвольных $r \ge 0, n \in \mathbb{N}, k \le n$ выполнено соотношение

$$\mathbf{P}(\zeta_n = x|(\xi_i, \eta_i), 0 \le i \le r, T_r = n-k, \ \eta_{r+1} > k\} = \\ \mathbf{P}(U_k = x|\varkappa_0 = x_0, \varkappa_i \ne x_0, i \le k).$$

Если состояние $x_0$ является возвратным, то таким образом выбранная регенерационная структура является собственной, в противном случае – несобственной.

## Известные результаты о больших уклонениях для регенерирующих последовательностей

Будем рассматривать асимптотику вероятностей больших уклонений в локальной форме

$$\mathbf{P}(U_n = x), \quad n \to \infty.$$

Мы будем использовать фразу "большие уклонения", однако, в рассматриваемый диапазон изменения $x$ попадают и умеренные, и нормальные уклонения. Данное обстоятельство обеспечивается рассмотрением именно асимптотики в локальной форме. Как и в случае случайных блужданий локальная (интегро-локальная) асимптотика имеет один и тот же вид как в зоне больших, так и в зоне нормальных уклонений.

Введем при $h \in \mathbb{R}^d$ и $t \in \mathbb{R}$ следующие функции:

$$R(h,t) := \mathbf{E}(\exp(\langle h, \xi_1\rangle + t\eta_1);\ \eta_1 < +\infty) = \tag{1.13}$$
$$= \sum_{k=1}^{+\infty} e^{tk}\mathbf{E}(\exp(\langle h, \xi_1\rangle);\ \eta_1 = k),$$

$$\widehat{R}(h,t) := \sum_{k=0}^{+\infty} e^{tk}\widehat{r}_k(h), \quad \widehat{r}_k(h) := \mathbf{E}\exp\left(\left\langle h, \widehat{\xi}_k\right\rangle\right)\mathbf{P}(k < \eta_1 < +\infty), \tag{1.14}$$

$$R_0(h,t) := \mathbf{E}\exp(\langle h, \xi_0\rangle + t\eta_0) = \sum_{k=0}^{+\infty} e^{tk}\mathbf{E}(\exp(\langle h, \xi_0\rangle);\ \eta_0 = k), \tag{1.15}$$

$$\widehat{R}_0(h,t) := \sum_{k=0}^{+\infty} e^{tk}\mathbf{E}(\exp(\langle h, \xi_0\rangle);\ \eta_0 > k). \tag{1.16}$$

Введем множество

$$A := \operatorname{int}\left\{h \in \mathbb{R}^d, t \in \mathbb{R}:\ \max\left(R(h,t), \widehat{R}(h,t), R_0(h,t), \widehat{R}_0(h,t)\right) < +\infty\right\}.$$

Пусть

$$B := \operatorname{int}\{h \in \mathbb{R}^d:\ \exists t:\ (h,t) \in A,\ 1 < R(h,t) < +\infty\}. \tag{1.17}$$

Будем предполагать, что множество $B$ непусто. На множестве $B$ определим неявную функцию

$$t_0(h):\ R(h,t_0(h)) = 1.$$

Данное определение корректно в силу монотонности функции $R(h_0,t)$ как функции аргумента $t$ при каждом фиксированном $h_0$.

Положим

$$B' := \operatorname{int}\{-\operatorname{grad} t_0(h):\ h \in B\}.$$

Пусть

$$G(h) := \widehat{R}(h,t_0(h))R_0(h,t_0(h)), \quad B_1 := \operatorname{int}\{h \in B : G(h) < +\infty\}, \tag{1.18}$$

$$B_0 := \{h \in B:\ t_0(h) = 0\},\ B_1' := \{-\operatorname{grad} t_0(h),\ h \in B_1\}, \tag{1.19}$$

$$B_0' := \operatorname{int}\{-\beta \operatorname{grad} t_0(h),\ h \in B_0,\ \beta \in (0,1)\}. \tag{1.20}$$

Наряду с непустотой множеств $B_1'$ и $B_0'$ нам потребуются условия на решетки распределений случайных векторов $(\xi_0,\eta_0)$, $(\xi_1,\eta_1)$ и $\widehat{\xi}_k$, $k \geq 0$.

Собственную регенерационную структуру последовательности $\{U_n, n \geq 0\}$ будем называть *сильно арифметической*, если выполнены следующие свойства:

1) распределение случайного вектора $Y := (\xi,\eta)$ таково, что для произвольного $e \in \mathbb{R}^{d+1}$ $\langle Y,e \rangle$ не является константой;
2) распределение $Y$ решетчато, то есть найдутся матрица $C$ и вектор $b$, что
$$\mathbf{P}\left(Y \in b + C\mathbb{Z}^{d+1}\right) = 1.$$
Будем считать, что $b$ и $C$ выбираются таким образом, что $C$ имеет наибольший возможный определитель;
3) решетка распределения $Y$ "вертикальна", то есть $C_{i,d+1} = C_{d+1,j} = 0$ для $1 \leq i,j \leq d$, и $C_{d+1,d+1} = 1$;
4) величину $b$ в 2) можно выбрать равной нулю;
5) справедливо соотношение
$$\mathbf{P}((\xi_0,\eta_0) \in C\mathbb{Z}^{d+1}) = 1.$$
6) Для любого $k \geq 0$ справедливо соотношение
$$\mathbf{P}\left(\widehat{\xi}_k \in C_\xi \mathbb{Z}^d\right) = 1, \quad (C_\xi)_{ij} := C_{i,j},\, i,j = 1,\dots,d.$$

Множество $C\mathbb{Z}^{d+1}$ назовем решеткой распределения $Y$. При выполнении условий 1)–4) распределение случайного вектора $Y$ будем называть *сильно арифметическим*. Отметим, что в таком случае, решетка распределения $Y$ имеет вид $C_\xi \mathbb{Z}^d \times \mathbb{Z}$. Положим $q_\xi := |\det C_\xi|$.

Несобственную регенерационную структуру последовательности $\{U_n, n \geq 0\}$ назовем сильно арифметической, если при замене распределения случайного вектора $Y$ собственным распределением, задаваемым формулой
$$\mathbf{P}(Y \in F|\ ||Y|| < +\infty), \quad F \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^{d+1}),$$
построенная регенерационная структура будет сильно арифметической.

Сформулируем полученные ранее результаты об асимптотике вероятностей больших уклонений для случая последовательностей, обладающих собственной регенерационной структурой ([19]).

**Теорема 3.** *Пусть последовательность $\{U_n, n \geq 0\}$ обладает собственной сильно арифметической регенерационной структурой и множество $B_1$, определенное соотношением (1.18), непусто. Пусть $\theta = \theta(n) = x/n$. Тогда*

$$\mathbf{P}\,(U_n = x) \sim q_\xi \frac{F_1(\theta)}{n^{d/2}} \exp(-L(\theta)n),\; n \to \infty. \tag{1.21}$$

*Соотношения выполнены равномерно по $\theta = \theta(n) \in K_1'$, $K_1'$ — произвольное компактное подмножество $B_1'$, и при всех $n$ векторы $(x(n),n)$ принадлежат решетке распределения $C_\xi \mathbb{Z}^d \times \mathbb{Z}$.*

*Здесь*

$$L(\theta) := \langle \theta,\, h_\theta \rangle - (-t_0(h_\theta)), \quad h_\theta :\; -\operatorname{grad} t_0(h_\theta) = \theta,\, \theta \in B', \tag{1.22}$$

$$\alpha_0(h) := \left( \ln R(h,t)_t'|_{h,t_0(h)} \right)^{-1}, \quad F_1(\theta) := \frac{G(h_\theta)\alpha_0(h_\theta)}{\sqrt{(2\pi)^d \det(-t_0''(h_\theta))}}. \tag{1.23}$$

**Замечание 2.** В ряде приложений последовательность $\{U_n, n \geq 0\}$ обладает регенерационной структурой, которая не является сильно арифметической. В то же время существует такой вектор $\vec{q}$ в $\mathbb{R}^d$, что регенерационная структура $\{U_n - n\vec{q}, n \geq 0\}$ является сильно арифметической. Тогда для исследования вероятностей больших уклонений последовательности $\{U_n - n\vec{q}, n \geq 0\}$ применима теорема 3. При этом циклами регенерации для указанной последовательности будут случайные векторы $(\xi_i - \vec{q}\eta_i, \eta_i), i \in \mathbb{N}$. Таким образом, можно применять теорему 3 в случае, если $\{U_n - n\vec{q}\}$ имеет сильно арифметическую регенерационную структуру при некотором $\vec{q}$, получая асимптотику вероятностей больших уклонений вида

$$\mathbf{P}(U_n = n\vec{q} + x), \quad n \to \infty,$$

где $x \in C_\xi \mathbb{Z}^d$.

**Замечание 3.** Функция $L(\theta)$, следуя определению А.А. Боровкова и А.А. Могульского (см. [11]), является второй функцией уклонений случайного вектора

$Y_1 = (\xi_1,\eta_1)$, которая задается соотношением

$$\Lambda_2(\theta,\beta) := \inf_{\alpha>0} \frac{1}{\alpha}\Lambda\left(\frac{\theta}{\alpha},\frac{\beta}{\alpha}\right), \quad L(\theta) = \Lambda_2(\theta,1).$$

При $\theta \in B'$ минимум достигается в единственной точке $\alpha_0(h_\theta)$.

**Замечание 4.** Как уже отмечалось во введении, если при каждом неотрицательном $k$ выполнено соотношение $\widehat{\xi}_k = 0$, то процесс $U_n$ является обобщенным процессом восстановления. Соотношение (1.21) согласуется с результатом [17] в случае $d = 1$ и результатом [18] в случае $d > 1$, в указанных работах рассматривались асимптотики вероятностей больших уклонений в локальной форме для арифметических обобщенных процессов восстановления.

## 1.3 Несобственный случай

В случае несобственной регенерации выделяется еще одна зона уклонений, в которой асимптотика имеет качественно иной вид.

**Теорема 4.** *Пусть последовательность $\{U_n, n \geq 0\}$ обладает несобственной сильно арифметической регенерацией, и множество $B_0'$, определенное соотношением (1.20), непусто. Пусть при всех $k \geq 0$ случайные векторы $\widehat{\xi}_k$ равны нулю и $(\xi_0,\eta_0) = 0$. Пусть $\theta = \theta(n) = x/n$. Тогда*

$$\mathbf{P}\left(U_n = x\right) \sim q_\xi \frac{F_0(\theta)}{n^{(d-1)/2}} \exp(-L_0(\theta)n),\ n \to \infty. \tag{1.24}$$

*Соотношения выполнены равномерно по $\theta = \theta(n) \in K_0'$, $K_0'$ — произвольное компактное подмножество $B_0'$, и при всех $n$ векторы $(x(n),n)$ принадлежат решетке распределения $C_\xi\mathbb{Z}^d \times \mathbb{Z}$.*

*Здесь*

$$\beta_0 = \beta_0(\theta) \in \mathbb{R}: \; t_0\left(h_{\theta/\beta_0}\right) = 0, \quad \gamma = \gamma(\theta) := \theta/\beta_0(\theta) \in \mathbb{R}^d, \, \theta \in B_0', \tag{1.25}$$

$$L_0(\theta) := \left\langle h_{\gamma(\theta)}, \theta \right\rangle = \left\langle h_{\gamma(\theta)}, \gamma(\theta) \right\rangle \beta_0(\theta), \tag{1.26}$$

$$G(\gamma) := \frac{\alpha_0(h_\gamma)\mathbf{P}(\eta = +\infty)}{\sqrt{-\det(t_0''(h_\gamma))}\sqrt{\langle \gamma, (-t_0''(h_\gamma))^{-1}\gamma \rangle}}, \tag{1.27}$$

$$F_0(\theta) := G(\gamma(\theta)) \left(\sqrt{2\pi\beta_0(\theta)}\right)^{-(d-1)}. \tag{1.28}$$

**Замечание 5.** Функция $L_0$ также допускает представление в терминах второй функции уклонений, а именно:

$$L_0(\theta) = \inf_{\beta \in (0,1]} \beta \Lambda_2(\theta, \beta). \tag{1.29}$$

Отметим, что представление (1.29) справедливо также для функции $L(\theta)$, однако, при этом минимум заведомо достигается при $\beta = 1$, если $\theta \in B_1'$.

**Замечание 6.** В случае $d = 1$

$$\sqrt{-\det(t_0''(h_\gamma))}\sqrt{\langle \gamma, (-t_0''(h_\gamma))^{-1}\gamma \rangle} = \gamma, \; G(\gamma) = \frac{\alpha_0(h_\gamma)\mathbf{P}(\eta = +\infty)}{\gamma}.$$

Теорема 3 получена в совместной работе [19] автора и А.В. Шкляева в случае собственной регенерационной структуры, теорема 4 получена в работе автора [31]. В указанных работах рассматривается также нерешетчатый случай и получены аналогичные теоремы в интегро-локальной форме. Однако, в дальнейших приложениях мы будем исследовать именно решетчатые приложения данных результатов, теоремы приводятся лишь в этом случае.

*Доказательство Теоремы 4.* 1) Пусть, как и прежде, $\theta(x,n) = x/n \in K_0'$. Зафиксируем $C > 0$ и представим исследуемые вероятности $\mathbf{P}\left(U_n = x\right)$ следующим образом:

$$\mathbf{P}\left(U_n = x\right) = \widetilde{P}_0(x,n,C) + \widetilde{S}_0(x,n,C),$$

$$\widetilde{P}_0(x,n,C) := \sum_{k=1}^{+\infty} \mathbf{P}\left(S_k^\xi = x, |S_k^\eta - \beta_0(\theta)n| \le C\sqrt{n}, S_{k+1}^\eta > n\right),$$

$$\widetilde{S}_0(x,n,C) := \mathbf{P}\left(U_n = x\right) - \widetilde{P}_0(x,n,C).$$

Рассмотрим функции $\beta_0(\theta)$ и $\gamma(\theta)$, заданные в (1.25), которые для краткости будем обозначать $\beta_0$ и $\gamma$ соответственно. Введем также следующие обозначения:

$$\sigma_1^2 = \sigma_1^2(\theta) := \langle \gamma(\theta), (-t_0''(h_{\gamma(\theta)}))^{-1}\gamma(\theta)\rangle/\beta_0(\theta),\ \theta \in B_0', \tag{1.30}$$

$$G_0(x,n,C) := q_\xi \frac{\alpha_0(h_\gamma)\mathbf{P}(\eta = +\infty)\exp(-\langle h_\gamma, x\rangle)}{\left(\sqrt{2\pi n}\right)^{d-1}\sqrt{2\pi}\left(\sqrt{\beta_0}\right)^d\sqrt{\det(-t_0''(h_\gamma))}}\int\limits_{-C}^{C}\exp\left(-\frac{\sigma_1^2 s^2}{2}\right)ds,$$

$$\widehat{G}_0(x,n) := \frac{\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\exp\left(-\frac{\sigma_1^2 s^2}{2}\right)ds}{\int\limits_{-C}^{C}\exp\left(-\frac{\sigma_1^2 s^2}{2}\right)ds}G_0(x,n,C) = \frac{q_\xi G(\gamma)}{\left(\sqrt{2\pi\beta_0 n}\right)^{d-1}}\exp(-\langle h_\gamma, x\rangle).$$

Для оценки рассматриваемых вероятностей снизу нам потребуется следующее утверждение.

**Лемма 1.** *Пусть распределение вектора $(\xi_1, \eta_1)$ сильно арифметическое и векторы $x = x(n) \in \mathbb{R}^d$ таковы, что при всех $n$ $x/n \in K_0'$, $K_0'$ — произвольное компактное подмножество $B_0'$. Дополнительно, при всех $n$ векторы $(x(n),n)$ принадлежат решетке $C_\xi\mathbb{Z}^d\times\mathbb{Z}$. Тогда для любого $C > 0$ выполнено следующее соотношение*

$$\widetilde{P}_0(x,n,C) \sim G_0(x,n,C),\ n \to \infty. \tag{1.31}$$

*Соотношение (1.31) выполняется равномерно по рассматриваемым $x$.*

Для произвольного $\varepsilon \in (0,1)$ выберем такое $C = C(\varepsilon, K_0') > 0$, что

$$\limsup_{n\to\infty,\ x/n\in K_0'} \frac{\widehat{G}_0(x,n)}{G_0(x,n,C)} \le \frac{1}{1-\varepsilon}.$$

Применяя для данного $C$ лемму 1, получаем

$$\liminf_{\substack{n\to\infty,\\ x/n\in K_0'}} \frac{\mathbf{P}\left(U_n = x\right)}{\widehat{G}_0(x,n)} \ge (1-\varepsilon)\liminf_{\substack{n\to\infty,\\ x/n\in K_0'}} \frac{\widetilde{P}_0(x,n,C)}{G_0(x,n,C)} = 1-\varepsilon. \tag{1.32}$$

Для оценки вероятностей сверху нам потребуется следующее утверждение.

**Лемма 2.** *Пусть распределение вектора $(\xi_1, \eta_1)$ сильно арифметическое и векторы $x = x(n) \in \mathbb{R}^d$ таковы, что при всех $n$ $x/n \in K_0'$, $K_0'$ — произвольное компактное подмножество $B_0'$. Дополнительно, при всех $n$ векторы $(x(n),n)$ принадлежат решетке $C_\xi \mathbb{Z}^d \times \mathbb{Z}$. Тогда для произвольного $\varepsilon > 0$ найдется такое положительное $C$, независящее от $n$, что при всех достаточно больших $n$ и всех $x$, рассматриваемых в лемме 1, выполнено неравенство*

$$\widetilde{S}_0(x,n,C) \le \varepsilon \widehat{G}_0(x,n). \tag{1.33}$$

В силу леммы 2 для произвольного $\varepsilon > 0$ найдется такое $C = C(\varepsilon, K_0')$, что

$$\widetilde{S}_0(x,n,C) \le \varepsilon \widehat{G}_0(x,n).$$

В то же время, для данного $C$ справедлива лемма 1, откуда

$$\limsup_{\substack{n\to\infty,\\ x/n\in K_0'}} \frac{\mathbf{P}\left(U_n = x\right)}{\widehat{G}_0(x,n)} \le \limsup_{\substack{n\to\infty,\\ x/n\in K_0'}} \frac{\widetilde{P}_0(x,n,C)}{G_0(x,n,C)} + \limsup_{\substack{n\to\infty,\\ x/n\in K_0'}} \frac{\widetilde{S}_0(x,n,C)}{G_0(x,n,C)} \le 1+\varepsilon. \tag{1.34}$$

Таким образом, теорема 4 следует из соотношений (1.32) и (1.34). □

### 1.3.1 Вспомогательные утверждения

**Лемма 3.** *1) При каждом фиксированном $\theta \in B'$ функция*

$$g(\alpha,\theta) = \alpha\Lambda(\theta/\alpha, 1/\alpha), \quad \alpha > 0, \tag{1.35}$$

*определена на некотором непустом интервале $(a(\theta), b(\theta))$, является бесконечно дифференцируемой на этом интервале, выпуклой вниз.*

*2) Минимум функции $g(\alpha,\theta)$ по $\alpha > 0$ достигается внутри этого интервала в единственной точке $\alpha_0(h_\theta)$, введенной в (1.23). Частные производные* *функции на этом интервале заданы соотношениями*

$$\frac{\partial}{\partial\alpha}g(\alpha,\theta) = -\ln R(h(\theta/\alpha, 1/\alpha), t(\theta/\alpha, 1/\alpha)), \tag{1.36}$$

$$\frac{\partial^2}{\partial\alpha^2}g(\alpha,\theta) = \frac{1}{\alpha}\left\langle \left(\frac{\theta}{\alpha}, \frac{1}{\alpha}\right), \Sigma^{-2}\left(h\left(\frac{\theta}{\alpha}, \frac{1}{\alpha}\right), t\left(\frac{\theta}{\alpha}, \frac{1}{\alpha}\right)\right)\left(\frac{\theta}{\alpha}, \frac{1}{\alpha}\right)\right\rangle. \tag{1.37}$$

*В то же время*

$$g(\alpha_0(h_\theta),\theta) = L(\theta), \quad \frac{\partial}{\partial\alpha}g(\alpha_0(h_\theta),\theta) = 0, \quad \sigma^2(\theta) := \frac{\partial^2}{\partial\alpha^2}g(\alpha_0(h_\theta),\theta) > 0. \tag{1.38}$$

*3) Для произвольного компакта $K' \subset B'$ найдется такое положительное $\delta$, зависящее только от компакта $K'$, что для каждого $\theta \in K'$ выполнено соотношение $(\alpha_0(h_\theta) - \delta, \alpha_0(h_\theta) + \delta) \subseteq (a(\theta), b(\theta))$.*

**Лемма 4.** *В силу определения множества $B_0'$ для каждого $\theta \in B_0'$ найдется такое $\beta_0(\theta) \in (0,1)$, что $t_0\left(h_{\theta/\beta_0(\theta)}\right) = 0$. При этом функция*

$$g_1(\beta,\theta) := \beta L\left(\theta/\beta\right) \tag{1.39}$$

*как функция переменного $\beta$ определена на некотором непустом интервале $(\beta_0(\theta) - \delta, \beta_0(\theta) + \delta)$ и является на нем бесконечно дифференцируемой и выпуклой вниз. Частные производные функции на этом интервале заданы соотношениями*

$$\frac{\partial}{\partial\beta}g_1(\beta,\theta) = t_0(h_{\theta/\beta}), \quad \frac{\partial^2}{\partial\beta^2}g_1(\beta,\theta) = \frac{1}{\beta}\left\langle \frac{\theta}{\beta}, (-t_0''(h_{\theta/\beta}))^{-2}\frac{\theta}{\beta}\right\rangle. \tag{1.40}$$

.

*В то же время*

$$g_1(\beta_0(\theta),\theta) = \langle h_\gamma, \theta\rangle, \quad \frac{\partial}{\partial\beta}g_1(\beta_0(\theta),\theta) = 0, \quad \frac{\partial^2}{\partial\beta^2}g_1(\beta_0(\theta),\theta) = \sigma_1^2(\theta), \tag{1.41}$$

*где, как и прежде, $\gamma = \gamma(\theta) = \theta/\beta_0(\theta)$, $\sigma_1^2(\theta)$ определена в (1.30).*

*При этом для произвольного компакта $K_0' \subset B_0'$ найдется такое положительное $\delta_2$, зависящее только от компакта $K_0'$, что для каждого $\theta \in K_0'$ величина $g_1(\beta,\theta)$ определена как функция $\beta$ на интервале $(\beta_0(\theta) - \delta_2, \beta_0(\theta) + \delta_2)$.*

**Лемма 5.** *Пусть распределение вектора $X = (\xi_1, \eta_1)$ сильно арифметическое и векторы $x = x(n) \in \mathbb{R}^d$ таковы, что при всех $n$ $x/n \in K'$, $K'$ — произвольное компактное подмножество $B'$. Дополнительно, при всех $n$ векторы $(x(n),n)$ принадлежат решетке $C_\xi \mathbb{Z}^d \times \mathbb{Z}$. Тогда для произвольного $C > 0$ соотношение*

$$\sum_{\substack{k \in \mathbb{N}: \\ |k - \alpha_0 n| \le C\sqrt{n}}} \mathbf{P}\left(S_k^\xi = x, S_k^\eta = n\right) \sim$$

$$\sim \frac{q_\xi \exp(-L(x/n)n)}{\left(\sqrt{2\pi n}\right)^d \sqrt{2\pi}\left(\sqrt{\alpha_0}\right)^{d+1} \sqrt{\det(\Sigma^2(h_0,t_0))}} \int_{-C}^{C} \exp\left(-\frac{\sigma^2 u^2}{2}\right) du, \; n \to \infty,$$

*выполнено равномерно по рассматриваемым $x$ и $n$. Здесь*

$$\alpha_0 = \alpha_0(h_{x/n}),\; \kappa_0 = (x/(\alpha_0 n), 1/\alpha_0),\; h_0 = h(\kappa_0),$$
$$t_0 = t(\kappa_0),\; \sigma^2 = \sigma^2(x/s) = \langle \kappa_0, \Sigma^{-2}(h_0,t_0)\kappa_0\rangle/\alpha_0.$$

**Лемма 6.** *Пусть распределение вектора $X = (\xi_1, \eta_1)$ сильно арифметическое. Тогда для произвольного положительного $\varepsilon$ найдется такое положительное $C$, независящее от $n$, что при всех достаточно больших $n$ и всех $(x,n)$, рассматриваемых в лемме 5, выполнено неравенство*

$$\sum_{\substack{k \in \mathbb{N}: \\ |k - \alpha_0 n| > C\sqrt{n}}} \mathbf{P}\left(S_k^\xi = x, S_k^\eta = n\right) \le \varepsilon \frac{q_\xi \left(\sqrt{2\pi n}\right)^{-d} \exp(-L(x/n)n)}{\sqrt{2\pi}\left(\sqrt{\alpha_0}\right)^{d+1} \sqrt{\det(\Sigma^2(h_0,t_0))}}.$$

**Лемма 7.** *Введем для краткости следующие обозначения:*

$$E(x,n) := \sum_{k \in \mathbb{N}} \mathbf{P}\left(S_k^\xi = x, S_k^\eta = n\right), \tag{1.42}$$

$$Q(x,n) := q_\xi \frac{\alpha_0(h_{x/n}) \exp(-L(x/n)n)}{\left(\sqrt{2\pi n}\right)^d \sqrt{\det(-t_0''(h_{x/n}))}}. \tag{1.43}$$

*Пусть множество $B$, определенное соотношением (1.17), непусто и распределение вектора $(\xi_1, \eta_1)$ сильно арифметическое. Пусть $x = x(n)$ и $n$ изменяются таким образом, что отношение $x(n)/n$ принадлежит некоторому* *компакту $K' \subset B'$. Тогда справедливо соотношение*

$$E(x,n) \sim Q(x,n),\ n \to \infty. \tag{1.44}$$

*Соотношение выполняется равномерно по рассматриваемым $x:\ x/n \in K'$.*

### 1.3.2 Доказательства вспомогательных утверждений

*Доказательство леммы 1.* Введем следующее множество индексов

$$H_0 = H_0(x,n,C) := \left\{j \in \mathbb{Z}:\ |\beta_0 n + u_j| \le C\sqrt{n}\right\}. \tag{1.45}$$

Здесь $u_j$ – неубывающий по j набор натуральных чисел из диапазона $|k-\beta_0 n| \le C\sqrt{n}$. Также для краткости будем использовать обозначения $\theta = x/n$, $\beta_0 = \beta_0(\theta)$, $\gamma = \gamma(\theta)$ и $\sigma_1^2 = \sigma_1^2(\theta)$, где функции $\beta_0$, $\gamma$ определены ранее в (1.25), $\sigma_1^2$ – в (1.30).

Исследуемая сумма вероятностей

$$\widetilde{P}_0(x,n,C) = \sum_{k=1}^{+\infty} \mathbf{P}\left(S_k^{\xi} = x, |S_k^{\eta} - \beta_0 n| \le C\sqrt{n}, S_{k+1}^{\eta} > n\right)$$

равна

$$\widetilde{P}_0(x,n,C) = \sum_{j \in H_0} E(x, \beta_0 n + u_j)\mathbf{P}(\eta > n - \beta_0 n - u_j), \tag{1.46}$$

где функция $E(x,\cdot)$ введена ранее в (1.42). Заметим, что соотношение

$$\mathbf{P}(\eta > n - \beta_0 n - j) \to \mathbf{P}(\eta = +\infty),\ n \to \infty$$

выполнено равномерно по $j \in H_0$ и рассматриваемым $x/n \in K_0'$. Далее, покажем, что соотношение

$$E(x, \beta_0 n + u_j) \sim \frac{q_{\xi}\alpha_0(h_{\gamma})\exp(-\langle h_{\gamma}, x\rangle)}{\left(\sqrt{2\pi\beta_0 n}\right)^d \sqrt{\det(-t_0''(h_{\gamma}))}} \exp\left(-\frac{\sigma_1^2\,(u_j)^2}{2n}\right) \tag{1.47}$$

выполнено равномерно по рассматриваемым $x/n \in K_0'$ и $j \in H_0$ при $n \to \infty$. Действительно, в силу леммы 7

$$E(x, \beta_0 n + u_j) \sim Q(x, \beta_0 n + u_j). \tag{1.48}$$

В силу непрерывности и положительности $\alpha_0(h_\theta)$ и $\det(-t_0''(h_\theta))$ как функций переменного $\theta$ на компакте $K_0'$ имеем

$$\frac{\alpha_0\left(h_{\frac{x}{\beta_0 n + u_j}}\right)\left(\sqrt{2\pi(\beta_0 n + u_j)}\right)^{-d}}{\sqrt{\det(-t_0''(h_{x/(\beta_0 n + u_j)}))}} \sim \frac{\alpha_0\left(h_\gamma\right)}{\left(\sqrt{2\pi\beta_0 n}\right)^d \sqrt{\det(-t_0''(h_\gamma))}} \tag{1.49}$$

при $n \to \infty$ равномерно по рассматриваемым $x$ и $j$, где, как и прежде, $\gamma = \gamma(\theta) = \theta/\beta_0(\theta) = x/(\beta_0 n)$.

Для доказательства соотношения (1.47) остается показать, что

$$\exp\left(-L\left(\frac{x}{\beta_0 n + u_j}\right)(\beta_0 n + u_j)\right) \sim \exp(-\langle h_\gamma, x\rangle)\exp\left(-\frac{\sigma_1^2\,(u_j)^2}{2n}\right) \tag{1.50}$$

при $n \to \infty$ равномерно по рассматриваемым $j$ и $x$. Заметим, что

$$L\left(\frac{x}{\beta_0 n + u_j}\right)(\beta_0 n + u_j) = g_1\left(\beta_0 + \frac{u_j}{n}, x/n\right) n,$$

где функция $g_1(\cdot, \theta)$ задана уравнением (1.39). Используя лемму 4, в силу формулы Тейлора получаем

$$g_1\left(\beta_0 + \frac{u_j}{n}, x/n\right) n = \langle h_\gamma, x\rangle + \frac{\sigma_1^2}{2}\frac{(u_j)^2}{n} + o(1) \tag{1.51}$$

при $n \to \infty$, где $o(1)$ равномерно мало по рассматриваемым $x$ и $j$. Из соотношения (1.51) вытекает соотношение (1.50), откуда, принимая во внимание (1.49), получаем (1.47).

Отметим, что доказанное соотношение (1.47) можно переписать в виде

$$E(x, \beta_0 n + u_j) \sim Q(x, \beta_0 n)\exp\left(-\frac{\sigma_1^2\,(u_j)^2}{2n}\right),$$

где функция $Q$ введена ранее в (1.43). Таким образом, в силу соотношения (1.46) для произвольного $\varepsilon > 0$ при всех достаточно больших $n$ справедливы неравенства

$$(1-\varepsilon)\widetilde{Q}\left(\frac{x}{n}, n, C\right) \leq \frac{\widetilde{P}_0(x,n,C)}{\sqrt{n}Q(x,\beta_0 n)\mathbf{P}(\eta = +\infty)} \leq (1+\varepsilon)\widetilde{Q}\left(\frac{x}{n}, n, C\right), \quad (1.52)$$

где

$$\widetilde{Q}(x/n, n, C) := \sum_{j\in H_0} \frac{1}{\sqrt{n}} \exp\left(-\frac{\sigma_1^2(x/n)\,(u_j)^2}{2n}\right).$$

Суммы $\widetilde{Q}(\theta, n, C)$ при любом $\theta \in K_0'$ являются интегральными для интеграла

$$\int\limits_{-C}^{C} \phi_0(u,\theta)du, \quad \phi_0(u,\theta) := \exp\left(-\frac{\sigma_1^2(\theta)u^2}{2}\right) \quad (1.53)$$

с шагом разбиения $1/\sqrt{n}$ и сходятся к нему равномерно по $\theta \in K_0'$ при $n \to \infty$. Функция $\sigma_1^2(\cdot)$ отделена от нуля и ограничена, следовательно, интеграл (1.53) отделен от нуля при $\theta \in K_0'$, откуда отношение сумм $\widetilde{Q}(x/n, n, C)$ к интегралу (1.53) стремится к единице при $n \to \infty$ равномерно по рассматриваемым $x$.

Таким образом, из двойного неравенства (1.52) в силу произвольности $\varepsilon$ вытекает лемма 1. □

*Доказательство леммы 2.* Положим для краткости $\theta = x/n$. Доказательство леммы проведем в два этапа.

1) Покажем, что для произвольного $\varepsilon > 0$ найдется такое положительное $C$, которое зависит только от компакта $K_0'$ и $\varepsilon$, что при всех достаточно больших $n$ и всех таких $x$, что $x/n \in K_0'$, выполнено неравенство

$$\widetilde{S}_{0,1}(x,n,C) \leq \varepsilon \widehat{G}_0(x,n), \quad (1.54)$$

$$\widetilde{S}_{0,1}(x,n,C) := \sum_{k=1}^{+\infty} \mathbf{P}\left(S_k^\xi = x, C\sqrt{n} < |S_k^\eta - \beta_0(\theta)n| \leq n^{3/5}\right).$$

Введем множество индексов

$$\widetilde{H}_0 = \widetilde{H}_0(x,n,C) := \left\{ j\in\mathbb{Z} : C\sqrt{n} < |u_j| \leq n^{3/5}\right\}.$$

Здесь $\left\{u_j,\, j \in \widetilde{H}_0\right\}$ – упорядоченный по возрастанию набор целых точек множества

$$\left\{k \in \mathbb{Z} : C\sqrt{n} < |k| \le n^{3/5}\right\}.$$

Оценим сверху функцию $\widetilde{S}_{0,1}$ следующим образом:

$$\widetilde{S}_{0,1}(x,n,C) \le \sum_{j \in \widetilde{H}_0} E(x, \beta_0(\theta)n + u_j).$$

Для функции $E(x, \beta_0(\theta)n+u_j)$ справедливо соотношение (1.47), равномерное по $j \in \widetilde{H}_0$ и рассматриваемым $x$, поскольку $(u_j)^3/n^2 \to 0$ при $n \to \infty$ равномерно по $j \in \widetilde{H}_0$. Это соотношение можно переписать в виде

$$E(x, \beta_0(\theta)n + u_j) \sim Q(x, \beta_0(\theta)n) \exp\left(-\frac{\sigma_1^2(\theta)\,(u_j)^2}{2n}\right).$$

Таким образом, для всех положительных $\varepsilon$ при всех достаточно больших $n$ и всех рассматриваемых $x : x/n \in K_0'$ выполнено неравенство

$$\widetilde{S}_{0,1}(x,n,C) \le (1+\varepsilon)\sqrt{n}Q(x, \beta_0(\theta)n) \sum_{j \in \widetilde{H}_0} \frac{1}{\sqrt{n}} \exp\left(-\frac{\sigma_1^2(\theta)\,(u_j)^2}{2n}\right) \le$$
$$\le (1+\varepsilon)\sqrt{n}Q(x, \beta_0(\theta)n) \left( \int\limits_{-\infty}^{-C+\frac{1}{\sqrt{n}}} + \int\limits_{C-\frac{1}{\sqrt{n}}}^{+\infty} \right) \phi_0(u, x/n)du, \tag{1.55}$$

где, как и прежде, $\phi_0(u,\theta) = \exp(-\sigma_1^2(\theta)u^2/2)$.

Функция $\phi_0(u,\theta)$ равномерно интегрируема на $\mathbb{R}$ по переменной $u$ при $\theta \in K_0'$, так как функция $\sigma_1^2(\theta)$ непрерывна и положительна на компакте $K_0'$. Таким образом, из неравенства (1.55) при достаточно больших $C$ следует неравенство (1.54), поскольку

$$\widehat{G}_0(x,n) = \sqrt{n}Q(x, \beta_0(\theta)n)\mathbf{P}(\eta = +\infty) \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \phi_0(x/n, u)du.$$

2) Покажем, что выполнено соотношение

$$\widetilde{S}_{0,2}(x,n) := \sum_{k=1}^{+\infty} \mathbf{P}\left(S_k^{\xi} = x, \beta_0(\theta)n + n^{3/5} < S_k^{\eta} < n\right) = o(1)\widehat{G}_0(x,n) \tag{1.56}$$

при $n \to \infty$, причем $o(1)$ равномерно мало по $\theta \in K_0'$. Соотношение

$$\widetilde{S}_{0,3}(x,n) := \sum_{k=1}^{+\infty} \mathbf{P}\left(S_k^{\xi} = x, S_k^{\eta} - \beta_0(\theta)n < -n^{3/5}\right) = o(1)\widehat{G}_0(x,n)$$

при $n \to +\infty$ доказывается аналогично.

Положим

$$\psi = \psi(\theta, n) = \frac{x}{\beta_0(\theta)n + n^{3/5}} \in \mathbb{R}^d$$

и заметим, что множество $\{\psi(\theta, n) :\ \theta \in K_0'\}$ содержится в $B'$ при всех достаточно больших $n$. Положим

$$\widetilde{h}_2 = h_{\psi}, \quad \widetilde{t}_2 = t_0\left(h_{\psi}\right) - n^{-2}.$$

Заметим, что в силу леммы 4 и формулы Тейлора

$$t_0\left(h_{\psi}\right) = \sigma_1^2(\theta)n^{-2/5} + o\left(1\right)n^{-2/5},\ n \to +\infty,$$

где $o(1)$ равномерно мало по $\theta \in K_0'$. Таким образом, при всех достаточно больших $n$ величины $\widetilde{t}_2$ положительны при всех $\theta \in K_0'$. Используя неравенство Крамера, приходим при каждом $k \in \mathbb{N}$ к неравенству

$$\begin{aligned} &\mathbf{P}\left(S_k^{\xi} = x, \beta_0(\theta)n + n^{3/5} < S_k^{\eta} < n\right) \leq \\ &\leq R^k\left(\widetilde{h}_2, \widetilde{t}_2\right)\exp\left(-g_1\left(\beta_0(\theta) + n^{-2/5}, \theta\right)n\right), \end{aligned} \tag{1.57}$$

Заметим, что $R\left(\widetilde{h}_2, \widetilde{t}_2\right) < 1$, так как $\widetilde{t}_2 < t_0(h_\psi)$ и $R(h_\psi, t_0(h_\psi)) = 1$. Суммируя неравенства (1.57) по $k \in \mathbb{N}$, получаем

$$\widetilde{S}_{0,2}(x,n,\Delta_n) \le \frac{1}{1 - R\left(\widetilde{h}_2, \widetilde{t}_2\right)} \exp\left(-g_1\left(\beta_0(\theta) + n^{-2/5}, \theta\right) n\right) =$$

$$= (1+o(1))\alpha_0(h_\psi) n^2 \exp\left(-\frac{\sigma_1^2(\theta)}{2} n^{1/5} - g_1\left(\beta_0(\theta), \theta\right) n\right),\ n \to \infty, \tag{1.58}$$

причем $o(1)$ равномерно мало по $\theta \in K_0'$. Остается отметить, что

$$\exp\left(-g_1\left(\beta_0(\theta), \theta\right) n\right) = O\left(n^{(d-1)/2}\right) \widehat{G}_0(x,n),$$

откуда правая часть (1.58) есть $o(1)\widehat{G}_0(x,n)$ в силу положительности и непрерывности функции $\sigma_1^2(\cdot)$ на компакте $K_0'$. Отсюда и следует соотношение (1.56). □

*Доказательство леммы 3.* 1) Множество $M_R$, введенное в (1.7), является выпуклым и открытым, откуда для произвольного $\theta \in \mathbb{R}^d$ луч $\{(\theta/\alpha, 1/\alpha) :\ \alpha > 0\}$ пересекает $M_R$ по открытому интервалу (возможно, пустому). При $\theta \in B'$ этот интервал непуст в силу леммы 5 работы [19].

2) Соотношения (1.36)-(1.37) получаются прямым дифференцированием соотношения (1.35). Положительность $\partial^2 g/\partial\alpha^2$ следует из положительной определенности матрицы $\Sigma^{-2}$. Таким образом, функция $g(\alpha,\theta)$ выпукла вниз на рассматриваемом интервале. Тот факт, что $\alpha_0(h_\theta)$ — критическая точка для функции $g(\alpha,\theta)$, доказан в лемме 5 работы [19].

3) Множество

$$J(\theta) = \{(\theta/\alpha_0(h_\theta), 1/\alpha_0(h_\theta)) :\ \theta \in K'\} \subset M$$

компактно, откуда найдется такое положительное $\delta = \delta(K')$, что множество

$$\{(\theta/\alpha, 1/\alpha) :\ \theta \in K', \alpha \in (\alpha_0(h_\theta) - \delta, \alpha_0(h_\theta) + \delta)\}$$

содержит $J(\theta)$ и содержится в $M_R$. □

*Доказательство леммы 4.* 1) Для каждого $\theta \in B_1'$ найдется такое положительное $\delta_1$, что множество векторов вида

$$\left\{\frac{1}{s}\theta: \ s \in (1-\delta_1, 1+\delta_1)\right\}$$

лежит в множестве $B'$. Таким образом, на интервале $(1-\delta_1, 1+\delta_1)$ определены и бесконечно дифференцируемы по $\alpha$ функции $h_{\theta/\alpha}$ и $t_0(h_{\theta/\alpha})$. Соотношения (1.40) проверяются прямым вычислением, аналогичным соотношениям (1.36)-(1.37). Доказательство заключительного утверждения первой части леммы 4 аналогично доказательству третьей части леммы 3.

2) Для каждого $\theta \in B_0'$ найдется такое положительное $\delta_2$, что интервал $(\theta/(\beta_0(\theta)+\delta_2), \theta/(\beta_0(\theta)-\delta_2))$ лежит в множестве $B'$. Таким образом, на интервале $(\beta_0(\theta)-\delta_2, \beta_0(\theta)+\delta_2)$ определены и бесконечно дифференцируемы по $\alpha$ функции $h_{\theta/\alpha}$ и $t_0(h_{\theta/\alpha})$. Соотношения (1.41) следуют из соотношений (1.40) и определения функций $\beta_0(\theta)$ и $\gamma(\theta)$. Доказательство заключительного утверждения второй части леммы 4 аналогично доказательству третьей части леммы 3. □

*Доказательство леммы 5.* Введем множество индексов

$$H_1 = H_1(x,n,C) := \left\{k \in \mathbb{N}: \ \left|k - \alpha_0\left(h_{\frac{x}{n}}\right)n\right| \le C\sqrt{n}\right\}.$$

Обозначим для краткости

$$U(x,n,k) := \mathbf{P}\left(S_k^{\xi} = x, S_k^{\eta} = n\right), \tag{1.59}$$

$$V(x,n,k) := \frac{q_\xi \exp\left(-\Lambda\left(\frac{x}{k}, \frac{n}{k}\right)k\right)}{\left(\sqrt{2\pi k}\right)^{d+1}\sqrt{\det\left(\Sigma^2\left(h\left(\frac{x}{k}, \frac{n}{k}\right), t\left(\frac{x}{k}, \frac{n}{k}\right)\right)\right)}}. \tag{1.60}$$

Положим

$$\widetilde{V}(x,n) := V\left(x, n, \alpha_0\left(h_{\frac{x}{n}}\right)n\right). \tag{1.61}$$

В силу определения функции $\alpha_0(\cdot)$ и леммы 3 функция $\widetilde{V}$ имеет вид

$$\widetilde{V}(x,n) = \frac{q_\xi \exp\left(-L\left(\frac{x}{n}\right)n\right)}{\left(\sqrt{2\pi\alpha_0 n}\right)^{d+1}\sqrt{\det\left(\Sigma^2\left(h\left(\frac{x}{\alpha_0 n},\frac{1}{\alpha_0}\right),t\left(\frac{x}{\alpha_0 n},\frac{1}{\alpha_0}\right)\right)\right)}}. \tag{1.62}$$

Для краткости здесь и далее мы будем использовать обозначения $\alpha_0 = \alpha_0(h_{x/n})$, $\sigma^2 = \sigma^2(x/n)$, где функция $\sigma^2$ введена ранее в (1.38). Покажем, что

$$U(x,n,k) = (1+o(1))V(x,n,k), \tag{1.63}$$

где $o(1)$ равномерно мало по рассматриваемым $x$ и $k \in H_1$. Действительно, в силу условий доказываемой леммы $n \to +\infty$, а функция $\alpha_0(h_{x/n})$ ограничена, откуда $\min\{j : j \in H_1\} \to +\infty$. Кроме того, в силу леммы 3 при всех достаточно больших $n$ множество $\{(x/k, n/k) : \ x/n \in K',\ k \in H_1\}$ содержится в $M_R$. Таким образом, соотношение (1.63) следует из Теоремы 1 (соотношение (1.11)). Отметим, что в оригинальной теореме рассматривался случай арифметического распределения случайного вектора $(\xi_1,\eta_1)$, случай сильно-арифметичесого распределения сводится к арифметическому линейной заменой.

Далее, покажем, что равномерно по рассматриваемым $k \in H_1$ выполнено соотношение

$$V(x,n,k) \sim \widetilde{V}(x,n)\exp\left(-\frac{n\sigma^2}{2}\left(\frac{k}{n}-\alpha_0\right)^2\right) \tag{1.64}$$

при $n \to \infty$. Действительно, при $k \in H_1$

$$\sqrt{\det\left(\Sigma^2\left(h\left(\frac{x}{k},\frac{n}{k}\right),t\left(\frac{x}{k},\frac{n}{k}\right)\right)\right)} \sim \sqrt{\det\left(\Sigma^2\left(h\left(\frac{x}{\alpha_0 n},\frac{1}{\alpha_0}\right),t\left(\frac{x}{\alpha_0 n},\frac{1}{\alpha_0}\right)\right)\right)}, \tag{1.65}$$

при $n \to \infty$, так как $k \sim \alpha_0 n$ и функция $\det(\Sigma^2(h(\cdot),t(\cdot)))$ непрерывна на любом компакте, содержащемся в $M_R$.

Далее, заметим, что $\Lambda\left(x/k, n/k\right)k = g\left(k/n, x/n\right)n$, где функция $g(\alpha,\theta)$ задана соотношением (1.35), следовательно, в силу формулы Тейлора и леммы

3

$$\Lambda\left(\frac{x}{k},\frac{n}{k}\right)k = L\left(\frac{x}{n}\right)n + \frac{n\sigma^2}{2}\left(\frac{k}{n}-\alpha_0\right)^2 + o(1) \tag{1.66}$$

при $n\to\infty$, где $o(1)$ равномерно мало по рассматриваемым $x, k$.

Соотношение (1.64) вытекает из соотношений (1.66) и (1.65). Следовательно, при $n\to\infty$

$$\sum_{k\in H_1} U(x,n,k) \sim \sqrt{n}\widetilde{V}(x,n)\widetilde{Q}_1(x/n,n,C), \tag{1.67}$$

$$\widetilde{Q}_1(\theta,n,C) := \sum_{k\in H_1}\frac{1}{\sqrt{n}}\exp\left(-\frac{1}{2}n\sigma^2(\theta)\left(\frac{k}{n}-\alpha_0(h_\theta)\right)^2\right). \tag{1.68}$$

Суммы (1.68) при любом $\theta\in K'$ являются интегральными для интеграла

$$\int_{-C}^{C}\widetilde{\phi}(\theta,u)du, \quad \widetilde{\phi}(\theta,u) := \exp\left(-\frac{1}{2}\sigma^2(\theta)u^2\right) \tag{1.69}$$

и сходятся к нему равномерно по $\theta\in K'$ при $n\to\infty$. Интеграл (1.69) отделен от нуля при $\theta\in K'$, поскольку функция $\sigma^2(\theta)$ ограниченна на любом компакте, содержащемся в $B'$. Таким образом,

$$\sum_{k\in H_1} U(x,n,k) \sim \sqrt{n}\widetilde{V}(x,n)\int_{-C}^{C}\widetilde{\phi}(x/n,u)du$$

при $n\to\infty$, что и требовалось доказать. □

*Доказательство леммы 6.* Пусть $\varepsilon>0$ и $C>0$. Для краткости пусть $\alpha_0 = \alpha_0(x/n)$ и $\sigma^2=\sigma^2(x/n)$. Введем множество индексов

$$H_2 = H_2(x,n,C) := \left\{k\in\mathbb{N} : C\sqrt{n} < |k-\alpha_0 n| \le n^{3/5}\right\}.$$

Покажем, что найдется такое положительное $C$, что при всех $x/n \in K'$ и всех достаточно больших $n$ выполнено

$$\sum_{k \in H_2} U(x,n,k) \le \varepsilon \sqrt{n} \widetilde{V}(x,n) \tag{1.70}$$

где функции $U$, $\widetilde{V}$ введены ранее в (1.59) в (1.62) соответственно. Заметим, что при $k \in H_2$ и $x/n \in K'$ выполнено соотношение $(k/n - \alpha_0)^3 n \to 0$ при $n \to +\infty$, откуда при данных $k$ также справедливы соотношения (1.63) и (1.64). Следовательно, при всех достаточно больших $n$ выполнены неравенства

$$\sum_{k \in H_2} U(x,n,k) \le (1+\varepsilon)\sqrt{n}\widetilde{V}(x,n) \sum_{k \in H_2} \frac{1}{\sqrt{n}} \exp\left(-\frac{1}{2} n\sigma^2 \left(\frac{k}{n} - \alpha_0\right)^2\right) \le$$
$$\le (1+\varepsilon)\sqrt{n}\widetilde{V}(x,n) \left( \int_{-\infty}^{-C+1/\sqrt{n}} + \int_{C-1/\sqrt{n}}^{+\infty} \right) \widetilde{\phi}\left(\frac{x}{n}, u\right) du. \tag{1.71}$$

Функция $\widetilde{\phi}(x/n, u)$ интегрируема по переменной $u$ на всей числовой прямой равномерно по $x/n \in K'$, откуда, выбирая параметр $C$ достаточно большим, приходим к неравенству (1.70).

Введем множества индексов

$$H_3 = H_3(x,n) := \left\{ k \in \mathbb{N} : k > \alpha_0\left(\frac{x}{n}\right) n + n^{3/5} \right\},$$
$$H_4 = H_4(x,n) := \left\{ k \in \mathbb{N} : k < \alpha_0\left(\frac{x}{n}\right) n - n^{3/5} \right\},$$

и покажем, что выполнено соотношение

$$\sum_{k \in H_3} U(x,n,k) = o(1)\sqrt{n}\widetilde{V}(x,n), \ n \to \infty \tag{1.72}$$

где $o(1)$ равномерно мало по рассматриваемым $x,n$.

Положим

$$\kappa = \kappa(x,n) = \left( \frac{x}{\alpha_0 n + n^{3/5}}, \frac{1}{\alpha_0 + n^{-2/5}} \right), \ \widetilde{h}_1 = h(\kappa), \ \widetilde{t}_1 = t(\kappa),$$

где, напомним, $\operatorname{grad} \ln R(h(\kappa), t(\kappa)) = \kappa$.

В силу неравенства Крамера для любого $k \in H_3$ справедливо неравенство

$$U(x,n,k) \le R^k\left(\widetilde{h}_1, \widetilde{t}_1\right) \exp\left(-\left\langle x, \widetilde{h}_1\right\rangle - \widetilde{t}_1 n\right) =$$
$$= R^{k-\left(\alpha_0 n + n^{3/5}\right)}\left(\widetilde{h}_1, \widetilde{t}_1\right) \exp\left(-g\left(\alpha_0 + n^{-2/5}, x/n\right) n\right), \tag{1.73}$$

где функция $g(\alpha, \theta)$ введена в (1.35). Заметим, что

$$\ln R\left(\widetilde{h}_1, \widetilde{t}_1\right) = -\frac{\partial}{\partial \alpha} g\left(\alpha_0 + n^{-2/5}, x/n\right) < 0,$$

поскольку $g'_\alpha\left(\alpha_0, x/n\right) = 0$ и при любом $\theta \in B'$ функция $g(\alpha, \theta)$ как функция $\alpha$ выпукла вниз в некоторой окрестности $\alpha_0(h_\theta)$.

Следовательно, суммируя неравенства (1.73) по $k \in H_3$, получаем

$$\sum_{k \in H_3} U(x,n,k) \le \frac{\exp\left(-g\left(\alpha_0 + n^{-2/5}, x/n\right) n\right)}{1 - R\left(\widetilde{h}_1, \widetilde{t}_1\right)} =$$
$$= (1 + o(1)) \frac{n^{2/5}}{\sigma^2} \exp\left(-\sigma^2 n^{1/5} - g\left(\alpha_0, \frac{x}{n}\right) n\right), \tag{1.74}$$

где $o(1)$ равномерно мало по $x/n \in K'$ при $n \to \infty$. В силу (1.62)

$$\exp\left(-g\left(\alpha_0, \frac{x}{n}\right) n\right) = O\left(n^{(d+1)/2}\right) \widetilde{V}(x,n),\ n \to \infty,$$

откуда правая часть (1.74) есть $o(1)\sqrt{n}\widetilde{V}(x,n)$ при $n \to \infty$, что и доказывает (1.72). Аналогичным образом оценивается сумма $U(x, n, k)$ по $k \in H_4$.

Поскольку $\{k \in \mathbb{N} :\ |k - \alpha_0 n| > C\sqrt{n}\} = H_2 \bigcup H_3 \bigcup H_4$, лемма доказана.

$\square$

*Доказательство леммы 7.* Как и прежде, положим

$$H_1 = H_1(x, n, C) = \left\{k \in \mathbb{N} :\ \left|k - \alpha_0\left(\frac{x}{n}\right) n\right| \le C\sqrt{n}\right\}.$$

Рассматриваемую сумму вероятностей $E(x,n)$ представим в следующем виде:

$$\begin{aligned}
&E(x,n,\Delta_n) = \widetilde{P}_1(x,n,C) + \widetilde{S}_1(x,n,C),\\
&\widetilde{P}_1(x,n,C) := \sum_{k\in H_1} \mathbf{P}\left(S_k^{\xi} = x, S_k^{\eta} = n\right),\\
&\widetilde{S}_1(x,n,C) := \sum_{k\in \mathbb{N}\setminus H_1} \mathbf{P}\left(S_k^{\xi} = x, S_k^{\eta} = n\right).
\end{aligned}$$

Последующее доказательство аналогично доказательству теоремы 3 и опирается на леммы 5 и 6. Остается только отметить, что

$$\frac{\sqrt{2\pi n}\widetilde{V}(x,n)}{\sigma(x/n)} = \frac{\alpha_0(h_{x/n})\exp(-L(x/n)n)}{\left(\sqrt{2\pi n}\right)^d \sqrt{\det(-t_0''(h_{x/n}))}},$$

поскольку в силу леммы 8 работы [19]

$$\sqrt{\alpha_0^{d+1}\sigma^2\left(\frac{x}{n}\right)\det\left(\Sigma^2\left(h\left(\frac{x}{\alpha_0 n},\frac{1}{\alpha_0 n}\right),t\left(\frac{x}{\alpha_0 n},\frac{1}{\alpha_0 n}\right)\right)\right)} = \frac{\sqrt{\det(-t_0''(h_{x/n}))}}{\alpha_0},$$

где $\alpha_0 = \alpha_0(h_{x/n})$. $\square$

# Глава 2. Альтернативное выражение параметров асимптотики

## 2.1 Основные результаты о выражении параметров асимптотики

Как уже упоминалось во введении, недостатком теорем 3 и 4 является то, что условия и параметры асимптотики вероятностей больших уклонений выражены в терминах распределений случайных векторов $(\xi,\eta)$, $(\xi_0,\eta_0)$ и $\left\{\widehat{\xi}_k,\ k \geq 0\right\}$. Это касается как условия непустоты множества $B_1$ (1.18) или $B_0$ (случай несобственной регенерации), так и выражения функций в соотношении (1.21) (соответственно в (1.24)). Как следствие, применять их для поиска асимптотик вероятностей больших уклонений достаточно затруднительно, хотя показать наличие регенерационной структуры и ее сильную арифметичность в различных задачах достаточно просто. Таким образом, хотелось бы получить альтернативный метод для выражения параметров асимптотики, а также способ проверки непустоты множеств $B_1'$ и $B_0'$ в теоремах 3 и 4 соответственно.

Основными результатами работы автора [20] являются следующие теоремы. В дальнейшем нам будет удобно обозначить коэффициенты степенного ряда введенных ранее функций $R_0$, $\widehat{R}$ и $\widehat{R}_0$ следующим образом:

$$\widehat{R}(h,t) = \sum_{k=0}^{+\infty} e^{tk}\widehat{r}_k(h), \quad \widehat{r}_k(h) = \mathbf{E}\exp\left(\left\langle h, \widehat{\xi}_k\right\rangle\right)\mathbf{P}(k < \eta_1 < +\infty),$$

$$R_0(h,t) = \sum_{k=0}^{+\infty} e^{tk}\mathbf{E}(\exp(\langle h, \xi_0\rangle);\ \eta_0 = k) =: \sum_{k=0}^{+\infty} e^{tk} r_{0,k}(h),$$

$$\widehat{R}_0(h,t) = \sum_{k=0}^{+\infty} e^{tk}\mathbf{E}(\exp(\langle h, \xi_0\rangle);\ \eta_0 > k) =: \sum_{k=0}^{+\infty} e^{tk}\widehat{r}_{0,k}(h).$$

**Теорема 5.** *Пусть последовательность $\{U_n\}_{n\geq 0}$ обладает сильно арифметической регенерационной структурой вида (1.12). Рассмотрим непустое открытое множество $H \subset \mathbb{R}^d$. Пусть для произвольного компактного подмножества $K$ множества $H$ найдется такое $\delta = \delta(K) \in (0,1)$, что выполнены соотношения*

$$\mathbf{E}\exp(\langle h, U_n\rangle) = \rho_0(h)\rho^n(h) + o(1)(\delta\ \rho(h))^n, \quad n \to \infty, \tag{2.1}$$

$$\max\left(r_{0,n}(h),\,\widehat{r}_{0,n}(h),\,\widehat{r}_n(h)\right) = o(1)(\delta\ \rho(h))^n, \tag{2.2}$$

*где $o(1)$ равномерно мало по $h \in K$. Предположим также, что функция $\rho(h)$ непрерывна и положительна на $H$, функция $\rho_0(h)$ положительна, ограничена и отделена от нуля на $K$.*

*Тогда множество $B_1$, определенное в (1.18), непусто, причем $H \subseteq B_1$. Более того, функция $\rho(h)$ бесконечно дифференцируема на $H$ и при $h \in H$ справедливы соотношения*

$$\rho_0(h) = R_0(h, t_0(h))\alpha_0(h)\widehat{R}(h, t_0(h)), \quad \rho(h) = \exp(-t_0(h)). \tag{2.3}$$

Таким образом, если для последовательности $\{U_n\}_{n\geq 0}$ выполнены условия теоремы 5, то для нее выполнены условия теоремы 3. Следовательно, справедливо соотношение (1.21), причем выражение для функции $F(\theta)$, определенной в (1.23), может быть получено из соотношения (2.3).

Теорема 5 позволяет установить непустоту множества $B_1$, не используя напрямую распределения вектора $(\xi, \eta)$ и явного вида функции $R(h,t)$. Однако, теорема 5 не включает в себя случай, рассмотренный в теореме 4.

Введем последовательность событий

$$G_0 := \Omega, \quad G_n := \left\{\eta_0 = 0,\, \exists r \in \mathbb{N} : \sum_{i=1}^{r} \eta_i = n\right\},\, n \in \mathbb{N}.$$

**Теорема 6.** *Пусть последовательность $\{U_n\}_{n\geq 0}$ обладает сильно арифметической регенерацией вида (1.12). Рассмотрим непустое открытое множество $H_1 \subset \mathbb{R}^d$. Пусть для произвольного компактного подмножества $K_1$ множества $H_1$ найдется такое $\delta_1 = \delta_1(K_1) \in (0,1)$, что выполнены соотношения*

$$\mathbf{E}\left(\exp(\langle h, U_n - \zeta - \xi_0\rangle);\ G_n\right) = \rho_1(h)\rho^n(h) + o(1)(\delta_1\ \rho(h))^n, \quad n \to \infty, \tag{2.4}$$

*где $o(1)$ равномерно мало по $h \in K_1$. Более того, предположим, что функция $\rho(h)$ непрерывна и положительна на $H_1$, функция $\rho_1(h)$ положительна, ограничена и отделена от нуля на $K_1$. Тогда множество $B$, определенное ранее в (1.17), непусто, $H_1 \subseteq B$, функция $\rho(h)$ бесконечно дифференцируема на $H_1$ и* *при $h \in H_1$ справедливы соотношения*

$$\rho(h) = \exp(-t_0(h)), \quad \alpha_0(h) = \rho_1(h) \left(\mathbf{P}(\eta_0 = 0)\right)^{-1}. \tag{2.5}$$

*Функция $\alpha_0(h)$ была определена ранее в (1.23).*

**Замечание 7.** Функция $t_0(h)$ выражается в соотношении (2.5) в терминах функции $\rho(h)$, заданной соотношением (2.4). Таким образом, проверка непустоты множества $B_0$ может быть произведена на основе анализа функции в левой части соотношения (2.4), не используя напрямую распределение циклов регенерации.

**Замечание 8.** Принимая во внимание замечание 2, теоремы 5 и 6 применимы для описания вероятностей больших уклонений в случае, когда для некоторого $\vec{q} \in \mathbb{R}^d$ регенерационная структура $\{U_n - n\vec{q}, n \geq 0\}$ является сильно арифметической. При этом нетрудно видеть, что условие (2.1) для последовательностей $\{U_n, n \geq 0\}$ и $\{U_n - n\vec{q}, n \geq 0\}$ эквивалентно с точностью до замены $\rho(h)$ на $\rho(h)\exp\left(\langle h, \vec{q}\rangle\right)$.

**Следствие 1.** *Пусть выполнены условия теоремы 6, множество*

$$H_1^0 := \{h \in H_1 : \ \ln \rho(h) = 0\}$$

*непусто. Тогда множество $B_0$, определенное ранее в (1.19), непусто, $H_1^0 \subseteq B_0$. Таким образом, выполнены условия теоремы 4.*

Условие (2.4) зачастую более удобно для проверки, чем условие (2.1). Сформулируем соответствующий аналог теоремы 5.

**Следствие 2.** *Пусть выполнены условия теоремы 6 и справедливо соотношение*

$$\max\left(r_{0,n}(h), \widehat{r}_{0,n}(h), \widehat{r}_n(h)\right) = o(1)(\delta_1 \ \rho(h))^n, \ n \to \infty, \tag{2.6}$$

*где $o(1)$ равномерно мало по $h \in K_1$. Тогда множество $B_1$, определенное ранее в (1.18), непусто, $H_1 \subseteq B_1$. Таким образом, выполнены условия теоремы 3 и справедливы соотношения*

$$R_0(h, t_0(h)) = \sum_{k=0}^{+\infty} \rho^{-k}(h) r_{0,k}(h), \quad \widehat{R}(h, t_0(h)) = \sum_{k=0}^{+\infty} \rho^{-k}(h)\widehat{r}_k(h). \tag{2.7}$$

Теорема 5 и теорема 6 в сочетании со следствием 2 являются своего рода инструментами для проверки условий теорем об асимптотике вероятностей больших уклонений, полученных в работах [12]-[18]. Вместе с тем, теорема 6 может оказаться удобной для исследования вероятностей больших уклоненией для обрывающихся обобщенных процессов восстановления в так называемой нерегулярной зоне уклонений.

Сформулируем достаточные условия для выполнения соотношений вида (2.1) и (2.4).

**Теорема 7.** *Пусть функция $f(s)$ задана в виде степенного ряда*

$$f(s) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n s^n. \tag{2.8}$$

*Предположим, что справедливо представление*

$$f(s) = \frac{\phi(s)}{\psi(s)}, \tag{2.9}$$

*где функции $\phi, \psi$ удовлетворяют следующим свойствам.*

1. *Функции $\phi$ и $\psi$ голоморфны в круге*

$$B_{1+\delta}(0) := \{s \in \mathbb{C} : \ |s| < 1 + \delta\}$$

*для некоторого $\delta > 0$.*

2. *Справедливы соотношения $\psi(1) = 0$, $\psi'(1) \neq 0$ и $\psi(s) \neq 0$ при $s \in B_{1+\delta}(0) \cap \{s \neq 1\}$.*

*Тогда для произвольного $0 < \delta' < \delta$ справедливо соотношение*

$$a_n = a^* + (1+\delta')^{-n} o(1), \quad a^* = -\frac{\phi(1)}{\psi'(1)}, \quad n \to \infty. \tag{2.10}$$

Таким образом, соотношения (2.1) и (2.4) могут быть получены посредством анализа производящих функций числовых последовательностей

$$\{\mathbf{E} \exp(\langle h, U_n \rangle)\}_{n \in \mathbb{N}_0}, \quad \{\mathbf{E}\, (\exp(\langle h, U_n - \zeta - \xi_0 \rangle); \ G_n)\}_{n \in \mathbb{N}_0},$$

соответственно.

## 2.2 Доказательства теорем 5 и 6

*Доказательство теоремы 5.* Для доказательства теоремы 5 достаточно показать, что для произвольного компакта $K \subset H$ найдется такое положительное число $\varepsilon = \varepsilon(K)$, что

$$\{(h,t): \; h \in K, \, t \le -\ln \rho(h) + \varepsilon\} \subseteq A, \tag{2.11}$$

где, как и прежде,

$$A = \operatorname{int}\{(h,t), \, h \in \mathbb{R}^d, \, t \in \mathbb{R}: \; \max(R_0(h,t), \widehat{R}_0(h,t), R(h,t), \widehat{R}(h,t)) < +\infty\},$$

и

$$R(h, -\ln \rho(h)) \equiv 1, \quad h \in K. \tag{2.12}$$

Введем функцию

$$P(h,t) := \sum_{k=0}^{+\infty} e^{tk} \mathbf{E} \exp(\langle h, S_k \rangle).$$

Из условия (2.1) вытекает, что функция $P(h,t)$ определена при $(h,t)$, принадлежащих множеству

$$A_H := \left\{(u,s) \in \mathbb{R}^{d+1}: \; u \in H, \, s < -\ln \rho(h)\right\}. \tag{2.13}$$

Более того, при $(h,t)$ из множества $A_H$ определены также функции $R_0(h,t)$, $\widehat{R}_0(h,t)$, $\widehat{R}(h,t)$ в силу условия (2.2).

Покажем, что при $(h,t) \in A_H$ определена функция

$$R(h,t) = \sum_{k=1}^{+\infty} e^{tk} \mathbf{E}(\exp(\langle h, \xi_1 \rangle); \eta_1 = k).$$

Выберем такое $j_0 \in \mathbb{N}_0$, что $\mathbf{P}(\eta_0 = j_0) > 0$. Тогда в силу того, что для последовательность $\{U_n\}_{n \ge 0}$ обладает сильно арифметической регенерационной структурой вида (1.12), для произвольного натурального $k$ справедливо неравенство

$$
\begin{aligned}
&\mathbf{E}\exp(\langle h, S_{k+j_0}\rangle) \geq \mathbf{E}\exp(\langle h, \xi_0+\xi_1+\zeta\rangle; \eta_0=j_0, \eta_1=k, \eta_2>0) = \\
&= (\mathbf{P}(\eta_2=+\infty)+\mathbf{P}(0<\eta_2<+\infty)\mathbf{E}\exp(\langle h, \widehat{\xi}_0\rangle)) \times \mathbf{E}(\exp(\langle h, \xi_0\rangle); \eta_0=j_0)\times \\
&\times \mathbf{E}(\exp(\langle h, \xi_1\rangle); \eta_1=k) = \widehat{r}_0(h) r_{0,j_0}(h) r_k(h).
\end{aligned}
$$

Следовательно, из сходимости ряда $P(h,t)$ следует сходимость ряда $R(h,t)$. Заметим также, что множество $A_H$ открыто в силу непрерывности функции $\rho(h)$ и открытости множества $H$. Таким образом,

$$A_H \subseteq A.$$

Заметим, что в силу того, что последовательность $\{U_n\}_{n\geq 0}$ обладает о.с.р. вида (1.12), при $(h,t)$ из множества $A_H$ справедливо тождество

$$P(h,t) = \frac{R_0(h,t)\widehat{R}(h,t)}{1-R(h,t)} + \widehat{R}_0(h,t). \tag{2.14}$$

Осуществим замену

$$s=\rho(h)e^t \tag{2.15}$$

и перейдем к функциям

$$
\begin{aligned}
&U(h,s) := P(h, \ln s - \ln\rho(h)), \quad Q_0(h,s) := R_0(h, \ln s - \ln\rho(h)), \\
&Q(h,s) := R(h, \ln s - \ln\rho(h)), \\
&\widehat{Q}_0(h,s) := \widehat{R}_0(h, \ln s - \ln\rho(h)), \quad \widehat{Q}(h,s) := \widehat{R}(h, \ln s - \ln\rho(h)).
\end{aligned} \tag{2.16}
$$

Таким образом, из соотношения (2.14) и замены (2.15) вытекает соотношение

$$U(h,s) = \frac{Q_0(h,s)\widehat{Q}(h,s)}{1-Q(h,s)} + \widehat{Q}_0(h,s),$$

откуда получаем соотношение

$$Q(h,s) = 1 - \frac{Q_0(h,s)\widehat{Q}(h,s)}{U(h,s)-\widehat{Q}_0(h,s)}. \tag{2.17}$$

Положим

$$f_n(h) := \rho^{-n}(h)\mathbf{E}\exp(\langle h, U_n\rangle) - \rho_0(h), \quad F(h,s) := \sum_{n=0}^{+\infty} s^n f_n(h), \quad h \in K, \quad (2.18)$$

и представим функцию $U(h,s)$ как

$$U(h,s) = \frac{\rho_0(h)}{1-s} + F(h,s). \quad (2.19)$$

Таким образом, из (2.17) имеем

$$Q(h,s) = 1 - (1-s)\frac{Q_0(h,s)\widehat{Q}(h,s)}{\rho_0(h) + (1-s)\Big(F(h,s) - \widehat{Q}_0(h,s)\Big)}. \quad (2.20)$$

Из определения функции $F(h,s)$ вытекает, что при фиксированном $h \in K$ она является степенным рядом переменного $s$. При всех $h \in K$ данный ряд сходится в круге $|s| < \delta^{-1}$ в силу условия (2.1). То же выполнено для функций $Q_0(h,s)$, $\widehat{Q}(h,s)$ и $\widehat{Q}_0(h,s)$ в силу условия (2.2). Следовательно, справедливо соотношение

$$\limsup_{s\to 1}\sup_{h\in K}\left|(1-s)(F(h,s) - \widehat{Q}_0(h,s))\right| = 0. \quad (2.21)$$

Положим

$$c_0(K) := \inf_{h\in K}\rho_0(h) > 0. \quad (2.22)$$

Из (2.21) и (2.22) получаем, что найдется такое

$$\varepsilon = \varepsilon(K) \in (0, \delta^{-1} - 1), \quad (2.23)$$

что справедливо соотношение

$$\rho_0(h) + (1-s)\Big(F(h,s) - \widehat{Q}_0(h,s)\Big) > 0, \quad s \in [1-\varepsilon, 1+\varepsilon], \quad h \in K. \quad (2.24)$$

Таким образом, в силу (2.24), при всех $h \in K$ правая часть (2.20) есть аналитическая функция переменного $s$ на отрезке $[0,1+\varepsilon]$. Левая часть (2.20) имеет вид

$$Q(h,s)=\sum_{n=0}^{\infty}q_n(h)s^n,\quad q_n(h):=\rho^{-n}(h)\mathbf{E}(\exp(\langle h,\xi\rangle);\eta=n)\geq 0,\quad h\in K.$$

В силу неотрицательности коэффициентов $q_n(h)$, $n\geq 0$, из расходимости ряда $Q(h,s)$ при некотором $h\in K$ в некоторой точке $s=re^{i\phi}$, $r>0$, $\phi\in\mathbb{R}$, следует, что при том же $h$ ряд расходится и в точке $s=r$. Однако, в силу доказанного, при всех $h\in K$ функция $Q(h,s)$ является аналитичной при $s\in[0,1+\varepsilon]$. Таким образом, при всех $h\in K$ степенной ряд $Q(h,s)$ сходится в круге $|s|\leq 1+\varepsilon$ на комплексной плоскости и

$$\sum_{n=0}^{\infty}q_n(h)(1+\varepsilon)^n<+\infty,\quad h\in K,$$

откуда

$$\rho^{-n}(h)\mathbf{E}(\exp(\langle h,\xi\rangle);\eta=n)=o(1)\,(1+\varepsilon)^{-n}\,, \tag{2.25}$$

где $o(1)$ равномерно мало по $h\in K$.

В силу выбора $\varepsilon(K)$ в соотношении (2.23), соотношения (2.25) и условия (2.2), получаем, что при $(h,t)$ из множества

$$\{(h,t):\ \ h\in K,\, t\leq -\ln\rho(h)+\ln(1+\varepsilon)\} \tag{2.26}$$

определены функции $R(h,t)$, $R_0(h,t)$, $\widehat{R}_0(h,t)$ и $\widehat{R}(h,t)$. Из произвольности компакта $K$ и непрерывности функции $\rho(h)$ вытекает справедливость соотношения (2.11), откуда получаем, что справедливо соотношение $H\subseteq B$, где множество $B$ определено ранее в (1.17).

Заметим, что в силу (2.20) $Q(h,1)=1$ при $h\in K$, откуда в силу (2.16) $R(h,-\ln\rho(h))=1$. Следовательно, функция $t=(-\ln\rho(h))$ является решением уравнения $R(h,t)=1$ и справедливо соотношение

$$\rho(h)=\exp(-t_0(h)). \tag{2.27}$$

Остается показать, что при $h\in K$ справедливо соотношение

$$\rho_0(h)=R_0(h,t_0(h))\alpha_0(h)\widehat{R}(h,t_0(h)). \tag{2.28}$$

В силу предыдущих рассуждений при всех $h \in K$ и $s \in (0,1+\varepsilon)$ справедливо соотношение (2.20), откуда

$$\frac{\partial}{\partial s} Q(h,s)\Big|_{s=1} = \frac{Q_0(h,s)\widehat{Q}(h,s)}{\rho_0(h)}\Big|_{s=1}. \tag{2.29}$$

В силу замены (2.16) и соотношения (2.27) справедливо тождество

$$\frac{\partial}{\partial s} Q(h,s)\Big|_{s=1} = \frac{1}{s}\frac{\partial}{\partial t} R(h,t)\Big|_{s=1} = \frac{\partial}{\partial t} R(h,t)\Big|_{t=t_0(h)} = \alpha_0^{-1}(h), \tag{2.30}$$

так как $R(h,t_0(h)) = 1$ в силу определения $t_0(h)$. Функция $\alpha_0(h)$ введена ранее в соотношении (1.23). При этом в силу замены (2.16) справедливо соотношение

$$Q_0(h,s)\widehat{Q}(h,s)\Big|_{s=1} = R_0(h,t_0(h))\widehat{R}(h,t_0(h)). \tag{2.31}$$

Таким образом, равенство (2.28) вытекает из соотношений (2.29), (2.30) и (2.31). Теорема 5 полностью доказана. $\square$

*Доказательство теоремы 6.* Доказательство теоремы 6 во многом повторяет доказательство теоремы 5. Достаточно показать, что для произвольного компакта $K_1 \subset H_1$ найдется такое положительное число $\varepsilon_1 = \varepsilon_1(K_1)$, что

$$\{(h,t): \ h \in K_1,\, t \le -\ln\rho(h) + \varepsilon_1\} \subseteq \widetilde{A}, \tag{2.32}$$

где, как и прежде,

$$\widetilde{A} = \mathrm{int}\{(h,t),\, h \in \mathbb{R}^d,\, t \in \mathbb{R}: \ R(h,t) < +\infty\},$$

и выполнено соотношение

$$R(h,-\ln\rho(h)) \equiv 1, \quad h \in K_1. \tag{2.33}$$

Напомним, что функция $R(h,t)$ определяется соотношением

$$R(h,t) = \sum_{n=1}^{+\infty} e^{tn}\mathbf{E}\left(\exp\left(\langle h,\xi_1\rangle\right);\eta_1 = n\right) = \sum_{n=1}^{+\infty} e^{tn} r_n(h).$$

Покажем, что область определения функции $R(h,t)$ содержит в себе множество

$$\widetilde{A}_H := \left\{(h,t) \in \mathbb{R}^{d+1} : \ h \in H_1,\, t < -\ln \rho(h)\right\}. \tag{2.34}$$

Заметим, что

$$\mathbf{E}(\exp\left(\langle h, U_n - \zeta - \xi_0\rangle\right); G_n) \geq \mathbf{E}(\exp\left(\langle h, U_n - \zeta - \xi_0\rangle\right); \eta_0 = 0, \eta_1 = n)$$
$$= \mathbf{P}(\eta_0 = 0) r_n(h), \quad n \in \mathbb{N},$$

откуда, принимая во внимание (2.4), получаем сходимость ряда

$$\sum_{n=1}^{+\infty} e^{tn} r_n(h)$$

при $h \in H_1$ и $t < -\ln \rho(h)$. Множество $\widetilde{A}_H$ открыто в силу открытости множества $H_1$ и непрерывности функции $\rho(h)$. Таким образом, справедливо соотношение

$$\widetilde{A}_H \subseteq \widetilde{A}.$$

Рассмотрим функцию

$$P_0(h,t) := \sum_{k=0}^{+\infty} e^{tn} \mathbf{E}(\exp\left(\langle h, U_n - \zeta - \xi_0\rangle\right); G_n). \tag{2.35}$$

В силу условия (2.4) функция $P_0(h,t)$ определена при $(h,t)$ из множества $\widetilde{A}_H$. В силу того, что последовательность случайных векторов $\{U_n\}_{n\geq 0}$ обладает о.с.р. вида (1.12), при $(h,t)$ из множества $\widetilde{A}_H$ выполнено соотношение

$$P_0(h,t) = \frac{\mathbf{P}(\eta_0 = 0)}{1 - R(h,t)}. \tag{2.36}$$

Заметим, что соотношение (2.36) является частным случаем соотношения (2.14), здесь

$$R_0(h,t) = \mathbf{P}(\eta_0 = 0), \quad \widehat{R}(h,t) = 1, \quad \widehat{R}_0(h,t) = 0.$$

Таким образом, дальнейшее доказательство теоремы 6 вытекает из доказательства теоремы 5, поскольку в рассматриваемом случае для функций $R_0(h,t)$, $\widehat{R}(h,t)$ и $\widehat{R}_0(h,t)$ выполнено условие (2.1). $\square$

*Доказательство теоремы 7.* Рассмотрим функцию

$$g(s) = (1-s)f(s) = (1-s)\frac{\phi(s)}{\psi(s)}. \tag{2.37}$$

Функция $g(s)$ раскладывается в степенной ряд

$$g(s) = \sum_{n=0}^{+\infty} b_n s^n,$$

коэффициенты которого имеют вид

$$b_0 := a_0, \quad b_n := a_n - a_{n-1}, \quad n \in \mathbb{N}. \tag{2.38}$$

Заметим, что в силу условий теоремы 7 на функции $\phi$ и $\psi$, функция $g$ голоморфна в круге $B_{1+\delta}(0)$.

Таким образом, для произвольного $\delta' \in (0,\delta)$ справедливо соотношение

$$|b_n| = (1+\delta')^{-n}o(1), \quad n \to \infty, \tag{2.39}$$

и в силу (2.37) выполнено

$$\sum_{n=0}^{+\infty} b_n = g(1) = -\frac{\phi(1)}{\psi'(1)} = a^*. \tag{2.40}$$

Остается заметить, что из (2.38) вытекает, что справедливо соотношение

$$\sum_{k=0}^{n} b_k = a_n, \quad n \in \mathbb{N}, \tag{2.41}$$

и в силу (2.39) выполнено

$$\sum_{k=n+1}^{+\infty} b_k = (1+\delta')^{-n}o(1), \quad n \to \infty. \tag{2.42}$$

Таким образом, теорема 7 вытекает из соотношений (2.40), (2.41) и (2.42). $\square$

## 2.3 Большие уклонения для максимума случайного блуждания

В качестве иллюстрации разработанного метода проверки условия Крамера для регенерирующих последовательностей применим результаты настоящей главы к решенной ранее задаче о больших уклонениях максимума случайного блуждания. Как уже упоминалось во введении, данная задача была решена ранее и приводится здесь в качестве иллюстрации разработанного в настоящей главе аппарата.

Пусть $X$, $X_i$, $i \in \mathbb{N}$, – независимые одинаково распределенные случайные величины. Пусть, как и прежде,

$$S_0 = 0, \quad S_n = \sum_{i=1}^{n} X_i, \quad M_n = \max\{S_j,\, j = 0, \ldots, n\}. \tag{2.43}$$

Предположим, что выполнены следующие условия:

A1) распределение величины $X$ центрально-решетчато с шагом решетки $l_X$;

A2) носитель распределения случайной величины $X$ содержит не менее двух положительных значений $u_1$ и $u_2$, $0 < u_1 < u_2$;

A3) функция

$$R(h) = \mathbf{E}\exp(hX) \tag{2.44}$$

определена на непустом интервале $(0, h_+)$, где

$$h_+ := \sup\{h \in \mathbb{R} : \ R(h) < +\infty\}; \tag{2.45}$$

A4) найдется такое $0 < h < h_+$, что

$$R(h) > 1; \tag{2.46}$$

A5) величина

$$\mu := \mathbf{E}X \tag{2.47}$$

отрицательна и, возможно, бесконечна.

Заметим, если выполнены условия A2-A3, то функция $R(h)$ строго выпукла вверх и аналитична на интервале $(0, h_+)$.

Приведенные ниже теоремы, как мы указывали ранее, были известны и до данной работы, однако, мы предложим новый подход к их доказательству.

**Теорема 8.** *Пусть распределение случайной величины $X$ удовлетворяет условиям A1-A5. Тогда соотношение*

$$\mathbf{P}(M_n = x) \sim l_X \frac{F_1\left(\frac{x}{n}\right)}{\sqrt{n}} \exp\left(-\Lambda\left(\frac{x}{n}\right) n\right), \quad n \to \infty, \tag{2.48}$$

*выполняется равномерно по $x/n \in [a,b]$, где $[a,b]$ – произвольный отрезок внутри интервала $(\gamma, m_+)$. Здесь*

$$\Lambda(\theta) := \theta h_\theta - \ln R(h_\theta), \quad h_\theta : \ m(h_\theta) = \theta, \quad m(h) := (\ln R(h))', \tag{2.49}$$

$$m_+ := \liminf_{h \to h_+ - 0} m(h), \quad \gamma > 0 : \ R(h_\gamma) = 1, \quad \sigma^2(h) := (\ln R(h))'', \tag{2.50}$$

$$F_1(\theta) := \frac{\alpha(h_\theta) D_1(h_\theta)}{\sqrt{2\pi}\sigma(h_\theta)}, \quad D_1(h) := \sum_{n=0}^{+\infty} R(h)^{-n} \mathbf{P}\left(S_i \le 0,\ i \le n\right), \tag{2.51}$$

$$\alpha(h) := \mathbf{P}\left(S_i^{(h)} > 0,\ i \in \mathbb{N}\right), \tag{2.52}$$

*где $\left\{S_i^{(h)}\right\}_{i \ge 0}$, $h \in (0,h_+)$, – случайное блуждание с н.о.р. шагами $X_i^{(h)}$,*

$$\mathbf{P}\left(X^{(h)} = u\right) = R(h)^{-1} \exp(uh) \mathbf{P}(X = u), \quad u \in \mathbb{R}. \tag{2.53}$$

**Теорема 9.** *Пусть распределение случайной величины $X$ удовлетворяет условиям A1-A5. Тогда соотношение*

$$\mathbf{P}(M_n = x) \sim l_X F_0 \exp\left(-x h_\gamma\right), \quad n \to \infty, \tag{2.54}$$

*выполняется равномерно по $x/n \in [a,b]$, где $[a,b]$ – произвольный отрезок внутри интервала $(0, \gamma)$, и $\gamma$ определено ранее в (2.50). Здесь*

$$F_0 := \frac{1}{\gamma} \alpha\left(h_\gamma\right) \mathbf{P}(S_i \le 0,\ i \in \mathbb{N}) \tag{2.55}$$

*и $\alpha(h)$ определено ранее в (2.52).*

*Доказательство теоремы 8.* Заметим, что для доказательства теоремы 8 достаточно проверить, что последовательность случайных величин $\{M_n\}_{n\geq 0}$ удовлетворяет условиям теоремы 6 и следствия 2. Нам потребуются вспомогательные утверждения, которые будет доказаны позднее.

**Лемма 8.** *Последовательность случайных величин $\{M_n\}_{n\geq 0}$, определенная в (2.43), обладает сильно арифметической регенерацией вида (1.12) с $(\xi_0,\eta_0) = (0{,}0)$, $\widehat{\xi}_k = 0$, $k \geq 0$ и $(\xi_i,\eta_i) = (\lambda_i,\tau_i), i \in \mathbb{N}$, где*

$$\lambda_i := (S_{P_i} - S_{P_{i-1}})I(P_i < +\infty), \quad \tau_i := P_i - P_{i-1}, \quad i \in \mathbb{N}, \tag{2.56}$$

$$P_0 := 0, \quad P_i := \min\left\{k > P_{i-1} :\; S_k > S_{P_{i-1}}\right\},$$

*Здесь по определению полагаем минимум пустого множества равным $+\infty$. При этом случайные векторы $(\lambda_1,\tau_1)$, $(\lambda_2,\tau_2), \ldots$ независимы и одинаково распределены. При выполнении условий A1-A2 совместное распределение случайного вектора $(\lambda_1,\tau_1)$ является сильно арифметическим с решеткой $l_X\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}$. При выполнении условия A5 величина $\tau_1$ является несобственной, выполнено соотношение*

$$\mathbf{P}(\tau_1 = +\infty) = \mathbf{P}(S_i \leq 0,\, i \in \mathbb{N}) > 0. \tag{2.57}$$

Для проверки условия (2.4) нам потребуется следующее утверждение.

**Лемма 9.** *Пусть выполнены условия A3-A4. Тогда для произвольного отрезка $[c_1,c_2] \subset (h_0,h_+)$, найдется такое $\delta = \delta([c_1,c_2]) \in (0{,}1)$, что при $h \in [c_1,c_2]$ и $n \to \infty$ выполнено соотношение*

$$\mathbf{E}\left(e^{hS_n};\; S_i < S_n, 0 \leq i < n\right) = R^n(h)\mathbf{P}\left(S_i^{(h)} > 0, i \in \mathbb{N}\right) + \delta^n R^n(h)o(1), \tag{2.58}$$

*причем $o(1)$ равномерно мало по $h \in [c_1,c_2]$. Напомним, что величина $h_0$ определяется соотношением $m(h_0) = 0$.*

Соотношение (2.58) соответствует соотношению (2.4). При этом функция $R(h)$ непрерывна на интервале $(h_0,h_+)$, а функция

$$\alpha(h) = \mathbf{P}\left(S_i^{(h)} > 0,\, i \in \mathbb{N}\right)$$

отделена от нуля на отрезке $[c_1,c_2]$, поскольку

$$\mathbf{E}S_1^{(h)} = m(h) > 0, \quad h \in [c_1,c_2].$$

Для завершения доказательства теоремы 8 остается показать, что для последовательности $\{M_n\}_{n\geq 0}$ выполнены условия следствия 2. Нам потребуется следующее утверждение.

**Лемма 10.** *Пусть выполнены условия A3-A5. Тогда для произвольного отрезка* $[c_1,c_2] \subset (h_\gamma, h_+)$*, найдется такое* $\delta = \delta([c_1,c_2]) \in (0,1)$*, что при* $h \in [c_1,c_2]$ *выполнено соотношение*

$$\mathbf{P}(S_i \leq 0, 0 \leq i \leq n) = \delta^n R^n(h) o\left(1\right), \quad n \to \infty, \tag{2.59}$$

*причем* $o(1)$ *равномерно мало по* $h \in [c_1,c_2]$*. Напомним, что величина* $h_\gamma$ *определяется соотношениями* $h_\gamma > 0$*,* $R(h_\gamma) = 1$*.*

Таким образом, для последовательности $\{M_n\}_{n\geq 0}$ выполнены условия теоремы 6 и следствия 2. Следовательно, равномерно по $x : x/n \in [a,b] \subset (\gamma, m_+)$ выполнено соотношение

$$\mathbf{P}(M_n = x) \sim l_X \frac{F_1\left(x/n\right)}{\sqrt{n}} \exp\left(-\Lambda\left(\frac{x}{n}\right) n\right), \quad n \to \infty,$$

где функции $\Lambda$ и $F_1$ определены ранее в (2.49) и (2.51) соответственно. □

*Доказательство теоремы 9.* Как и при доказательстве теоремы 8, заметим, что в предположениях теоремы 9 справедливы леммы 8 и 9, откуда вытекает, что выполнены условия теоремы 6.

В условиях A3-A4 величина $h_\gamma$ является единственным решением уравнения $R(h) = 1$ на интервале $(h_0,h_+)$. Следовательно, множество $B_0$, введенное ранее в (1.19), в данном случае содержит единственный элемент $h_\gamma$, и множеством $B_0'$ является интервал $(0,\gamma)$.

Заметим, что функция $\gamma(\theta)$, введенная ранее в (1.25), в данном случае является константой $\gamma$, а функция $F_0(\theta)$, введенная в (1.28), не зависит от $\theta \in (0,\gamma)$, и равна

$$l_X \frac{\alpha(h_\gamma)\mathbf{P}(\tau_1 = +\infty)}{\sqrt{\sigma^2(h_\gamma)\gamma^2\sigma^{-2}(h_\gamma)}} = l_X \frac{\alpha(h_\gamma)\mathbf{P}(S_i \leq 0, i \in \mathbb{N})}{\gamma} = l_X F_0.$$

Таким образом, выполнены условия теоремы 4, откуда соотношение

$$\mathbf{P}(M_n = x) \sim l_X F_0 \exp(-x h_\gamma), \quad n \to \infty,$$

выполняется равномерно по $x = x(n) : \ x/n \in [a,b] \subset (0,\gamma)$. $\square$

### 2.3.1 Доказательства вспомогательных утверждений

*Доказательство леммы 8.* Покажем, что последовательность $\{M_n\}_{n\geq 0}$ обладает регенерацией вида (1.12).

Случайные векторы $(\lambda_i, \tau_i), i \in \mathbb{N}$, независимы и одинаково распределены, так как последовательность $\{S_n\}_{n\geq 0}$ является случайным блужданием. Таким образом,

$$M_n = \sum_{i=1}^{N_n} \lambda_i, \quad N_n := \min\{k \in \mathbb{N}_0 : P_k \leq n\}, \quad n \in \mathbb{N},$$

откуда вытекает наличие регенерационной структуры для последовательности $\{M_n, n \geq 0\}$.

Остается показать, что при выполнении условий $A1 - A2$ распределение вектора $(\lambda_1, \tau_1)$ является сильно арифметическим с решеткой $l_X\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}$. Заметим, что в силу условия 1 найдется такое $n_0 \in \mathbb{N}$, что при всех $n \geq Q$, $n \in \mathbb{N}$, вероятности событий

$$\{S_i \leq 0, \, i < n, \, S_n = 0\}, \quad \{S_i \leq 0, \ i < n, \, S_n = -l_X\} \tag{2.60}$$

положительны. Более того, при $n \geq n_0$ в силу условия $A2$ вероятности событий

$$\{S_i \leq 0, \, i < n, \, S_n = 0, S_{n+1} > 0\}, \quad \{S_i \leq 0, \, i < n, \, S_n = -l_X, S_{n+1} > 0\} \tag{2.61}$$

также положительны, поскольку в противном случае одна из вероятностей событий $\{X > 0\}$ или $\{X > l_X\}$ была бы нулевой, что невозможно в силу условий $A1 - A2$.

Заметим, что если выполнены условия $A1 - A2$, то значения $u_1$ и $u_2$ не меньше $l_X$ и кратны ему. Здесь $0 < u_1 < u_2$ – значения, которые с положительной вероятностью принимает случайная величина $X_1$. Из соотношения (2.61) вытекает, что носитель распределения случайного вектора $(\lambda_1, \tau_1)$ содержит значения

$$(u_2, n), \quad (u_2 - l_X, n), \quad n \geq Q,$$

откуда решетка распределения вектора $(\lambda_1, \tau_1)$ содержится в $l_X\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$. При этом указанное множество значений содержит в себе вектора

$$(u_2, Q), \quad (u_2 - l_X, Q), \quad (u_2, Q+1),$$

откуда вытекает, что решетка вектора $(\lambda_1, \tau_1)$ порождает $l_X\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$. $\square$

*Доказательство леммы 9.* Заметим, что при $h \in (h_0, h_+)$ выполнено соотношение

$$\begin{aligned}
&\mathbf{E}\left(e^{hS_n};\ S_i < S_n, 0 \leq i < n\right) = R(h)^n \mathbf{P}\left(S_i^{(h)} < S_n^{(h)}, 0 \leq i < n\right) = \\
&= R(h)^n \mathbf{P}\left(S_i^{(h)} > 0, 0 < i \leq n\right) = \\
&= (R(h))^n \left(\mathbf{P}\left(S_i^{(h)} > 0, i \in \mathbb{N}\right) - \mathbf{P}\left(\exists k > n:\ S_k^{(h)} \leq 0\right)\right). \qquad (2.62)
\end{aligned}$$

Кроме того, нетрудно видеть, что функция аргумента $h$

$$\mathbf{P}\left(S_i^{(h)} > 0,\ i \in \mathbb{N}\right)$$

положительна при $h \in (h_0, h_+)$, так как в силу определения $h_0$ выполнено соотношение

$$\mathbf{E}S_1^{(h)} = m(h) > 0, \quad h \in (h_0, h_+).$$

Отделенность от нуля указанной функции при $h \in [a,b] \subset (h_0,h_+)$ вытекает из ее монотонности ввиду стохастического доминирования случайной величины $X^{(u)}$ над $X^{(v)}$ при $u \geq v$.

Таким образом, в силу (2.62) для доказательства леммы 9 остается показать, что для произвольного отрезка $[c_1,c_2] \subset (h_0, h_+)$ найдется такое $\delta = \delta([c_1,c_2]) \in (0,1)$, что выполнено соотношение

$$\mathbf{P}\left(\exists k > n:\ S_k^{(h)} \leq 0\right) = \delta^n o(1), \quad n \to \infty, \qquad (2.63)$$

где $o(1)$ равномерно мало по $h \in [c_1,c_2]$. Пусть

$$z := (h_0 - c_1)/2.$$

Заметим, что величина $z$ отрицательна, при этом $h_0 < z + c_1 \le z + c_2 < h_+$. Тогда при $h \in [c_1,c_2]$ левая часть (2.63) оценивается сверху суммой

$$\sum_{k>n} \mathbf{P}\left(S_k^{(h)} \le 0\right) \le \sum_{k>n} \mathbf{E}\left(\exp\left(zS_k^{(h)}\right)\right) = \frac{R^n(z+h)R(h)^{-n}}{1 - R(z+h)(R(h))^{-1}}. \qquad (2.64)$$

Положим

$$\delta = \max_{h\in[c_1,c_2]} \left(\frac{R(z+h)}{R(h)}\right).$$

Величина $\delta$ меньше единицы, поскольку функция $R(h)$ монотонно возрастает на интервале $(h_0, h_+)$ и выполнено неравенство $h_0 < z+c_1 \le z+c_2 < h_+$. Таким образом, из соотношения (2.64) вытекает соотношение (2.63), откуда, принимая во внимание (2.62), получаем лемму 9. □

*Доказательство леммы 10.* Нетрудно видеть, что функция $R(h)$ непрерывна, положительна и монотонно возрастает на интервале $(h_\gamma, h_+)$. Положим

$$\delta = \delta([c_1,c_2]) = (R((h_\gamma + c_1)/2))^{-1}.$$

Величина $\delta$ меньше единицы, так как

$$1 = R(h_\gamma) < R((h_\gamma + c_1)/2).$$

Таким образом, при $h \in [c_1,c_2]$ справедливо неравенство

$$\mathbf{P}(S_i \le 0,\, i \le n) \le 1 < \delta^n R^n(h), \quad n \in \mathbb{N},$$

откуда и следует лемма 10. □

# Глава 3. Большие уклонения первого момента достижения далекого уровня СБСС

## 3.1 Модель СБСС и постановка задачи

Пусть $p_i$, $i \in \mathbb{Z}$, – независимые и одинаково распределенные (н.о.р.) случайные величины со значениями в интервале (0,1) и $\mathbf{p} = \{p_i\}_{i\in\mathbb{Z}}$. Положим $q_i := 1 - p_i$. Пусть $W_0 = 0$,

$$\begin{aligned}
&\mathbf{P}(W_{j+1} = i+1 | W_0, \ldots, W_j = i, \mathbf{p}) = p_i, \\
&\mathbf{P}(W_{j+1} = i-1 | W_0, \ldots, W_j = i, \mathbf{p}) = q_i, \; j \geq 0, i \in \mathbb{Z}.
\end{aligned}$$

Последовательность случайных величин $\{W_n\}_{n\geq 0}$ называется *случайным блужданием в случайной среде (СБСС)*, а случайный элемент $\mathbf{p}$ называют *случайной средой*. Для вероятностного пространства, на котором заданы процессы $\{W_n,\, n \geq 0\}$ и случайная среда $\mathbf{p}$ будем использовать обозначение $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P})$.

Положим

$$\gamma := \mathbf{E} \ln\left(\frac{q_i}{p_i}\right) \tag{3.1}$$

и введем последовательность, вообще говоря, несобственных случайных величин

$$T_0 := 0, \quad T_l := \min\{k \in \mathbb{N}: \; W_k = l\}, \quad l \in \mathbb{Z}. \tag{3.2}$$

Из результатов работы [5] вытекает, что в случае $\gamma \leq 0$ величины $T_i$, $i \in \mathbb{N}$, почти наверное конечны. В то же время, при $\gamma > 0$ величина $T_1$ является несобственной, а именно, справедливо соотношение

$$\mathbf{P}(T_1 = +\infty) = \mathbf{P}(W_i \leq 0, i \geq 0) > 0.$$

В работе [32] автором получены точные асимптотики вероятностей больших уклонений для величин $T_n$, $n \in \mathbb{N}$, при $\gamma \leq 0$. В работе автора [33] рассмотрен случай $\gamma > 0$ и получены аналогичные результаты.

### 3.1.1 Регенерация величин $T_n$

В данном разделе мы покажем, что последовательность случайных величин $\{T_n, n \in \mathbb{N}\}$, определенную соотношением (3.2), можно рассматривать как регенерирующую. Для этой цели мы зададим на ином вероятностном пространстве процесс $\left\{\widehat{T}_n, n \in \mathbb{N}\right\}$ со свойством регенерации такой, что при каждом натуральном $n$ величины $T_n$ и $\widehat{T}_n$ совпадают по распределению. Регенерационная структура такого процесса будет собственной в случае $\gamma \leq 0$ и несобственной – при $\gamma > 0$.

Пусть на пространстве $\left(\widehat{\mathbf{\Omega}}, \widehat{\mathcal{F}}, \widehat{\mathbf{P}}\right)$ задана такая последовательность н.о.р. случайных величин

$$\widehat{\mathbf{p}} = \{\widehat{p}_k\}_{k \in \mathbb{Z}}, \quad \widehat{q}_k := 1 - \widehat{p}_k,\ k \in \mathbb{Z},$$

что $\widehat{p}_0$ совпадает по распределению со случайной величиной $p_0$.

Пусть на пространстве $\left(\widehat{\mathbf{\Omega}}, \widehat{\mathcal{F}}, \widehat{\mathbf{P}}\right)$ задан случайный процесс $\{Z_k, k \geq 0\}$, который является ветвящимся процессом в случайной среде с иммиграцией в одну частицу, а именно,

$$Z_0 := 0, \quad Z_{k+1} := \sum_{j=1}^{1+Z_k} \kappa_{k,j}, \quad k \in \mathbb{N}. \tag{3.3}$$

Здесь случайные величины $\kappa_{k,j}$, $k,j \geq 0$, при фиксации среды $\widehat{\mathbf{p}}$ независимы и имеют геометрическое распределение

$$\widehat{\mathbf{P}}(\kappa_{k,j} = l | \widehat{\mathbf{p}}) := (\widehat{q}_k)^l \widehat{p}_k, \quad l \in \{0,1,2\ldots\}. \tag{3.4}$$

Заметим, что процесс $\{Z_k,\ k \geq 0\}$ является однородной цепью Маркова с пространством состояний $\{0,1,2,\ldots\}$.

Введем на пространстве $\left(\widehat{\mathbf{\Omega}}, \widehat{\mathcal{F}}, \widehat{\mathbf{P}}\right)$ последовательность н.о.р. случайных векторов $(\xi_i,\eta_i)$, $i \in \mathbb{N}$. Положим

$$S_0^\eta = 0, \quad S_i^\eta = \min\left\{k > S_{i-1}^\eta : Z_k = 0\right\}, \; i \in \mathbb{N},$$

$$\eta_i := S_i^\eta - S_{i-1}^\eta, \quad \xi_i := \eta_i + 2\sum_{j=S_{i-1}^\eta}^{S_i^\eta} Z_j. \tag{3.5}$$

**Замечание 9.** Марковская цепь $\{Z_n, n \geq 0\}$ является возвратной при $\gamma \leq 0$ и невозвратной при $\gamma > 0$. Величина $\gamma$ была определена ранее как

$$\gamma = \mathbf{E}\ln(q_0/p_0) = \widehat{\mathbf{E}}\ln(\widehat{q}_0/\widehat{p}_0).$$

Для определения на пространстве $\left(\widehat{\mathbf{\Omega}}, \widehat{\mathcal{F}}, \widehat{\mathbf{P}}\right)$ величин $\widehat{T}_n$ нам потребуются дополнительные обозначения. Положим при каждом натуральном $n$

$$Z_k(n) := Z_k, \quad 0 \leq k \leq n, \quad Z_{k+1}(n) := \sum_{j=2}^{1+Z_k} \kappa_{k,j}, \quad k > n.$$

При каждом натуральном $n$ процесс $\{Z_i(n), \, i \geq 0\}$ является ветвящимся процессом в случайной среде с иммиграцией в одну частицу в первых $n$ поколениях.

Положим

$$\widehat{T}_n := n + 2\sum_{i=0}^{+\infty} Z_i(n), \quad n \in \mathbb{N}. \tag{3.6}$$

Отметим, что если цепь $\{Z_n, n \geq 0\}$ невозвратна, а именно, если $\gamma > 0$, то величины $\widehat{T}_n$ с положительной вероятностью принимают значение $+\infty$. Заметим, что величины $\widehat{T}_n$ допускают представление:

$$\widehat{T}_n = \sum_{j=1}^{N_n} \xi_j + \zeta_n, \quad n \in \mathbb{N}, \tag{3.7}$$

где в силу марковского свойства цепи $\{Z_n,\ n \geq 0\}$ при каждом натуральном $l$ выполнено

$$\widehat{\mathbf{P}}\left(\zeta_n = r|(\xi_i,\eta_i) = (x_i,y_i), i \leq l, \tau_l = n-k, \eta_{l+1} > k\right) = \\ = P_\zeta(r,k) = \widehat{\mathbf{P}}\left(\widehat{T}_k = r|k < \eta_1 < +\infty\right). \tag{3.8}$$

Для доказательства наличия регенерационной структуры величин $T_n$ остается показать, что при каждом $n$ распределения величин $T_n$ и $\widehat{T}_n$ совпадают. Справедливо следующее утверждение (см., например, работу [10]).

**Лемма 11.** *При любых $n,k \in \mathbb{N}$ справедливо соотношение*

$$\mathbf{P}(T_n = k) = \widehat{\mathbf{P}}\left(\widehat{T}_n = k\right). \tag{3.9}$$

Таким образом, наличие регенерационной структуры для величин $T_n, n \in \mathbb{N}$, доказано. Регенерационная структура является собственной при $\gamma \leq 0$ и несобственной при $\gamma > 0$, так как цепь $\{Z_n,\ n \geq 0\}$ является невозвратной.

## 3.2 Результаты о больших уклонениях для момента достижения уровня СБСС

Основным результатом является следующая теорема об асимптотике вероятностей больших уклонений для момента достижения далекого уровня СБСС. Теорема о больших уклонениях в случае собственной регенерации доказана в работе автора [32], а именно, когда величина

$$\gamma = \mathbf{E}\ln(q_0/p_0) \leq 0.$$

Случай несобственной регенерации рассмотрен в работе автора [33].

**Теорема 10.** *Пусть последовательность случайных величин $\{T_n\}_{n\geq 0}$ задана соотношением (3.2). Тогда при $n \to \infty$ выполнено соотношение*

$$\mathbf{P}(T_n = k) \sim \frac{F(k/n)}{\sqrt{n}} \exp\left(-L\left(\frac{k}{n}\right)n\right), \tag{3.10}$$

*соотношение выполнено равномерно по таким $k$, что $(n-k)$ четно при всех $n$ и отношение $k/n$ принадлежит некоторому компакту $K' \subset B'$. Здесь, как и прежде,*

$$L(\theta) = \theta h_\theta - \ln\rho\left(h_\theta\right), \quad h_\theta: \ (\ln\rho)'(h_\theta) = \theta, \quad \theta \in B', \tag{3.11}$$

$$B' := \{(\ln\rho)'(h): \ h < 0\}, \quad F(\theta) = \frac{2G(h_\theta)}{\sqrt{2\pi((\ln\rho)''(h_\theta))}}, \tag{3.12}$$

$$G(h) = \rho_0(h)\sum_{k=0}^{+\infty} \rho^{-k}(h)\widehat{\mathbf{E}}\exp\left(h\widehat{T}_k; \ k < \eta_1 < +\infty\right). \tag{3.13}$$

*Функции $\rho(h)$ и $\rho_0(h)$ определены соотношением (3.28), фигурирующие в нем функция $\lambda(h)$ и элементы $\psi_h$ и $f_h$ определены соотношением (3.24).*

**Замечание 10.** Отметим, что выражения для функций уклонений $L(\theta)$ могут быть получены из теоремы 2 работы [7].

**Замечание 11.** Случаи собственной и несобственной регенерации объединены в одну теорему, так как доказательство в обоих случаях сходное. Качественное отличие заключается в следующем.

Если $\gamma = \mathbf{E}\ln(q_0/p_0) \le 0$ и, дополнительно, $\mathbf{E}(q_0/p_0) < 1$, то функция $\ln\rho(h)$ стремится к нулю при $h \to 0-$ и $(\ln\rho)'(h) \to const > 0$.

Если $\gamma \le 0$ и $\mathbf{E}(q_0/p_0) \ge 1$, то $\ln\rho(h)$ стремится к нулю при $h \to 0-$ и $(\ln\rho)'(h) \to +\infty$.

Если же $\gamma > 0$, то $\ln\rho(h)$ стремится к константе, меньшей нуля.

*Доказательство основной теоремы 10.* Для доказательства теоремы достаточно получить точные асимптотики вероятностей больших уклонений для величин $\widehat{T}_n$, введенных в разделе 2, а именно, исследовать асимптотику вероятностей

$$\widehat{\mathbf{P}}\left(\widehat{T}_n = k\right).$$

Действительно, в силу леммы 11 вероятности $\widehat{\mathbf{P}}\left(\widehat{T}_n = k\right)$ и $\mathbf{P}(T_n = k)$ совпадают при всех натуральных $k$.

Отметим, что регенерационная структура последовательности $\left\{\widehat{T}_n, n \ge 0\right\}$ не является сильно арифметической, однако, регенерационная структура последовательности $\left\{\widehat{T}_n - n, n \ge 0\right\}$ является сильно арифметической с показателем 2. Регенерационную структуру образуют случайные векторы $(\xi_i - \eta_i, \eta_i), i \in \mathbb{N}$, где случайные векторы $(\xi_i,\eta_i)$ определены соотношением (3.5). При доказательстве теоремы будем принимать во внимание замечания 2 и 8.

Мы покажем, что из условий теоремы 10 вытекает справедливость условий теоремы 6. Наличие регенерационной структуры последовательности $\left\{\widehat{T}_n, n \geq 0\right\}$, напомним, уже было показано в разделе 2.

Выберем в качестве множества $H$ луч $(-\infty,0)$ и докажем справедливость соотношения (2.4). Заметим, что в силу определения величин $\eta_i, i \geq 1$, (соотношение (3.5)), событие $C_n$ может быть представлено следующим образом:

$$C_n = \bigsqcup_{k=1}^{+\infty} \{\eta_1 + \ldots + \eta_k = n\} = \{Z_n = 0\}.$$

Принимая во внимание (3.6), получаем, что выражение в левой части соотношения (2.4) может быть представлено в виде:

$$\widehat{\mathbf{E}}\left(\exp\left(h\widehat{T}_n\right);\ C_n\right) = \widehat{\mathbf{E}}\left(\exp\left(h\left(n + 2\sum_{i=0}^{n} Z_i\right)\right);\ Z_n = 0\right), \quad h < 0. \quad (3.14)$$

Покажем, что величину в правой части тождества (3.14) можно вычислить как действие $n$-ой степени некоторого оператора на некоторые вектор и ковектор.

Введем на пространстве

$$l^1 := \left\{x = (x_0,x_1,\ldots) :\ \sum_{i=0}^{+\infty} |x_i| < \infty\right\}, \quad ||x|| := \sum_{i=0}^{+\infty} |x_i|,$$

следующие операторы:

$$P_{tr} : l^1 \to l^1; \quad (xP_{tr})_j := \sum_{i=0}^{+\infty} x_i (P_{tr})_{i,j}, \quad (P_{tr})_{i,j} := \widehat{\mathbf{P}}(Z_2 = j | Z_1 = i), \quad (3.15)$$

$$e^{hG} : l^1 \to l^1; \quad \left(xe^{hG}\right)_j := x_j \exp(h(1+2j)), \quad i,j \geq 0, \quad (3.16)$$

$$Q(h) := P_{tr} e^{hG}, Q(h) : l^1 \to l^1, \quad xQ(h) := (xP_{tr})e^{hG}, \ x \in l^1. \quad (3.17)$$

Оператор $P_{tr}$ есть переходный оператор цепи $\{Z_i,\ i \geq 0\}$, оператор $\exp(hG)$ является диагональным. Отметим, что сопряженный к $Q(h)$ оператор действует на пространстве $l^\infty$ следующим образом:

$$Q(h)[f](i) = \widehat{\mathbf{E}}(\exp(h(1+2Z_1))f(Z_1)|Z_0 = i), \quad f \in l^\infty.$$

Здесь и далее во избежание дополнительных обозначений для сопряженных операторов действие на пространстве $l^1$ будем записывать как $xQ(h)$, то есть умножать на "строку" $x$ слева. А действие сопряженного к $Q(h)$ на пространстве $l^\infty$ будем записывать $Q(h)f$, то есть умножать на "столбец" $f$ справа.

Воспользуемся введенными операторами для вычисления правой части соотношения (3.14). Имеем,

$$\widehat{\mathbf{E}}\left(\exp\left(h\left(n+2\sum_{i=0}^{n} Z_i\right)\right);\ Z_n = 0\right) = \left\langle \pi_0 Q^n(h), e_0\right\rangle, \tag{3.18}$$

$$\pi_0 = (1{,}0{,}0\ldots) \in l_1, \quad e_0 = (1{,}0{,}0\ldots) \in l^\infty. \tag{3.19}$$

Исследуем левую часть соотношения (2.6). Введем события

$$B_Z(n) := \{Z_1 > 0, \ldots, Z_n > 0\}, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Заметим, что при всех натуральных $n$ и $h < 0$ выполнено

$$\begin{aligned}\widehat{r}_n(h)\widehat{\mathbf{P}}(n < \eta_1 < +\infty) = \widehat{\mathbf{E}}\left(\exp(h\widehat{T}_n); B_Z(n),\, \eta_1 < +\infty\right) = \\ = \widehat{\mathbf{E}}\left(\exp(h\widehat{T}_n); B_Z(n)\right) \leq \widehat{\mathbf{E}}\left(\exp\left(h\left(n+2\sum_{i=0}^{n} Z_i\right)\right); B_Z(n)\right),\end{aligned} \tag{3.20}$$

так как величина $\widehat{T}_n$ равна $+\infty$ на событии $\{\eta_1 = +\infty\}$.

Покажем, что правую часть соотношения (3.20) также можно представить как действие $n$-ой степени некоторого оператора на некоторые вектор и ковектор. Введем на пространстве $l^1$ оператор

$$\widehat{P}_{tr,0} : l^1 \to l^1; \quad \left(x\widehat{P}_{tr,0}\right)_j := \sum_{i=0}^{+\infty} x_i \left(\widehat{P}_{tr,0}\right)_{i,j}, \quad \left(\widehat{P}_{tr,0}\right)_{i,0} := 0, \tag{3.21}$$

$$\left(\widehat{P}_{tr,0}\right)_{i,j} := (P_{tr})_{i,j},\ i \geq 0, j \in \mathbb{N},$$

$$\widehat{Q}_0(h) := \widehat{P}_{tr,0}e^{hG}, \quad x\widehat{Q}_0(h) = \left(x\widehat{P}_{tr,0}\right)e^{hG},\ x \in l^1. \tag{3.22}$$

Сопряженный к $\widehat{Q}_0(h)$ оператор на пространстве $l^\infty$ действует следующим образом:

$$\widehat{Q}_0(h)[f](i) = \widehat{\mathbf{E}}(\exp(h(1+2Z_1))I(Z_1>0)f(Z_1)|Z_0=i), \quad f \in l^\infty.$$

Тогда правая часть соотношения (3.20) принимает следующий вид:

$$\widehat{\mathbf{E}}\left(\exp\left(h\left(n+2\sum_{i=0}^{n} Z_i\right)\right); B_Z(n)\right) = \left\langle \pi_0 \widehat{Q}_0^n(h), e_1\right\rangle, \ e_1 := (1,1,1,\dots). \tag{3.23}$$

Мы показали, что левая часть соотношения (2.4) совпадает с правой частью соотношения (3.18), а левая часть соотношения (2.6) оценивается сверху правой частью соотношения (3.23).

Положим

$$K_+ := \{x \in l^1 : \ x_i \geq 0, \, i \geq 0\}, \quad K_+^0 := \{x \in l^1 : \ x_i > 0, \, i \geq 0\},$$
$$K_+^* := \{y \in l^\infty : \ y_i \geq 0, \, i \geq 0\}, \quad \left(K_+^0\right)^* := \{y \in l^\infty : \ y_i > 0, \, i \geq 0\}.$$

Пусть

$$\lambda(h) := \max\{|z| : \ z \in \operatorname{spec}(Q(h))\}, \quad \lambda_0(h) := \max\left\{|z| : \ z \in \operatorname{spec}\left(\widehat{Q}_0\,(h)\right)\right\}.$$

Для дальнейшего доказательства нам потребуется лемма, доказательство которой проведем позднее.

**Лемма 12.** *Пусть на пространстве $l^1$ при $h \in H$ заданы семейства операторов $Q(h)$ и $\widehat{Q}_0(h)$ со следующими условиями.*

1. *Операторы $Q(h)$ и $\widehat{Q}_0(h)$ непрерывно зависят от $h$.*
2. *При каждом $h \in H$ оператор $Q(h)$ компактен.*
3. *При каждом $h \in H$ для произвольного $x \in K_+$ выполнены соотношения:*

$$xQ(h) \in K_+, \quad x\left(Q(h) - \widehat{Q}_0(h)\right) \in K_+$$

*и найдется такой $x_0 \in K_+ \backslash \{0\}$, что $x_0 Q(h) \neq x_0 \widehat{Q}_0(h)$.*

4. *При каждом* $h \in H$ *найдется* $\lambda: \ \lambda > \lambda(h)$, *что для произвольного ненулевого* $x \in K_+$ *и* $d \in \mathbb{N}$

$$x \sum_{n=1}^{+\infty} Q^{dn}(h) \lambda^{-dn} \in K_+^0.$$

5. *При каждом* $h \in H$ *найдутся такие* $x_0(h) \in K_+$ *и* $\varepsilon(h) > 0$, *что выполнено соотношение*

$$(x_0(h)Q(h) - \varepsilon(h)x_0(h)) \in K_+^0.$$

*Тогда*

a) *при каждом* $h \in H$ *величина* $\lambda(h)$ *положительна и существуют такие* $\psi_h \in K_+^0$ *и* $f_h \in \left(K_+^0\right)^*$, *что выполнены соотношения:*

$$\psi_h Q(h) = \lambda(h)\psi_h,\ Q(h)f_h = \lambda(h)f_h,\ \langle \psi_h, f_h \rangle = 1, \quad \lambda(h) > \lambda_0(h); \tag{3.24}$$

b) *собственное значение* $\lambda(h)$ *оператора* $Q(h)$ *имеет геометрическую кратность* 1 *и непрерывно зависит от* $h$;

c) *проектор* $\psi_h\langle \cdot, f_h \rangle$ *непрерывно зависит от* $h$, *в частности, для произвольных* $x \in l^1$ *и* $y \in l^\infty$ *функция*

$$\langle x, f_h \rangle \langle \psi_h, y \rangle$$

*непрерывна по* $h$;

d) *для произвольного* $K \subset H$ *– компактного подмножества, найдется такое* $\delta_0 = \delta_0(K) \in (0{,}1)$, *что при* $h \in K$ *выполнены соотношения*

$$\max(\lambda_0(h), \lambda_J(h)) < \delta_0 \lambda(h), \quad \lambda_J(h) := \max\{|z| : \ z \in \mathrm{spec}(J(h))\}, \tag{3.25}$$

$$J(h): \ l^1 \to l^1,\ xJ(h) := xQ(h) - \lambda(h)\psi_h\langle x, f_h \rangle,\ x \in l^1. \tag{3.26}$$

Справедливо следующее утверждение, доказательство которого мы проведем позднее.

**Лемма 13.** *Пусть семейства операторов $Q(h)$ и $\widehat{Q}_0(h)$ определены соотношениями (3.17) и (3.22) при $h \in (-\infty,0)$. Тогда данные операторы удовлетворяют лемме 12.*

В силу определения оператора $J(h)$ имеем

$$xQ^n(h) = xJ^n(h) + \lambda^n(h)\psi_h\langle x, f_h\rangle, \quad x \in l^1,\, n \in \mathbb{N},$$

откуда

$$\langle \pi_0 Q^n(h), e_0\rangle = \lambda^n(h)\, \langle \pi_0, f_h\rangle\, \langle \psi_h, e_0\rangle + \langle \pi_0 J^n(h), e_0\rangle\,.$$

Таким образом, в силу соотношения (3.25) при $h \in K$ при некотором $\delta \in (\delta_0,1)$ справедливо соотношение

$$\langle \pi_0 Q^n(h), e_0\rangle = \lambda^n(h)\left(\langle \pi_0, f_h\rangle\, \langle \psi_h, e_0\rangle + \delta^n o(1)\right), \tag{3.27}$$

где $o(1)$ равномерно мало при $h \in K$.

Для доказательства соотношения (2.4) остается положить

$$\rho(h) := \lambda(h), \quad \rho_0(h) := \langle \pi_0, f_h\rangle\, \langle \psi_h, e_0\rangle = f_h(0)\psi_h(0). \tag{3.28}$$

Здесь как и прежде $\pi_0 = (1,0,0,\ldots) \in l^1$ и $e_0 = (1,0,0,\ldots) \in l^\infty$, функции $\rho(h)$ и $\rho_0(h)$ положительны и непрерывны на $H$ в силу леммы 12.

Остается доказать справедливость соотношения (2.6). В силу соотношений (3.20) и (3.23) имеем

$$\widehat{r}_n(h)\widehat{\mathbf{P}}(n < \eta_1 < +\infty) \le \left\langle \pi_0 \widehat{Q}_0^n(h), e_1 \right\rangle,$$

откуда, в силу соотношения (3.25), справедливо соотношение

$$\widehat{r}_n(h)\widehat{\mathbf{P}}(n < \eta_1 < +\infty) = \lambda^n(h)\delta^n o(1), \quad n \to \infty,\, h \in K, \tag{3.29}$$

при некотором $\delta \in (\delta_0,1)$, где $o(1)$ равномерно мало при $h \in K$.

Следовательно, доказано, что в условиях теоремы 10 выполнены условия теоремы 6, откуда вытекает справедливость соотношения (3.10). □

### 3.2.1 Доказательства вспомогательных утверждений

*Доказательство леммы 12.* Данное утверждение является собранными воедино леммами 2-5 работы [32], последние же, в свою очередь, суть следствия результатов работ [27] (лемма 2), [29] (лемма 4) и книги [30] (леммы 3 и 5). Приведем здесь требуемые рассуждения, ссылаясь на описанные результаты.

В силу условия 2 при каждом $h \in H$ оператор $Q(h)$ компактен, соответственно, ненулевые значения спектра являются собственными значениями конечной кратности. Условие 3 влечет неотрицательность оператора, из которой вытекает, что величина

$$\lambda(h) = \max\{|z| : \ z \in \mathrm{spec}(Q(h))\}$$

принадлежит спектру (предложение 1 работы [27]). Условие 5 гарантирует положительность величины $\lambda(h)$ в силу предложения 3 работы [27]. Таким образом, при каждом $h \in H$ величина $\lambda(h)$ принадлежит спектру компактного оператора $Q(h)$ и является положительной, откуда $\lambda(h)$ является собственным значением оператора $Q(h)$.

Условие 4 означает, что для любого натурального $d$ оператор $Q^d(h)$ является "quazi-interior" в терминологии работы [27], в частности, для $d = 1$. Отсюда вытекает, что применима теорема 2 работы [27], которая гарантирует существование элементов $f_h$ и $\psi_h$ с положительными координатами и простоту собственного значения $\lambda(h)$ оператора $Q(h)$. Таким образом, доказана первая часть леммы.

Для любого натурального $d$ применяя ту же теорему для оператора $Q^d(h)$, получаем, что $\lambda^d(h)$ является простым, то есть имеет геометрическую кратность 1 и, разумеется, те же собственные векторы $\psi_h$ и $f_h$.

Покажем, что простота $\lambda^d(h)$ как собственного значения оператора $Q^d(h)$ при каждом $h \in H$ и произвольном натуральном $d$ означает, что у оператора $Q(h)$ нет собственных значений вида $\exp(2i\pi\alpha)\lambda(h)$ при $\alpha \in \mathbb{Q}$, где $i$ – мнимая единица. Действительно, предположим противное: пусть есть такое рациональное число $\alpha = m/l$, $l \in \mathbb{N}$, что $\exp(2\pi i\alpha)\lambda(h)$ лежит в спектре $Q(h)$. Тогда найдется такой $x_\alpha \in l^1$, что

$$x_\alpha Q(h) = \exp(2\pi i\alpha)\lambda(h)x_\alpha,$$

откуда

$$x_\alpha Q^l(h) = \exp(2\pi i\alpha l)\lambda^l(h)x_\alpha = \exp(2\pi i m)\lambda^l(h)x_\alpha = \lambda^l(h)x_\alpha, \quad x_\alpha \neq 0.$$

Таким образом, вектор $x_\alpha$ является собственным для оператора $Q^l(h)$ с собственным значением $\lambda^l(h)$, что противоречит простоте этого собственного значения.

Для доказательства того, что оператор $Q(h)$ не имеет собственных значений вида $\exp(2\pi i\alpha)\lambda(h)$ при иррациональных $\alpha$ воспользуемся результатом работы [28], а именно теоремой 1 и ее следствием. Сформулируем ее в терминах данной работы.

**Теорема 11.** *Пусть на пространстве $l^1$ задан неотрицательный оператор $Y$ со спектральным радиусом 1. Здесь неотрицательность означает, что выполнено соотношение*

$$\forall\ x \in K_+ \quad xY \in K_+.$$

*Предположим также, что найдется такой $u \in (K_+^0)^*$ (напомним, последнее эквивалентно тому, что для любого $j \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ выполнено соотноешние $u_j > 0$), что $(u - Yu) \in (K_+)^*$, или, что то же самое, $(Yu)_j \leq u_j$, $j \in \mathbb{N} \cup \{0\}$. Тогда если число $\beta \in \mathbb{C}$, $|\beta| = 1$ является собственным для оператора $Y$, а именно, найдется такой элемент $0 \neq x \in l^1$, что*

$$xY = \beta x,\, x = (x_0, x_1, \ldots)$$

*то для произвольного $n \in \mathbb{N}$ значение $\beta^n$ так же является собственным, и более того,*

$$|x|g^nY = \beta^n|x|g^n, \quad |x| = (|x_0|, |x_1|, \ldots),\, |x|g^n = (|x_0|g_0^n, |x_1|g_1^n, \ldots) \in l^1.$$

*Здесь $g$ – некоторый вектор из $l^\infty$, такой, что выполнено соотношение $|g_i| = 1$, $i = 0{,}1{,}2, \ldots$.*

Применим данную теорему для доказательства того, что оператор $Q(h)$ не имеет собственных значений вида $\exp(2\pi i\alpha)\lambda(h)$ при иррациональных $\alpha$. Предположим противное: при некотором $h \in H$ существует такое иррациональное $\alpha$, что значение

$$\exp((2\pi i\alpha)\lambda(h)$$

принадлежит спектру оператора $Q(h)$. Для указанного $h$ оператор $Q(h)$ удовлетворяет условиям теоремы 11. Действительно, неотрицательность очевидна, в качестве вектора $u$ достаточно взять вектор $f_h$.

Следовательно, в силу теоремы 11 при всех $n \in \mathbb{N}$

$$\exp((2\pi i\alpha)n) \in \operatorname{spec}\left\{\lambda^{-1}(h)Q(h)\right\}.$$

Однако, в силу иррациональности $\alpha$ множество точек $\{\exp((2\pi i\alpha)n),\ n \in \mathbb{N}\}$ бесконечно, что противоречит компактности оператора $Q(h)$.

Таким образом, условия 1, 2, 4, 5 леммы 12 гарантируют, что на окружности

$$\{z \in \mathbb{C} :\ |z| = \lambda(h)\}$$

оператор $Q(h)$ имеет единственное и простое собственное значение $\lambda(h)$. Следовательно, величина $\lambda_J(h)$ при каждом $h \in H$ строго меньше $\lambda(h)$, так как в силу определения оператора $J(h)$ справедливо соотношение

$$\operatorname{spec}(J(h)) = \operatorname{spec}(Q(h)) \cup \{0\} \backslash \{\lambda(h)\}.$$

Утверждение теоремы 12, что $\lambda_0(h)$ меньше $\lambda(h)$, где, как и прежде,

$$\lambda_0(h) = \max\left\{|z| :\ z \in \operatorname{spec}\left(\widehat{Q}_0(h)\right)\right\}$$

есть следствие теоремы 4.3 работы [29].

Результаты книги [30] (глава 3, стр. 264-271) гарантируют, что функции $\lambda(h), \lambda_0(h)$ и $\lambda_J(h)$ являются непрерывными функциями аргумента $h$ при $h \in H$. Следовательно, функция

$$\frac{\max(\lambda_0(h), \lambda_J(h))}{\lambda(h)}$$

непрерывна при $h \in H$ и строго меньше единицы, откуда вытекает, что для произвольного $K \subset H$ найдется такое $\delta_0 \in (0,1)$, что при всех $h \in K$ выполнено неравенство

$$\max(\lambda_0(h),\lambda_J(h)) < \delta_0\lambda(h).$$

Доказана четвертая часть леммы (утверждение d).

Проектор на корневое подпространство оператора $Q(h)$, соответствующее собственному значению $\lambda(h)$, задаваемый формулой

$$\psi_h\langle\cdot, f_h\rangle,$$

непрерывно (по операторной норме) зависит от $h$ [30] (теорема 3.16, стр. 264). Таким образом, справедлива третья часть леммы (утверждение c). □

*Доказательство леммы 13.* Проверим, что операторы $Q(h)$ и $\widehat{Q}_0(h)$ удовлетворяют лемме 12.

Покажем что оператор $Q(h)$ сходится по операторной норме к $Q(h_0)$ при $h \to h_0$. На пространстве $l^1$ норма оператора $Y$ определяется соотношением:

$$||Y|| := \sup_{i\geq 0}\left(\sum_{j=0}^{+\infty}|Y_{ij}|\right), \quad (xY)_j = \sum_{i=0}^{+\infty} x_i Y_{ij},\ x \in l^1.$$

Имеем в силу определений операторов $Q(h)$ и $\widehat{Q}_0(h)$ (представления (3.17) и (3.22)):

$$Q(h) = P_{tr}e^{hG}, \quad \widehat{Q}_0(h) = \widehat{P}_{tr,0}e^{hG}, \quad h < 0.$$

Таким образом, для непрерывной зависимости семейств операторов $Q(h)$ и $\widehat{Q}_0(h)$ от параметра $h$ достаточно доказать сходимость $e^{hG}$ к $e^{h_0G}$. Имеем,

$$\left|\left|e^{hG} - e^{h_0G}\right|\right| = \sup_{i\geq 0}\left(\sum_{j=0}^{+\infty}\left|\left(e^{hG}\right)_{ij} - \left(e^{h_0G}\right)_{ij}\right|\right) = \sup_{i\geq 0}\left(\left|e^{h(1+2i)} - e^{h_0(1+2i)}\right|\right).$$

Величина в правой части последнего соотношения стремится к нулю, так как $h \to h_0 < 0$. Непрерывная зависимость семейства $\widehat{Q}_0(h)$ проверяется аналогично.

Докажем компактность $Q(h)$ при каждом отрицательном $h$. Оператор $Q(h)$ является композицией непрерывного оператора $P_{tr}$ и компактного $e^{hG}$.

Компактность последнего следует из того, что его можно приблизить конечномерными. Действительно, положим

$$e^{hG_n}:\ l^1 \to l^1, \quad \left(xe^{hG_n}\right)_i := x_i e^{h(1+2i)},\ i < n, \quad \left(xe^{hG_n}\right)_i := 0,\ i \geq n.$$

Имеем,

$$\left|\left|e^{hG} - e^{h_0 G_n}\right|\right| = \sup_{i \geq n} \left|e^{h(1+2i)}\right| \to 0,\ h < 0.$$

Условие 3 леммы 12 следует из вида операторов $Q(h)$ и $\widehat{Q}_0(h)$ (представления (3.17) и (3.22)).

Выполнение условия 4 вытекает из строгой положительности оператора $Q(h)$, а именно, из соотношения

$$(Q(h))_{i,j} = (P_{tr})_{i,j} e^{h(1+2j)} > 0,\ i,j \geq 0.$$

Остается проверить условие 5. Положим

$$x_0(h) := e_0 = (1,0,0,\ldots).$$

Тогда для выполнения условия 5 достаточно показать, что нулевая координата вектора $e_0 Q(h)$ положительна. Действительно,

$$(e_0 Q(h))_0 = \mathbf{E}\left(e^{h(1+2Z_1)} I(Z_1 = 0)\right) = e^h \mathbf{E} q_0 =: \varepsilon(h).$$

в силу определения процесса $\{Z_k,\ k \geq 0\}$ (см. соотношение (3.3)). Таким образом, $(x_0(h)Q(h) - \varepsilon(h)x_0(h)) \in K_+$, что и требовалось доказать.

Таким образом, мы показали, что семейства $Q(h)$ и $\widehat{Q}_0(h)$ удовлетворяют условиям леммы 12. □

## Заключение

Основные результаты работы заключаются в следующем.

1. Получены точные асимптотики вероятностей больших уклонений для случайных последовательностей, обладающих свойством несобственной регенерации.
2. Разработан альтернативный метод для проверки условия Крамера в теоремах о больших уклонениях для регенерирующих последовательностей. Получены альтернативные выражения для функций в асимптотиках вероятностей.
3. Разработанный аппарат применен к задачам о больших уклонениях моментов достижения высокого уровня случайным блужданием в случайной среде с положительным и отрицательным сносом.

Разработанная в работе методика может быть использована для получения локальных предельных теорем для различных последовательностей, обладающих свойством регенерации, например, случайных блужданий в возмущенной случайной среде, случайных блужданий в случайном сценарии и других моделей.

**Благодарность.** Автор глубоко признателен своему научному руководителю кандидату физико-математических наук Шкляеву Александру Викторовичу за указанное направление научной деятельности, бесчисленные подсказки на данном пути, постановку задачи, всяческую помощь при ее решении, содействие в подготовке текстов статей и диссертации, и содействие в поисках научной литературы.

## Список литературы


1. *Гнеденко Б. В.* О локальной предельной теореме теории вероятностей // Успехи математических наук. — 1948. — т. 3, № 3. — с. 187—194.
2. *Cramér H.* Sur un nouveau theoreme-limite de la theorie des probabilities // Scientifiques et Industrielles. — 1938. — т. 736. — с. 5—23.
3. *Боровков А. А.*, *Могульский А. А.* О больших и сверхбольших уклонениях сумм независимых случайных векторов при выполнении условия Крамера. I" // Теория вероятностей и ее применения. — 2006. — т. 51, № 2. — с. 260—294.
4. *Колмогоров А. Н.* Локальная предельная теорема для классических цепей Маркова // Известия Российской академии наук. Серия математическая. — 1949. — т. 13, № 4. — с. 281—300.
5. *Solomon F.* Random walks in a random environment // The Annals of Probability. — 1975. — т. 3, № 1. — с. 1—31.
6. *Kesten H.*, *Kozlov M. V.*, *Spitzer F.* A limit law for random walk in a random environment // Compositio mathematica. — 1975. — т. 30, № 2. — с. 145—168.
7. *Greven A.*, *den Hollander F.* Large deviations for a random walk in random environment // The Annals of Probability. — 1994. — т. 22, № 3. — с. 1381—1428.
8. *Comets F.*, *Gantert N.*, *Zeitouni O.* Quenched, annealed and functional large deviations for one-dimensional random walk in random environment // Probability theory and related fields. — 2000. — т. 118, № 1. — с. 65—114.
9. *Buraczewski D.*, *Dyszewski P.* Precise large deviations for random walk in random environment // Electron. J. Probab. — 2018. — т. 23. — с. 1—26.
10. *Афанасьев В. И.* Двуграничная задача для случайного блуждания в случайной среде // Теория вероятностей и ее применения. — 2018. — т. 63, № 3. — с. 417—430.

11. *Боровков А. А.*, *Могульский А. А.* Вторая функция уклонений и асимптотические задачи восстановления и достижения границы для многомерных блужданий // Сибирский математический журнал. — 1996. — т. 37, № 4. — с. 745—782.

12. *Боровков А. А.*, *Могульский А. А.* Интегро-локальные предельные теоремы для обобщенных процессов восстановления при выполнении условия Крамера. I // Сибирский математический журнал. — 2018. — т. 59, № 3. — с. 491—513.

13. *Боровков А. А.*, *Могульский А. А.* Интегро-локальные предельные теоремы для обобщенных процессов восстановления при выполнении условия Крамера. II // Сибирский математический журнал. — 2018. — т. 59, № 4. — с. 736—758.

14. *Могульский А. А.*, *Прокопенко Е. И.* Интегро-локальные теоремы для многомерных обобщенных процессов восстановления при моментном условии Крамера. I // Сибирские электронные математические известия. — 2018. — т. 15. — с. 475—502.

15. *Могульский А. А.*, *Прокопенко Е. И.* Интегро-локальные теоремы для многомерных обобщенных процессов восстановления при моментном условии Крамера. II // Сибирские электронные математические известия. — 2018. — т. 15. — с. 503—527.

16. *Могульский А. А.*, *Прокопенко Е. И.* Интегро-локальные теоремы для многомерных обобщенных процессов восстановления при моментном условии Крамера. III // Сибирские электронные математические известия. — 2018. — т. 15. — с. 528—553.

17. *Могульский А. А.* Локальные теоремы для арифметических обобщенных процессов восстановления при выполнении условия Крамера // Сибирские электронные математические известия. — 2019. — т. 16. — с. 21—41.

18. *Могульский А. А.*, *Прокопенко Е. И.* Локальные теоремы для арифметических многомерных обобщенных процессов восстановления при выполнении условия Крамера // Математические труды. — 2019. — т. 22, № 2. — с. 106—133.

19. *Бакай Г. А., Шкляев А. В.* Большие уклонения обобщенного процесса восстановления // Дискретная математика. — 2019. — т. 31, № 1. — с. 21—55.

20. *Бакай Г. А.* О характеризации вероятностей больших уклонений для регенерирующих последовательностей // Труды МИАН. — 2022. — т. 316. — с. 47—63.

21. *Joutard C.* Strong large deviations for arbitrary sequences of random variables // Annals of the Institute of Statistical Mathematics. — 2013. — т. 65. — с. 49—67.

22. *Chaganty N. R., Sethuraman J.* Multidimensional strong large deviation theorems // Journal of statistical planning and inference. — 1996. — т. 55, № 3. — с. 265—280.

23. *Боровков А. А., Могульский А. А.* Предельные теоремы в задаче достижения границы многомерным блужданием // Сибирский математический журнал. — 2001. — т. 42, № 2. — с. 289—317.

24. *Боровков А. А.* О преобразовании Крамера, больших уклонениях в граничных задачах и условном принципе инвариантности // Сибирский математический журнал. — 1995. — т. 36, № 3. — с. 417—434.

25. *Козлов М. В.* О больших уклонениях максимума крамеровского случайного блуждания и процесса ожидания // Теория вероятностей и ее применения. — 2013. — т. 58, № 1. — с. 81—116.

26. *Шкляев А. В.* Предельные теоремы для случайного блуждания при условии большого уклонения максимума // Теория вероятностей и ее применения. — 2010. — т. 55, № 3. — с. 590—598.

27. *Schaefer H.* Some spectral properties of positive linear operators. // Pacific Journal of Mathematics. — 1960. — т. 10, № 3. — с. 1009—1019.

28. *Schaefer H.* On the point spectrum of positive operators // Proceedings of the American Mathematical Society. — 1964. — т. 15, № 1. — с. 56—60.

29. *Marek I.* Frobenius theory of positive operators: Comparison theorems and applications // SIAM Journal on Applied Mathematics. — 1970. — т. 19, № 3. — с. 607—628.

30. *Като Т.* Теория возмущений линейных операторов. Монография. — Мир, 1972.

31. *Бакай Г. А.* Большие уклонения для обрывающегося обобщенного процесса восстановления // Теория вероятностей и ее применения. — 2021. — т. 66, № 2. — с. 261—283.

32. *Бакай Г. А.* О больших уклонениях момента достижения далекого уровня случайным блужданием в случайной среде // Дискретная математика. — 2022. — т. 34, № 4. — с. 3—13.

33. *Бакай Г. А.* Большие уклонения момента достижения далекого нижнего уровня случайным блужданием в случайной среде // Дискретная математика. — 2023. — т. 35, № 4. — с. 3—17.

34. *Бакай Г. А.* Большие уклонения обобщенного процесса восстановления // Материалы Международного молодежного научного форума "ЛОМОНОСОВ-2018". — 2018.

35. *Bakai G. A.* Large Deviations of Random Walk in Random Environment // International Conference "Branching Processes, Random Walks and Probability on Discrete Structures", Book of Abstracts. — 2022.

36. *Bahadur R. R.*, *Rao R. R.* On deviations of the sample mean // The Annals of Mathematical Statistics. — 1960. — т. 31, № 4. — с. 1015—1027.

37. *Петров В. В.* О вероятностях больших уклонений сумм независимых случайных величин // Теория вероятностей и ее применения. — 1965. — т. 10, № 2. — с. 310—322.

## Работы автора по теме диссертации

*Статьи в рецензируемых научных изданиях, рекомендованных для защиты в диссертационном совете МГУ.011.3 по специальности 1.1.4 - "теория вероятностей и математическая статистика" и входящих в базы цитирования Scopus, Web of Science и RSCI*


20. *Бакай Г. А.* О характеризации вероятностей больших уклонений для регенерирующих последовательностей // Труды МИАН. — 2022. — т. 316. — с. 47—63.

31. *Бакай Г. А.* Большие уклонения для обрывающегося обобщенного процесса восстановления // Теория вероятностей и ее применения. — 2021. — т. 66, № 2. — с. 261—283.

32. *Бакай Г. А.* О больших уклонениях момента достижения далекого уровня случайным блужданием в случайной среде // Дискретная математика. — 2022. — т. 34, № 4. — с. 3—13.

33. *Бакай Г. А.* Большие уклонения момента достижения далекого нижнего уровня случайным блужданием в случайной среде // Дискретная математика. — 2023. — т. 35, № 4. — с. 3—17.

34. *Бакай Г. А.* Большие уклонения обобщенного процесса восстановления // Материалы Международного молодежного научного форума "ЛОМОНОСОВ-2018". — 2018.

35. *Bakai G. A.* Large Deviations of Random Walk in Random Environment // International Conference "Branching Processes, Random Walks and Probability on Discrete Structures", Book of Abstracts. — 2022.