МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
имени М. В. ЛОМОНОСОВА
МЕХАНИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТЕТ

На правах рукописи

Оноприенко Анастасия Александровна

СОВМЕСТНАЯ ЛОГИКА ЗАДАЧ И ВЫСКАЗЫВАНИЙ

Специальность 1.1.5 — «Математическая логика, алгебра, теория чисел и дискретная математика» (01.01.06 — «Математическая логика, алгебра и теория чисел»)

АВТОРЕФЕРАТ
диссертации на соискание учёной степени
кандидата физико-математических наук

Москва 2022

Работа выполнена на кафедре математической логики и теории алгоритмов Механико-математического факультета ФГБОУ ВО «Московский государственный университет имени М. В. Ломоносова».

Научный руководитель: **Беклемишев Лев Дмитриевич**
доктор физико-математических наук, академик РАН,
Математический институт им. В. А. Стеклова РАН,
главный научный сотрудник

Официальные оппоненты: **Канович Макс Иосифович**
доктор физико-математических наук, профессор,
НИУ “Высшая школа экономики”,
профессор департамента анализа данных
и искусственного интеллекта

Дудаков Сергей Михайлович
доктор физико-математических наук, доцент,
Тверской государственный университет,
декан факультета прикладной математики и кибернетики,
заведующий кафедрой информатики,

Мелихов Сергей Александрович
кандидат физико-математических наук,
математический институт им. В. А. Стеклова РАН
старший научный сотрудник

Защита состоится 18 ноября 2022 г. в 16 часов 45 минут на заседании диссертационного совета МГУ.011.4 (МГУ.01.17) Московского государственного университета имени М. В. Ломоносова по адресу: 119234, Москва, ГСП-1, Ленинские горы, д. 1, ФГБОУ ВО «Московский государственный университет имени М. В. Ломоносова», механико-математический факультет, аудитория 1408.

Email: sbgashkov@gmail.com

С диссертацией можно ознакомиться в отделе диссертаций научной библиотеки МГУ имени М. В. Ломоносова (Ломоносовский просп., д. 27) и на сайте ИАС «ИСТИНА»: https://istina.msu.ru/dissertations/496662606/

Автореферат разослан 18 октября 2022 года.

Учёный секретарь
диссертационного совета
МГУ.011.4 (МГУ.01.17) Гашков Сергей Борисович

Общая характеристика работы

Актуальность темы

Диссертация относится к одному из основных направлений математической логики и теории алгоритмов — исследованию неклассических логик.

Интуиционистское направление в математике (одно из первых среди многообразия неклассических логик) начало складываться в начале XX века и было связано с кризисом в основаниях математики на рубеже XIX–XX веков. Оно возникло в работах Л. Э. Я. Брауэра[1]. Исследования по интуиционистской логике были продолжены А. Гейтингом, А. Н. Колмогоровым, В. И. Гливенко, С. К. Клини, Г. Генценом, А. А. Марковым и другими.

Ограничение сферы действия закона исключённого третьего, предложенного Л. Э. Я. Брауэром, значительно сокращало спектр способов рассуждения, традиционно используемых в математике, и потому вызвало резкую оппозицию со стороны Д. Гильберта. По его словам, никто «не удержит людей от того, чтобы отрицать любые утверждения, образовывать частичные суждения и применять закон исключённого третьего». А. Н. Колмогоров поставил перед собой цель примирить взгляды Д. Гильберта и Л. Э. Я. Брауэра и объяснить интуиционистское направление с точки зрения классической математики. А. Н. Колмогоров предложил истолкование интуиционистского исчисления в рамках стандартных математических понятий. По его замыслу, интуиционистская математика укладывается в рамки классической, если интерпретировать высказывания интуиционистской логики как задачи. При этом законы интуиционистской логики принимают наглядный смысл, достаточно согласованный с нашей интуицией. В комментарии к своему собранию сочинений А. Н. Колмогоров заметил, что «исчисление задач по форме совпадает с брауэровской интуиционистской логикой, недавно формализованной Гейтингом»[2]. Следуя А. Н. Колмогорову, в математике «решение задач должно рассматриваться как её самостоятельная цель». В комментарии к этому же собранию сочинений А. Н. Колмогоров отмечает, что его работа «писалась в надежде на то, что логика решения задач сделается со временем постоянным разделом курса логики. Предполагалось создание единого логического аппарата, имеющего дело с объектами двух типов — высказываниями и задачами».

Однако А. Н. Колмогоров не дал точного объяснения понятий «задача» и «решение задачи». Позже были предложены различные уточнения этих понятий. Одной из возможных причин этого можно считать недостаточную проработанность в начале 1930-ых годов теории вычислимости.

К. Гёдель предложил понимать интуиционистские высказывания как задачи на доказуемость. Он рассматривал логику S4, являющуюся расширением классической логики дополнительной модальностью $\Box$, и построил перевод интуиционистской логики в логику S4[3].

[1] См., например: Brouwer L. E. J. Conciousness, Philosophy and Mathematics //Brouwer. — 1948.

[2] Колмогоров А. Н. Избранные труды. Математика и механика — М., Наука. — 1985.

Однако К. Гёдель не предложил интерпретации понятия “доказуемости” — в частности, в логике S4 отсутствуют объекты, понимаемые как “доказательства”. С. Н. Артёмов развил идею К. Гёделя, рассматривая логику доказуемости LP, в которой имеются явные термы доказуемости[4]. В некотором смысле, логика LP содержит все теоремы логики S4, но вместе с тем логика LP обладает гораздо более широкими выразительными возможностями. С другой стороны, логика LP допускает интерпретацию оператора доказуемости в смысле доказуемости в арифметике Пеано[5].

В семантике реализуемости Клини «задача» представляет собой арифметическую формулу, а «решениями задач» (или «реализациями») являются натуральные числа, кодирующие алгоритмы решения соответствующих задач (точнее, описания соответствующих вычислимых функций)[6]. При этом все теоремы интуиционистского исчисления предикатов являются реализуемыми[7], однако уже на уровне логики высказываний существуют примеры реализуемых, но интуиционистски не доказуемых формул[8]. Реализуемость стала мощным методом исследования интуиционистских и конструктивных теорий. После С. К. Клини были предложены другие виды реализуемости, в частности, Н. К. Верещагин, Д. П. Скворцов, Е. З. Скворцова и А. В. Чернов предложили несколько вариантов слабой реализуемости и показали, что все эти ослабления приводят к одной и той же конечно аксиоматизируемой логике — а именно, интуиционистской логике, расширенной слабым законом исключённого третьего $(\neg p \vee \neg\neg p)$[9].

Другие уточнения понятия задачи были предложены Ю. Т. Медведевым, который в частности ввёл в рассмотрение логику финитных задач[10]. Исследование логики финитных задач и её связи с реализуемостью и интуиционистской выводимостью было продолжено в том числе Д. П. Скворцовым[11], В. Е. Плиско[12] и другими. Вопросы об аксиоматизации логики

[3]Gödel K. Eine Interpretation des Intuitionistis-chen Aussagenkalküls //Ergebnisse eines mathematisches Kolloquiums. – 1933. – Т. 4. – С. 39-40.

[4]Artemov S. Logic of proofs //Annals of Pure and Applied Logic. – 1994. – Т. 67. – №. 1-3. – С. 29-59.

[5]Artemov S. N. Operational modal logic. – Mathematical Sciences Institute, Cornell University, 1995. – Т. 95. – №. 29.

[6]Kleene S. C. On the interpretation of intuitionistic number theory //The journal of symbolic logic. – 1945. – Т. 10. – №. 4. – С. 109-124.

[7]Nelson D. Recursive functions and intuitionistic number theory //Transactions of the American Mathematical Society. – 1947. – Т. 61. – №. 2. – С. 307-368.

[8]Rose G. F. Propositional calculus and realizability //Transactions of the American Mathematical Society. – 1953. – Т. 75. – №. 1. – С. 1-19.

[9]Верещагин Н. К. и др. Варианты понятия реализуемости для пропозициональных формул, приводящие к логике слабого закона исключенного третьего //Труды Математического института имени В.А. Стеклова. – 2003. – Т. 242. – №. 0. – С. 77-97.

[10]См., например: Медведев Ю. Т. Финитные задачи //Доклады Академии наук. – Российская академия наук, 1962. – Т. 142. – №. 5. – С. 1015-1018.

[11]Скворцов Д. П. О вхождении импликации в финитно общезначимые интуиционистски недоказуемые формулы логики высказываний //Математические заметки. – 1976. – Т. 20. – №. 3. – С. 383-390.

[12]Плиско В. Е. О реализуемых предикатных формулах //Доклады Академии наук. – Российская академия наук, 1973. – Т. 212. – №. 3. – С. 553-556.

финитных задач и её алгоритмической разрешимости на сегодняшний день остаются открытыми. Однако Л. Л. Максимова, Д. П. Скворцов и В. Б. Шехтман установили, что эта логика не является аксиоматизируемой множеством формул, содержащих в совокупности конечное число переменных (и, следовательно, не является конечно аксиоматизируемой)[13].

Ю. Т. Медведев предложил также иной подход к уточнению понятия «задача»: так называемые «массовые проблемы»[14]. Идея понятия «массовой проблемы» заключалась в том, что каждая задача представляет собой задачу «поиска» или «вычисления» некоторой функции, определённой на натуральных числах и принимающей натуральные значения. При таком подходе каждой массовой проблеме соответствует некоторая степень трудности, а над степенями трудности естественным образом определяются логические связки. Ю. Т. Медведев установил, что исчисление массовых проблем является интерпретацией интуиционистского исчисления высказываний. Исследование массовых проблем было продолжено А. А. Мучником, который ввёл в рассмотрение понятие слабой сводимости (сводимости Мучника) и установил, что получающееся при этом исчисление слабых степеней также является интерпретацией интуиционистского исчисления высказываний[15]. С. С. Басу и С. Г. Симпсон путём рассмотрения понятия топоса Мучника распространили интерпретацию А. А. Мучника интуиционистского исчисления высказываний на интуиционистскую логику в целом[16].

Г. Джапаридзе рассматривал иной подход, связывающий интуиционистское исчисление и алгоритмическую разрешимость — игровую семантику[17]. По его замыслу, понятие статической игры представляет собой формализацию интерактивной компьютерной задачи, а понятие выигрышной стратегии в такой игре — формализацию алгоритмической разрешимости этой задачи. Как было показано Г. Джапаридзе, интуиционистская логика предикатов полна относительно игровой семантики[18]. Кроме того, получающаяся при этом логика вычислений является консервативным расширением классической логики предикатов[19].

Логика QHC, изучаемая в диссертации, была введена в рассмотрение С. А. Мелиховым[20]. В этой логике каждая формула имеет один из двух сортов: выска-

[13] Максимова Л. Л., Скворцов Д. П., Шехтман В. Б. Невозможность конечной аксиоматизации логики финитных задач Медведева //Доклады Академии наук. – Российская академия наук, 1979. – Т. 245. – №. 5. – С. 1051-1054.

[14] Медведев Ю. Т. Степени трудности массовых проблем //Докл. АН СССР. – 1955. – Т. 104. – №. 4. – С. 501-504.

[15] Мучник А. А. О сильной и слабой сводимости алгоритмических проблем //Сибирский математический журнал. – 1963. – Т. 4. – №. 6. – С. 1328-1341.

[16] Basu S. S., Simpson S. G. Mass problems and intuitionistic higher-order logic //Computability. – 2016. – Т. 5. – №. 1. – С. 29-47.

[17] Japaridze G. Introduction to computability logic //Annals of Pure and Applied Logic. – 2003. – Т. 123. – №. 1-3. – С. 1-99.

[18] Japaridze G. The logic of interactive Turing reduction //The Journal of Symbolic Logic. – 2007. – Т. 72. – №. 1. – С. 243-276.

[19] Japaridze G. In the Beginning was Game Semantics? //Games: Unifying logic, language, and philosophy. – Springer, Dordrecht, 2009. – С. 249-350.

[20] Melikhov S. A. A galois connection between classical and intuitionistic logics. I: Syntax //arXiv preprint

зывание либо задача. Формулы сорта высказывание представляют собой «классическую часть» логики QHC — а именно, для них выполнены все законы классической логики. Формулы сорта задача представляют собой «интуиционистскую часть» логики QHC — для них выполнены все законы интуиционистской логики. Как было показано С. А. Мелиховым, логика QHC является консервативным расширением и классической логики предикатов, и интуиционистской логики предикатов. Логика С. А. Мелихова не даёт новых интерпретаций понятия “задачи”, но выявляет некоторые ранее не исследованные механизмы, связанные с одновременным рассмотрением задач и высказываний. Таким образом, естественно возникает более богатый язык (со связками типа модальностей).

Формулы сорта высказывание и сорта задача в логике QHC связаны между собой двумя модальностями ? и !. Применив модальность ! к формуле сорта высказывание p, мы получим формулу сорта задача $!p$, которую можно неформально понимать как «доказать высказывание p». Таким образом, истинность формулы p означает истинность высказывания p, понимаемого классическим образом, в то время как истинность формулы $!p$ означает разрешимость задачи построения доказательства высказывания p (при этом мы не рассматриваем отдельно и не уточняем смысл понятия «доказательство»). Применив модальность ? к формуле сорта задача α, мы получим формулу сорта высказывание $?\alpha$, которую можно понимать как «задача α имеет решение». Таким образом, истинность формулы α означает разрешимость задачи α, а истинность формулы $?\alpha$ понимается как утверждение о существовании решения задачи α, в котором квантор существования понимается классическим образом. Если определить предпорядок на формулах логики QHC стандартным образом, то окажется, что модальности ? и ! образуют на этом множестве связь Галуа.

Комбинируя модальности ! и ? логики QHC, можно получить производные модальности. Модальность ?!, обозначаемую как $\Box$, применённую к формуле высказывание p, можно понимать как высказывание «существует доказательство высказывания p», или же «p доказуемо». Модальность !?, обозначаемую как ∇, применённую к формуле сорта задача α, можно понимать как задачу «доказать, что задача α имеет решение». Дальнейшее итерирование базовых модальностей ! и ? не даёт ничего нового, поскольку в логике QHC доказуемы формулы $!p \leftrightarrow !?!p$ и $?\alpha \leftrightarrow ?!?\alpha$.

Формула $\Box p$ имеет сорт высказывание. Модальность $\Box$ соответствует следующей интерпретации понятия знания об истинности высказывания: существует решение конструктивной задачи — построения доказательства этого высказывания, причём ”существование” понимается не в конструктивном, а в классическом смысле. Как будет показано ниже, для этой модальности $\Box$ имеет место аксиома рефлексии, в то время как оператор доказуемости, рассматриваемый, например, в арифметике Пеано, не удовлетворяет этой аксиоме. Подобный подход к понимаю оператора доказуемости утверждений, удовлетворяющий аксиоме

arXiv:1312.2575. – 2013; Melikhov S. A. A Galois connection between classical and intuitionistic logics. II: Semantics //arXiv preprint arXiv:1504.03379. – 2015.

рефлексии, прослеживается в работах К. Гёделя[21], С. Н. Артёмова[22] и Г. Джапаридзе и Д. Де Йонга[23].

Формула $\nabla\alpha$ имеет сорт задача. Модальность ∇ соответствует следующей интерпретации: $\nabla\alpha$ — это задача, для решения которой требуется привести классическое доказательство существования решения задачи α. Модальность ∇ удовлетворяет аксиоме не рефлексии, а корефлексии, в отличие от модальности $\Box$. Различные системы интуиционистской логики с модальностью знания, удовлетворяющей аксиоме корефлексии, исследовали С. Н. Артёмов и Т. Протопопеску[24]. Они отмечали, что возможным пониманием интуиционистской модальности знания в ВНК-интерпретации может быть "A имеет доказательство, не обязательно явно выписанное в процессе этой проверки".

Основываясь на аксиомах и правилах вывода логики QHC, несложно доказать, что модальность $\Box$ удовлетворяет следующим принципам:

($1^\Box$) $\Box p \to p$;

($2^\Box$) $\Box p \to \Box\Box p$;

($3^\Box$) $\dfrac{p}{\Box p}$;

($4^\Box$) $\Box(p \to q) \to (\Box p \to \Box q)$.

Модальность ∇ удовлетворяет следующим принципам:

(1^∇) $\alpha \to \nabla\alpha$;

(2^∇) $\nabla\nabla\alpha \to \nabla\alpha$;

(3^∇) $\nabla\bot \to \bot$;

(4^∇) $\nabla(\alpha \to \beta) \to (\nabla\alpha \to \nabla\beta)$.

Аксиомы и правила вывода ($1^\Box$) – ($4^\Box$) в классической логике предикатов с модальностью $\Box$ образуют логику QS4 (это предикатный вариант логики S4). С. А. Мелиховым было показано, что логика QHC — консервативное расширение логики QS4[25]. Аксиомы (1^∇) – (4^∇) в интуиционистской логике предикатов с модальностью ∇ образуют логику, названную С. А. Мелиховым логикой QH4.

Интуиционистская модальная логика, содержащая аксиомы (1^∇), (2^∇) и (4^∇), впервые возникла в работе Р. Голдблатта[26], который исследовал логику оператора локализации на

[21] Gödel K. Eine Interpretation des Intuitionistis-chen Aussagenkalküls.

[22] Artemov S. Logic of proofs.

[23] Japaridze G., De Jongh D. The logic of provability //Studies in Logic and the Foundations of Mathematics. – Elsevier, 1998. – T. 137. – C. 475-546.

[24] Artemov S., Protopopescu T. Intuitionistic epistemic logic //The Review of Symbolic Logic. – 2016. – T. 9. – №. 2. – C. 266-298.

[25] Melikhov S. A. A galois connection between classical and intuitionistic logics. I: Syntax.

топосе. Оператор на гейтинговой алгебре с аналогичными свойствами также возник в работе А. Г. Драгалина[27], который называл его «оператором пополнения» (для таких операторов в англоязычной литературе закрепился термин «nucleus»). Впоследствии эта логика была переоткрыта М. Фэтлоу и получила название «lax logic». В статье М. Фэтлоу и М. Мендлера был изучен пропозициональный вариант PLL[28], а в статье М. Фэтлоу и М. Уолтона — предикатный вариант QLL этой логики[29]. При добавлении аксиомы (3^∇) рассматриваемая логика называется, соответственно, PLL^+ или QLL^+. М. Фэтлоу и М. Уолтоном были построены модели типа Крипке для логик QLL и QLL^+. Эти модели имеют достаточно сложную структуру: они содержат непустое множество возможных миров, два отношения достижимости, отображение, сопоставляющему миру некоторое подмножество миров, а также множество «миров, подверженных ошибкам» (только для логики QLL). Изучением логики QLL занимался также П. Акцель[30], ещё один тип семантики QLL был построен Р. Голдблаттом[31], Д. Рогозин исследовал лямбда-исчисление, связанное с этой логикой и некоторыми другими близкими к ней логиками[32].

С. Артёмов и Т. Протопопеску провели глубокий анализ интуиционистской логики с модальностью знания **K** и построили три формальные системы IEL^-, IEL и IEL^+[33]. Системы IEL и IEL^+ оказались совпадающими, соответственно, с логиками PLL и PLL^+. Ими были построены построены различные типы семантик типа Крипке для систем IEL^-, IEL и IEL^+, для которых имеет место теорема о полноте. Один из типов семантик логики IEL^+ — модели Крипке с отмеченными мирами — лежит в основе семантики логики QHC, изучаемой в диссертации. В. Н. Крупским рассмотрена топологическая семантика логик IEL и IEL^+[34].

Й. Су и К. Сано изучили семантика типа Крипке предикатных вариантов логик IEL^- и IEL — логик QIEL^- и QIEL[35]. Ими была доказана теорема о полноте обеих логик QIEL^- и QIEL относительно семантики типа Крипке. Метод, применяемый в доказательстве, ос-

[26] Goldblatt R. I. Grothendieck topology as geometric modality //Mathematical Logic Quarterly. – 1981. – Т. 27. – №. 31-35. – С. 495-529.

[27] Драгалин А. Г. Математический интуиционизм: введение в теорию доказательств. — М., Наука. — 1979.

[28] Fairtlough M., Mendler M. Propositional lax logic //Information and Computation. – 1997. – Т. 137. – №. 1. – С. 1-33.

[29] Fairtlough M., Walton M. Quantified lax logic //University of Sheffield. – 1997.

[30] Aczel P. The Russell–Prawitz modality //Mathematical Structures in Computer Science. – 2001. – Т. 11. – №. 4. – С. 541-554.

[31] Goldblatt R. Cover semantics for quantified lax logic //Journal of Logic and Computation. – 2011. – Т. 21. – №. 6. – С. 1035-1063.

[32] Rogozin D. Categorical and algebraic aspects of the intuitionistic modal logic IEL^- and its predicate extensions //Journal of Logic and Computation. – 2021. – Т. 31. – №. 1. – С. 347-374.

[33] Artemov S., Protopopescu T. Intuitionistic epistemic logic // arXiv preprint arXiv:1406.1582v2. — 2014; Artemov S., Protopopescu T. Intuitionistic epistemic logic

[34] Крупский В. Н. О моделировании знания в социальных сетях //Л694. Десятые Смирновские чтения: материалы Междунар. науч. конф., Москва, 15–17 июня 2017 г.[редкол.: И. А. Герасимова, О. М. Григорьев]. – 2017. – Т. 15. – С. 30.

[35] Su Y., Sano K. First-order intuitionistic epistemic logic //International Workshop on Logic, Rationality and Interaction. – Springer, Berlin, Heidelberg, 2019. – С. 326-339.

новывался на построении исчисления секвенций для этих логик и рассмотрения множества насыщенных секвенций в качестве модели Крипке. В диссертации теорема о полноте логики QIEL^+ (эту логику С. А. Мелихов обозначал как QH4) доказывается иным способом: а именно, рассмотрением интуиционистских насыщенных теорий. Это доказательство близко к доказательству теоремы о полноте пропозициональной логики IEL^+ относительно семантики Крипке[36].

Было сделано множество попыток связать классическую и интуиционистскую логику, т.е. исчисление высказываний и исчисление задач. Это, в частности, линейная логика Ж.-И. Жирара[37], логика вычислений Г. Джапаридзе[38], логика Лианга–Миллера[39] Они сочетают в себе и классические, и интуиционистские черты, но, в отличие от логики QHC, рассматриваемой в диссертации, не содержат явного разделения на задачи и высказывания и поэтому довольно далеки от нее. М. Билкова изучала логику LRC, "логику ресурсов и возможностей"[40]. В этой логике имеется два сорта переменных, формулы тех же двух сортов и связки, часть из которых переводит формулы одного сорта в формулы того же сорта, а остальные связывают между собой формулы разных сортов. Логика LRC так же, как и логика QHC, двухсортна, но эти две логики значительно отличаются друг от друга. Для доказательства алгебраической полноты логики LRC строятся "двухсортные" алгебры, и для них используется стандартная техника Линденбаума–Тарского. В диссертации применен тот же прием для доказательства полноты логики HC относительно HC-алгебр.

Степень разработанности темы

Логика QHC была введена в 2013 году С. А. Мелиховым и в дальнейшем изучалась в ряде работ[41].

С. А. Мелихов построил несколько синтаксических интерпретаций логики QHC: $\Box$–интерпретация логики QHC в логику QS4, ∇–интерпретация логики QHC в себя, $\neg\neg$–интерпретация логики QHC в интуиционистскую логику, $\Diamond$–интерпретация логики QHC в себя. Используя эти интерпретации, С. А. Мелихов получил следующий результат: логика QHC является консервативным расширением классической логики предикатов, интуиционистской логики предикатов и логики QS4 (предикатного варианта логики S4).

С. А. Мелихов предложил несколько типов топологических моделей логики QHC. Модели одного из типов, названные С. А. Мелиховым моделями Эйлера–Тарского, интерпре-

[36]Artemov S., Protopopescu T. Intuitionistic epistemic logic

[37]Girard J. Y. Linear logic //Theoretical computer science. – 1987. – Т. 50. – №. 1. – С. 1-101.

[38]Japaridze G. The logic of tasks //Annals of Pure and Applied Logic. – 2002. – Т. 117. – №. 1-3. – С. 261-293.

[39]Liang C., Miller D. Kripke semantics and proof systems for combining intuitionistic logic and classical logic //Annals of Pure and Applied Logic. – 2013. – Т. 164. – №. 2. – С. 86-111.

[40]Bílková M. et al. The logic of resources and capabilities //The Review of Symbolic Logic. – 2018. – Т. 11. – №. 2. – С. 371-410.

[41]Melikhov S. A. A galois connection between classical and intuitionistic logics. I: Syntax; Melikhov S. A. A galois connection between classical and intuitionistic logics. II: Semantics; Melikhov S. A. Mathematical semantics of intuitionistic logic //arXiv preprint arXiv:1504.03380. – 2015.

тируют формулы сорта высказывание как произвольные подмножества некоторого топологического пространства X, а формулы сорта задача — как открытые подмножества X. Модальность ! соответствует оператору взятия внутренности, а модальность ? интерпретируется тождественным образом. Модели второго типа, названные С. А. Мелиховым моделями Тарского–Колмогорова, интерпретируют формулы сорта высказывание как регулярные открытые подмножества топологического пространства X, формулы сорта задача — как открытые подмножества X. Модальность ! интерпретируется тождественным образом, а модальность ? соответствует оператору взятия внутренности замыкания. Несложно доказать, что логика QHC неполна относительно моделей таких двух типов. Модели третьего типа строятся на основе понятия пучка и уже нетождественно интерпретируют обе модальности. Однако эта семантика также оказалась неполной, причем даже для пропозиционального фрагмента логики QHC.

Кроме того, С. А. Мелихов приводит аксиоматизацию элементарной геометрии Тарского, формализованную в рамках QHC, и аргументирует это тем, что сам Евклид рассматривал постулаты и аксиомы (то есть явно разделял высказывания и задачи). На основе логики QHC становится возможным более ясно описать логическую структуру теории Евклида и избавиться от скрытых гипотез и возникающих из них парадоксов. Показано, что построенная С. А. Мелиховым теория содержит (в некотором точном смысле) элементарную геометрию Тарского[42] как классическую часть и конструктивную версию геометрии Тарского, предложенную М. Бисоном[43] как интуиционистскую часть.

В диссертации исследования, касающиеся логики QHC, продолжены.

Цели и задачи исследования

Основным объектом исследования является логика QHC. Мотивацией для изучения этой логики послужила её отличительная особенность, не встречавшаяся ранее в других логиках: комбинирование классического и интуиционистского исчислений при помощи двух модальностей. Таким образом, целями диссертации были исследование свойств логики QHC (в частности, алгоритмической разрешимости её пропозиционального фрагмента) и построение полной семантики этой логики.

Научная новизна

Научная новизна диссертационной работы характеризуется следующими результатами.

1. Построена алгебраическая семантика логики HC.

2. Установлена теорема о полноте и свойство конечных моделей для семантики типа Крип-

[42]Tarski A. What is elementary geometry? //Studies in Logic and the Foundations of Mathematics. – Elsevier, 1959. – Т. 27. – С. 16-29.

[43]Beeson M. A constructive version of Tarski's geometry //Annals of Pure and Applied Logic. – 2015. – Т. 166. – №. 11. – С. 1199-1273.

ке с двумя множествами миров логики HC, введённой в диссертации.

3. На основе шкал Крипке с отмеченными мирами интуиционистской эпистемической логики IEL^{+} построены более удобные модели логики HC. Пользуясь такими моделями, удалось определить топологическую семантику логики HC, для которой имеет место теорема о полноте.

4. Доказана теорема о сильной полноте логики QHC для семантики Крипке с отмеченными мирами. Показано, что логика QHC является консервативным расширением логики QH4. Установлены дизъюнктивное и экзистенциальное свойства логики QHC для формул сорта задача.

Все полученные результаты являются новыми и вносят вклад в исследования в изучаемой области.

Теоретическая и практическая значимость

Диссертация носит теоретический характер. Полученные в работе результаты представляют интерес для специалистов в таких областях, как математическая логика и теоретическая информатика.

Методология и методы исследования

В диссертации использовались методы математической логики, неклассических логик, топологии.

Положения, выносимые на защиту

На защиту выносятся: обоснование актуальности, научная значимость работы, а также следующие положения.

1. Алгебраическая семантика логики HC — пропозиционального фрагмента логики QHC. Теорема о полноте логики HC относительно этой семантики.

2. Определение семантики Крипке с двумя множествами миров логики HC. Для этой семантики имеет место теорема о полноте и свойство конечных моделей. Проблема выводимости в логике HC алгоритмически разрешима. Получен ответ на вопрос, поставленный С. А. Мелиховым, о соотношении ED-принципа и PC-правила.

3. Теорема о полноте логики HC относительно семантики Крипке с отмеченными мирами. Определение топологической семантики логики HC на основании семантики Крипке с отмеченными мирами. Теорема о полноте логики HC относительно топологической семантики.

4. Определение семантики типа Крипке логики QHC. Теорема о полноте логики QHC относительно этой семантики. Логика QHC является консервативным расширением логики QH4. Выполнены дизъюнктивное и экзистенциальное свойства логики QHC.

Апробация работы

Результаты и положения диссертации докладывались и обсуждались на следующих конференциях и семинарах:

1. Научно-исследовательский семинар «Современные проблемы математической логики»(Москва, НИУ ВШЭ, 9 ноября 2018 года).

2. Семинар «Теория доказательств» (Москва, МИАН имени В. А. Стеклова РАН, 16 марта 2020 года и 21 февраля 2022 года).

3. Международная научная конференция студентов, аспирантов и молодых ученых «Ломоносов» (Москва, МГУ, 2019, 2020).

4. Международная конференция «Смирновские чтения по логике» (Москва, МГУ, 2019, 2021).

5. Международная конференция «Мальцевские чтения» (Новосибирск, ИМ им. С. Л. Соболева СО РАН и НГУ, 2019).

6. Конференция «Logical Perspectives 2021: Summer School and Workshop» (Москва, МИАН имени В. А. Стеклова РАН, 2021).

7. Семинар «Вычислимость и неклассические логики» под руководством В. Н. Крупского, В. Е. Плиско и А. Ю. Коновалова (Москва, МГУ, 25 октября 2021 года).

8. XII Международная научная конференция «Интеллектуальные системы и компьютерные науки» (Москва, МГУ, 2021).

9. Всероссийская научная конференция «Математические основы информатики и информационно-коммуникационных систем» (Тверь, 2021).

Публикации

Основные результаты диссертации изложены в 8 работах автора, 3 из которых опубликованы в рецензируемых научных изданиях, индексируемых Web of Science, Scopus или RSCI, либо в научных изданиях, рекомендованных для защиты в диссертационном совете МГУ по специальности 1.1.5 — «Математическая логика, алгебра, теория чисел и дискретная математика» (01.01.06 — «Математическая логика, алгебра и теория чисел»). Список публикаций приведён в конце автореферата [1–8].

Структура и объём диссертационной работы

Диссертация состоит из введения, четырёх глав, заключения и списка использованной литературы. Полный объём работы — 93 страницы, список литературы содержит 100 наименований.

Содержание работы

Во **введении** даётся общая характеристика работы, постановки задач, цели работы и обосновывается её актуальность. Кроме того, приводится обзор результатов, полученных ранее другими авторами по теме исследования диссертации и смежным направлениям исследований, а также кратко излагается содержание её глав.

В **первой главе** сначала вводится определение формулы логики HC и приводится список аксиом и правил вывода этой логики. Указаны некоторые формулы, являющиеся теоремами логики HC. Далее приведено определение формулы логики QHC в языке без функциональных символов и указаны аксиомы и правила вывода этой логики. Затем продемонстрирована связь логики QHC с известной логикой S4, а также с интуиционистской эпистемической логикой H4. Наконец, рассмотрены модели Крипке с отмеченными мирами логики H4 и сформулирован результат С. Н. Артёмова и Т. Протопопеску о полноте логики H4 относительно этих моделей[44].

Во **второй главе** исследуется семантика логики HC. В начале главы приведена алгебраическая семантика логики HC. При помощи стандартной техники рассмотрения алгебры Линденбаума доказана следующая теорема.

Теорема 2.1 [1]. *Любая теорема логики* HC *истинна в любой* HC*-алгебре; любая формула, невыводимая в логике* HC*, опровергается на некоторой* HC*-алгебре.*

Далее рассматривается семантика Крипке с двумя множествами миров логики HC. В мирах одного из этих множеств X могут быть истинны или ложны формулы сорта высказывание логики HC, а в мирах другого множества W могут быть истинны или ложны формулы сорта задача логики HC. Кроме того, на множестве W определён частичный порядок, а также имеются два отношения $R_? \subseteq X \times W$ и $R_! \subseteq W \times X$, удовлетворяющие определённым свойствам. Путём индукции по выводу формулы доказана следующая теорема.

Теорема 2.2 [1]. *Все теоремы логики* HC *(т.е. формулы, выводимые в* HC*) истинны в любом классическом (интуиционистском) мире любой модели Крипке логики* HC*.*

Затем в этой главе проводится доказательство теоремы о полноте логики HC относительно семантики Крипке с двумя множествами миров. В леммах 2.3–2.6 установлены вспомогательные утверждения, описывающие метод построения контрмодели Крипке с двумя множествами миров для конкретной формулы, невыводимой в логике HC, на основе которых доказана следующая теорема.

[44] Artemov S., Protopopescu T. Intuitionistic epistemic logic

Теорема 2.3 [1]. *Для любой формулы φ, не выводимой в логике* HC*, существуют конечная* HC*-шкала и ее мир, в котором будет ложна формула φ.*

В конце главы доказано дизъюнктивное свойство интуиционистской части логики HC, а также получен ответ на вопрос, поставленный С. А. Мелиховым: верно ли, что PC-правило влечёт ED-принцип?

Теорема 2.4 [1]. *Если* $\mathrm{HC} \vdash \alpha \vee \beta$*, то* $\mathrm{HC} \vdash \alpha$ *или* $\mathrm{HC} \vdash \beta$*.*

Теорема 2.5 [1]. *В логике* HC + PC *невыводим* ED*-принцип*

$$\neg(\alpha \wedge \beta) \to (!?(\alpha \vee \beta) \to !?\alpha \vee !?\beta).$$

В **третьей главе** изучается семантика логики HC, построенная на основе шкал Крипке с отмеченными мирами, возникшими в работе С. Артёмова и Т. Протопопеску для интуиционистской эпистемической логики H4[45]. Опираясь на теорему о полноте логики H4 относительно моделей Крипке с отмеченными мирами, а также на теорему о полноте логики HC относительно моделей Крипке с двумя множествами миров, была доказана следующая теорема.

Теорема 3.1 [1]. *Логика* HC *— консервативное расширение логики* H4*.*

Далее вводится определение моделей Крипке с отмеченными мирами логики HC. Используя теоремы о корректности и полноте логики HC относительно моделей Крипке с двумя множествами миров, доказанные в главе 2, были установлены две следующие теоремы.

Теорема 3.2 [1]. *Все формулы, выводимые в логике* HC*, истинны в любом мире любой модели Крипке с отмеченными мирами.*

Теорема 3.3 [1]. *Для любой формулы, не выводимой в логике* HC*, существует конечная модель Крипке с отмеченными мирами, в некотором мире которой эта формула ложна.*

В конце главы рассматриваются модели логик HC и H4, основанные на понятии топологического пространства с выделенным в нём всюду плотным подмножеством. При помощи техники рассмотрения александровской топологии для данного предпорядка, а также установленных ранее в этой главе результатов доказаны следующие теоремы.

Теорема 3.4 [3]. *Если формула выводима в логике* HC*, то она истинна в любой топологической модели логики* HC*.*

Теорема 3.5 [3]. *Если формула φ невыводима в логике* HC*, то существует топологическая модель логики* HC*, в которой формула φ не является истинной.*

Теорема 3.6 [3]. *Если формула выводима в логике* H4*, то она истинна в любой топологической модели логики* H4*.*

[45] Там же.

Теорема 3.7 [3]. *Если формула φ невыводима в логике* H4, *то существует топологическая модель логики* H4, *в которой формула φ не является истинной.*

В **четвёртой главе** исследуется семантика логик QHC и QH4 — предикатных вариантов логик HC и H4. Приводится определение вывода и слабого вывода из гипотез в логике QHC. Для слабого вывода установлена следующая теорема о дедукции.

Теорема 4.1 [2]. *Пусть Γ — некоторое множество формул, Φ, Ψ — формулы одного сорта. Пусть $\Gamma \cup \{\Phi\} \vdash \Psi$. Тогда $\Gamma \vdash \Phi \to \Psi$.*

В леммах 4.1–4.6 отмечены вспомогательные утверждения, отражающие связь между выводимостью и слабой выводимостью из гипотез в логике QHC.

Далее в главе определяются модели Крипке с отмеченными мирами логики QHC, для которых индукцией по выводу доказывается следующая теорема о корректности.

Теорема 4.2 [2]. *Если замкнутая формула языка Ω выводима в логике* QHC, *то она истинна в любой модели Крипке для языка Ω.*

В леммах 4.8–4.11 установлены промежуточные шаги построения модели Крипке с отмеченными мирами непротиворечивой теории логики QHC. На основе этих лемм были доказаны следующие теоремы, утверждающие полноту логики QHC относительно описываемой семантики.

Теорема 4.3 [2]. *Если M–насыщенная теория Γ языка L_M является рефлексивной, то существует модель Крипке $\mathscr{K} = (W, \preccurlyeq, \mathrm{Aud}, D, \models)$ с отмеченными мирами и её отмеченный мир x такие, что для любой формулы α сорта задача языка L_M выполнено $x \models \alpha \Leftrightarrow \alpha \in \Gamma$, а для любой формулы p сорта высказывание языка L_M выполнено $x \models p \Leftrightarrow p \in \Gamma$.*

Теорема 4.4 [2]. *Для любой непротиворечивой теории Γ логики* QHC *существует модель Крипке $\mathscr{K}$ и её отмеченный мир x такие, что в этом мире данной модели $\mathscr{K}$ истинны все формулы из Γ.*

Теорема 4.5 [2]. *Если формула A сорта задача (сорта высказывание) языка Ω истинна в любом мире (отмеченном мире) любой модели Крипке с отмеченными мирами для языка Ω, то A выводима в логике* QHC.

Использованием подобной техники были установлены следующие теоремы о корректности и полноте логики QH4 относительно семантики Крипке с отмеченными мирами.

Теорема 4.6 [2]. *Если замкнутая формула языка Ω выводима в логике* QH4, *то она истинна в любой модели Крипке логики* QH4 *для языка Ω.*

Теорема 4.7 [2]. *Если множество формул Γ языка L_M является M–насыщенной теорией, то существует модель Крипке $\mathscr{K} = (W, \preccurlyeq, \mathrm{Aud}, D, \models)$ с отмеченными мирами логики* QH4 *такая, что для любой формулы A языка L_M выполнено $\forall x \in W \ x \models A \Leftrightarrow A \in \Gamma$.*

Теорема 4.8 [2]. *Для любого непротиворечивого множества формул* Γ *логики* QH4 *существует модель Крипке* $\mathscr{K}$ *логики* QH4 *такая, что в любом мире модели* $\mathscr{K}$ *истинны все формулы из* Γ.

Путём использования семантики Крипке с отмеченными мирами логик QHC и QH4 были доказаны следующие теоремы.

Теорема 4.9 [2]. *Логика* QHC *— консервативное расширение логики* QH4.

Теорема 4.10 [2]. *Если сигнатура* Ω *содержит хотя бы одну константу, то логика* QHC *(в этой сигнатуре) обладает дизъюнктивным и экзистенциональным свойствами.*

Теорема 4.11 [2]. *Логика* QHC *в любой сигнатуре* Ω *обладает дизъюнктивным свойством.*

В заключении систематизируются полученные результаты, касающиеся объединённой логики задач и высказываний, и характеризуются возможные направления дальнейших исследований.

Заключение

Среди изложенных в диссертационной работе результатов в качестве основных можно выделить следующие.

1. Построены различные типы семантик логики HC — пропозиционального фрагмента логики QHC: алгебраическая семантика, семантика Крипке с двумя множествами миров, семантика Крипке с отмеченными мирами, топологическая семантика. Установлены теорема о полноте и свойство конечных моделей для каждого из этих классов моделей. Доказана разрешимость логики HC.

2. Доказано, что в логике HC из PC–правила не следует ED–принцип. Этот результат завершает построение решётки импликаций между различными принципами в логике QHC.

3. Построена семантика типа Крипке логики QHC и доказана теорема о полноте этой логики относительно построенной семантики. Показано, что рассматриваемые модели могут быть использованы в качестве моделей логики QH4. Установлено, что логика QHC является консервативным расширением логики QH4. Кроме того, доказаны дизъюнктивное и экзистенциальное свойства логики QHC.

Наиболее естественными направлениями развития результатов, полученных в диссертации, являются исследования следующих задач.

1. Построение топологической модели логики QHC, для которой будет иметь место теорема о полноте.

2. Исследование синтаксических интерпретаций логики QHC в логику QH4.

3. Построение исчисления секвенций генценовского типа логики QHC.

Благодарности

Автор выражает благодарность своему научному руководителю, академику РАН, доктору физико-математических наук Беклемишеву Льву Дмитриевичу за постановки задач, конструктивную критику, плодотворные обсуждения, всестороннюю поддержку и внимание к работе.

Публикации автора по теме диссертации

Научные статьи, опубликованные в рецензируемых научных изданиях, рекомендованных для защиты в диссертационном совете МГУ по специальности 1.1.5 — «Математическая логика, алгебра, теория чисел и дискретная математика» (01.01.06 — «Математическая логика, алгебра и теория чисел»)

1. Оноприенко А. А. Семантика типа Крипке для пропозициональной логики задач и высказываний //Математический сборник. — 2020. — Т. 211. — №. 5. — С. 98–125.

   Журнал индексируется Scopus, РИНЦ, RSCI WoS. IF: 1,778.

2. Оноприенко А. А. Предикатный вариант совместной логики задач и высказываний //Математический сборник. — 2022. — Т. 213. — №. 7. — С. 97–120.

   Журнал индексируется Scopus, РИНЦ, RSCI WoS. IF: 1,778.

3. Оноприенко А. А. Топологические модели пропозициональной логики задач и высказываний // Вестник Московского Университета. Серия 1. Математика. Механика. — 2022. — №5. — С. 25–30.

   Журнал индексируется Scopus, РИНЦ, RSCI WoS. IF: 0,658.

Прочие (по теме диссертации)

4. Оноприенко А. А. Объединенная логика задач и высказываний // Одиннадцатые Смирновские чтения по логике (Материалы Международной научной конференции 19 – 21 июня 2019 г.), Москва — 2019 — С. 32–34.

5. Оноприенко А. А. Объединенная логика задач и высказываний // Международная конференция «Мальцевские чтения» (19–23 августа 2019 г.), Новосибирский государственный университет, Новосибирск. — 2019. — С. 77.

6. Оноприенко А.А. Предикатный вариант объединённой логики задач и высказываний // Двенадцатые Смирновские чтения по логике (Материалы Международной научной конференции 24 – 26 июня 2021 г.), Русское общество истории и философии науки. — Москва. — 2021. — С. 40–43.

7. Оноприенко А. А. Топологические модели логик HC и H4 // Всероссийская научная конференция «Математические основы информатики и информационно-коммуникационных систем». Сборник трудов. — Тверь : ТвГУ, 2021. — С. 241–245.

8. Оноприенко А. А. Семантика Крипке объединённой логики задач и высказываний //Интеллектуальные системы. Теория и приложения — 2021. — Т. 25. — №. 4. — С.333–336.