

МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
имени М.В. ЛОМОНОСОВА

На правах рукописи

Осинский Александр Игоревич

**Существование и построение близких к оптимальным
столбцовых и крестовых аппроксимаций матриц**

Специальность 1.1.6 — «Вычислительная математика»

АВТОРЕФЕРАТ

диссертации на соискание учёной степени
доктора физико-математических наук

Москва — 2025

Диссертация подготовлена в Федеральном государственном бюджетном учреждении науки Институте вычислительной математики им. Г.И. Марчука Российской академии наук.

Официальные оппоненты — **Наумов Алексей Александрович**,
доктор физико-математических наук, доцент, Национальный исследовательский университет «Высшая школа экономики», факультет компьютерных наук, базовая кафедра Института проблем передачи информации имени А.А. Харкевича РАН, профессор

Бородин Петр Анатольевич,
доктор физико-математических наук, доцент, Московский государственный университет имени М.В. Ломоносова, механико-математический факультет, кафедра теории функций и функционального анализа, профессор

Капорин Игорь Евгеньевич,
доктор физико-математических наук, Федеральный исследовательский центр «Информатика и управление» Российской академии наук, Отдел 26 «Прикладных проблем оптимизации» Отделения 2 «Моделирование сложных физических и технических систем», главный научный сотрудник

Защита диссертации состоится 23 апреля 2025 г. в 16 часов 30 минут на заседании диссертационного совета МГУ.012.1 Московского государственного университета имени М.В. Ломоносова по адресу: 119991, ГСП-1 Москва, Ленинские горы, МГУ имени М.В. Ломоносова, д. 1, стр. 52, ауд. 685.

E-mail: ds@cs.msu.su

С диссертацией можно ознакомиться в отделе диссертаций научной библиотеки МГУ и на портале <https://dissovet.msu.ru/dissertation/3347>.

Автореферат разослан «___» _____ 2025 года.

Ученый секретарь
диссертационного совета,
член-корреспондент РАН,
доктор физико-математических наук

А.В. Ильин

Общая характеристика работы

Актуальность темы исследования. Малоранговые аппроксимации матриц являются одним из ключевых современных направлений исследования. Различного рода данные часто удобно представлять в матричном либо многомерном тензорном виде. В обоих случаях важным оказывается представление большого объема информации в малопараметрическом формате. Таким форматом могут служить малоранговые аппроксимации. Для матриц их можно строить напрямую, тогда как в случае тензоров малоранговые аппроксимации строятся для матриц развертки, что приводит к так называемым тензорным поездкам¹.

Среди различного рода аппроксимаций особенно важным оказывается так называемое крестовое разложение. Оно позволяет аппроксимировать матрицу на основе ее же строк и столбцов. Такой подход особенно привлекателен по двум причинам. С одной стороны, он потенциально не требует рассмотрения всего объема данных – для поиска строк и столбцов может быть достаточно рассмотреть лишь небольшое количество элементов матрицы. С другой, полученные строки и столбцы позволяют выбрать наиболее репрезентативные данные, на основе которых оказывается возможно с высокой точностью предсказать остальные. Это особенно важно в современных задачах машинного обучения – отборе признаков и обучении без учителя. Среди прочего, крестовые аппроксимации активно применяются при решении уравнений Смолуховского, в задачах предобуславливания, постобработке и сжатии данных, поиске глобального максимума/минимума функций, численном вычислении и работе с гладкими функциями, в рекомендательных системах.

Сразу заметим, что невозможность рассмотреть все элементы матрицы или тензора приводит к невозможности получения гарантий на точность аппроксимации: какой бы алгоритм поиска строк и столбцов не использовался, погрешность может быть сколь угодно велика, так как может находиться в элементах, которые не были рассмотрены. Это делает актуальным рассмотрение вероятностных оценок.

В общем случае, задача крестовой аппроксимации заключается в поиске n столбцов $C \in \mathbb{C}^{M \times n}$ и m строк $R \in \mathbb{C}^{m \times N}$ матрицы $A \in \mathbb{C}^{M \times N}$ и матрицы-генератора $G \in \mathbb{C}^{m \times n}$ таких, что $\|A - CGR\|$ мала. Особенно интересны при этом оценки, близкие к оптимальным:

$$\|A - CGR\| \leq (1 + \varepsilon) \min_{Z, \text{rank } Z \leq r} \|A - Z\| \quad (1)$$

или

$$\|A - CGR\| \leq C \min_{Z, \text{rank } Z \leq r} \|A - Z\|, \quad (2)$$

¹Oseledets I. V., Tyrtshnikov E. E. TT-cross approximation for multidimensional arrays // Linear Algebra and Its Applications. — 2010. — Vol. 432. — P. 70–88.

где $\|\cdot\|$ – некоторая матричная норма, r – требуемый ранг аппроксимации (для которого наилучшая аппроксимация дает погрешность не выше требуемого уровня), а ε и C , вообще говоря, зависят от размеров матрицы A и генератора G . Естественно, важными являются такие оценки, где величины ε и C невелики или близки к минимально возможным для соответствующей нормы.

Одним из свойств, гарантирующих высокую точность аппроксимации, является объем подматрицы, равный, в общем случае, произведению её сингулярных чисел. Потому алгоритмы построения крестовых аппроксимаций часто основаны на поиске подматрицы наибольшего объема. Поиск подматриц большого объема также требуется при поиске оптимальных точек для полиномиального базиса, в методе внутренней точки, многосеточных методах, дизайне экспериментов, при выборе наилучшей обучающей выборки в машинном обучении, в коммуникационных системах при выборе лучей и передающих антенн.

Подматрицы максимального объема, однако, гарантируют высокую точность только в норме Чебышева, причем величина C растет с ростом ранга аппроксимации². Соответствующие оценки оказывается возможным улучшить, если использовать подматрицы большего размера с максимальным r -проективным объемом при фиксированном ранге r (равным произведению r наибольших сингулярных чисел подматрицы). Таким образом, возникает вопрос о точности аппроксимаций с числом строк и столбцов больших r , а также можно ли такие подматрицы искать за разумное время.

Первые оценки точности на основе подматриц максимального объема по спектральной норме³ и алгоритмы поиска таких подматриц⁴ были получены группой из ИВМ РАН, включающей Евгения Евгеньевича Тыртышника, Николая Леонидовича Замарашкина и Сергея Анатольевича Горейнова. Данные оценки также были первыми полиномиальными по размерам матрицы оценками точности крестовых аппроксимаций. Однако, для построения предложенных аппроксимаций требовалось знание сингулярного разложения. При этом формально поиск подматриц максимального объема является NP-сложной задачей⁵. Поэтому стоял вопрос о возможности гарантированно достичь этих или даже лучших оценок алгоритмами с полиномиальной сложностью.

По норме Фробениуса построение столбцовых и крестовых аппроксимаций высокой точности требовало нескольких сингулярных разложений⁶, что крайне неэффективно с вычислительной точки зрения. До настоящей работы

²Goreinov S. A., Tyrtshnikov E. E. The maximal-volume concept in approximation by low-rank matrices // Contemporary Mathematics. — 2001. — Vol. 268. — P. 47–51.

³Goreinov S. A., Tyrtshnikov E. E., Zamarashkin N. L. A theory of pseudo-skeleton approximations // Linear Algebra and Its Applications. — 1997. — Vol. 261. — P. 1–21.

⁴Tyrtshnikov E. E. Mosaic-Skeleton approximations // Calcolo. — 1996. — Vol. 33. — P. 47–57.

⁵Welch W. J. Algorithmic complexity: three NP-hard problems in computational statistics // Journal of Statistical Computation and Simulation. — 1982. — Vol. 15, no. 1. — P. 17–25.

⁶Cortinovis A., Kressner D. Low-Rank Approximation in the Frobenius Norm by Column and Row Subset Selection // SIAM Journal on Matrix Analysis and Applications. — 2020. — Vol. 41, no. 4. — P. 1651–1673.

не было ясно, можно ли еще ускорить данный алгоритм или применить те же оценки к крестовым аппроксимациям. Другие существующие оценки крестовых аппроксимаций при этом были далеки от оптимальных, требовали существенных вычислительных ресурсов, а также слишком большого числа строк и столбцов⁷.

Поиск подматриц локально максимального объема был впервые рассмотрен в контексте выявляющих ранг QR разложений⁸. Алгоритм `maxvol` является упрощением данного метода для поиска квадратных подматриц⁹. Однако, оставался открытым вопрос о возможности эффективного поиска прямоугольных подматриц локально максимального объема, которые позволяют существенно улучшить точность крестовых аппроксимаций на их основе.

Наконец, возможность быстрого построения аппроксимаций, близких по точности к сингулярному разложению, существенно ускоряет итерационные методы, где используется проектирование на многообразии матриц малого ранга. Использование приближенного проектирования на основе крестовой аппроксимации позволяет существенно ускорить, в частности, построение неотрицательных аппроксимаций и алгоритмы восстановления матриц.

Целью работы является построение быстрых алгоритмов крестовой аппроксимации матриц и обоснование высокой точности аппроксимаций соответствующего вида. Эту же цель можно сформулировать как построение общей теории крестовых и столбцовых аппроксимаций и рассмотрение соответствующих ей алгоритмов.

Для достижения поставленной цели решены следующие задачи:

1. Доказано, что крестовые аппроксимации в целом могут достигать высокой точности в различных нормах.
2. Получены близкие к оптимальным оценки точности, что подтверждается их близостью к нижним границам.
3. Так как аппроксимации на основе подматриц локально максимального объема не дают высокой точности для всех матриц, была рассмотрена вероятностная модель и показано, что принцип локально максимального объема позволяет строить аппроксимации высокой точности для большинства матриц.
4. Построен алгоритм поиска прямоугольных подматриц локально максимального объема, оценена его вычислительная сложность, усовершенствованы существующие методы для квадратных подматриц и дальнейшего набора столбцов для них. Построены алгоритмы поиска подматриц большого проективного объема.

⁷Boutsidis C., Woodruff D. P. Optimal CUR matrix decompositions // Proceedings of the 46th Annual ACM Symposium on Theory of Computing, ACM. — 2014. — P. 353–362.

⁸Gu M., Eisenstat S. C. Efficient algorithms for computing a strong rank-revealing qr factorization // SIAM Journal on Scientific Computing. — 1996. — Vol. 17, no. 4. — P. 848–869.

⁹Goreinov S. A., Oseledets I. V., Savostyanov D. V. et al. How to find a good submatrix // Matrix Methods: Theory, Algorithms, Applications. — World Scientific Publishing, 2010. — P. 247–256.

5. Проверена эффективность предложенных алгоритмов для построения крестовых аппроксимаций как на случайных матрицах, так и в различных задачах, где быстрая малоранговая аппроксимация играет важную роль.

Научная новизна:

1. Полученные оценки существенно улучшают известные оценки крестовых и столбцовых аппроксимаций. Это, в частности, удалось сделать путем введения понятия проективного объема и его использования для построения соответствующих псевдоскелетных аппроксимаций.
2. Вероятностные оценки точности являются новым способом оценки эффективности алгоритмов, для которых результат зависит от конкретных входных данных. В частности, это позволяет оценить эффективность в тех случаях, когда необходимо получить аппроксимацию, используя лишь малую часть входных данных. Что и было сделано для случаев поиска подматриц локально максимального объема и проективного объема.
3. Предложенные алгоритмы позволяют достичь низких оценок на нормы $\|\hat{A}^+\|_2$ и $\|\hat{A}^+\|_F$ для найденной подматрицы \hat{A} существенно быстрее большинства других аналогичных методов. По скорости они уступают лишь рандомизированным методам, требующим существенно большего числа строк и столбцов (что в итоге все равно приводит к большей вычислительной сложности построения аппроксимации) и гарантирующим оценки на $\|\hat{A}^+\|_2$ и $\|\hat{A}^+\|_F$ лишь с некоторой вероятностью.
4. Предложенные алгоритмы позволяют строить приближение с коэффициентом погрешности по норме Фробениуса $1 + \varepsilon$ за $O\left(Nr^2/\varepsilon + (r/\varepsilon)^3\right)$ операций, чего не могут достичь никакие другие известные алгоритмы. Среди алгоритмов, использующих порядка r/ε строк и столбцов, псевдоскелетная аппроксимация на основе подматриц локально максимального проективного объема содержит (в среднем) наименьший возможный коэффициент ошибки.
5. Предложенные алгоритмы восстановления матриц и построения неотрицательных аппроксимаций асимптотически быстрее версий, основанных на других методах приближенного вычисления сингулярного разложения.

Теоретическая значимость полученных результатов заключается в усовершенствовании существующих оценок столбцовых и крестовых аппроксимаций. При этом удалось максимально сблизить верхние и нижние оценки как по спектральной норме, так и по норме Фробениуса. Применение той же методологии к аппроксимации по норме Чебышева позволяет не только предсказывать эффективность методов крестовой аппроксимации, но и получить нижние оценки аппроксимации единичной матрицы. Построение вероятностных оценок является новым способом анализа эффективности методов малоранговой аппроксимации, для которых не существует гарантий на точность аппроксимации

на произвольных матрицах. Ограничение числа шагов в алгоритмах поиска подматриц локально максимального также позволяет быть уверенным в их быстрой работе на практике.

Практическая значимость заключается в том, что построенные алгоритмы позволяют быстро находить крестовые аппроксимации высокой точности по норме Фробениуса, спектральной норме и норме Чебышева. Алгоритмы быстрой крестовой аппроксимации матриц играют важную роль в аппроксимации тензоров с помощью тензорных поездов (ТТ-cross метод). Крестовые аппроксимации также позволяют существенно ускорить решения систем интегральных уравнений, в том числе рассматриваемых в диссертации уравнений Смолуховского. Быстрое построение аппроксимаций высокой точности применяется, например, в латентном семантическом анализе и распознавании лиц, а также позволяет строить быстрые алгоритмы восстановления матриц, которые используются, в частности, в рекомендательных системах, при поиске/восстановлении фазы и построении разреженной оценки канала в задачах обработки сигнала, сжатии и восстановлении поврежденных изображений. Кроме задачи восстановления матриц, в диссертации также рассматривается построение неотрицательных аппроксимаций, которые используются при анализе и распознавании изображений, а также при аппроксимации решения дифференциальных и интегральных уравнений, где появление отрицательных элементов может приводить к неустойчивости последующего решения.

Описание методологии исследования. Точность столбцовых и крестовых аппроксимаций рассматривается в трех разных аспектах: с точки зрения верхних оценок, нижних оценок и вероятностных оценок.

Для построения верхних оценок точности часто предполагается, что некоторая аппроксимация Z ранга r заранее известна, и на её основе затем строится крестовая CGR аппроксимация. Зная точность аппроксимации Z затем можно оценить точность CGR аппроксимации на её основе. Такой подход не позволяет гарантировать существование быстрых алгоритмов поиска крестовых аппроксимаций, однако позволяет гарантировать достижимость аппроксимаций с определенной точностью.

Нижние оценки, наоборот, позволяют определить минимальную достижимую погрешность, также ничего не говоря о том, как ее достичь. Они строятся путем поиска конкретных примеров матриц, для которых выбор любых столбцов приводит к высокой величине ошибки. Естественно, такие примеры должны быть достаточно универсальными, чтобы распространяться на произвольные размеры M и N приближаемой матрицы, произвольное число столбцов n и произвольный ранг r . Стоит отметить, что так как крестовые CGR аппроксимации являются частным случаем столбцовых CW аппроксимаций для $W = GR$, нижние оценки достаточно построить для столбцовых аппроксимаций. Особую роль при построении нижних оценок играют подматрицы унитарных матриц. А именно, для

построения нижних оценок можно воспользоваться t -функцией

$$t(r, n, N) = \sup_{\substack{U \in \mathbb{C}^{r \times N} \\ UU^* = I}} \min_{\substack{\hat{U} \in \mathbb{C}^{r \times n} \\ \text{rank } \hat{U} = r}} \|\hat{U}^+\|_2. \quad (3)$$

и оценками для нее, благодаря ее связи с точностью столбцовых и крестовых аппроксимаций различного вида.

Вероятностные оценки оказываются необходимы в связи с тем, что выбор подматрицы локально максимального объема или проективного объема гарантирует высокую точность аппроксимации по норме Чебышева, но не по норме Фробениуса. С другой стороны, на практике алгоритмы построения крестовых аппроксимаций на основе таких подматриц почти всегда приводят к оценкам вида (1) с $\varepsilon = \frac{r}{n-r+1}$ для подматриц размера $n \times n$. Чтобы обосновать наблюдаемую эффективность, предлагается использовать вероятностную модель, где сама матрица A является случайной. Для этого подойдет так называемый RANDSVD ансамбль, где сингулярные числа матрицы A являются произвольными и фиксированными, а сингулярные векторы – случайные, и распределены равномерно (согласно мере Хаара). Усреднение по всем возможным матрицам левых и правых сингулярных векторов тогда приводит к тому, что для большинства матриц погрешность крестовой аппроксимации оказывается мала.

Для построения крестовых аппроксимаций на практике можно использовать и усовершенствовать существующие алгоритмы поиска подматриц большого объема, такие как `maxvol` и `rect-maxvol`. Если же дополнительно также жадно набирать первые r строк/столбцов подматрицы, чтобы максимизировать объем, можно воспользоваться известными оценками на объем такой стартовой подматрицы, чтобы ограничить число шагов при дальнейшем поиске локально максимального объема.

Основные положения, выносимые на защиту:

Основные результаты данной работы включают в себя новые нижние и верхние оценки точности крестовых и столбцовых аппроксимаций, эффективные алгоритмы построения крестовых и столбцовых аппроксимаций, оценки на число шагов построенных алгоритмов и на свойства подматриц, которые данные алгоритмы находят. На защиту выносятся следующие положения:

1. Использование подматриц локально максимального объема и проективного объема приводит к крестовым аппроксимациям, близким к оптимальным по норме Чебышева. При этом увеличение числа строк и столбцов всего в два раза уже ведет к улучшению асимптотической зависимости коэффициента погрешности от ранга аппроксимации.
2. Существуют скелетные аппроксимации, коэффициент относительной погрешности по норме Фробениуса которых не зависит от размеров приближаемой матрицы. Существуют столбцовые аппроксимации с коэффициентом погрешности, близким к его нижней границе для нормы Фробениуса.

3. Оценки точности столбцовой аппроксимации по спектральной норме совпадают со значением функции $t(r, n, N)$, определяемой свойствами подматриц унитарных матриц. Следствиями данного факта являются близкие друг к другу верхние и нижние оценки точности крестовых и столбцовых аппроксимаций по спектральной норме.
4. Поиск подматриц из принципа максимизации объема и проективного объема в матрицах из gandsvd ансамблей (любая матрица принадлежит некоторому gandsvd ансамблю) позволяет с большой вероятностью гарантировать, что точность соответствующих крестовых и столбцовых аппроксимаций по норме Фробениуса будет близка к точности аппроксимации на основе сингулярного разложения.
5. Подматрицы, обладающие ρ -локально максимальным объемом или проективным объемом могут быть найдены за полиномиальное время. Требуемое число замен строк и столбцов при этом зависит только от размеров подматрицы и коэффициента ρ .
6. Крестовые методы существенно ускоряют решение задач, требующих многократного построения аппроксимаций матриц. В частности, алгоритмы позволяют ускорить численное решение обобщенных уравнений Смолуховского и восстановление матриц.

Достоверность и апробация результатов. Полученные теоретические результаты основаны на строгом математическом выводе всех положений. Диссертация содержит строгий и подробный вывод всех используемых в алгоритмах формул, гарантирующих достижение требуемых выходных данных, а также вывод оценок на число шагов алгоритмов. Эффективность алгоритмов и точность доказанных оценок подтверждается большим количеством численных экспериментов на случайных и реальных данных, а также успешном применении построенных аппроксимаций для решения физических задач. Положения и выводы, сформулированные в диссертации, получили квалифицированную апробацию на международных научных конференциях. Достоверность также подтверждается публикацией результатов исследований в рецензируемых научных журналах.

Результаты работы были представлены на ведущих российских и международных конференциях, в том числе:

1. The Sixth China-Russia Conference on Numerical Algebra with Applications (CRCNAA 2017), НИУ ВШЭ, 28-30 августа 2017.
2. Ломоносовские чтения, МГУ, 16-27 апреля 2018.
3. SIAM Conference on Applied Linear Algebra (SIAM-ALA18), Гонконг, 4-8 мая 2018.
4. The 5th International Conference on Matrix Methods in Mathematics and applications (МММА 2019), Москва, 19-23 августа 2019.
5. Stochastic processes and Pattern Formation, Сколтех, 13 сентября 2019.
6. 15th International Conference on Monte Carlo and Quasi-Monte Carlo Methods in Scientific Computing, Линц, 28-22 июля 2022.
7. Ломоносовские чтения-2023, МГУ, 4-14 апреля 2023.

8. The 6th international conference on matrix methods and machine learning in mathematics and applications (МММА 2023), Москва, 15-18 августа 2023.
9. Матричные методы и интегральные уравнения, НГУ Сириус, 25-31 августа 2023.
10. Ломоносовские чтения-2024, МГУ, 20 марта - 3 апреля 2024.
11. IV Конференция математических центров России, МЦМУ имени Эйлера, 6-11 августа 2024.
12. Матричные методы и интегральные уравнения, НГУ Сириус, 12-16 августа 2024.

Результаты работы обсуждались на семинарах:

- Объединенный научный семинар ИМ СО РАН, ИВМиМГ СО РАН, МЦА, кафедра ММГФ ММФ НГУ «Прикладные обратные задачи и искусственный интеллект», 2024 (онлайн).
- Семинар международной лаборатории стохастических алгоритмов и анализа многомерных данных факультета компьютерных наук НИУ ВШЭ, 2024.
- Семинар лаборатории «Многомерная аппроксимация и приложения» механико-математического факультета МГУ, 2024.
- Семинар «Теория функций» кафедры общих проблем управления механико-математического факультета МГУ, 2024.
- Семинар центра прикладного ИИ, цикл «Математика ИИ», Сколтех, 2024.
- Семинар «вычислительная математика и приложения» ИВМ РАН, 2024.
- Общеинститутский семинар ИПМ РАН, 2024.

Публикации. По теме диссертации опубликовано 15 работ [1-15], из них все 15 публикаций в изданиях, индексируемых в РИНЦ и включенных в международные системы цитирования WoS и Scopus.

Личный вклад автора в разработку проблемы. Диссертантом были сформулированы цели и задачи исследования, предложено новое понятие проективного объема, разработан вероятностный подход, основанный на случайных матрицах, для оценки эффективности крестовых аппроксимаций в среднем, предложены и реализованы эффективные алгоритмы поиска прямоугольных подматриц локально максимального объема и большого проективного объема, доказаны оценки на число шагов новых и ранее известных алгоритмов, а также усовершенствованы другие методы поиска сильно невырожденных подматриц. Построенные алгоритмы крестовой аппроксимации были использованы в задачах восстановления матриц, построения неотрицательных аппроксимаций и при решении уравнений Смолуховского. Автором был проведен анализ всех алгоритмов с точки зрения их вычислительной сложности, времени выполнения и точности получаемой на практике аппроксимации.

Личный вклад соискателя в работах с соавторами заключается в следующем. В работе [1] автором построен малоранговый Монте-Карло метод для уравнений Смолуховского. В работе [2] автором предложен алгоритм поиска

прямоугольных подматриц локально максимального объема, получены оценки на его число шагов и ограничения на нормы псевдообратной к полученной подматрице. В работе [3] автором получены нижние оценки точности столбцовых аппроксимаций. В работе [4] автором предложен полиномиальный алгоритм поиска подматриц ρ -локально максимального объема. В работе [5] автором был разработан и описан малоранговый Монте-Карло метод, получены точные решения температурно-зависимых уравнений Смолуховского, проведены численные эксперименты. В работе [6] автором был построен и описан метод принятия–отклонения в применении к уравнениям Смолуховского с фрагментацией на мономеры, выполнены все связанные с ним численные эксперименты. В работе [7] соискателем были получены численные решения температурно-зависимых уравнений Смолуховского с помощью малоранговых методов, а также выведены асимптотики полученных решений. В работе [8] автором был получен первоначальный вариант доказательства сходимости приближенного сингулярного разложения для восстановления матриц, предложен вариант использования крестовой аппроксимации в данном методе, написан сам алгоритм и проведены численные эксперименты для него. В работе [9] соискателем получен вывод оценок точности крестовых и столбцовых аппроксимаций в среднем, проведены численные эксперименты, обнаружена и численно подтверждена связь между точностью аппроксимации и свойствами подматриц ортогональных матриц. В работе [10] соискателем построен и применен малоранговый метод решения температурно-зависимых ОДУ типа Смолуховского, предложен адаптивный шаг по времени для него, а также способ построения аппроксимации хвоста распределения концентраций. В работе [11] автором доказана сходимость алгоритма \maxvol для частного случая аппроксимации ранга 1, оценена скорость сходимости, точность полученной аппроксимации, близость найденного элемента к максимальному, доказана возможность применения алгоритма при аппроксимации тензоров. В работе [12] оценки крестовой аппроксимации по норме Чебышева были обобщены на случай тензоров. В работе [13] доказано существование крестовых аппроксимаций высокой точности по норме Фробениуса. В работе [14] соискателем были упрощены доказательства для точности столбцовой и крестовой аппроксимаций по спектральной норме, доказаны оценки точности крестовой аппроксимации по норме Чебышева, проведены численные эксперименты, предложены и реализованы алгоритмы поиска подматриц локально максимального проективного объема. В работе [15] соискателем получены оценки точности крестовой аппроксимации по норме Чебышева, предложен сам вид крестовой аппроксимации и требования к выбору подматрицы, позволяющие гарантировать полученные оценки.

Объем и структура работы. Диссертация состоит из введения, 7 глав, заключения и приложения. Общий объем диссертации составляет 252 страницы текста. Диссертация содержит 17 рисунков и 17 таблиц. Список литературы содержит 154 наименования.

Содержание работы

Во введении обосновывается актуальность диссертационной работы, описаны решаемые проблемы и использованные для решения методы, сформулированы цели и задачи исследования, представлены выносимые на защиту научные положения, аргументирована научная новизна исследований, обоснована теоретическая и практическая значимость полученных результатов, перечислены доклады на конференциях и публикации автора по теме диссертации, обоснован его личный вклад.

В первой главе приведены общие сведения о крестовых и столбцовых аппроксимациях. Показано, как записываются оптимальные столбцовые и крестовые аппроксимации, рассматривается их связь с неполными LU и QR разложениями. Приводятся определения и базовые леммы, связанные с подматрицами локально максимального объема и проективного объема.

Определение 1. *Крестовой или псевдоскелетной* аппроксимацией матрицы $A \in \mathbb{C}^{M \times N}$ называется произведение CGR , где $C \in \mathbb{C}^{M \times n}$ – некоторые n столбцов матрицы A , а $R \in \mathbb{C}^{m \times N}$ – m её строк. Матрица $G \in \mathbb{C}^{n \times m}$ называется генератором аппроксимации.

В случае, если матрица G квадратная $m = n$ и совпадает с обратной к матрице $\hat{A} \in \mathbb{C}^{m \times n}$ на пересечении строк R и столбцов C , $G = \hat{A}^{-1}$, то такая аппроксимация называется *скелетной*.

Для минимизации нормы Фробениуса оптимальным выбором является $G = C^+AR^+$, однако такой выбор требует не менее $O(MNr)$ операций, а потому редко используется на практике. Вместо него, как показано из дальнейших оценок, имеет смысл использовать аппроксимации вида $C\hat{A}_r^+R$ и $(C\hat{A}_k^+R)_r$, где нижний индекс обозначает сокращенное сингулярное разложение:

$$A_r = U\Sigma_r V, \quad U \in \mathbb{C}^{M \times M}, \quad \Sigma_r \in \mathbb{C}^{M \times N}, \quad V \in \mathbb{C}^{N \times N}, \quad \sigma_i(\Sigma_r) = 0, i > r.$$

Определение 2. Столбцовым приближением матрицы $A \in \mathbb{C}^{M \times N}$ называется произведение CW , где $C \in \mathbb{C}^{M \times n}$ – некоторые n столбцов матрицы A , а $W \in \mathbb{C}^{n \times N}$ называется матрицей весов.

Оптимальным выбором W для спектральной нормы и нормы Фробениуса является $W = C^+A$. Если дополнительно накладывать ограничение $\text{rank } W = r$, то по норме Фробениуса оптимальным выбором является W , соответствующее $(CC^+A)_r$ аппроксимации.

Используя $C = QR$ разложение столбцов C легко видеть, что $W = C^+A$ соответствует неполному QR разложению матрицы A (с перестановкой столбцов). Аналогично, рассмотрев $\hat{A} = \hat{L}\hat{U} \in \mathbb{C}^{r \times r}$, получаем, что скелетное $C\hat{A}^{-1}R$ разложение соответствует неполному LU разложению (с перестановкой строк и столбцов).

Определение 3. Объемом $\mathcal{V}(A)$ произвольной матрицы $A \in \mathbb{C}^{m \times n}$ называется произведение её сингулярных чисел

$$\mathcal{V}(A) = \prod_{i=1}^{\min(m,n)} \sigma_i(A),$$

В частности, если $m \geq n$, то

$$\mathcal{V}(A) = \sqrt{\det(AA^*)},$$

если $m \geq n$, то

$$\mathcal{V}(A) = \sqrt{\det(A^*A)},$$

и если $m = n$, то

$$\mathcal{V}(A) = |\det A|.$$

Проективным или r -*проективным* объемом матрицы A называется величина

$$\mathcal{V}_r(A) = \prod_{i=1}^r \sigma_i(A).$$

Название происходит из геометрической интерпретации: объем матрицы есть отношение объема образа к объему прообраза при данном линейном преобразовании.

Определение 4. Говорят, что подматрица полного ранга $\hat{A} \in \mathbb{C}^{m \times n}$ матрицы $A \in \mathbb{C}^{M \times N}$ обладает ρ -*локально максимальным объемом* (во всей матрице), $\rho \geq 1$, если перестановка её произвольной i -й строки и/или j -го столбца с любой другой строкой l и/или столбцом k матрицы A увеличивает ее объем не более, чем в ρ раз.

Говорят, что матрица \hat{A} обладает ρ -*локально максимальным объемом* в своих строках и столбцах, если перестановка её произвольной i -й строки или j -го столбца с любой другой строкой l или столбцом k матрицы A увеличивает ее объем не более, чем в ρ раз (одновременные замены строки и столбца не допускаются).

Говорят, что подматрица обладает *локально максимальным объемом* (во всей матрице), если $\rho = 1$.

Аналогично определяется *локально максимальный* и ρ -*локально максимальный проективный объем*.

Подматрицу *локально максимального объема* в своих строках и столбцах также зовут *доминантной*.

Основной леммой, из которой следует большинство результатов о свойствах подматриц большого объема, является следующий результат.

Лемма 1.

$$\begin{aligned} \mathcal{V}_r^2(A) &\leq \sum_{\mathcal{I}, |\mathcal{I}|=r} \sum_{\mathcal{J}, |\mathcal{J}|=r} \mathcal{V}^2(A_{\mathcal{I}, \mathcal{J}}) = \sum_{\mathcal{J}, |\mathcal{J}|=r} \mathcal{V}^2(A_{:, \mathcal{J}}) \\ &= \sum_{i_1 < \dots < i_r} \sigma_{i_1}^2(A) \cdot \dots \cdot \sigma_{i_r}^2(A), \end{aligned} \quad (4)$$

где в правой части стоит сумма произведений всех возможных наборов из r сингулярных чисел матрицы A с различными индексами.

В частности, из него следует, что нормы псевдообратных к подматрицам локально максимального объема не слишком велики.

Лемма 2. Для объема расширения невырожденной матрицы $\hat{A} \in \mathbb{C}^{r \times n}$ с помощью столбца $a \in \mathbb{C}^{r \times 1}$ справедливо равенство

$$\mathcal{V}^2 \left(\begin{bmatrix} \hat{A} & a \end{bmatrix} \right) = \mathcal{V}^2 \left(\hat{A} \right) \left(1 + \|\hat{A}^+ a\|_2^2 \right) = \mathcal{V}^2 \left(\hat{A} \right) \left(1 + \|c\|_2^2 \right).$$

Следствие 1. Для подматрицы $\hat{U} \in \mathbb{C}^{r \times n}$ локально максимального в ортонормированных строках $U \in \mathbb{C}^{r \times N}$, $UU^* = I$,

$$\|\hat{U}^+\|_F = \|\hat{U}^+ U\|_F \leq \sqrt{r + \frac{r}{n-r+1} (N-n)}$$

и

$$\|\hat{U}^+\|_2 \leq \sqrt{\|\hat{U}^+\|_F^2 - (r-1)} \leq \sqrt{1 + \frac{r}{n-r+1} (N-n)}.$$

Во второй главе рассматриваются верхние и нижние границы точности столбцовых и крестовых аппроксимаций по норме Чебышева, спектральной норме и норме Фробениуса. В частности, получены следующие результаты.

Теорема 1. Пусть $C \in \mathbb{C}^{M \times r}$ – подматрица локально максимального объема в матрице $A \in \mathbb{C}^{M \times N}$ ранга не ниже $r+1$. Тогда

$$\|A - CC^+ A\|_C \leq \sqrt{\frac{r+1}{k-r+1}} \max_C \|\tilde{C} - \tilde{C}_k\|_2 \leq \sqrt{\frac{r+1}{r-k+1}} \|A - A_k\|_2, \quad (5)$$

где $\tilde{C} \in \mathbb{C}^{M \times (r+1)}$ – произвольное расширение C одним столбцом.

Пусть $\hat{A} \in \mathbb{C}^{m \times r}$ – подматрица локально максимального объема в матрице $A \in \mathbb{C}^{M \times N}$ ранга не ниже $r+1$. Тогда

$$\|A - C \hat{A}^+ R\|_C \leq \frac{(r+1)(m+1)}{\sqrt{m-r+1}(r-k+1)} \inf_{Z, \text{rank } Z=r} \|A - Z\|_C. \quad (6)$$

Следствие 2. Для $m = r = k$ получаем

$$\|A - C\hat{A}^{-1}R\|_C \leq (k+1)^2 \|A - Z\|_C.$$

Для $m = r, r = 2k - 1$ получаем

$$\|A - C\hat{A}^{-1}R\|_C \leq 4k \|A - Z\|_C.$$

Для $m = 2r - 1, r = 3k - 1$ получаем

$$\|A - C\hat{A}^+R\|_C \leq 3\sqrt{3k-1} \|A - Z\|_C.$$

Теорема 2. Пусть $\hat{A} \in \mathbb{C}^{r \times r}$ – диагональная (главная) подматрица локально максимального объема в эрмитовой неотрицательно определенной матрице $A \in \mathbb{C}^{M \times N}$ ранга не ниже $r + 1$. Тогда

$$\|A - C\hat{A}^{-1}C^*\|_C \leq \frac{(r+1)^2}{(r-k+1)^{3/2}} \|A - Z\|_C. \quad (7)$$

Для $r = 4k - 1$ получаем

$$\|A - C\hat{A}^+C^*\|_C \leq 16\sqrt{k/27} \|A - Z\|_C.$$

Теорема 3. Пусть $\hat{A} \in \mathbb{C}^{m \times r}$ – подматрица локально максимального r -проективного объема в матрице $A \in \mathbb{C}^{M \times N}$ ранга не ниже r . Тогда

$$\|A - C\hat{A}_r^+R\|_C \leq \sqrt{\frac{(m+1)(n+1)}{(m-r+1)(n-r+1)}} \max_{\tilde{A}} \|\tilde{A} - \tilde{A}_r\|_2, \quad (8)$$

где $\tilde{A} \in \mathbb{C}^{(m+1) \times (r+1)}$ – произвольное расширение \hat{A} одной строкой и одним столбцом.

Следствие 3. Если $Z, \text{rank } Z = r$ есть наилучшее приближение A по норме Чебышева, то

$$\|A - C\hat{A}_r^+R\|_C \leq \frac{(m+1)(n+1)}{\sqrt{(m-k+1)(n-k+1)}} \|A - Z\|_C.$$

Для $m = n = 2r - 1$ получаем

$$\|A - C\hat{A}_r^+R\|_C \leq 4r \|A - Z\|_C.$$

Замечание 1. В случае ρ -локально максимального объема все оценки меняются не более, чем в ρ раз.

Последнюю теорему можно обобщить на случай тензоров.

Определение 5. Матрица вида

$$B_\tau^+ = U\Sigma_\tau^+V, \quad \sigma_k(B_\tau^+) = \begin{cases} 1/\sigma_k(B), & \sigma_k(B) > \tau, \\ 0, & \sigma_k(B) \leq \tau, \end{cases}$$

называется τ -псевдообратной матрицей матрицы $B = U\Sigma V$.

Аналогично определяется матрица $B_\tau = U\Sigma_\tau V$, для которой

$$\sigma_k(B_\tau) = \begin{cases} \sigma_k(B), & \sigma_k(B) > \tau, \\ 0, & \sigma_k(B) \leq \tau, \end{cases}$$

Определение 6. Пусть $A \in \mathbb{C}^{N_1 \times \dots \times N_d}$ – d -мерный тензор с элементами $A(i_1, \dots, i_d)$.

Крестовым тензорным поездом называется тензор вида

$$\tilde{A} = A \left(J^{\leq 0}, i_1, J^{\geq 2} \right) \prod_{k=1}^{d-1} \left(\left[A \left(J^{\leq k}, J^{\geq k+1} \right) \right]_{\tau_k}^+ A \left(J^{\leq k}, i_{k+1}, J^{\geq k+2} \right) \right),$$

где $A(J^{\leq k}, J^{\geq k+1})$ – подматрица матрицы развертки $A(i_1 \dots i_k, i_{k+1} \dots i_d)$, заданная мультииндексами $J^{\leq k}$ и $J^{\geq k+1}$, выбирающими её строки и столбцы из мультииндексов $i_1 \dots i_k$ и $i_{k+1} \dots i_d$ соответственно, а $A(J^{\leq k+1}, i_{k+1}, J^{\geq k+2})$ – трехмерные подтензоры, заданные мультииндексами $J^{\leq k}$, i_k и $J^{\geq k+2}$ соответственно. При этом первое и последнее множество мультииндексов содержат единственный элемент $J^{\leq 0} = J^{\geq d+1} = \{1\}$, так что первый и последний трехмерные тензоры являются матрицами.

Следующий результат показывает, что погрешность крестовой аппроксимации по норме Чебышева растет в зависимости от размера тензора медленнее, чем const^d .

Теорема 4. Пусть Z – наилучшее приближение тензора $A \in \mathbb{C}^{N_1 \dots N_d}$ ранга r . Тогда существует крестовый тензорный поезд \tilde{A} такой, что размеры всех подматриц в нем не больше n , а их ранг (после τ -псевдообращения) не больше r , и такой, что

$$\|A - \tilde{A}\|_C \leq \frac{\left(4\sqrt{\frac{rn}{n-r+1}}\right)^{\lceil \log_2 d \rceil} - 1}{4\sqrt{\frac{rn}{n-r+1}} - 1} \cdot \frac{(n+1)^2}{n-r+1} \|A - Z\|_C. \quad (9)$$

Все полученные выше оценки по норме Чебышева имеют степенную зависимость от ранга r . Как показывают следующие результаты, не существует крестовых или столбцовых аппроксимаций, коэффициент точности которых не имеет степенной зависимости от ранга.

Утверждение 1.

$$\sup_{A \in \mathbb{C}^{M \times N}} \min_{\substack{C \in \mathbb{C}^{M \times r} \\ W \in \mathbb{C}^{r \times N}}} \max_{Z, \text{rank } Z=r} \frac{\|A - CW\|_C}{\|A - Z\|_C} \geq r + 1.$$

Утверждение 2. Пусть $k = p^{2m}$ – наибольшее целое число такое, что $k \leq r$, p – простое, $m \in \mathbb{N}$. Тогда

$$\sup_{A \in \mathbb{C}^{M \times N}} \min_{\substack{C \in \mathbb{C}^{M \times r} \\ W \in \mathbb{C}^{r \times N}}} \max_{Z, \text{rank } Z=r} \frac{\|A - CW\|_C}{\|A - Z\|_C} \geq 1 + \frac{\sqrt{k}}{\lceil 2 \log_k(n+1) \rceil - 1}.$$

Интересно, что та же методология позволяет вывести нижние оценки аппроксимации единичной матрицы, что незначительно (на постоянный множитель) улучшают известную оценку Глускина и обобщают ее на комплексный случай.

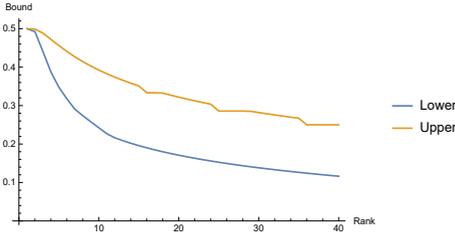


Рис. 1 — Нижние (Lower) и верхние (Upper) оценки погрешности аппроксимации в C -норме единичной матрицы размера $N = 128$ с помощью матриц ранга r .

Теорема 5. Для произвольной аппроксимации $Z \in \mathbb{C}^{N \times N}$ ранга r единичной матрицы размера $N \times N$ верно неравенство

$$\inf_{Z, \text{rank } Z=r} \|I - Z\|_C \geq \sup_{\substack{k, \\ C_{r+k-1}^k < N}} \frac{1}{1 + \left(C_{r+k-1}^k \frac{N-1}{N - C_{r+k-1}^k} \right)^{1/(2k)}}.$$

На рисунке 1 эта оценка сравнивается с верхними оценками для $N = 128$.

Рассмотрим теперь оценки по спектральной норме, которые можно получить с использованием t -функции (3). Для простоты остановимся здесь на случае квадратных матриц.

Теорема 6. Для произвольной матрицы $A \in \mathbb{C}^{N \times N}$, произвольных положительных $n \leq N$ и $r \leq n$ найдутся столбцы $C \in \mathbb{C}^{N \times n}$ и матрица $W \in \mathbb{C}^{n \times N}$, $\text{rank } W = r$ такие, что

$$\|A - CW\|_2 \leq t(r, n, N) \|A - A_r\|_2.$$

Теорема 7. Для произвольной матрицы $A \in \mathbb{C}^{N \times N}$, произвольных положительных $m \leq N$, $n \leq N$ и $r \leq \min(m, n)$ найдутся строки $R \in \mathbb{C}^{m \times N}$ и столбцы $C \in \mathbb{C}^{N \times n}$ такие, что

$$\|A - CC^+AR^+\|_2 \leq \sqrt{t^2(r, n, N) + t^2(r, m, N)} \|A - A_r\|_2$$

и

$$\|A - (CC^+AR^+)_r\|_2 \leq \sqrt{1 + t^2(r, n, N) + t^2(r, m, N)} \|A - A_r\|_2.$$

Как видно, все верхние оценки определяются t -функцией. Такое определение важно благодаря тому, что нижние оценки также выражаются через t -функцию.

Теорема 8.

$$t(r, n, \min(M, N)) \leq \sup_{A \in \mathbb{R}^{M \times N}} \min_{C, W} \frac{\|A - CW\|_2}{\|A - A_r\|_2} \leq t(r, n, N).$$

В частности, при $N \leq M$,

$$\sup_{A \in \mathbb{R}^{M \times N}} \min_{C, W} \frac{\|A - CW\|_2}{\|A - A_r\|_2} = t(r, n, N).$$

Так как крестовая CGR аппроксимация является частным случаем столбцовой с $W = GR$, данная оценка снизу распространяется и на крестовые аппроксимации.

При этом для $t(r, n, N)$ справедливы следующие оценки:

$$\sqrt{\frac{N-r+1}{n-r+1}} \leq t(r, n, N) \leq \frac{\sqrt{N}}{\sqrt{n+1} - \sqrt{r}} + \sqrt{\frac{1}{N(n+1)}}.$$

Наконец, для нормы Фробениуса погрешности столбцовых и крестовых аппроксимаций были доказаны следующие оценки.

Теорема 9. Пусть даны матрицы $A, Z \in \mathbb{C}^{M \times N}$, $\text{rank } Z = r$ и $\|A - Z\|_F \leq \varepsilon$. Тогда за $O(MNr)$ можно найти такие строки R и столбцы C матрицы A , для которых одновременно

$$\|A - CC^+A\|_F \leq \|A - CW\|_F \leq \sqrt{r+1}\varepsilon \quad (10)$$

и

$$\|A - CC^+A\|_2^2 \leq \|A - CW\|_2^2 \leq \|A - Z\|_2^2 + r\varepsilon^2 \leq (1+r(N-r))\|A - Z\|_2^2. \quad (11)$$

Теорема 10. Пусть даны матрицы $A, Z \in \mathbb{C}^{M \times N}$, $\text{rank } Z = r$ и $\|A - Z\|_F \leq \varepsilon$. Тогда за $O(MNr)$ можно найти такие строки R и столбцы C матрицы A , для которых одновременно

$$\|A - CC^+AR^+R\|_F \leq \sqrt{2r+2}\varepsilon \quad (12)$$

и

$$\|A - CC^+AR^+R\|_2 \leq \sqrt{2+2r(N-r)}\|A - Z\|_2. \quad (13)$$

А также найти такие (возможно, другие) строки R и столбцы C , для которых одновременно

$$\|A - C\hat{A}^{-1}R\|_F \leq (r+1)\varepsilon \quad (14)$$

и

$$\|A - C\hat{A}^{-1}R\|_2 \leq \sqrt{1+r(r+2)(N-r)}\|A - Z\|_2, \quad (15)$$

где \hat{A} – подматрица на пересечении строк R и столбцов C .

Теорема 11. Пусть $A \in \mathbb{C}^{M \times N}$. Тогда для любых n и r найдутся столбцы $C \in \mathbb{C}^{M \times n}$ такие, что

$$\|A - (CC^+A)_r\|_F \leq \min \left(\sqrt{2 + \frac{r}{n-r+1}}, \sqrt{1 + \frac{r}{n+r+1 - \sqrt{1+4r(n+1)}}} \right) \|A - A_r\|_F. \quad (16)$$

Теорема 12. Пусть $A \in \mathbb{C}^{M \times N}$. Тогда для любого n найдутся столбцы $C \in \mathbb{C}^{M \times n}$, строки $R \in \mathbb{C}^{n \times N}$ и подматрица на их пересечении $\hat{A} \in \mathbb{C}^{n \times n}$ такие, что для любого $r \leq n$ справедлива оценка

$$\|A - C\hat{A}^{-1}R\|_F \leq \frac{n+1}{\sqrt{n-r+1}} \|A - A_r\|_F. \quad (17)$$

Теорема 13. Пусть $A \in \mathbb{C}^{M \times N}$. Тогда для любых $t, n \geq t$ и r найдутся столбцы $C \in \mathbb{C}^{M \times n}$, строки $R \in \mathbb{C}^{m \times N}$, подматрица на их пересечении $\hat{A} \in \mathbb{C}^{m \times n}$ и ортогональный проектор $P \in \mathbb{C}^{m \times m}$ ранга r такие, что

$$\|A - C(\hat{A}P)^+R\|_F \leq \|A - A_r\|_F \cdot \left(\sup_A \min_C \frac{\|A - (CC^+A)_r\|_F}{\|A - A_r\|_F} \right) \times \left(\sup_A \min_R \frac{\|A - (AR^+R)_r\|_F}{\|A - A_r\|_F} \right).$$

Оценка на супремум в последней теореме была получена в теореме 11.

Заметим, что при $t = n$, $n/r \rightarrow \infty$ коэффициент погрешности по норме Фробениуса ведет себя как $1 + \frac{r}{n}(1 + o(1))$. Таким образом, погрешность линейно убывает с ростом числа строк и столбцов. Причем коэффициент перед множителем r/n равен единице. Этот факт подтверждают нижние оценки точности.

Теорема 14.

$$\sup_{A \in \mathbb{C}^{M \times N}} \min_C \frac{\|A - CC^+A\|_F}{\|A - A_r\|_F} \geq \sqrt{\left(1 + \frac{r}{n}\right) \frac{\min(M, N) - n}{\min(M, N) - r}}. \quad (18)$$

$$\sup_{A \in \mathbb{C}^{M \times N}} \min_C \frac{\|A - (CC^+A)_r\|_F}{\|A - A_r\|_F} \geq \sqrt{1 + \frac{r}{n} \cdot \frac{\min(M, N) - n}{\min(M, N) - r}}. \quad (19)$$

Таблица 1 — Наилучшие известные верхние оценки различных видов столбцовых и крестовых аппроксимаций по спектральной норме. Оценки, полученные или улучшенные в данной работе, помечены жирным шрифтом.

Аппроксимация	$\frac{\ A-\hat{A}\ _2}{\ A-\hat{A}_r\ _2}$
$CC^+A, n = r$	$\sqrt{1+r(N-r)}$
$CC^+A, n > r$	$\frac{\sqrt{N}}{\sqrt{n+1}-\sqrt{r}} + \sqrt{\frac{1}{N(n+1)}}$
$(CC^+A)_r, n > r$	$\sqrt{1 + \left(\frac{\sqrt{N}}{\sqrt{n+1}-\sqrt{r}} + \sqrt{\frac{1}{N(n+1)}} \right)^2}$
$CW_r, n > r$	$\frac{\sqrt{N}}{\sqrt{n+1}-\sqrt{r}} + \sqrt{\frac{1}{N(n+1)}}$
$C\hat{A}^{-1}R, n = r$	$\sqrt{1+r(r+2)(N-r)}$
$C\hat{A}^{-1}R, n > r$	$\sqrt{\frac{(n+1)^2}{n-r+1}(N-n)}$
$C(P_r\hat{A})^+R, n > r$	$\left(1 + \frac{r}{n+r+1-\sqrt{1+4r(n+1)}}\right) \sqrt{(N-n)}$
$CC^+AR^+R, n = r$	$\sqrt{2+2r(N-r)}$
$CC^+AR^+R, n > r$	$\sqrt{2} \left(\frac{\sqrt{N}}{\sqrt{n+1}-\sqrt{r}} + \sqrt{\frac{1}{N(n+1)}} \right)$
$(CC^+AR^+R)_r, n > r$	$\sqrt{1 + 2 \left(\frac{\sqrt{N}}{\sqrt{n+1}-\sqrt{r}} + \sqrt{\frac{1}{N(n+1)}} \right)^2}$

Таблица 2 — Наилучшие известные верхние оценки различных видов столбцовых и крестовых аппроксимаций по норме Фробениуса и Чебышева. Оценки, полученные или улучшенные в данной работе, помечены жирным шрифтом.

Аппроксимация	$\frac{\ A-\hat{A}\ _F}{\ A-\hat{A}_r\ _F}$	$\frac{\ A-\hat{A}\ _C}{\min_{Z, \text{rank } Z \leq r} \ A-Z\ _C}$
$CC^+A, n = r$	$\sqrt{r+1}$	—
$CC^+A, n > r$	$\sqrt{\frac{n+1}{n-r+1}}$	—
$(CC^+A)_r, n > r$	$\sqrt{1 + \frac{r}{n+r+1-\sqrt{1+4r(n+1)}}}$	—
$C\hat{A}^{-1}R, n = r$	$r+1$	$(r+1)^2$
$C\hat{A}^{-1}R, n > r$	$\frac{n+1}{\sqrt{n-r+1}}$	$\frac{(n+1)^2}{n-r+1}$
$C(P_r\hat{A})^+R, n > r$	$1 + \frac{r}{n+r+1-\sqrt{1+4r(n+1)}}$	$\frac{(n+1)^2}{n-r+1}$
$CC^+AR^+R, n = r$	$\sqrt{2(r+1)}$	—
$(CC^+AR^+R)_r, n > r$	$1 + \frac{r}{n+r+1-\sqrt{1+4r(n+1)}}$	—

Таблица 3 — Наилучшие известные нижние оценки столбцовых аппроксимаций. Оценки, полученные или улучшенные в данной работе отмечены жирным шрифтом.

Число столбцов	$\frac{\ A-CC^+A\ _F^2}{\ A-A_r\ _F^2}$	$\frac{\ A-(CC^+A)_r\ _F^2}{\ A-A_r\ _F^2}$	$\frac{\ A-CC^+A\ _2^2}{\ A-A_r\ _2^2}$
$n = r$		$r + 1$	$(r + 1) \frac{\min(M,N)}{r+1}$
$n > r$	$\frac{(1 + \frac{r}{n}) \times \min(M,N) - n}{\min(M,N) - r}$	$1 + \frac{r}{n} \cdot \frac{\min(M,N) - n}{\min(M,N) - r}$	$\frac{\min(M,N) - r + 1}{n - r + 1}$

Основные известные и новые верхние оценки точности собраны в таблицах 1 и 2, а нижние – в таблице 3.

В третьей главе получены вероятностные оценки точности столбцовых и крестовых аппроксимаций. Для их получения рассматривается следующая вероятностная модель.

Определение 7. RANDSVD ансамблем матриц $A \sim \text{RANDSVD}(A_0)$ называется множество матриц вида

$$A = W_L A_0 W_R,$$

где $A_0 \in \mathbb{C}^{M \times N}$ фиксирована, а $W_L \in \mathbb{C}^{M \times M}$ и $W_R \in \mathbb{C}^{N \times N}$ – случайные унитарные матрицы; с индуцированной на этом множестве вероятностной мерой с помощью мер Хаара для матриц W_L и W_R .

Полученные ранее верхние и нижние оценки никак не были связаны с подматрицами локально максимального объема и проективного объема. Данная модель позволяет показать, что выбор таких подматриц приводит к высокой точности аппроксимаций «в среднем».

Теорема 15. Пусть матрица $A \in \mathbb{C}^{M \times N}$ принадлежит семейству матриц вида $A = Z_0 W + F_0 W = Z + F$, $\text{rank } Z = r$, где $W \in \mathbb{C}^{N \times N}$ – случайная унитарная матрица. Пусть $U_Z \Sigma_Z V_Z$ – сокращенное сингулярное разложение Z . Пусть подматрица $\hat{V}_Z \in \mathbb{C}^{r \times n}$ обладает локально максимальным объемом в V_Z . Пусть ей соответствуют столбцы $C \in \mathbb{C}^{M \times n}$ матрицы A . Тогда

$$\mathbb{E}_W \|A - CW\|_F^2 \leq \frac{n+1}{n-r+1} \|F\|_F^2$$

Теорема 16. Пусть $A = Z + F = U(Z_0 + F_0)V \in \mathbb{C}^{M \times N}$ принадлежит RANDSVD ансамблю (определение 7). Пусть столбцы $C \in \mathbb{C}^{M \times n}$ матрицы A соответствуют столбцам $Z_C \in \mathbb{C}^{M \times n}$ локально максимального r -проективного объема в матрице Z . Пусть подматрица $\hat{A}P \in \mathbb{C}^{m \times n}$ матрицы CP обладает локально максимальным r -проективного объемом, где $P = Z_C^+ Z_C$. Пусть ее строкам соответствуют строки $R \in \mathbb{C}^{m \times N}$ матрицы A . Тогда

$$\mathbb{E}_A \left\| A - C (\hat{A}P)^+ R \right\|_F^2 \leq \frac{m+1}{m-r+1} \cdot \frac{n+1}{n-r+1} \|F\|_F^2. \quad (20)$$

Болез того, вероятность получить больший коэффициент аппроксимации экспоненциально мала, как показывают следующие теоремы.

Теорема 17. Пусть матрица $A \in \mathbb{R}^{M \times N}$ представима в виде $A = Z_0 + F_0$, Z_0 – наилучшее приближение A ранга r по 2-норме. Рассмотрим семейство матриц $A_V = Z + F = Z_0V + F_0V$, где V – случайная ортогональная матрица. Тогда для CW аппроксимация матрицы A_V с матрицей $W = \hat{Z}_{11}^+ \begin{bmatrix} Z_{11} & Z_{12} \end{bmatrix}$, где $Z_{11} \in \mathbb{R}^{r \times n}$ – подматрица максимального объема в произвольных линейно независимых строках $\begin{bmatrix} Z_{11} & Z_{12} \end{bmatrix}$ из Z верно

$$\mathcal{P} \left(\|A_V - CW\|_F^2 > \left(1 + \frac{Cr}{n-r+1} \cdot \frac{N-n}{N-r-1}\right) \|F\|_F^2 \right) \leq \frac{1,6C}{C-2} e^{-\frac{C}{2}}, \quad C > 2. \quad (21)$$

Теорема 18. Пусть $A = Z + F = W_L (Z_0 + F_0) W_R$, $\text{rank } Z = r$. Пусть W_L и W_R – независимые друг от друга случайные ортогональные матрицы. Пусть столбцы $C \in \mathbb{R}^{M \times n}$ соответствуют подматрице $\hat{Z}_{11} \in \mathbb{R}^{m \times n}$ максимального r -проективного объема в Z , а строки R – подматрице максимального r -проективного объема в столбцах CP_r , где P_Z – проектор ранга r на первые n столбцов Z . Тогда

$$\mathcal{P} \left(\|A - C (\hat{A}P_Z) R\|_F^2 > \left(1 + \frac{Cr}{m-r+1} \cdot \frac{N-m}{N-r-1}\right) \times \right. \\ \left. \times \left(1 + \frac{Cr}{n-r+1} \cdot \frac{N-n}{N-r-1}\right) \|F\|_F^2 \right) \leq \frac{3,2C}{C-2} e^{-\frac{C}{2}}, \quad C > 2. \quad (22)$$

В четвёртой главе рассмотрены алгоритмы поиска существенно невырожденных подматриц, в том числе подматриц локально максимального объема. Получены оценки на число шагов алгоритмов, а также ограничения на норму псевдообратной к найденной подматрице (как в следствии 1).

Сначала рассмотрим поиск подматрицы размера $r \times n$, $n \geq r$ в фиксированных строках $R \in \mathbb{C}^{r \times N}$. Оценки для этого случая выписаны в таблице 4. Новые алгоритмы и оценки отмечены жирным шрифтом.

Алгоритм из последней строки основан на жадной максимизации объема путем добавления столбцов, а затем (после достижения n столбцов) их замене, гарантирующей рост объема хотя бы в ρ раз. При добавлении столбцов вплоть до r используется следующий стандартный алгоритм выбора ведущих столбцов (алгоритм 1), применяемый в QR разложении.

Для дальнейшего набора столбцов используется модификация алгоритма `gest-maxvol`, основанного на работах Федорова по D-оптимальному дизайну экспериментов.

В алгоритме 2 каждое добавление столбца требует $O(Nr)$ операций. Аналогично можно удалять и менять столбцы подматрицы за $O(Nr)$, ориентируясь на

Таблица 4 — Сложность и точность при поиске сильно невырожденных $\hat{R} \in \mathbb{R}^{r \times n}$ подматриц в произвольных строках $R \in \mathbb{R}^{r \times N}$. Новые оценки и алгоритмы выделены жирным шрифтом.

Алгоритм, сложность	$\ \hat{R}^+\ _F^2 / \ R^+\ _F^2$	$\ \hat{R}^+\ _2^2 / \ R^+\ _2^2$
Жадное (по 2-норме) добавление, $n \geq r, O(Nnr^2)$	$\frac{N+2-2\sqrt{\frac{r}{n+1}}}{(\sqrt{n+1}-\sqrt{r})^2}$	$\frac{N+2-2\sqrt{\frac{r}{n+1}}}{(\sqrt{n+1}-\sqrt{r})^2}$
Жадное (по F-норме) добавление, $n = r, \mathbf{O}(Nr^2)$	$(N-r+1) \frac{r\ R^+\ _2^2}{\ R^+\ _F^2}$	$1+r(N-r)$
Жадное (по F-норме) удаление, $n \geq r, \mathbf{O}(Nr^2 + N(N-n)r)$	$\frac{N-r+1}{n-r+1}$	$1 + \frac{\ R^+\ _F^2}{\ R^+\ _2^2} \cdot \frac{N-n}{n-r+1}$
rect-maxvol + dominant, $n \geq r, \mathbf{O}(Nr^2 \log \log r + Nnr/\log \rho)$	$\left(1 + \frac{\rho^2(N-n)}{n-r+1}\right) \frac{r\ R^+\ _2^2}{\ R^+\ _F^2}$	$1 + \frac{\rho^2 r}{n-r+1} (N-n)$

Алгоритм 1 Выбор ведущих столбцов

Вход: Матрица $R \in \mathbb{C}^{r \times N}$, требуемый ранг r .

Выход: Набор индексов столбцов \mathcal{I} размера r , содержащий подматрицу большого объема.

- 1: $\mathcal{I} := \emptyset$
 - 2: **for** $k := 1$ **to** r **do**
 - 3: **for** $i := 1$ **to** N **do**
 - 4: $\gamma_i := \|R_{:,i}\|_2^2$
 - 5: **end for**
 - 6: $j = \arg \max_j \gamma_j$
 - 7: $\mathcal{I} := \mathcal{I} \cup \{j\}$
 - 8: $R := R - \frac{1}{\gamma_i} R_{:,i} R_{:,i}^* R$
 - 9: **end for**
-

квадраты норм столбцов l_j матрицы $\hat{A}^+ R$. Хотя этого достаточно, чтобы получить оценки последней строки таблицы 4, такой подход не гарантирует достижения ρ -локально максимального объема. Для этого используется алгоритм 3.

В случае $n = r$ он совпадает с известным алгоритмом maxvol поиска квадратных доминантных подматриц.

Интересно, что если разрешить набирать одни и те же столбцы по несколько раз, а затем жадно их удалить, то можно получить подматрицу, объем которой отличается от максимального на экспоненциальный фактор (что лучше оценки для подматриц локально максимального объема).

Утверждение 3. За $O(Nr^2 + Nr^2 \log \varepsilon^{-1} / \varepsilon)$ операций в матрице $R \in \mathbb{C}^{r \times N}$ можно найти $r \times r$ подматрицу $e^{r/2+r\varepsilon} / (2\pi r)^{1/4}$ -максимального объема.

Для поиска подматрицы ρ -локально максимального объема из $k < r$ столбцов используется известный алгоритм построения сильного выявляющего ранг

Алгоритм 2 gect-maxvol, быстрая версия

Вход: Строки $R \in \mathbb{C}^{r \times N}$, стартовый набор индексов столбцов \mathcal{I} размера r , итоговое число столбцов n .

Выход: В \mathcal{I} добавляются $n - r$ индексов столбцов, жадно максимизирующих объем подматрицы $\hat{A} = R_{:, \mathcal{I}}$.

```
1:  $Y := I$ 
2:  $C := R_{:, \mathcal{I}}^{-1} R$ 
3: for  $j := 1$  to  $N$  do
4:    $l_j := \|C_{:, j}\|_2^2$ 
5: end for
6: for  $k := r + 1$  to  $n$  do
7:    $i := \arg \max_{i, i \notin \mathcal{I}} l_i$ 
8:   Индекс  $i$  добавляется в множество  $\mathcal{I}$ 
9:    $Y' := C_{:, i}^* Y$ 
10:   $C' := Y' C$ 
11:   $Y := Y - \frac{1}{1+l_i} Y' Y'^*$ 
12:  for  $j := 1$  to  $N$  do
13:     $l_j := l_j - \frac{1}{1+l_i} |C'_{j,i}|^2$ 
14:  end for
15: end for
```

Алгоритм 3 dominant

Вход: Матрица $R \in \mathbb{R}^{r \times N}$, стартовый набор индексов столбцов \mathcal{I} размера n . Например, $\mathcal{I} = \{1, \dots, n\}$. Параметр ρ .

Выход: Обновленный набор индексов \mathcal{I} , соответствующий подматрице ρ -локально максимального объема.

```
1:  $C := R_{\mathcal{I}}^+ R$ 
2: for  $i := 1$  to  $n$  do
3:   for  $j := n + 1$  to  $N$  do
4:      $B_{i,j} := (1 + \|C_{:, j}\|_2^2) (1 - \|C_{:, i}\|_2^2) + |C_{i,j}|^2$ 
5:   end for
6: end for
7:  $\{i, j\} := \arg \max_{i, j} B_{i,j}$ 
8: while  $B_{i,j} > \rho^2$  do
9:   Замена  $j$  на  $i$  в  $\mathcal{I}$ 
10:  Обновление  $C$  и  $B$ 
11:   $\{i, j\} := \arg \max_{i, j} B_{i,j}$ 
12: end while
```

QR разложения (SRRQR). Вместе SRRQR и dominant позволяют искать подматрицу локально максимального объема (в своих строках и столбцах) произвольной формы. Для этого поиск осуществляется в строках и столбцах попеременно, пока в них не будет достигнут локально максимальный объем.

Алгоритм 4 Поиск прямоугольной матрицы локально максимального объема

Вход: Матрица $A \in \mathbb{C}^{M \times N}$, стартовые наборы индексов строк \mathcal{I} и столбцов \mathcal{J} размера m и r соответственно.

Выход: Факторы крестовой аппроксимации $C\hat{A}^+R$ ранга r .

```

1: while были перестановки строк или столбцов do
2:    $\hat{A} := A_{\mathcal{I}, \mathcal{J}}$ 
3:    $C := A_{:, \mathcal{J}}$ 
   {Замены алгоритма dominant}
4:   while
5:      $\max_{i,j} \left[ \left\| (C\hat{A}^+)_{ij} \right\|^2 + \left( 1 + \left\| (C\hat{A}^+)_{i,:} \right\|_2^2 \right) \left( 1 - \left\| (C\hat{A}^+)_{j,:} \right\|_2^2 \right) \right] > 1$  do
6:     Замена  $j$  на  $i$  в  $\mathcal{I}$ ,  $i$  и  $j$  соответствуют максимуму выше
7:     Обновление  $C\hat{A}^+$ 
8:   end while
9:    $\hat{A} := A_{\mathcal{I}, \mathcal{J}}$ 
10:  Берем  $Q$  из QR разложения  $\hat{A}$ 
11:   $R := A_{\mathcal{I}, :}$ 
   {Замены алгоритма SRRQR}
12:  while  $\max_{i,j} \left[ \left\| (\hat{A}^+R)_{ij} \right\|^2 + \left\| \hat{A}_{i,:}^+ \right\|_2^2 \left\| (R - QQ^*R)_{:,j} \right\|_2^2 \right] > 1$  do
13:    Замена  $i$  на  $j$  в  $\mathcal{J}$ ,  $i$  и  $j$  соответствуют максимуму выше
14:    Обновление  $\hat{A}^+R$ ,  $\hat{A}^+$  и  $Q^*R$ 
15:  end while
16: end while

```

Подматрицу большого проективного объема при этом можно искать, определив соответствующие ей строки и столбцы по отдельности. Если бы матрица A была ранга r , этого было бы достаточно, как показывает следующий простой результат.

Утверждение 4. Пусть $A_{\mathcal{I}_1, \mathcal{J}_1} \in \mathbb{C}^{m \times r}$ и $A_{\mathcal{I}_2, \mathcal{J}_2} \in \mathbb{C}^{r \times n}$ – подматрицы локально максимального объема в матрице $A \in \mathbb{C}^{M \times N}$ ранга r , заданные наборами индексов строк \mathcal{I}_1 , \mathcal{I}_2 и столбцов \mathcal{J}_1 , \mathcal{J}_2 . Тогда $\hat{A} = A_{\mathcal{I}_1, \mathcal{J}_2}$ – подматрица локально максимального r -проективного объема.

Если подматрицу требуется получить как можно быстрее, можно сначала найти $r \times r$ подматрицу, а затем жадно добавить к ней новые строки и столбцы. Однако, если есть возможность, имеет смысл отдельно искать $m \times r$ и $r \times n$

Рис. 2 — Обновление текущей подматрицы $\hat{A} = A_{I, \mathcal{J}}$ в процессе поиска прямоугольной подматрицы локально максимального объема.

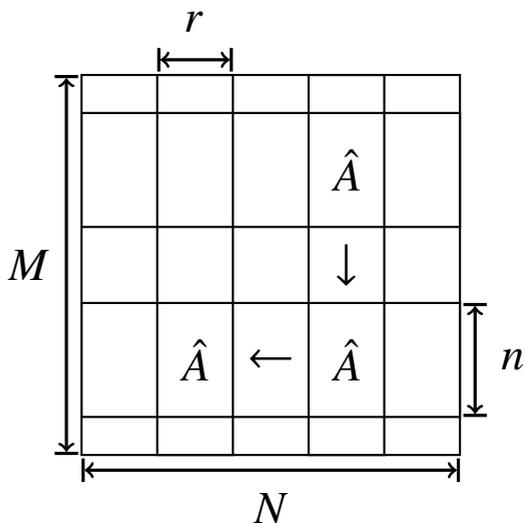
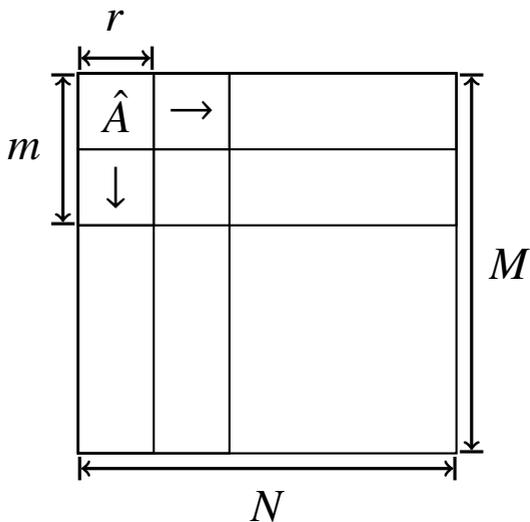


Рис. 3 — Быстрый поиск подматрицы большого проективного объема: расширение $\hat{A} = A_{I, \mathcal{J}}$ (полученной с помощью `maxvol`) после двух применений `rect-maxvol`.



подматрицы локально максимального объема, что по крайней мере частично удовлетворит условиям утверждения 4. Такой метод назовем `maxvol-proj`.

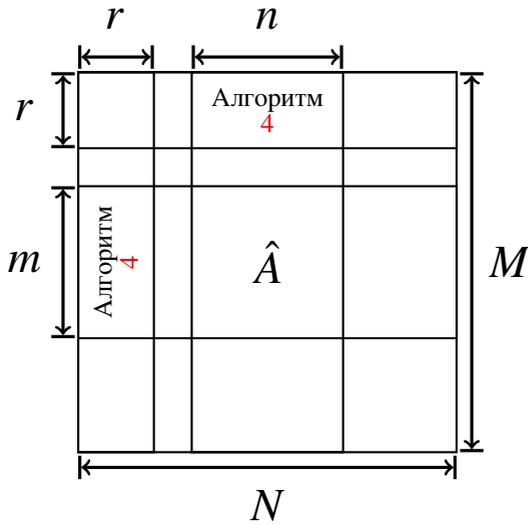


Рис. 4 — Подматрица $\hat{A} = A_{\mathcal{I}, \mathcal{J}}$, возвращаемая алгоритмом `maxvol-proj`.

Алгоритм 5 Быстрый поиск подматрицы большого проективного объема

Вход: Матрица $A \in \mathbb{C}^{M \times N}$, стартовые наборы индексов строк \mathcal{I} и столбцов \mathcal{J} размера r , финальные числа n и m столбцов C и строк R соответственно.

Выход: Факторы крестовой аппроксимации $C \hat{A}_r^+ R$.

- 1: Поиск подматрицы локально максимального объема $A_{\mathcal{I}, \mathcal{J}} \in \mathbb{C}^{r \times r}$ с помощью алгоритма `maxvol`
 - 2: $C := A_{:, \mathcal{J}}$
 - 3: $R := A_{\mathcal{I}, :}$
 - 4: Добавление $n - r$ столбцов из R с помощью `rect-maxvol` (алгоритм 2), их индексы добавляются в \mathcal{J}
 - 5: Добавление $m - r$ строк из C с помощью `rect-maxvol`, их индексы добавляются в \mathcal{I}
 - 6: $\hat{A} = A_{\mathcal{I}, \mathcal{J}} \in \mathbb{C}^{m \times n}$
 - 7: $\hat{A}_r^+ = (\hat{A}_r)^+$
 - 8: $C := A_{:, \mathcal{J}}$
 - 9: $R := A_{\mathcal{I}, :}$
-

Алгоритм 6 maxvol-proj

Вход: Матрица $A \in \mathbb{C}^{M \times N}$, требуемый ранг r , число строк m и столбцов n .

Выход: Факторы крестовой аппроксимации $C \hat{A}_r^+ R$.

- 1: Поиск подматрицы локально максимального объема $A_{\mathcal{I}_1, \mathcal{J}_1} \in \mathbb{C}^{m \times r}$ с помощью алгоритма 4
 - 2:
 - 3: Поиск подматрицы локально максимального объема $A_{\mathcal{I}_2, \mathcal{J}_2} \in \mathbb{C}^{r \times n}$ с помощью алгоритма 4
 - 4: $\hat{A} = A_{\mathcal{I}_1, \mathcal{J}_2} \in \mathbb{C}^{m \times n}$
 - 5: $\hat{A}_r^+ = \left(\hat{A}_r\right)^+$
 - 6: $C = A_{:, \mathcal{J}_2}$
 - 7: $R = A_{\mathcal{I}_1, :}$
-

Преимущество приведенных здесь методов состоит в том, что они не рассматривают всю матрицу целиком, а потому очень эффективны на практике. С другой стороны, этот же факт не позволяет гарантировать высокой точности, так как погрешность в нерассмотренных элементах матрицы может быть сколь угодно большой. Однако, как показывают следующие результаты, если разрешить одновременную замену строк и столбцов, то за полиномиальное время можно найти подматрицы ρ -локально максимального объема и проективного объема.

Теорема 19. *Существует алгоритм поиска подматрицы $A \in \mathbb{R}^{r \times r}$ 3ρ -локально максимального объема в матрице $A \in \mathbb{R}^{M \times N}$, требующий $O\left(MNr\left(\log r + \log_\rho r\right)\right)$ операций и гарантирующий для сингулярных чисел найденной подматрицы оценки*

$$\sigma_i(\hat{A}) \geq \sigma_i(A) / \sqrt{(1 + 3\rho r(M - r))(1 + 3\rho r(N - r))},$$

а для скелетного приближения на ее основе оценки

$$\sigma_i\left(A - C \hat{A}^{-1} R\right) \leq \sigma_{r+i}(A) \sqrt{(1 + 3\rho r(M - r))(1 + 3\rho r(N - r))},$$

и оценку погрешности по норме Чебышева

$$\|A - C \hat{A}^{-1} R\|_C \leq \rho(r + 1)^2 \inf_{Z, \text{rank } Z=r} \|A - Z\|_C.$$

Подматрица ρ -локально максимального объема ($\rho \leq 3$) при этом может быть найдена за $O\left(MNr^3 \log_\rho r\right)$ операций.

Схожие результаты справедливы для подматриц большего размера, однако сложность соответствующих алгоритмов существенно выше.

Теорема 20. Подматрица ρ -локально максимального объема размера $r \times n$ во всей матрице может быть найдена за $O\left(MNr \log r + MNn^2r^3 \log_\rho n\right)$ операций, а соответствующие ей оценки по норме Чебышева можно гарантировать за $O\left(MNr \log r + MNr \log_\rho r + n^2r^3 \log_\rho n\right)$ операций.

Подматрица ρ -локально максимального r -проективного объема размера $t \times n$ во всей матрице может быть найдена за $O\left(MNr \log r + MNt^2n^2 \min(t, n) r \log_\rho(tn)\right)$ операций, а соответствующие ей оценки по норме Чебышева можно гарантировать за $O\left(MNr \log r + MNr^2 \log_\rho r + t^2n^2 \min(t, n) r \log_\rho(tn)\right)$ операций.

В пятой главе рассматривается эффективность алгоритма `тахvol` на матрицах с малой погрешностью. Как уже упоминалось, производить одновременные замены строк и столбцов, чтобы гарантировать достижение ρ -локально максимального объема, слишком затратно с вычислительной точки зрения. Поэтому на практике строки и столбцы меняются по отдельности. В данной главе показано, что если погрешность достаточно мала, такой подход обычно позволяет достичь подматрицы, близкой к подматрице локально максимального объема. Для этого используется вероятностный подход, аналогичный подходу главы 3.

Теорема 21. Пусть $A = Z + E$, $Z = U\Sigma V^*$, $\Sigma = \text{diag}(\sigma_1, \dots, \sigma_r)$, $\sigma_i > 0$, $U^*U = V^*V = I$, $A \in \mathbb{R}^{M \times N}$. Пусть $V \in \mathbb{R}^{r \times N}$ - случайные ортонормированные строки. Обозначим

$$\delta = \|E\|_C.$$

Пусть

$$\varepsilon = \sum_{i=1}^r \frac{r^2 \delta \sqrt{MN}}{\sigma_i \sqrt{r-i+1}}. \quad (23)$$

Пусть

$$\varepsilon' = \frac{9 \cdot 2^r}{8} (e^\varepsilon - 1) \leq \frac{1}{8},$$

$$\beta = 4r^{3/4} \varepsilon' \left(e + 2e \sqrt{\frac{c}{r}} + \frac{2ce}{r} \right)^{r/2}.$$

Пусть алгоритм `тахvol` (со стартовой подматрицей на каждом шаге с объемом не меньше, чем 2^{-r} от максимального, что можно гарантировать, используя утверждение 3), на первом шаге которого выбирается матрица с максимальным модулем определителя среди подматриц локально максимального объема среди k блоков с r различными столбцами в каждом, возвратил после остановки подматрицу $\hat{A} \in \mathbb{C}^{r \times r}$, находящуюся на пересечении строк $R \in \mathbb{C}^{r \times N}$ и столбцов $C \in \mathbb{C}^{M \times r}$. Тогда с вероятностью $1 - N^{-c} - \beta^k$ справедлива оценка

$$\|A - C\hat{A}^{-1}R\|_C \leq (1 + 16\varepsilon') (r + 1)^2 \|E\|_C. \quad (24)$$

В шестой главе алгоритмы главы 4 протестированы на случайных матрицах. Проанализирована их наблюдаемая точность и требуемое на практике число шагов. Перечислим здесь лишь часть полученных результатов.

Наблюдаемое число шагов в фиксированных случайных (randsvd) строках $R \in \mathbb{C}^{r \times N}$ показано в таблице 5. Из нее видно, что на практике требуется около n шагов (с учетом жадного набора первых r столбцов) для достижения подматрицы локально максимального объема.

Таблица 5 — Число шагов (замен столбцов) при использовании maxvol и dominant для $\rho = 1$. Первые r столбцов стартовой матрицы выбираются с помощью выбора ведущих столбцов (алгоритм 1). Показано среднее и максимальное число шагов среди 100 генераций $V \in \mathbb{R}^{r \times N}$, $VV^T = I$. $r = 50$, $N = 5000$.

Алгоритм	maxvol ($n = r = 50$)	dominant ($n = 100$)	dominant ($n = 500$)
Шагов, в среднем	1,2	81	437
Шагов, максимум	7	99	457

Одним из основных преимуществ использования подматриц большого проективного объема является возможность достижения относительной точности $1 + \varepsilon$ по норме Фробениуса

$$\|A - CGR\|_F = (1 + \varepsilon)\|A - A_r\|_F, \quad (25)$$

где в среднем $1 + \varepsilon \lesssim \frac{m+1}{m-r+1} \cdot \frac{n+1}{n-r+1}$, согласно теореме 16. Таким образом, увеличивая m и n мы можем достичь сколь угодно малого ε . При этом $1/\varepsilon$ линейно зависит от размера подматрицы (при $m = n$).

Линейность убывания погрешности проиллюстрирована на рисунке 5, где по вертикальной оси отложена величина $1/\varepsilon$.

Увеличение числа строк и столбцов также существенно уменьшает дисперсию ошибки, так что вероятность большой погрешности падает. Чтобы проверить этот факт, на рисунке 6 построена плотность вероятности погрешности крестовых аппроксимаций (см. также теорему 18).

Как видно, крестовые аппроксимации на основе найденных подматриц приводят к приближениям по норме Фробениуса близких к оптимальному, заданному сокращенным сингулярным разложением, но при этом существенно быстрее. Несмотря на формальное отсутствие теоретических гарантий для них, мы видим, что идея поиска подматриц большого проективного объема приводит к падению погрешности и её дисперсии, как и предсказывают вероятностные оценки главы 3.

В таблице 6 мы сравниваем эффективность методов крестовой аппроксимации для матрицы A большего размера. Как видно, аппроксимация на основе проективного объема дает погрешность, близкую к сокращенному сингулярному разложению, и превосходит по точности и скорости столбцовую аппроксимацию на основе сильного выявляющего ранг QR разложения. Заметим также, что алгоритм 5 быстрее и вносит меньшую погрешность, чем аппроксимация на основе

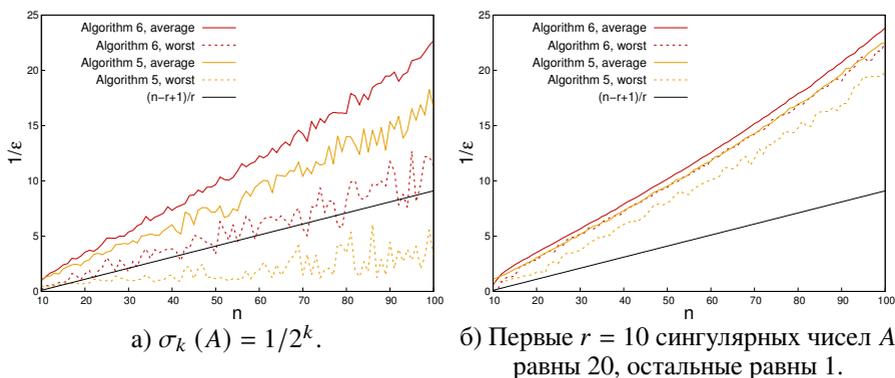


Рис. 5 — Зависимость $1/\varepsilon$ (25) от числа строк и столбцов подматрицы при использовании различных алгоритмов поиска большого проективного объема. Размер матрицы 400×400 , ранг $r = 10$, сингулярные числа матрицы A выписаны под рисунками. Погрешность усреднена по 100 поколениям матрицы A . Меньшее значение $1/\varepsilon$ соответствует большей ошибке. Также показано наименьшее значение $1/\varepsilon$ за 100 поколений (наихудший случай, worst case).

Таблица 6 — Время выполнения и относительная (к сокращенному сингулярному разложению) погрешность по норме Фробениуса для различных алгоритмов крестовой и столбцовой аппроксимации. Размер матрицы $N = 5000$, ранг аппроксимации $r = 25$, $\sigma_k(A) = 2^{-k}$.

Метод	Алгоритм 6, $m = n = 2r$	Алгоритм 5, $m = n = 2r$	Алгоритм 4, $n = 2r$	maxvol	SRRQR
Время, секунд	0,19	0,07	0,09	0,04	1,22
Коэффициент погрешности	1,35	1,39	1,89	2,45	1,85

прямоугольной подматрицы локально максимального объема (алгоритм 4). Таким образом, на практике нет преимущества в использовании прямоугольных матриц для построения крестовой аппроксимации.

Описанные алгоритмы и некоторые примеры доступны в GitHub:

<https://github.com/RodniO/Projective-volume-low-rank>

Крестовые алгоритмы доступны в модуле ModAppr, а примеры их использования есть в файлах ExampleA.f90 и ExampleB.f90 папки incfiles.

В седьмой главе рассмотрены три вида задач, решение которых можно существенно ускорить с помощью предложенных крестовых методов.

Первой задачей является численное решение дискретизованных интегральных уравнений. В диссертации рассмотрены температурно-зависимые уравнения Смолуховского, как яркий пример, где матрица часто является малоранговой и меняется со временем. Данная задача подробно рассматривалась в кандидатской диссертации соискателя, а потому мы не будем останавливаться на ней здесь.

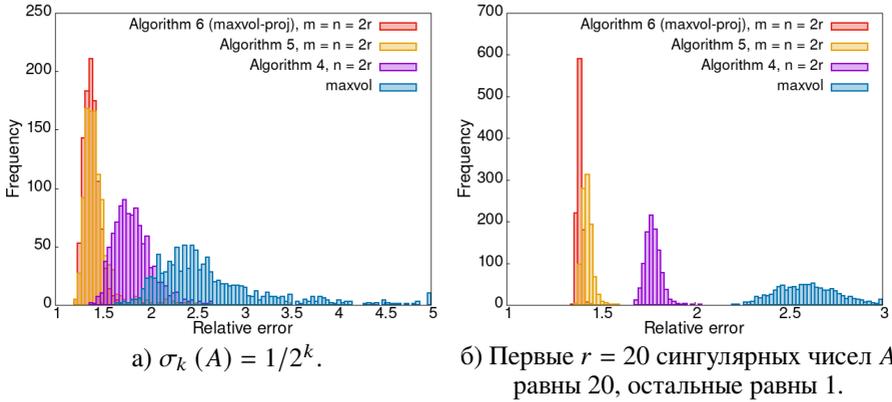


Рис. 6 — Плотность вероятности относительной погрешности $\|A - CGR\|_F / \|A - A_r\|_F$ для различных алгоритмов крестовой аппроксимации. Размеры матрицы 400×400 , ранг $r = 20$, сингулярные числа матрицы A указаны под рисунками. Распределение построено исходя из 1000 генераций матрицы A .

Второй задачей является восстановление матриц. Пусть необходимо найти неизвестную матрицу $X \in \mathbb{C}^{N \times N}$ (ограничимся случаем квадратной матрицы, чтобы не возникло путаницы обозначений), если известно её значение $A = M \odot X$ (символ \odot обозначает поэлементное произведение) на некоторой маске $M \in \mathbb{C}^{N \times N}$:

$$M = \begin{cases} 1, & \text{для известных элементов,} \\ 0, & \text{для неизвестных элементов.} \end{cases}$$

Задачу восстановления матрицы сформулируем в виде поиска на элементах M ближайшей (в евклидовой норме) к матрице A матрицы X :

$$\|A - M \odot X\|_F \rightarrow \inf_{X, \text{rank } X \leq r}.$$

В диссертации рассмотрен метод решения, основанный на приближенном методе переменных проекций (ASVP), где приближенная проекция на пространство матриц ранга r ищется с помощью крестового разложения на основе подматриц большого проективного объема. В общем случае метод ASVP записывается следующим образом:

$$X_{(s+1)} = P_r (X_{(s)} + \tau (A - M \odot X_{(s)})), \quad (26)$$

где $\tau > 0$ – размер шага итерации, а P_r – оператор (приближенного) проектирования на пространство матриц ранга r , $\forall X : \text{rank}(P_r X) = r$. В качестве начального приближения можно использовать $X_{(0)} = P_r A$.

Теорема 22. Пусть оператор $M(X) = \frac{1}{\sqrt{\delta}} M \odot X$ (δ – доля известных элементов, $\delta = \|M\|_F^2 / N^2$) обладает свойством ограниченной изометрии на множестве матриц X , $\text{rank } X = 2r$:

$$(1 - \kappa) \|X\|_F^2 \leq \|M(X)\|_F^2 \leq (1 + \kappa) \|X\|_F^2,$$

где $1 - 2(1 + \varepsilon) + \frac{1+\kappa}{1-\kappa}(1 + \varepsilon) + \frac{\varepsilon}{\delta(1+\kappa)} = D < 1$. Пусть шаг $\tau = \frac{1}{\delta(1+\kappa)}$. Тогда алгоритм, заданный (26), при использовании приближенного проектора $\|X - P_r X\|_F^2 \leq (1 + \varepsilon) \|X - X_r\|_F^2 \quad \forall X$ достигает на маске M точности ε за $\left\lceil \frac{2 \log_2 \|A\|_F - 2 \log_2 \varepsilon}{\log_2(1/D)} \right\rceil$ итераций.

На рисунке 7 показано сравнение точности метода ASVP с использованием крестового разложения по сравнению с точным проектированием. Видно, что использование крестовой аппроксимации позволяет достичь более высокой точности восстановления за меньшее время.

Пример использования крестовой аппроксимации для восстановления матриц есть в <https://github.com/RodniO/Projective-volume-low-rank> в файле ExampleR.f90. Код самого метода находится в модуле ModRecon.

Третьей рассмотренной в диссертации задачей является построение неотрицательных аппроксимаций, то есть матрицы $\tilde{A} \approx A$, $\text{rank } \tilde{A} = r \ll \text{rank } A$, $\tilde{A}_{ij} \geq 0$.

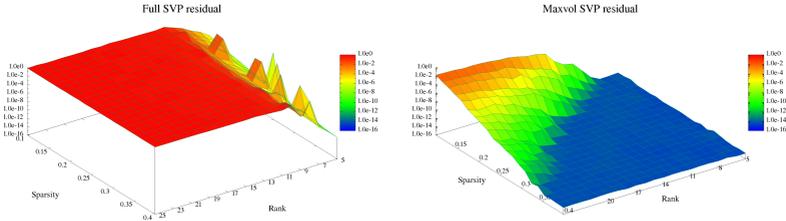
Как и раньше, будем обозначать через A_r приближение ранга r произвольной матрицы A на основе сокращенного сингулярного разложения. Пусть $A_{(0)} = A_r$, а $A_{(s)}$ – аппроксимация на s -м шаге метода. Пусть $P_{\geq 0}$ – ортогональный проектор на множество неотрицательных матриц. Тогда метод переменных проекций можно записать в следующем виде:

$$A_{(s+1)} = (P_{\geq 0} A_{(s)})_r. \quad (27)$$

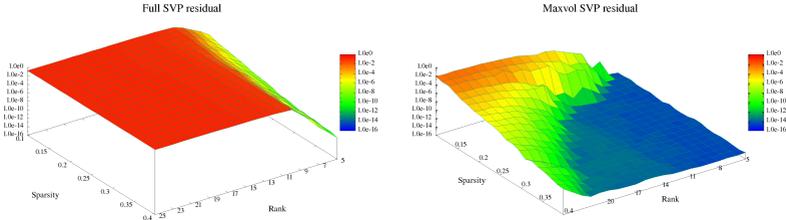
В случае, если начальная матрица A близка к не касательной точке пересечения многообразий неотрицательных матриц и матриц ранга r , такой алгоритм сходится. Однако, на практике он требует большого числа итераций, а построение точной проекции ранга r с помощью сингулярного разложения требует существенных вычислительных затрат. С другой стороны, использование приближенного проектора на основе крестовой аппроксимации с $n = O(n)$ потребует лишь $O(Nr^2)$ операций на каждом итерационном шаге. Кроме того, переменные проекции можно существенно ускорить, если вместо проектирования на множество неотрицательных матриц использовать проектор $P_{\geq \varepsilon}$ на множество матриц с элементами не меньше ε . Если оценить значение ε как среднюю погрешность после первой итерации

$$\varepsilon = \frac{\|A_{(1)} - A_{(0)}\|_F}{\sqrt{MN}},$$

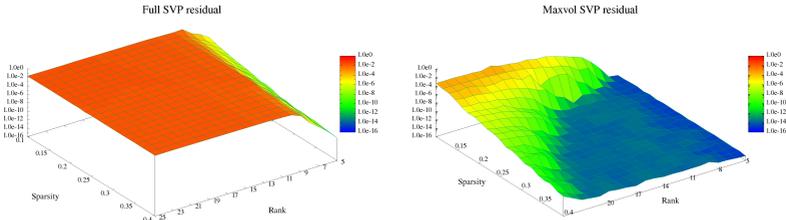
то введение такого ε не увеличит существенно итоговую погрешность.



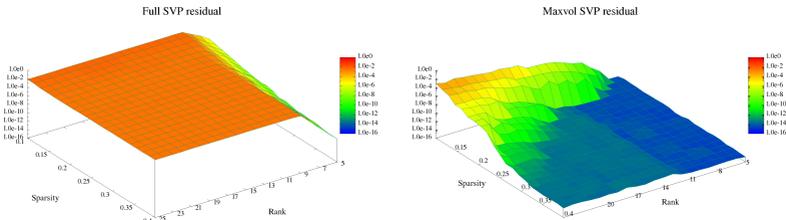
a) $\sigma_k(X) = 1$.



б) $\sigma_k(X) = 1/k$.



в) $\sigma_k(X) = 1/k^2$.



г) $\sigma_k(X) = 2^{-k}$.

Рис. 7 — Слева – относительная погрешность (на маске) после SVP с точным проектором P_r , 50 итераций ($t = 25$ секунд). Справа – относительная погрешность (на маске) после ASVP с помощью крестового разложения за $t = 5$ секунд. Под каждой парой графиков указано распределение сингулярных чисел искомой матрицы $X \in \mathbb{R}^{1000 \times 1000}$ ранга Rank. Sparsity – плотность известных элементов.

В качестве примера можно рассмотреть численное решение двухкомпонентных уравнений Смолуховского, рисунок 8 (автор выражает благодарность Сергею Александровичу Матвееву за предоставленные данные). Как видно из таблицы 7, использование положительного ε и приближенного проектора не приводит к существенному росту итоговой погрешности.

Таблица 7 — Сравнение вычислительной сложности и погрешности построения неотрицательных аппроксимаций с помощью точного и приближенного проектирования. $N = 1024, r = 10$, элементы матрицы A и ее сингулярные числа показаны на рисунке 8. Число итераций для точного проектирования соответствует достижению относительной погрешности отрицательных элементов $\frac{\|P_{\leq 0} A_{(s)}\|_F}{\|A_{(s)}\|_F} < 10^{-9}$.

Метод	Флоп на итерацию	Итераций	$\frac{\ A - A_{(s)}\ _F}{\ A\ _F}$	$\frac{\ A - A_{(s)}\ _C}{\ A\ _C}$
$\tilde{A} = U \Sigma_r V, \varepsilon = 0$	$2,3 \cdot 10^{10}$	≈ 700	$2,70 \cdot 10^{-2}$	$1,48 \cdot 10^{-1}$
$\tilde{A} = CGR, \varepsilon > 0$	$6,7 \cdot 10^6$	15	$2,91 \cdot 10^{-2}$	$1,49 \cdot 10^{-1}$

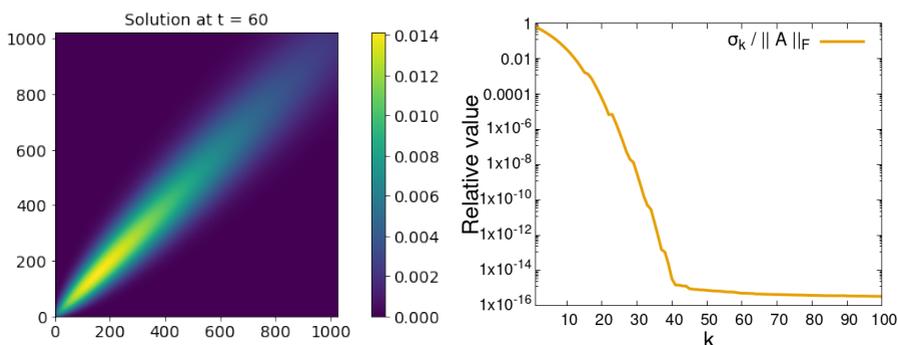


Рис. 8 — Слева – приближаемое решение двухкомпонентных уравнений Смолуховского. Справа – его сингулярные числа.

В <https://github.com/RodniO/Projective-volume-low-rank> в файле ExampleP.f90 есть пример построения неотрицательной аппроксимации для $A_{ij} = e^{-0,01 ij}$. Сам метод находится в модуле ModAppr.

В заключении приведены основные результаты работы.

В приложении приведен псевдокод для алгоритмов поиска подматриц локально максимального объема.

Основные результаты работы:

В диссертационной работе получен ряд новых оценок точности столбцовых и крестовых аппроксимаций, а также построены алгоритмы, позволяющие достигнуть полученных оценок на практике за время, линейное по размерам матрицы. Основной результат работы состоит в общем подходе к разработке алгоритмов

крестовой аппроксимации, анализу их эффективности, достигаемой точности и других свойств полученных малоранговых структур. Данный подход основан на использовании подматриц локально максимального объема и проективного объема. Связь между свойствами таких подматриц и свойствами столбцовых и крестовых аппроксимаций не только позволяет достичь и улучшить теоретические оценки точности, но также говорит о важности их поиска при построении соответствующих аппроксимаций на практике.

Полученные оценки снизу описывают наилучшие возможные гарантии точности, и позволяют определить, в каких случаях ни один метод крестовой или столбцовой аппроксимации не позволит достичь меньшей погрешности. Полученные оценки сверху позволяют оценить, какая точность является достижимой, и что точно можно гарантировать при использовании соответствующих видов аппроксимации. Наконец, особое внимание уделено вероятностным оценкам, которые позволяют определить, какую точность аппроксимации следует ожидать на практике. В частности, при построении аппроксимаций на основе подматриц локально максимального объема и проективного объема.

Важное значение представляют новые подходы к построению аппроксимаций, основанные на проективном объеме, близость верхних и нижних границ точности, что говорит о близости аппроксимаций к оптимальным, а также доказательство возможности достижения аппроксимаций по норме Фробениуса с произвольной относительной точностью (сколь угодно близкой к сингулярному разложению), используя небольшое число дополнительных строк и столбцов. Полученные теоретические результаты согласуются с результатами численных экспериментов.

Предложенные алгоритмы построения крестовых аппроксимаций обладают одновременно высокой наблюдаемой на практике точностью и очень низкой вычислительной сложностью. В связи с этим они имеют широкий круг применений и особенно важны в тех задачах, где аппроксимацию требуется строить несколько раз. Примерами таких задач служат, в частности, температурно-зависимые уравнения Смолуховского (где ядро меняется со временем), восстановление матриц и построение неотрицательных аппроксимаций с помощью переменных проекций. Успешное применение разработанных алгоритмов в вышеуказанных задачах говорит об их высокой эффективности в различных условиях. Возможность построения аппроксимаций за меньшее время, чем требуется для вычисления приближаемой матрицы целиком, позволяет строить и обновлять малоранговую структуру быстрее, чем прямое использование полного набора данных, что приводит к ускорению различных алгоритмов даже в тех случаях, когда данные постоянно меняются.

Публикации в рецензируемых научных изданиях, индексируемых в базах данных Web of Science, Scopus, RSCI и в изданиях, рекомендованных для защиты в диссертационном совете МГУ имени М.В. Ломоносова по специальности 1.1.6 — «Вычислительная математика»:

1. Osinsky A.I. Low-rank Monte Carlo for Smoluchowski-class equations // Journal of Computational Physics. — 2024. — V. 506. — P. 112942. (WoS, JIF impact factor: 3.8) [2.1 п. л.]
Автором самостоятельно написан код малорангового метода Монте-Карло для классических и температурно-зависимых уравнений, проведено численное сравнение с другими методами.
2. Osinsky A. Volume-based subset selection // Numerical Linear Algebra with Applications. — 2024. — V. 31, no. 2. — P. e2525. (WoS, JIF impact factor: 1.8) [0.9 п. л.]
Автором самостоятельно построен алгоритм поиска прямоугольных подматриц локально максимального объема, доказана его алгоритмическая сложность, а также свойства подматриц, получаемых с его помощью.
3. Осинский А.И. Нижние оценки точности столбцовых аппроксимаций матриц // Журнал вычислительной математики и математической физики. — 2023. — Т. 63, № 11. — С. 1816. (RSCI, двухлетний импакт-фактор РИНЦ: 1.118) [0.1 п. л.] Перевод:
Osinsky A. Lower Bounds for Column Matrix Approximations // Computational Mathematics and Mathematical Physics. — 2023. — V. 63, no. 11. — P. 2024-2037. (WoS, JIF impact factor: 0.7) [1.3 п. л.]
Автором самостоятельно получены нижние оценки точности столбцовых аппроксимаций матриц по спектральной норме и норме Фробениуса. В некоторых случаях также доказаны близкие верхние оценки.
4. Osinsky A. Polynomial time ρ -locally maximum volume search // Calcolo. — 2023. — V. 60, no. 42. (WoS, JIF impact factor: 1.4) [1.9 п. л.]
Автором самостоятельно предложен алгоритм поиска подматриц локально максимального объема, написан код, проведено сравнение с другими методами, доказана сходимость метода и свойства полученной с его помощью аппроксимации.
5. Osinsky A.I., Brilliantov N.V. Exact solutions of temperature-dependent Smoluchowski equations // Journal of Physics A: Mathematical and Theoretical. — 2022. — V. 55, no. 42. — P. 425003. (WoS, JIF impact factor: 2) [1.5/1.3 п. л.]
Автором был разработан и описан малоранговый Монте-Карло метод, получены точные решения температурно-зависимых уравнений Смолюховского, проведены численные эксперименты. Совместно с Н.В. Бриллиантовым выполнена постановка задачи.

6. Kalinov A., Osinsky A.I., Matveev S.A., Otieno W., Brilliantov N.V. Direct simulation Monte Carlo for new regimes in aggregation-fragmentation kinetics // *Journal of Computational Physics*. — 2022. — V. 467. — P. 111439. (WoS, JIF impact factor: 3.8) [1.4/1.1 п. л.]
Автором был разработан, описан и реализован метод принятия-отклонения в применении к уравнениям Смолуховского с фрагментацией на мономеры, выполнены связанные с ним численные эксперименты. А. Калиновым реализован обратный Монте-Карло метод. С.А. Матвеевым, В. Отиэно и Н.В. Бриллиантовым выполнена постановка задачи.
7. Osinsky, A.I., Brilliantov, N.V. Anomalous aggregation regimes of temperature-dependent Smoluchowski equations // *Physical Review E*. — 2022. — V. 105, no. 3. — P. 034119. (WoS, JIF impact factor: 2.2) [0.6/0.5 п. л.]
Автором получены численные решения температурно-зависимых уравнений Смолуховского с помощью малоранговых методов, а также выведены асимптотики полученных решений. Совместно с Н.В. Бриллиантовым выполнена постановка задачи.
8. Лебедева О.С., Осинский А.И., Петров С.В. Приближенные алгоритмы малоранговой аппроксимации в задаче восполнения матрицы на случайном шаблоне // *Журнал вычислительной математики и математической физики*. — 2021. — Т. 61, № 5. — С. 827–844. (RSCI, двухлетний импакт-фактор РИНЦ: 1.118) [1.3/1.0 п. л.] Перевод:
Lebedeva O.S., Osinsky A.I., Petrov S.V. Low-Rank Approximation Algorithms for Matrix Completion with Random Sampling // *Computational Mathematics and Mathematical Physics*. — 2021. — V. 61, no. 5. — P. 799–815. (WoS, JIF impact factor: 0.7) [1.3/1.0 п. л.]
Автором совместно с С.В. Петровым были получены доказательства сходимости приближенного сингулярного разложения для восстановления матриц. Автором предложен вариант крестовой аппроксимации для использования при восстановлении матриц, написан сам алгоритм и проведены численные эксперименты. С.В. Петровым реализован метод случайного проектирования. Автором совместно с О.С. Лебедевой и С.В. Петровым выполнена постановка задачи.
9. Замарашкин Н.Л., Осинский А.И. О точности крестовых и столбцовых малоранговых maxvol-приближений в среднем // *Журнал вычислительной математики и математической физики*. — 2021. — Т. 61, № 5. — С. 813–826. (RSCI, двухлетний импакт-фактор РИНЦ: 1.118) [1.0/0.9 п. л.] Перевод:
Zamarashkin N.L., Osinsky A.I. On the Accuracy of Cross and Column Low-Rank Maxvol Approximations in Average // *Computational Mathematics and Mathematical Physics*. — 2021. — V. 61, no. 5. — P. 786–798. (WoS, JIF impact factor: 0.7) [1.0/0.9 п. л.]

- Автором выведены оценки точности крестовых и столбцовых аппроксимаций в среднем, проведены численные эксперименты, обнаружена и численно подтверждена связь между точностью аппроксимации и свойствами подматриц ортогональных матриц. Совместно с Н.Л. Замарашкиным выполнена постановка задачи.
10. Osinsky A.I. Low-rank method for fast solution of generalized Smoluchowski equations // *Journal of Computational Physics*. — 2020. — Vol. 422. — P. 109764. (WoS, JIF impact factor: 3.8) [1.1 п. л.]
Автором самостоятельно построен малоранговый метод решения обобщенных уравнений типа Смолуховского, написан код, проведено сравнение с другими методами, предложен и применен адаптивный шаг по времени.
 11. Zheltkov D.A., Osinsky A.I. Global Optimization Algorithms Using Tensor Trains. In: Lirkov, I., Margenov, S. (eds) *Large-Scale Scientific Computing. LSSC 2019. Lecture Notes in Computer Science*. — 2020. — V. 11958. Springer, Cham. (WoS, JIF impact factor: 0.4) [0.4/0.35 п. л.]
Автором доказана сходимость алгоритма \maxvol для частного случая аппроксимации ранга 1, оценена скорость сходимости, точность полученной аппроксимации, близость найденного элемента к максимальному, доказана возможность применения алгоритма при аппроксимации тензоров. Совместно с Д.А. Желтковым выполнена постановка задачи.
 12. Осинский А.И., Оценки аппроксимации тензорных поездов по норме Чебышёва // *Журнал вычислительной математики и математической физики*. — 2019. — Т. 59, № 2. — С. 211–216. (RSCI, двухлетний импакт-фактор РИНЦ: 1.118) [0.4 п. л.] Перевод:
Osinsky A.I. Tensor Trains Approximation Estimates in the Chebyshev Norm // *Computational Mathematics and Mathematical Physics*. — 2019. — V. 59, no. 2. — P. 201–206. (WoS, JIF impact factor: 0.7) [0.4 п. л.]
Автором самостоятельно получены оценки аппроксимации по норме Чебышева для тензорных поездов, основанные на использовании крестовой аппроксимации.
 13. Замарашкин Н.Л., Осинский А.И. О существовании близкой к оптимальной скелетной аппроксимации матрицы во фробениусовой норме // *Доклады Академии наук*. — 2018. — Т. 479, № 5. — С. 489–492. (RSCI, двухлетний импакт-фактор РИНЦ: 0.859) [0.3/0.25 п. л.] Перевод:
Zamarashkin N.L., Osinsky A.I. On the Existence of a Nearly Optimal Skeleton Approximation of a Matrix in the Frobenius Norm // *Doklady Mathematics*. — 2018. — V. 97, no. 2. — P. 164–166. (WoS, JIF impact factor: 0.5) [0.3/0.25 п. л.]
Автором доказано существование крестовых аппроксимаций высокой точности по норме Фробениуса. Совместно с Н.Л. Замарашкиным выполнена постановка задачи.

14. Osinsky A.I., Zamarashkin N.L. Pseudo-skeleton approximations with better accuracy estimates // *Linear Algebra and its Applications*. – 2018. – V. 537, no. 4. – P. 221-249. (WoS, JIF impact factor: 1) [2.1/1.9 п. л.]
Автором получены доказательства для точности столбцовой и крестовой аппроксимаций по спектральной норме, доказаны оценки точности крестовой аппроксимации по норме Чебышева, проведены численные эксперименты, предложены и реализованы алгоритмы поиска подматриц локально максимального проективного объема. Совместно с Н.Л. Замарашкиным выполнена постановка задачи.
15. Замарашкин Н.Л., Осинский А.И. Новые оценки точности псевдоскелетных аппроксимаций матриц // *Доклады академии наук*. — 2016. — Т. 471, № 3. — С. 263-266. (RSCI, двухлетний импакт-фактор РИНЦ: 0.859) [0.3/0.25 п. л.] Перевод:
Zamarashkin N.L., Osinsky A.I. New accuracy estimates for pseudoskeleton approximations of matrices // *Doklady Mathematics*. — 2016. — V. 94, no. 3. — P. 643-645. (WoS, JIF impact factor: 0.5) [0.3/0.25 п. л.]
Автором получены оценки точности крестовой аппроксимации по норме Чебышева, предложен вид крестовой аппроксимации и требования к выбору подматрицы, позволяющие гарантировать полученные оценки. Совместно с Н.Л. Замарашкиным выполнена постановка задачи.