Московский государственный университет имени М.В.Ломоносова
Механико-математический факультет

На правах рукописи

Резниченко Евгений Александрович

Группы с топологией и однородные пространства

Специальность 1.1.3 —
«Геометрия и топология»

Диссертация на соискание учёной степени
доктора физико-математических наук

Москва — 2023

Оглавление

Введение

Актуальность темы и степень её разработанности. В топологической алгебре изучаются алгебраические объекты с топологией, в той или иной степени согласованной с алгебраической структурой. Наиболее важные алгебраические объекты — это группы.

Операция Мальцева на множестве X — это отображение $f : X^3 \to X$ (трехместная операция), для которого выполнено тождество

$$f(x, y, y) = f(y, y, x) = x.$$

Пространства с операция Мальцева называются мальцевскими пространствами. Операция Мальцева играет фундаментальную роль в общей теории алгебраических систем, разработанной академиком А.И. Мальцевым [71; 145]. На группе есть естественная операция Мальцева: $f(x, y, z) = xy^{-1}z$. Ретракты мальцевских пространств (в частности, ретракты групп) также являются мальцевскими пространствами: операция $g(x, y, z) = r(f(x, y, z))$ является операцией Мальцева на $r(X)$, где r есть ретракция. Компактное пространство является мальцевским, если и только если оно является ретрактом топологической группы [72].

Возможны различные способы согласованности алгебраической и топологической структуры. Наиболее важный и исследуемый случай — это когда алгебраические операции непрерывны. Топологические группы (группы с непрерывными операциями умножения и взятия обратного элемента) — важнейший и наиболее изученный объект в топологической алгебре.

Важное направление исследований — это изучение алгебраических систем, в которых для операций выполняются слабые формы непрерывности, например, раздельная непрерывность. Для таких систем проводят как традиционные для топологоческой алгебры исследования — изучение топологических и алгебро-топологических свойств, так и специфические для таких систем — исследования условий, при которых из непрерывности операций в слабом смысле вытекает их непрерывность в более сильном смысле.

Для групп данное направление началось с работы Д.Монтгомери [148] (1936 г.), который доказал, что полная метризуемая сепарабельная группа с раздельно непрерывным умножением (т.е. полутопологическая группа) является топологической группой. Р. Эллис в работе [141] (1957 г.) доказал, что локально компактная группа с непрерывным умножением (т.е. паратопологическая группа) является топологической группой. Позднее [142] он обобщил этот результат на полутопологические группы и доказал свою основополагающею теорему: локально компактная полутопологическая группа является топологической группой. Центральные задачи в этой области, выяснить, при каких условиях (1) паратопологическая группа является топологической группой и (2) полутопологическая группа является топологической группой. Работы Д. Монтгомери и Р. Эллиса положили начало новому направлению в топологической алгебре, развитием которого занимались и продолжают заниматься многие математики, отметим наиболее значительные работы [22; 31; 33; 34; 47; 49; 50; 57; 58; 62; 66; 84; 93; 131], также в этом ряду отметим работы автора [9; 16], смотри также обзор [29]. В этом направлении интенсивно изучается и непрерывность операций в классах групп с топологией более широких чем классы классы пара- и полутопологических групп [23; 30; 35; 44; 56; 104; 114].

Систематическое изучение групп с топологией, не являющихся топологическими группами, берет начало в топологической динамике. В работе [147] Р. Аренс доказал, что группа автогомеоморфизмов локально компактного пространства в компактно открытой топологии является паратопологической группой; там же он получил условия, при которых группа автогомеоморфизмов является топологической группой. Основополагающая теорема Р. Эллиса была доказана в рамках работы по топологической динамики. Обертывающие полугруппы (enveloping semigroup) динамических систем были введены Р. Эллисом в 1960 г. в работе [135]. Они стали основным инструментом абстрактной теории топологических динамических систем. И. Намиока в работе по топологической динамике [124] ввел CHART (compact Hausdorff admissible right topological) группы. Это компактные правотопологические (правые сдвиги $x \mapsto xg$ непрерывны) допустимые (топологический центр $\Lambda(G) = \{g \in G :$ левый сдвиг $x \mapsto gx$ непрерывен$\}$ плотен в G) группы. В этой статье он показал что метризуемые CHART группы являются топологическими группами. Ряд авторов получили усиления этого результата И.Намиоки [23; 30; 32; 104; 114]. Изучение динамических систем, для которых обертывающая полугруппа является CHART группой, играет большую роль в абстрактной теории топологических динамических систем.

В основополагающей работе [149] (1899 г.) Р. Бэр показал, что вещественные раздельно непрерывные функции двух аргументов имеют много точек совместной непрерывности. Такие функции квазинепрерывны, то есть внутренность $f^{-1}(U)$ плотна в $f^{-1}(U)$ для открытого U (С. Кемписти). Исследования точек непрерывности и квазинепрерывности стали важным направлением в топологии и анализе. Используя результаты этих исследований, Д. Монтгомери доказал в работе [148] (1936 г.), что в полной метризуемой полутопологической группе умножение непрерывно (т.е. такая группа является паратопологической).

В последние тридцать лет одним из самых эффективных методов исследований непрерывности операций в группах и квазинеперервности отображений стали топологические игры. В основном используются модификации игры Банаха–Мазура (также часто называемой игрой Шоке) — первой и самой важной топологической игры в истории.

В игру Банаха–Мазура играют два игрока α и β на топологическом пространстве X. На первом ходу игрок α выбирает $U_0 = X$, игрок β выбирает открытое непустое $V_0 \subset U_0$. На n-м ходу игрок α выбирает непустое открытое $U_n \subset V_{n-1}$, игрок β выбирает непустое открытое $V_n \subset U_n$. Игра заканчивается после счетного числа ходов. Игрок α выиграл, если пересечение $\bigcap_n U_n$ непусто.

Фундаментальное значение игры Банаха–Мазура определяется теоремой Банаха–Окстоби [143]: пространство X является бэровским (т.е. обладает свойством Бэра), если и только если у игрока β нет выигрышной стратегии в игре Банаха–Мазура.

Подавляющее большинство изучаемых групп с топологией однородны — правые сдвиги $x \mapsto xg$ (или левые сдвиги $x \mapsto gx$) непрерывны. Такие группы называются право- (лево-) топологическими. Теория однородных пространств — один из больших и хорошо развитых разделов топологии [27]. Одно из направлений исследований однородных пространств и групп с топологией — состоит в выявлении сходства и различий их топологических свойств. Другое направление исследований — выяснение, какие пространства реализуются как ретракты и факторы[1] однородных пространств и групп с топологией из некоторого топологического класса пространств. Компактные ретракты (σ-компактных) топологических групп это в точности компакты с операцией Мальцева [72]. Не всякий компакт является ретрактом компактного однородного пространства. Любое пространство является фактором некоторого однородного пространства [91].

Важное значение в топологической алгебре имеют пространства со счетным числом Суслина. У компактной топологической группы число Суслина всегда счетно, это вытекает как из существования меры Хаара, так и из диадичности такой группы [139; 140]. Позднее счетное число Суслина (и более сильное свойство ω-клеточности) было найдено у σ-компактных (и даже у более широкого класса линделефовых Σ) топологических групп (М.Г. Ткаченко [92]) и мальцевских пространства (В.В. Успенский [85]).

Объект и предмет исследования. В диссертации изучаются алгебраические структуры с топологией: группы и пространства с операцией Мальцева, универсальные алгебры, однородные пространства и их ретракты. Также изучаются продолжение и факторизация отображений, топологические игры.

[1]пространство X называется фактором P, если P гомеоморфно $X \times Y$ для некоторого Y

Методы исследования. В работе используются как традиционные методы общей топологии, топологической алгебры, теории пространств функций, функционального анализа и теории топологических игр, так и разработанные автором метод продолжения и факторизации раздельно непрерывных отображений и метод использования полуокрестностей диагонали.

Теоретическая и практическая ценность. Диссертация носит теоретический характер. Ее результаты могут быть использованы в общей топологии, топологической алгебре, универсальной алгебре, в топологической динамике, теории функциональных пространств, функциональном анализе.

Степень достоверности и апробация результатов. Все результаты диссертации математически строго доказаны. Они многократно докладывались на семинаре кафедры кафедры общей топологии и геометрии "Научно-исследовательский семинар имени П.С. Александрова", конференциях Ломоносовские чтения, международном Пражском симпозиуме по общей топологии и ее связи с современным анализом и алгеброй (Prague Symposia on General Topology, and its Relations to Modern Analysis and Algebra) в 1996, 2006, 2011, 2016, 2022 годах, международной конференция по топологии и ее приложениям в г. Нафпактос, Греция (International Conference on Topology and its Applications, Nafpaktos, Greece) в 2006, 2010, 2014 годах, международной 30-й летней конференции по топологии и ее приложениям в г. Голуэй, Ирландия (30th Summer Conference on Topology and its Applications, Galway, Ireland) в 2015 году, международная конференции "Теоретико-множественная топология и топологическая алгебра", посвященной 80-летию профессора Александра Владимировича Архангельского в Москве в 2018 году, международной 36-й летней топологической конференции в Вене, Австрия (36th Summer Topology Conference, Vienna, Austria) в 2022 году.

Цели и задачи диссертации. Главными целями диссертации являются:

(1) получение достаточных условий, при которых в группах с топологией происходит усиление непрерывности операций, в частности, при которых CHART, паратопологические и полутопологические группы являются топологическими группами;

(2) характеризация отображений произведений пространств, которые допускают раздельно непрерывное продолжение на произведение стоун–чеховских расширений этих пространств;

(3) выяснение условий при которых универсальная алгебра[2] с раздельно непрерывными операциями вкладывается в произведение метризуемых универсальных алгебр;

(4) исследование пространств с операцией Мальцева и ретрактов топологических групп;

(5) исследование классов бэровских пространств, таких что для пространств из этих классов слабая непрерывность групповых операций автоматически влечет сильную их непрерывность;

(6) для разных классов $\mathcal{P}$ топологических пространств, выяснить какие пространства реализуются как ретракты и факторы однородных пространств и групп с топологией из класса $\mathcal{P}$;

(7) исследование топологических свойства групп с топологией, мальцевских пространств, однородных пространств, их ретрактов, близкие к компактности, метризуемости и экстремальной несвязности.

Научная новизна. Все основные результаты диссертации являются новыми и получены автором самостоятельно.

Некоторые работы автора написаны в соавторстве и содержат важные и принципиальные результаты, полученные в результате тесной совместной работы. Эти совместные результаты, включенные в диссертацию, либо выводятся из более общих утверждений, доказанных в диссертации, либо доказываются с помощью новых методов, развитых автором, они содержатся в разделах 5.4 и 5.5: примеры 5.35 [14] и 5.37 [8], теоремы 5.41, 5.43 и 5.50 [13]. Основные результаты состоят в следующем:

(1) получены достаточные условия, при которых в группах с топологией происходит усиление непрерывности операций, в частности, когда CHART, паратопологические и полутопологические группы являются топологическими группами;

(2) охарактеризованы отображения произведений псевдокомпактных пространств, которые допускают раздельно непрерывное продолжение на произведение стоун–чеховских расширений этих пространств;

(3) найдены условия, при которых универсальная алгебра с раздельно непрерывными операциями вкладывается в произведение метризуемых универсальных алгебр;

[2]рассматриваются универсальные алгебры только с конечным числом операций

(4) псевдокомпактные пространства с операцией Мальцева охарактеризованы как ретракты топологической группы; исследованы псевдокомпактные пространства с раздельно непрерывной операцией Мальцева; построены мальцевские пространства не являющиеся ретрактами топологических групп;

(5) найдены широкие классы бэровских пространств, определяемые с помощью топологических игр и расположения диагонали в квадрате, таких что для пространств из этих классов слабая непрерывность групповых операций автоматически влечет сильную их непрерывность;

(6) для нескольких классов пространств $\mathcal{P}$, доказаны утверждения вида: для $X \in \mathcal{P}$ существует пространство Y, так что произведение $X \times Y$ однородно и принадлежит $\mathcal{P}$; исследованы однородные подпространства произведений экстремально несвязных пространств;

(7) для групп с топологией, мальцевских пространств, их ретрактов найдены условия, влекущие счетность числа Суслина, диагональ типа G_δ, метризуемость.

Положения, выносимые на защиту.

(1) достаточные условия, при которых в группах с топологией из непрерывности групповых операций в слабом смысле вытекает их непрерывность в более сильном смысле, в частности, условия, при которых CHART, паратопологические и полутопологические группы являются топологическими группами;

(2) характеризация отображений произведений пространств, которые допускают раздельно непрерывное продолжение на произведение стоун–чеховских расширений этих пространств;

(3) условия, при которых универсальная алгебра с раздельно непрерывными операциями вкладывается в произведение метризуемых универсальных алгебр с раздельно непрерывными операциями;

(4) характеризация псевдокомпактных пространств с операцией Мальцева как ретрактов топологических групп; характеризация раздельно непрерывных операций Мальцева на псевдокомпактных пространствах, которые продолжаются до раздельно непрерывных операций Мальцева на стоун–чеховские расширения; построение мальцевского пространства не ретракта группы;

(5) классы бэровских пространств, определяемые с помощью топологических игр и расположения диагонали в квадрате, таких что для пространств из этих классов слабая непрерывность групповых операций автоматически влечет сильную их непрерывность;

(6) для нескольких классов пространств найдены однородные произведения из этих классов, которые содержат в качестве сомножителя любое данное пространство из этого класса; исследованы однородные подпространства произведений экстремально несвязных пространств;

(7) найдены условия на группы с топологией, мальцевские пространства, их ретракты, влекущие счетность число Суслина, диагональ типа G_δ, метризуемость.

Содержание работы. Работа состоит из введения и пяти глав.

Во **введении** приводится обзор результатов, полученных ранее другими авторами по теме исследования диссертации, а также смежным направлениям исследований, и кратко излагаются результаты диссертации.

В **первой главе** обозначения, терминология и предварительные сведения. Так же дается определение топологических игр, базовые свойства и доказываются некоторые утверждения, которые используются далее.

Вторая глава посвящена исследованию раздельно непрерывных отображений, их факторизаций, когда они допускают раздельно непрерывное продолжение на произведение стоун–чеховских расширений пространств. Даются достаточные условия для универсальной алгебры, когда она может быть вложена в произведение метризуемых универсальных алгебр.

Сначала исследуется продолжения раздельно непрерывных функций на произведении двух пространств. Для пространства X через $C_p(X)$ обозначается непрерывные функции на X в топологии поточечной сходимости.

Теорема 1 (см. теорему 2.7)**.** *Пусть X и Y есть псевдокомпактные пространства, $\Phi : X \times Y \to \mathbb{R}$ раздельно непрерывная функция,*

$$\varphi : X \to C_p(Y),\ \varphi(x)(y) = \Phi(x, y).$$

Следующие условия эквивалентны:

(1) существует плотное типа G_δ подмножество $D \subset Y = \overline{D}$ так что Φ непрерывна в каждой точке $(x, y) \in X \times D$;

(2) функция Φ квазинепрерывна;

(3) Φ продолжается до раздельно непрерывной функции на $\beta X \times \beta Y$;

(4) $\varphi(X)$ имеет компактное замыкание в $C_p(Y)$;

(5) $\varphi(X)$ компактно.

Пара пространств X и Y образуют *пару Гротендика*, если замыкание любого непрерывного образа X в $C_p(Y)$ компактно, то есть выполняется пункт (4) теоремы 1 для всех раздельно непрерывных функций Φ. Для пары пространств X и Y выполняется условие Нимиоки [117], если выполняется пункт (1) теоремы 1 для всех раздельно непрерывных функций Φ. Теорема 1 показывает, что эти два свойства эквивалентны для пар псевдокомпактных пространств, что позволяет объединить исследование этих двух свойств, которые в общем случае изучаются отдельно. Важно следующее следствие теоремы 1.

Следствие 2 (см. теорему 2.17)**.** *Для псевдокомпактных пространств X и Y, любая непрерывная функция на $X \times Y$ продолжается до раздельно непрерывной функции на $\beta X \times \beta Y$.*

Теорема Гликсберга [137] гласит что любая непрерывная функция на $X \times Y$ продолжается до непрерывной функции на $\beta X \times \beta Y$ если и только если $X \times Y$ псевдокомпактно. Теорему Гротендика [146] о предкомпактных подмножествах функциональных пространств можно сформулировать так: пара счетно компактных пространств образуют пару Гротендика. Из теоремы Гротендика и теоремы 1 вытекает что для счетно компактных X и Y любая раздельно непрерывная функция на $X \times Y$ продолжается до раздельно непрерывной функции на $\beta X \times \beta Y$. Таким образом, следствие 2 занимает промежуточное место между теоремами Гликсберга и Гротендика.

Следствие 2 позволило в теореме Д.Грант [70] — паратопологическая псевдокомпактная в квадрате группа является топологической группой, избавится от условия о псевдокомпактности квадрата, достаточно псевдокомпактности самой группы. Многомерный аналог следствия 2, следствие 5, позволил в теореме О.Сипачевой [72] — мальцевское пространство, куб которого псевдокомпактен, является ретрактом группы, заменить условие псевдокомпактности куба на псевдокомпактность самого пространства (Теорема 5.50).

Пространство X называется пространством *pc-Гротендика* [55], если любое псевдокомпактное подпространство $C_p(X)$ компактно. Для псевдокомпактного X, X пространство pc-Гротендика если для любого псевдокомпактного Y пара (X,Y) является парой Гротендика (Предложения 2.2.7 и 2.2.8). Ясно, (X,X) пара Гротендика, если X является псевдокомпактным пространством pc-Гротендика. Псевдокомпактные пространства из ниже перечисленных классов пространств являются пространствами pc-Гротендика (Предложение 2.2.9):

> счетно компактные пространства; пространства счетной тесноты; сепарабельные пространства; k-пространства; пространства с плотным σ-компактным подпространством.

Затем эти результаты используются для исследования раздельно непрерывных отображений на произведении нескольких пространств. Для функции $\Phi : \prod_{i=1}^n X_i \to \mathbb{R}$, $\bar{x} = (x_1, ..., x_n) \in \prod_{i=1}^n X_i$ и $1 \le i < j \le n$ обозначим

$$(\Phi)^{\bar{x}}_{;i,j} : X_i \times X_j \to \mathbb{R},\ (x, y) \mapsto \Phi(x_1, ..., x_{i-1}, x, x_{i+1}, ..., x_{j-1}, y, x_{j+1}, ..., x_n).$$

Функция Φ называется *2-β-продолжаемой* если любые функции вида $(\Phi)^{\bar{x}}_{;i,j}$ раздельно непрерывно продолжаются на $\beta\, X_i \times \beta\, X_j$, Функция Φ называется 2-*квазинепрерывной* если любые функции вида $(\Phi)^{\bar{x}}_{;i,j}$ квазинепрерывны.

Теорема 3 (Теорема 2.15)**.** *Пусть X_1, X_2, ...,X_n псевдокомпактные пространства, $\Phi : \prod_{i=1}^n X_i \to \mathbb{R}$ — раздельно непрерывная функция. Тогда следующие условия эквивалентны:*

(1) функция Φ продолжается до раздельно непрерывной функции на $\prod_{i=1}^n \beta\, X_i$;

(2) функция Φ 2-β-продолжаемая;

(3) функция Φ 2-квазинепрерывная.

Теорема 4 (Следствие 2.10)**.** *Пусть X_1, X_2, ... , X_n — псевдокомпактные пространства и X_i — пространство pc-Гротендика для $i < n$. Тогда любая раздельно непрерывная функция Φ на произведение $\prod_{i=1}^n X_i$ продолжается до раздельно непрерывной функции на произведение $\prod_{i=1}^n \beta\, X_i$ стоун–чеховских расширений.*

Отметим следующее важные следствия теорем 3 и 4.

Следствие 5 (Теорема 2.17)**.** *Любая непрерывная функция Φ на произведении $\prod_{i=1}^n X_i$ псевдокомпактных пространств продолжается до раздельно непрерывной функции на произведении $\prod_{i=1}^n \beta\, X_i$ стоун–чеховских расширений.*

Теорема Гликсберга [137] характеризует те X_i, для которых Φ продолжается до непрерывной функции — произведение $\prod_{i=1}^n X_i$ псевдокомпактно.

Следствие 6. *Любая раздельно непрерывная функция Φ на произведении $\prod_{i=1}^n X_i$ счетно компактных пространств продолжается до раздельно непрерывной функции на произведении $\prod_{i=1}^n \beta\, X_i$ стоун–чеховских расширений.*

Отметим, что следствие 6 нельзя усилить до условия, что X_i псевдокомпактны.

Отображение $f : X^n \to X$ называется *операцией*. Множество X с набором операций $f_1, f_2, ..., f_m$ называется *универсальной алгеброй*[3] $\mathbf{X} = (X, f_1, ..., f_m)$. К универсальным алгебрам относятся группы и мальцевские пространства.

[3] рассматриваются универсальные алгебры только с конечным числом операций

Теорема 7 (Следствие 2.32)**.** *Пусть* $\mathbf{X} = (X, f_1, f_2, ..., f_m)$ *есть псевдокомпактная универсальная алгебра с раздельно непрерывными операциями. Предположим выполняется одно из перечисленных ниже условий:*

(1) операции $\mathbf{X}$ *2-квазинепрерывны;*

(2) операции $\mathbf{X}$ *непрерывны;*

(3) (X, X) *есть пара Гротендика;*

(4) X *есть пространство pc-Гротендика.*

Тогда операции $\mathbf{X}$ *продолжаются до раздельно непрерывных операций на* $\beta\, X$ *и* $\mathbf{X}$ *гомоморфно вкладывается в компактную универсальную алгебру* $\mathbf{Y} = (\beta\, X, \hat{f}_1, \hat{f}_2, ..., \hat{f}_m)$ *с раздельно непрерывными операциями.*

Получены теоремы о факторизации раздельно непрерывных функций.

Теорема 8 (Теорема 2.35)**.** *Пусть* X_1*,* X_2*, ...,* X_n *есть компактные пространства, у пространства* X_i *калибр* ω_1 *для* $i = 1, ..., n-1$*,* $X = \prod_{i=1}^n X_i$ *и* Y *есть сепарабельное метризуемое пространство,* $\Phi : X \to Y$ *раздельно непрерывное отображение. Тогда отображение* Φ *sc-факторизуется через метризуемые компакты, то есть существуют метризуемые компакты* $\widetilde{X}_1$*,* $\widetilde{X}_2$*, ...,* $\widetilde{X}_n$*, непрерывные отображения* $\delta_i : X_i \to \widetilde{X}_i$ *для* $i = 1, ..., n$ *и раздельно непрерывное отображение* $\widetilde{F} : \prod_{i=1}^n \widetilde{X}_i \to Y$ *так что*

$$\Phi = \widetilde{\Phi} \circ \prod_{i=1}^{n} \delta_i.$$

Если функция Φ непрерывна, то условие о калибре ω_1 пространств X_i можно убрать. Но для раздельно непрерывных функций это условие необходимо.

Теорема 9 (см. теорему 2.39)**.** *Пусть* $\mathbf{X} = (X, f_1, f_2, ..., f_m)$ *есть универсальная компактная алгебра с раздельно непрерывными операциями. Предположим, что* X *с калибром* ω_1*. Тогда алгебра* $\mathbf{X}$ *гомоморфно вкладывается в произведение универсальных метризуемых алгебр с раздельно непрерывными операциями.*

Из теорем 7 и 9 можно получить следствие, какие псевдокомпактные универсальные алгебры вкладываются в произведение метризуемых универсальных алгебр с раздельно непрерывными операциями (Теорема 2.40).

В **3-ей главе** изучаются классы бэровских пространств, которые определяются с помощью топологических игр и полуокрестностей диагонали.

Подмножество $P \subset X \times X$ назовем *полуокрестностью диагонали*, если $P(x) = \{y \in X : (x, y) \in P\}$ есть окрестность точки x для всех $x \in X$.

Для $\widetilde{\Delta} \in \{\Delta, \Delta_h, \Delta_s\}$, пространство X называется $\widetilde{\Delta}$-тучным, если для любой полуокрестности диагонали P существует открытое непустое $W \subset X$, так что выполняется условие $(\widetilde{\Delta})$:

(Δ) $W \times W \subset \overline{P \cap (W \times W)}$;

(Δ_h) $W \subset \overline{\{x : (x, y) \in P\}}$ для всех $y \in W$;

(Δ_s) $W \subset \overline{\{x : \{x\} \times W \subset P\}}$.

Пространство X называется $\widetilde{\Delta}$-бэровским, если каждое его непустое открытое подпространство является $\widetilde{\Delta}$-тучным. В следующей главе эти классы пространств используются для исследования непрерывности операций в группах. В этой главе главная цель — выяснить какие пространства принадлежат перечисленным классам. Для этого интенсивно используются топологические игры. Эти игры являются модификациями игры $BM(X)$ Банаха–Мазура.

Игра $\widetilde{BM}(X)$ является модификацией игры $BM(X)$, если на nм ходу игрок β выбирает открытое $V_n \subset U_n$ и еще что то, игрок α выбирает открытое $U_n \subset V_n$. После счетного числа ходов, игрок α выиграл, если $\bigcap_n U_n \neq \varnothing$ и еще дополнительно некоторое условие $\mathfrak{C}_{\widetilde{BM}}$, зависящее от игры. Определяются еще две модификации игры $\widetilde{BM}(X)$: (1) игра $\widetilde{MB}(X)$, которая отличается от игры $\widetilde{BM}(X)$ первым ходом — игрок α выбирает непустое открытое $U_0 \subset X$; (2) и игра $\widetilde{BM}^*(X)$, которая отличается от игры $\widetilde{MB}(X)$ условием выигрыша — игрок α выиграл если либо $\bigcap_n U_n = \varnothing$ либо выполняется условие $\mathfrak{C}_{\widetilde{BM}}$. Эти три игры определяют три класса пространств: $\widetilde{\Gamma}$-бэровские, $\widetilde{\Gamma}$-тучные и $\widetilde{\Gamma}$-пространства.

Пространство X называется $\widetilde{\Gamma}$-*бэровским*, если у игрока β нет выигрышной стратегии в игре $\widetilde{BM}(X)$.

Пространство X называется $\widetilde{\Gamma}$-*тучным*, если у игрока β нет выигрышной стратегии в игре $\widetilde{MB}(X)$.

Пространство X называется $\widetilde{\Gamma}$-*пространством*, если у игрока α есть выигрышной стратегия в игре $\widetilde{BM}^*(X)$.

При этом, тучное $\widetilde{\Gamma}$-пространство является $\widetilde{\Gamma}$-тучным и бэровское $\widetilde{\Gamma}$-пространство является $\widetilde{\Gamma}$-бэровским. В приложениях рассматриваемых игр используются $\widetilde{\Gamma}$-бэровские пространства, но автору не известны примеры $\widetilde{\Gamma}$-бэровских пространств не бэровских $\widetilde{\Gamma}$-пространств. Находить $\widetilde{\Gamma}$-пространства легче, чем $\widetilde{\Gamma}$-бэровские пространства.

Рассматривается восемь игр, каждая из которых определяет три класса пространств: Г-бэровские, Г-тучные и Г-пространства, где

$$\Gamma \in \{\Gamma_f^{BM}, \Gamma_r^{BM}, \Gamma_p^{BM}, \Gamma_o^{BM}, \Gamma_{o,k}^{OD}, \Gamma_{o,l}^{OD}, \Gamma_{p,k}^{OD}, \Gamma_{p,l}^{OD}\}.$$

Наиболее важны игры $BM_f(X)$, $OD_{p,l}(X)$ и $OD_{o,l}(X)$, которые определяют Γ_f^{BM}-бэровские, $\Gamma_{p,l}^{OD}$-бэровские и $\Gamma_{o,l}^{OD}$-бэровские пространства.

Пусть $\mathcal{P}_k$ ($\mathcal{P}_c$) есть наименьший класс пространств, который

- содержит локально компактное пространства, полные по Чеху пространства, p-пространства и сильно Σ-пространства;
- замкнут относительно произвольных (счетных) произведений;
- переходу к открытым подпространствам.

Для $\Gamma \in \{\Gamma_f^{BM}, \Gamma_{p,l}^{OD}, \Gamma_{o,l}^{OD}\}$, если регулярное бэровское пространство X принадлежит классу пространств, описанных в пункте (Γ), то X является Γ-бэровским.

(Γ_f^{BM}) метризуемые пространства, σ-пространства.

($\Gamma_{p,l}^{OD}$) наименьший класс пространств, который

- содержит счетно компактные пространства, Σ-пространства и $w\Delta$-пространства;
- замкнут относительно произведений на пространства из класса $\mathcal{P}_c$;
- переходу к открытым подпространствам.

($\Gamma_{o,l}^{OD}$) наименьший класс пространств, который

- содержит псевдокомпактные пространства, Σ-пространства и $w\Delta$-пространства;
- замкнут относительно произведений на пространства из класса $\mathcal{P}_k$;
- переходу к открытым подпространствам.

Важнейшие для исследования непрерывности в группах свойства пространств, определяемые с помощью полуокрестностей диагонали, это Δ-бэровские, Δ_h-бэровские и Δ_s-бэровские пространства. Исследование этих классов производится в основном с помощью топологических игр:

- Γ_f^{BM}-бэровское пространство является Δ_s-бэровским пространством;
- $\Gamma_{p,l}^{OD}$-бэровское пространство является Δ_h-бэровским пространством;
- $\Gamma_{o,l}^{OD}$-бэровское пространство является Δ-бэровским пространством.

В **четвертой главе** выясняют условий, когда в группах с топологиях и пространствах с операцией Мальцева происходит усиление непрерывности операций, в частности, когда паратопологические и полутопологические группы являются топологическими группами. Исследования непрерывности операций проводятся перечисленными ниже тремя методами. Наиболее универсальный это второй метод. Однако у каждого метода есть приложения, которые нельзя получить другими методами.

1-ый метод. Продолжение операций с X на βX. (Раздел 4.2) Данный метод основан на том что группы и мальцевские пространства являются универсальными алгебрами и применением теоремы 7 и других результатов из второй главы.

В рамках этого подхода доказано, что если G есть псевдокомпактная полутопологическая группа и для G выполняется одно из условий, перечисленных ниже, то G топологическая группа: (1) умножение в G квазинепрерывно; (2) умножение в G непрерывно (т.е. G является паратопологической группой); (3) (G, G) есть пара Гротендика (см. теоремы 4.2 и 4.3).

Пусть X есть псевдокомпактное пространство с раздельно непрерывной операцией Мальцева $\Phi : X^3 \to X$. Если для X и Φ выполняется одно из условий, перечисленных ниже, то Φ продолжается до раздельно непрерывной операции Мальцева $\widetilde{\Phi} : (\beta X)^3 \to \beta X$: (1) Φ непрерывна; (2) Φ 2-квазинепрерывна; (3) (X, X) есть пара Гротендика (см. теоремы 4.5 и 4.6).

Также в разделе 4.2 получена теорема о усиления непрерывности действия группы.

Теорема 10 (Теорема 4.1). *Пусть G есть псевдокомпактная группа с топологией, X — пространство, $\alpha : G \times X \to X$ есть раздельно непрерывное транзитивное действие G на X, $gx = \alpha(g, x)$ для $g \in G$ и $x \in X$. Следующие условия эквивалентны:*

(1) действие α непрерывно;

(2) действие α квазинепрерывно;

(3) действие α продолжается до раздельно непрерывного отображения $\hat{\alpha} : \beta G \times \beta X \to \beta X$;

(4) действие α продолжается до непрерывного отображения $\hat{\alpha} : \beta G \times \beta X \to \beta X$.

2-ой метод. Подклассы бэровских пространств, определяемые с помощью полуокрестностей диагонали. (Раздел 4.7) Отображение $f : X \to Y$ называется *слабо непрерывным* (в точке $x \in X$), если внутренность $f^{-1}(U)$ непуста для открытого $U \subset Y$, $U \cap f(X) \neq \varnothing$ $(f(x) \in U)$. Квазинепрерывные отображения слабо непрерывны.

Для группы G с топологией обозначим левый сдвиг $\lambda_g : G \to G,\ x \mapsto gx$, топологический центр $\Lambda(G) = \{g \in G : \lambda_g$ непрерывно$\}$ и $\Lambda_f(G) = \{g \in G : \lambda_g$ слабо непрерывно$\}$.

Пусть G есть правотопологическая группа. Если для G выполняется одно из условий, перечисленных ниже, то G топологическая группа:

(R_1) G является Δ-бэровским пространством, $\Lambda_f(G) \cap \Lambda_f(G)^{-1}$ плотно в G и умножение $(g, h) \mapsto gh$ слабо непрерывно в единице группы (теорема 4.29);

(R_2) G является Δ_h-бэровским пространством, $\Lambda(G) \cap \Lambda(G)^{-1}$ плотно в G и взятие обратного элемента $g \mapsto g^{-1}$ слабо непрерывно в единице группы (теорема 4.31);

(R_3) G является Δ_s-бэровским пространством, $\Lambda_f(G) \cap \Lambda_f(G)^{-1}$ плотно в G (теорема 4.32).

Отсюда получаем, что если G есть полутопологическая группа и для G выполняется одно из условий, перечисленных ниже, то G топологическая группа:

(S_1) G является Δ-бэровским пространством и умножение $(g, h) \mapsto gh$ слабо непрерывно [22];

(S_2) G является Δ_h-бэровским пространством и взятие обратного элемента $g \mapsto g^{-1}$ слабо непрерывно;

(S_3) G является Δ_s-бэровским пространством;

(S_4) G является Δ-бэровской паратопологической группой;

(S_5) G является Δ_h-бэровской квазитопологической группой.

Большинство утверждений вида «Если G есть полутопологическая группа и $G \in \mathcal{P}$, то G есть топологическая группа» можно доказать по схеме: (1) доказываем, что если $G \in \mathcal{P}$, то G является Δ-бэровским пространством; (2) доказываем, что если $G \in \mathcal{P}$ и отображение $f : G \times G \to S$ раздельно непрерывно, то f квазинепрерывно; (3) далее применяем (S_1).

Большинство утверждений вида «Если G есть паратопологическая группа и $G \in \mathcal{P}$, то G есть топологическая группа можно» доказать по схеме: (1) доказываем, что если $G \in \mathcal{P}$, то G является Δ-бэровским пространством; (2) далее применяем (S_4).

Из (R_1) и (R_3) вытекает теорема Намиоки [124, Theorem 2.1] и теорема Морса [23, Proposition 3.2]: если CHART группа G метризуема или умножение слабо непрерывно в единице, то G является топологической группой.

Также получено обобщение теоремы Намиоки для малых кардиналов (Следствие 4.33): если τ кардинал, выполняется $MA(\tau)$ (аксиома Мартина для кардинала τ), вес CHART группы G не превосходит τ, то G является топологической группой.

3-ий метод. Свойства типа компактности квадрата группы. (Раздел 4.3) Если G есть T_1 паратопологическая группа, то G является непрерывным гомоморфным образом некоторой топологической группы, которая замкнуто вкладывается в G^2 (Следствие 4.12). Используя этот факт, доказываются что если G есть T_1 паратопологическая группа и либо (1) G^2 счетно компактно либо (2) G бэровская и G^2 линделефово, то G топологическая группа (см. Теорема 4.13).

Отметим, что в последнем утверждении нельзя ограничатся требованием, что G линделефова. Примером служит прямая Зонгенфрея, стандартный пример паратопологической не топологической линделефовой бэровской группы. Прямая Зонгенфрея в квадрате не линделефова.

В **пятой главе** изучаются топологические свойства групп, ретрактов групп, мальцевских пространств, однородных пространств. Выясняется, какие пространства могут быть реализованы как сомножители в однородных произведениях, ретракты однородных пространств, групп.

Однородность произведения пространств. (Раздел 5.2)

Теорема 11 (Теорема 5.8)**.** *Пусть $\mathcal{P}$ есть один из ниже перечисленных классов пространств: (1) σ-компактные пространства; (2) линделефовы Σ-пространства; (3) $\mathcal{K}$-аналитические пространства; (4) пространства, линделефовые в конечных степенях; (5) пространства, паракомпактные в конечных степенях; (6) пространства, имеющие в конечных степенях счетную тесноту; (7) счетные пространства; (8) ω-ограниченные пространства; (9) секвенциально компактные пространства; (10) тотально счетно компактные пространства; (11) p-компактные пространства ($p \in \omega^*$); (12) секвенциально p-компактные пространства ($p \in \omega^*$); (13) пространства, счетно компактные в счетной степени; (14) пространства, псевдокомпактные в счетной степени; (15) метризуемые пространства; (16) кружевные пространства; (17) паракомпактные σ-пространства.*

Если $X \in \mathcal{P}$, то существует такое однородное пространство $Y \in \mathcal{P}$, так что $X \times Y$ гомеоморфно Y.

Следствие 12 (Следствие 5.9)**.** *Пусть X компактное пространство и $\mathcal{P}$ есть один из ниже перечисленных классов пространств:*

(1) σ-компактные пространства;

(2) счетно компактное пространства.

Существует пространство $Y \in \mathcal{P}$, так что $X \times Y$ однородно.

Моторов [80] построил метризуемый компакт X, так что $X \times Y$ не однородно для любого компакта Y. Этот пример показывает, что условия (1) и (2) в следствии 12 нельзя объединить.

Следствие 13 (Следствие 5.10)**.** *Пусть X сепарабельное метризуемое пространство и $\mathcal{P}$ есть один из ниже перечисленных классов пространств:*

(1) линделефовы Σ-пространства;

(2) метризуемые пространства.

Существует пространство $Y \in \mathcal{P}$, так что $X \times Y$ однородно.

Метризуемое сепарабельное сильно жесткое пространства Гроота X [138] обладает таким свойством: если Y сепарабельное метрической пространство, то $X \times Y$ не однородное пространство (пример 5.12). Этот пример показывает, что условия (1) и (2) в следствии 13 нельзя объединить.

Используя теорему 11 строятся следующие примеры.

Пример 14. (1) Существует однородное пространство счетной тесноты, которое не является p-секвенциальным для любого $p \in \beta\,\omega \setminus \omega$.

(2) Существуют два однородных счетно компактных пространства X и Y, так что произведение $X \times Y$ не псевдокомпактно.

Однородные подпространства произведений. (Раздел 5.2)

Пусть X однородное пространство.

(a) Предположим, что для X выполняется одно из перечисленных условий:

  (1) X вкладывается в Y^3 для некоторого F-пространства Y (теорема 5.20);

  (2) (CH) X вкладывается в Y^n для некоторого $\beta\omega$ пространства Y и $n \in \omega$ (теорема 5.18).

  Тогда все компактные подпространства X конечны.

(b) (CH) Если X вкладывается в Y^ω для некоторого $\beta\omega$ пространства Y, то все компактные подпространства X метризуемы (теорема 5.16).

(c) Если X компактно и X вкладывается в Y^n для некоторого нульмерного F-пространства Y и $n \in \omega$, то X конечно (теорема 5.22).

Топологические свойства групп с топологией (Разделы 5.3 и 5.6)

CHART группа метризуема, если у нее счетный π-характер (следствие 5.30) или (в предположении континуум гипотезы) группа секвенциальна компактна (следствие 5.32).

Теорема 15 (Теорема 5.54)**.** *Пусть X есть линделефово Σ-пространство. Если X принадлежит одному из перечисленных ниже классов пространств, то X ω-клеточно:*

(1) топологические группы (М.Г. Ткаченко [92]);

(2) мальцевские пространства (В.В. Успенский [85]);

(3) пространства с раздельно непрерывной операцией Мальцева (Е.А. Резниченко, В.В. Успенский [13]);

(4) паратопологические группы [36];

(5) квазитопологические группы;

(6) полутопологические группы, которые вкладываются в произведение паратопологических и квазитопологических групп.

Топологические свойства мальцевских пространств и ретрактов топологических групп (Разделы 5.4 и 5.5)

Псевдокомпактное мальцевское пространство является ретрактом топологической группы. Не все мальцевские пространства являются ретрактами топологических групп. Регулярные Σ-пространства со счетным экстендом (в частности, линделефовы Σ-пространства) с раздельно непрерывной операцией Мальцева являются ω-клеточными пространствами. Если на псевдокомпактном пространстве X есть раздельно непрерывная 2-квазинепрерывная операция Мальцева, то стоун–чеховское расширение βX является компактом Дугунжи.

Используя теоремы о ретрактах топологических групп, строятся примеры топологических групп (раздел 5.4).

Пример 16. (1) Существует линделефова топологическая группа с числом Суслина 2^ω.

(2) Существует сепарабельная не $\mathbb{R}$-факторизуемая топологическая группа.

Публикации. Основные результаты диссертации опубликованы в 17 работах автора, из которых 17 опубликованы в рецензируемых научных изданиях, рекомендованных для защиты в диссертационном совете МГУ по специальности. Всего у автора 31 работа, близкие к теме диссертации.

Структура и объем работы. Диссертация состоит из введения, четырех глав и заключения, главы разбиваются на разделы и подразделы. Текст диссертации изложен на 236 страницах. Список литературы содержит 149 наименований.

Заключение. Основные результаты работы заключаются в следующем:

- Получены достаточных условий, когда в группах с топологиях происходит усиление непрерывности операций, в частности, когда CHART, паратопологические и полутопологические группы являются топологическими группами.

- Характеризованы раздельно непрерывные отображения произведений псевдокомпактных пространств, которые допускают раздельно непрерывное продолжение на произведение стоун–чеховских расширений пространств.

- Найдены условия, когда компактные универсальная алгебра с раздельно непрерывными операциями вкладывается в произведение метризуемых универсальных алгебр.

- Псевдокомпактные пространства с операцией Мальцева характеризованы как ретракты топологической группы. Исследованы псевдокомпактные пространства с раздельно непрерывной операцией Мальцева. Построены мальцевские пространство не ретракты групп.

- Исследованы подклассы класса бэровских пространств, влекущие непрерывность в группах с топологией.

- Для нескольких классов пространств, найдены однородные произведения, в которых в качестве сомножителя реализуется любое пространство из этого класса, исследованы однородные подпространства произведений экстремально несвязных пространств.

- Найдены условия для групп с топологией, мальцевских пространств, их ретрактов, влекущие счетное число Суслина, диагональ типа G_δ, метризуемость.

Результаты диссертации могут найти применение в общей топологии, топологической алгебре, анализе, функциональном анализе, топологической динамике.

Благодарность. Автор выражает глубокую благодарность своему учителю А.В. Архангельскому за то что он вдохновлял и направлял научную работу автора в течение многих лет, внимание и поддержку.

Автор благодарен всем сотрудникам кафедры общей топологии за творческую и доброжелательную атмосферу на кафедре, всем коллегам.

Автор благодарен Ольге Викторовне Сипачевой, соавтору многих работ, за внимание и помощь.

Автор благодарен Надежде Валерьевне Губиной за всемерную поддержку.

Глава 1

Обозначения, базовые понятия, топологические игры

1.1 Обозначения и определения

Натуральные числа обозначаются через $\mathbb{N}$, целые неотрицательные ω, вещественные $\mathbb{R}$, иррациональные $\mathbb{P}$, рациональные $\mathbb{Q}$, прямую Зоргенфрея $\mathbb{S}$.

Знак $\coloneqq$ будем использовать для равенства по определению.

Общие определения и обозначения из теории множеств

Семейство всех подмножеств множества X обозначим через $\operatorname{Exp}(X)$. Семейство всех непустых подмножеств множества X обозначим через $\operatorname{Exp}_*(X)$: $\operatorname{Exp}_*(X) \coloneqq \operatorname{Exp}(X) \setminus \{\varnothing\}$.

Обозначим $\Delta_X \coloneqq \{(x,x) \,:\, x \in X\}$ диагональ в $X \times X$.

Если B есть подмножество множества A то будем обозначать $B^c = A \setminus B$ — дополнение к A. Мы применяем это обозначение в тех ситуациях, когда из контекста ясно, какое множество A имеется в виду.

Будем обозначать *индексируемое множество* $x = (x_\alpha)_{\alpha \in A}$, x есть функция на A, такое что $x(\alpha) = x_\alpha$ для $\alpha \in A$. Если элементы индексированного множества $\mathcal{X} = (X_\alpha)_{\alpha \in A}$ сами являются множествами, то $\mathcal{X}$ также называется *индексируемое семейством множеств*, $\mathcal{X}$ есть функция на A: $\mathcal{X}(\alpha) = X_\alpha$ для $\alpha \in P$. Для непустого $B \subset A$ обозначим

$$\mathcal{X}^{[B]} \coloneqq \prod_{\alpha \in B} X_\alpha = \{(x_\alpha)_{\alpha \in B} \,:\, x_\alpha \in X_\alpha \text{ для всех } \alpha \in B\}$$

Проекцию из $\mathcal{X}^{[B]}$ на X_α будем обозначать через π_α. Будем считать, что $\mathcal{X}^{[B]} = \{\varnothing\}$, если B пустое множество:

$$\mathcal{X}^{[\varnothing]} \coloneqq \{\varnothing\}.$$

Декартово произведение $\mathcal{X}^{[B]}$ есть множество функций f, определенных на множестве B, таких что $f(\alpha) \in \mathcal{X}(\alpha)$ для всех $\alpha \in B$. Обозначим

$$\prod \mathcal{X} \coloneqq \prod_{\alpha\in A} X_\alpha = \mathcal{X}^{[A]}$$

Степени X^B множества X это есть множество функций f, определенных на множестве B, таких что $f(\alpha) \in X$ для всех $\alpha \in B$. Также будем писать f_α вместо $f(\alpha)$.

Пусть $B \cap C = \varnothing$. Как принято в теории множеств, мы отождествляем функцию и ее график. Если $x \in \mathcal{X}^{[B]}$ и $y \in \mathcal{X}^{[C]}$ то $z = x \cup y$ является функцией и характеризуется тем, что

$$z \in \mathcal{X}^{[B\cup C]},\ x = z|_B \text{ и } y = z|_C$$

Введем специальное обозначение для $x\cup y$ в том случае, когда x и y являются функциями:

$$x^\frown y \coloneqq x \cup y.$$

Функции с конечной областью определения это множества вида

$$f = \{(x_1, y_1), (x_2, y_2), ..., (x_n, y_n)\},$$

$f(x_i) = y_i$ для $i = 1, 2, ..., n$. Мы будем пользоваться обозначениями

$$\{x_1 \to y_1, x_2 \to y_2, ..., x_n \to y_n\} \coloneqq \{(x_1, y_1), (x_2, y_2), ..., (x_n, y_n)\}.$$

В частности,

$$\{\alpha \to a\} = \{(\alpha, a)\}, \qquad \{\alpha \to a, \beta \to b\} = \{(\alpha, a), (\beta, a))\}.$$

Множество ультрафильтров на целых неотрицательных числах ω обозначим $\beta\,\omega$. Множество *неглавных ультрафильтров* обозначим $\omega^* = \beta\,\omega \setminus \omega$, ω тут трактуются как *главные ультрафильтры*.

Множество $\beta\,\omega$ также рассматривается как стоун–чеховское расширение счетного дискретного пространства ω.

Напомним определение порядка $\leq_{KR}$ Кейслера-Рудин на ω^*. Пусть $p, q \in \omega^*$. Тогда $p \leq_{KR} q$ если и только если существует отображение $f : \omega \to \omega$, так что $\beta\,f(q) = p$. Здесь $\beta\,f : \beta\omega \to \beta\,\omega$ — непрерывное продолжение отображения f.

Если $\mathcal{M}$ есть семейство множеств, то множество M называется *корнем* семейства $\mathcal{M}$, если $A \cap B = M$ для любых различных $A, B \in \mathcal{M}$. *Лемма о Δ системе* гласит, что если $\mathcal{F}$ несчетное семейство конечных множеств, то некоторое несчетное $\mathcal{M} \subset \mathcal{F}$ имеет корень.

Общие определения и обозначения из алгебры и топологической алгебры

Как правило, единицу группы мы будем обозначать как e. Для $g \in G$ обозначим

$$\lambda_g : G \to G,\ x \mapsto gx$$
$$\rho_g : G \to G,\ x \mapsto xg$$

левые и правые сдвиги в G. Обозначим через $\mathfrak{m}$ и $\mathfrak{i}$ операции произведения и операцию взятия обратного в группе:

$$\mathfrak{m} : G\times \to G,\ (g,h) \mapsto gh,$$
$$\mathfrak{i} : G \to G,\ g \mapsto g^{-1}.$$

Для множества X обозначим через $S(X)$ множество всех биекцией множества X на себя:

$$S(X) \coloneqq \{f \in X^X \ :\ f \text{ есть биекция}\}.$$

Действие группы G на множестве X это гомоморфизм $\alpha : G \to S(X)$. Как правило, пишем gx вместо $\alpha(g)(x)$. С действием α ассоциировано отображение

$$\bar{\alpha} : G \times X \to X,\ (g,x) \mapsto gx = \alpha(g)(x),$$

которое также называется действием. Если для отображения $\bar{\alpha} : G \times X \to X$ выполняются условия (1) $\bar{\alpha}(e,x) = x$ и (2) $\bar{\alpha}(gh,x) = \bar{\alpha}(g,\bar{\alpha}(h,x))$, то мы можем восстановить гомоморфизм α: $\alpha(g)(x) = \bar{\alpha}(g,x)$.

Как правило, предполагается что на группе G есть некоторая топология. В этом случае обозначим через $\mathcal{N}_e$ семейство открытых окрестностей единицы e.

Группа G называется *ω-ограниченной* если для любого $U \in \mathcal{N}_e$ существует не более чем счетное $M \subset G$, так что $G = MU = UM$.

Группа G называется *предкомпактной* (или *вполне ограниченной*) если для любого $U \in \mathcal{N}_e$ существует конечное $M \subset G$, так что $G = MU = UM$.

Топологическая группа G называется $\mathbb{R}$-*факторизуемой*, если для любой непрерывной функции $f : G \to \mathbb{R}$ существует сепарабельная метризуемая группа H, непрерывный гомоморфизм $g : G \to H$, непрерывная функция $h : H \to \mathbb{R}$, так что $f = h \circ g$, то есть следующая диаграмма коммутативна:

$$\begin{tikzcd}
G \arrow[rr, "f"] \arrow[dr, "g"'] & & \mathbb{R} \\
& H \arrow[ur, "h"'] &
\end{tikzcd}$$

Общие определения и обозначения из топологии

Терминология соответствует [110], ниже дадим наиболее важные и не встречающиеся в [110] определения.

Если X пространство, $M \subset X$, то обозначаем $\overline{M}^X$ замыкание M и $\mathrm{int}_X(M)$ внутренность M. Если из контекста понятно о каком пространстве X идет речь, то будем писать $\overline{M}$ и $\mathrm{int}(M)$ вместо $\overline{M}^X$ и $\mathrm{int}_X(M)$.

Обозначим через $\mathrm{Aut}(X)$ множество всех гомеоморфизмов пространства X на себя. Через id_X обозначим тождественное отображение X на себя. Пространство X называется *однородным* если группа $\mathrm{Aut}(X)$ транзитивно действует на X, то есть для $x, y \in X$ существует автогомеоморфизм $f \in \mathrm{Aut}(X)$ так что $f(x) = y$.

Для метрического пространства (X, d) обозначим через $\mathrm{Aut}_{\mathrm{M}}(X)$ множество всех изометрией пространства X на себя. Метрическое пространство X называется *метрически однородным* если группа $\mathrm{Aut}_{\mathrm{M}}(X)$ транзитивно действует на X, то есть для $x, y \in X$ существует изометрия $f \in \mathrm{Aut}_{\mathrm{M}}(X)$ так что $f(x) = y$.

Пространство X называется *сильно жестким*, если для любого непрерывного отображения $f : X \to X$ либо $f = \mathrm{id}_X$, либо f является *константой*, то есть $f(X) = \{y\}$ для некоторого $y \in X$.

Подмножество M топологического пространства X называется *локально плотным* (*locally dense* или *nearly open* или *preopen*) если $M \subset \mathrm{Int}\,\overline{M}$.

Пусть $M \subset X$. Если M есть объединение счетного числа нигде не плотных множеств, то M называется *тощим* множеством (Baire set). Не тощие множества называются *второй категории Бэра* или *нетощими* или *тучными* множествами (*nonmeagre set*). Подмножество M называется *остаточным* (comeagre set или residual set) если $X \setminus M$ является тощим множеством.

Пространство X называются *пространствами первой категории Бэра* или *тощими пространствами* (*Baire space*) если множество X первой категории в пространстве X. Пространство X называется *пространствами второй категории Бэра* или *нетощими пространствами* или *тучными пространствами* (*nonmeagre space*) если X не тощее пространство. Пространства, в котором всякое остаточное множество плотно, называется *бэровским пространством*. Пространство тучное если и только если его некоторое открытое подпространство является бэровским пространством.

Семейство ν непустых подмножеств пространства X называется *π-сетью*, если для любого открытого непустого $U \subset X$ существует $M \in \nu$, так что $M \subset U$.

Состоящая из открытых множеств π-сеть называется *π-базой*.

Подмножество $U \subset X$ называется *каноническим открытым* если $U = \mathrm{Int}\,\overline{U}$.

Для кардинала τ, множество $G \subset X$ называется *множеством типа* G_τ если G есть пересечение τ открытых множеств. Пространство X называется *абсолютным* G_τ, если X типа G_τ в некотором компактном расширении.

Для $\gamma \subset \operatorname{Exp}(X)$, $x \in X$ и $M \subset X$ обозначим

$$\begin{aligned} \operatorname{St}(x,\gamma) &\coloneqq \{U \in \gamma \,:\, x \in U\}, & \operatorname{st}(x,\gamma) &\coloneqq \bigcup \operatorname{St}(x,\gamma),\\ \operatorname{St}(M,\gamma) &\coloneqq \bigcup_{x\in M} \operatorname{St}(x,\gamma), & \operatorname{st}(M,\gamma) &\coloneqq \bigcup_{x\in M} \operatorname{st}(x,\gamma). \end{aligned}$$

Пространство X называется *разлагаемым* (developable), если существует последовательность открытых покрытий $(\gamma_n)_{n\in\omega}$, так что для любого $x \in X$ семейство $\operatorname{st}(x,\gamma_n)$ является базой в точке x.

Семейство $\mathcal{B}$ открытых непустых множеств пространства X называется *внешней базой множества* $M \subset X$ если $M \subset U$ для каждого $U \in \mathcal{B}$ и для каждого открытого $W \supset M$ существует $U \in \mathcal{B}$ так что $M \subset U \subset W$.

Если $(M_n)_{n\in\omega}$ есть последовательность подмножеств пространства X, то множество

$$\begin{aligned} \overline{\operatorname{lt}}_{n\in\omega} M_n \coloneqq \{x \in X : |\{n \in \omega \,:\, U \cap M_n \neq \varnothing\}| = \omega \\ \text{для любой окрестности } U \text{ точки } x\} \end{aligned}$$

называется *верхним пределом последовательности множеств* $(M_n)_{n\in\omega}$.

Если $(x_n)_{n\in\omega}$ есть последовательность точек пространства X, то обозначим

$$\overline{\operatorname{lt}}_{n\in\omega} x_n \coloneqq \overline{\operatorname{lt}}_{n\in\omega}\{x_n\}.$$

Пусть $(x_n)_{n\in\omega}$ последовательность точек в пространстве X, $p \in \omega^*$ неглавный ультрафильтр. Точка $x \in X$ называется *p-пределом* последовательности $(x_n)_{n\in\omega}$, если $\{n \in \omega \,:\, x_n \in U\} \in p$ для любой окрестности U точки x. Будем писать $x = \lim_p x_n = \lim_p (x_n)_{n\in\omega}$ для p-предела x.

Напомним, пространство X называется *экстремально несвязным (сокращенно, ED)* если $\overline{U} \cap \overline{V} = \varnothing$ для непересекающихся открытых подмножеств $U, V \subset X$. Тихоновское пространство называется *F-пространством*, если каждое конуль множество C^*-вложено в пространство. Базовые свойства F-пространств и ED пространств изложены в [136]. Любое ED пространство является F-пространством.

Обозначим *стоун–чеховское расширение* пространства X, как βX. Если $f : X \to Y$ непрерывное отображение, то обозначим $\beta f : \beta X \to \beta Y$ продолжение f.

Напомним [97], пространство X называется $\beta\omega$ пространством если для любого счетного дискретного подмножества $M \subset X$, если $\overline{M}$ компактно, то $\overline{M}$ гомеоморфно $\beta\omega$. Любое F-пространство является $\beta\omega$ пространством. Подпространство $\beta\omega$ пространством является $\beta\omega$ пространством.

Говорят, что у пространства X *счетный псевдохарактер* если каждая точка X является множеством типа G_δ.

Пространство X *субметризуемо* если существует непрерывное иньективное отображение X в метризуемое пространство.

Топологическое пространство X называется *полным по Дъедонне*, если на нем существует полная равномерность [110, Раздел 8.5.13]. Пополнение по Дьедонне μX можно определить как наименьшее полное по Дьедонне подпространство βX, содержащие X. Замыкание псевдокомпактного подпространства в полном по Дьедонне пространстве компактно. Пространство X псевдокомпактно если и только если $\beta X = \mu X$.

Обозначим через $\mathcal{U}_X$ универсальную равномерность на X. Пространство X полно по Дьедоне, если равномерное пространство $(X, \mathcal{U}_X)$ полно. Пополнение по Дьедоне можно определить, как пополнение равномерного пространство $(X, \mathcal{U}_X)$.

Открытое покрытие γ пространства X называется *нормальным покрытием*, если $\bigcup_{U \in \gamma} U \in \mathcal{U}_X$.

Алгебраические системы и универсальные алгебры

Пусть X есть множество, $n \in \omega$. Отображение $X^n \to X$ называется *n-арной операцией.*

Если на множестве X задано несколько операций f_1, f_2, ..., f_m, то

$$\mathbf{X} = (X, f_1, f_2, ..., f_m)$$

называется *универсальной алгеброй* [71]. Если f_i есть n_i-арная операция для $i = 1, 2, ..., m$, то набор чисел $(n_1, n_2, ..., n_m)$ называется *типом* алгебры $\mathbf{X}$ [71]. Мы будем рассматривать универсальные алгебры только с конечным набором операций и будем нумеровать операции натуральными числами.

Далее мы будем писать вместо "универсальная алгебра (с конечным набором операций)" просто "алгебра".

Пусть (Y, g) есть алгебра с n-арной операцией g. Отображение $\varphi : X \to Y$ назовем *гомоморфизмом* алгебр (X, f) и (Y, g), если следующая диаграмма коммутативна:

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{\varphi} & Y \\ f\big\uparrow & & \big\uparrow g \\ X^n & \xrightarrow[\varphi^n]{} & Y^n \end{array} \tag{1.1}$$

Если на множестве Y задано несколько операций g_1, g_2, ..., g_m,

$$\mathbf{Y} = (Y, g_1, g_2, ..., g_m)$$

и типы алгебр $\mathbf{X}$ и $\mathbf{Y}$ совпадают, то $\varphi : X \to Y$ назовем *гомоморфизмом* алгебр $\mathbf{X}$ и $\mathbf{Y}$, если φ является гомоморфизмом алгебр (X, f_i) и (Y, g_i) для $i = 1, 2, ..., m$.

Множество $Y \subset X$ называется *подалгеброй* алгебры X, если $f_i(Y^{n_i}) \subset Y$ для $i = 1, ..., n$. На Y рассматривается структура алгебры с тем же типом что и на X, операции $f_i|_{Y^{n_i}}$.

Для семейства алгебр $\{\mathbf{X}_\alpha = (X_\alpha, f_{\alpha,1}, f_{\alpha,2}, ..., f_{\alpha,m}) : \alpha \in A\}$ с одинаковой типом определяется *произведение алгебр*: $\prod_{\alpha \in A} \mathbf{X}_\alpha = (X, f_1, f_2, ..., f_m)$, где $X = \prod_{\alpha \in A} X_\alpha$ и $f_i = \prod_{\alpha \in A} f_{\alpha,i}$ для $i = 1, ..., n$.

Кардинальные инварианты

Напомним определение наиболее важных кардинальных инвариантов [88].

вес

$$w(X) = \min\{|\mathcal{B}| : \mathcal{B} \text{ база } X\};$$

диагональное число

$$\begin{aligned}\Delta(X) = \min\{|\mathcal{P}| : \mathcal{P} &\text{ семейство открытых окрестностей}\\ &\text{диагонали } \Delta_X \text{ и } \bigcap \mathcal{P} = \Delta_X\};\end{aligned}$$

характер

$$\chi(x, X) = \min\{|\mathcal{P}| : \mathcal{P} \text{ локальная база } x\},$$
$$\chi(X) = \sup\{\chi(x, X) : x \in X\};$$

π-характер

$$\pi\chi(x, X) = \min\{|\mathcal{P}| : \mathcal{P} \text{ a } \pi\text{-база } x\},$$
$$\pi\chi(X) = \sup\{\pi\chi(x, X) : x \in X\};$$

теснота

$$\begin{aligned}t(x, X) = \min\{\tau : \ &\text{для всех } A \subset X \text{ с } x \in \overline{A}\\ &\text{существует } M \subset A \text{ с } |M| \leq \tau \text{ и } x \in \overline{M}\},\end{aligned}$$
$$t(X) = \sup\{t(x, X) : x \in X\}.$$

спред

$$s(X) = \sup\{|M| : M \text{ есть дискретное подпространства } X\}.$$

плотность

$$s(X) = \sup\{|M| : M \subset X = \overline{M}\}.$$

наследственная плотность

$$hd(X) = \sup\{d(Y) : Y \subset X\}.$$

число Линделефа

$$l(X) = \sup\{|\gamma| : \gamma \text{ открытое покрытие } X\}.$$

наследственное число Линделефа

$$hl(X) = \sup\{l(Y) : Y \subset X\}.$$

Топологические свойства типа компактности

Общеупотребительные определения типа компактности, счетно компактности, псевдокомпактности, секвенциальной компактности можно найти в [110].

Пространство X называется *слабо компактным пространством* (feebly compact space), если любое локально конечное семейство открытых множеств конечно.

Пространство X называется *ω-ограниченным пространством*, если замыкание любого счетного подмножества в X компактно.

Пространство X называется *тотально счетно компактным пространством* (totally countably compact space), если для любого бесконечного подмножества $M \subset X$ существует бесконечное $L \subset M$, такое что $\overline{L}$ компактно.

Пусть $p \in \omega^*$ неглавный ультрафильтр. Пространство X называется *p-компактным пространством* (p-compact space), если у любой последовательности в X есть p-предел.

Семейство множеств $\mathcal{B}$ называется *неархимедовым*, если для для $U, V \in \mathcal{B}$ выполняется: если $U \cap V \neq \varnothing$, то либо $U \subset V$, либо $V \subset U$. *Неархимедова база* это база $\mathcal{B}$ пространства X, которая является неархимедовым семейством. Неархимедовы базы под названием базы ранга 1 вводились и изучались в [133; 134].

Семейства γ непустых открытых подмножеств X называется *центрированным*, если $\bigcap \mu \neq \varnothing$ для любого конечного $\mu \subset \gamma$.

Кардинальное число τ называется *прекалибром* пространства X, если для любого семейства γ непустых открытых подмножеств X, $|\gamma| = \tau$ существует $\gamma' \subset \gamma$, $|\gamma'| = \tau$, так что семейство γ' является центрированным.

Кардинальное число τ называется *калибром* пространства X, если для любого семейства γ непустых открытых подмножеств X, $|\gamma| = \tau$ существует $\gamma' \subset \gamma$, $|\gamma'| = \tau$, так что $\bigcap \gamma' \neq \varnothing$.

Пространство X называется *ω-клеточным*, если для любого семейства γ непустых множеств типа G_δ, существует не более чем счетное $\mu \subset \gamma$, так что $\overline{\bigcup \gamma} = \overline{\bigcup \mu}$.

Пространство X называется *(сильно) Σ-пространством* если существует σ-дискретное семейство $\mathcal{S}$ и покрытие $\mathcal{C}$ замкнутыми счетно компактными (компактными) множествами, так что если $C \in \mathcal{C}$ и $U \supset C$ открыто, то $C \subset S \subset U$ для некоторого $S \in \mathcal{S}$.

Аксиомы отделимости

Стандартные классы T_0—T_4, хаусдорфовых, регулярных, тихоновских (или вполне регулярных), нормальных и паракомпактных пространств можно найти в [110].

Пространство X *регулярно в точке* $x \in X$, если для любой окрестности U точки x существует окрестность $V \ni x$, так что $\overline{V} \subset U$.

Пространство X *полурегулярно в точке* $x \in X$, если в точке x есть база, состоящая из канонически открытых множеств.

Пространство X называется *квази регулярным* (quasi-regular) если для каждого непустого открытого $U \subset X$ существует непустое открытое $V \subset X$, так что $\overline{V} \subset U$.

Пространство X называется *полурегулярным* (semiregular) если у X есть база состоящая из канонически открытых множеств.

Пространство X называется *π-полурегулярным* (π-semiregular) [50] (или почти регулярным [18] (nearly regular)) если у X есть π-база состоящая из канонически открытых множеств.

В разделе 3 у пространств не предполагается каких либо дополнительных аксиом отделимости, аксиомы отделимости описываются в формулировках утверждений. В остальных местах под пространством подразумевается тихоновское пространство, если в точности не указаны аксиомы отделимости.

1.2 Слабые формы непрерывности

Отображения топологических пространств

Мы будем использовать несколько ослаблений непрерывности, следуя работе [35]. Определим *непрерывные* (continuous), *почти непрерывные* (nearly continuous), *квази непрерывные* (quasi-continuous), *полу преднепрерывные* (semi-precontinuous), *слабо непрерывные* (feebly continuous) отображения. Отображение топологических пространств $f : X \to Y$ называется

$$\left\{\begin{array}{c} \text{непрерывным} \\ \text{почти непрерывным} \\ \text{квази непрерывным} \\ \text{полу преднепрерывным} \\ \text{слабо непрерывным} \end{array}\right\} \text{ в } x \in X \text{ если } \left\{\begin{array}{c} x \in \operatorname{Int} f^{-1}(V) \\ x \in \operatorname{Int} \overline{f^{-1}(V)} \\ x \in \overline{\operatorname{Int} f^{-1}(V)} \\ x \in \overline{\operatorname{Int} \overline{f^{-1}(V)}} \\ \operatorname{Int} f^{-1}(V) \neq \varnothing \end{array}\right\}$$

для любой окрестности V точки $f(x)$. Если рассматриваемые свойства выполняются в каждой точке, то получаем определение: отображение f называется

$$\left\{\begin{array}{c} \text{непрерывным} \\ \text{почти непрерывным} \\ \text{квази непрерывным} \\ \text{полу преднепрерывным} \\ \text{слабо непрерывным} \end{array}\right\} \text{ если } \left\{\begin{array}{c} f^{-1}(V) \subset \operatorname{Int} f^{-1}(V) \\ f^{-1}(V) \subset \operatorname{Int} \overline{f^{-1}(V)} \\ f^{-1}(V) \subset \overline{\operatorname{Int} f^{-1}(V)} \\ f^{-1}(V) \subset \overline{\operatorname{Int} \overline{f^{-1}(V)}} \\ \operatorname{Int} f^{-1}(V) \neq \varnothing \end{array}\right\}$$

для любого открытого непустого $V \subset X$.

Назовем отображение f *слабым гомеоморфизмом* (feebly homeomorphism) если f есть биекция и отображения f и f^{-1} являются слабо непрерывными.

Отображения произведения двух пространств

Пусть X, Y, Z — три топологических пространства, и пусть $f : X \times Y \to Z$ — отображение из $X \times Y$ в Z. Напомним, что f называется *квазинепрерывным относительно второй координаты* [101] в (x, y), если для каждой открытой окрестности W точки $f(x, y)$ и каждой открытой окрестности $U \times V$ точки (x, y), существуют открытая окрестность V' точки y и непустое открытое множество $U' \subset U$ такое, что $f(U' \times V') \subset W$. Квазинепрерывность относительно второго переменная играет важную роль в теории раздельной и совместной непрерывности. Это понятие называется *сильной квазинепрерывностью* в [62] и [49], где оно применяется к исследованию проблемы, когда полутопологическая группа является топологической группой.

Аналогично, определим, что f называется *квазинепрерывным по первой координате* в (x, y), если для любой открытой окрестности W $f(x, y)$ и любого открытой окрестности $U \times V$ точки (x, y), существуют открытая окрестность U' точки x и непустое открытое множество $V' \subset V$ такое, что $f(U' \times V') \subset W$.

Отображения произведения нескольких пространств

Пусть $\{X_\alpha : \alpha \in A\}$ семейство множеств, Y множество, $X = \prod_{\alpha\in A} X_\alpha$ и $B \subset A$. Обозначим естественную биекцию

$$\Lambda_B^X : Y^X \to \left(Y^{\prod_{\alpha\in A\setminus B} X_\alpha}\right)^{\prod_{\alpha\in B} X_\alpha},$$
$$\Lambda_B^X(\Phi)((x_\alpha)_{\alpha\in B})((x_\alpha)_{\alpha\in A\setminus B}) = \Phi((x_\alpha)_{\alpha\in A}).$$

Будем опускать верхний индекс, если из контекста понятно, какое X имеется в виду. Если $B = \{\beta\}$, то будем писать Λ_β вместо $\Lambda_{\{\beta\}}$.

Пусть $\{X_\alpha : \alpha \in A\}$ и Y пространства.

Для отображения $\Phi : X \to Y$ и $\bar{x} = (x_\alpha)_{\alpha\in A\setminus B} \in \prod_{\alpha\in A\setminus B} X_\alpha$ обозначим $r(\Phi, X, \bar{x}) \coloneqq \Lambda^X_{A\setminus B}(\bar{x})$. Тогда

$$r(\Phi, X, \bar{x}) : \prod_{\alpha\in B} X_\alpha \to Y,\ (x_\alpha)_{\alpha\in B} \mapsto \Phi((x_\alpha)_{\alpha\in A}).$$

Отображение Φ называется *раздельно непрерывным* если и только если $r(\Phi, X, \bar{x})$ непрерывно для каждого $B \subset A$ с $|B| = 1$ и любой $\bar{x} \in \prod_{\alpha\in A\setminus B} X_\alpha$.

Отображение Φ назовем *β-продолжаемым*, если отображение Φ продолжается до раздельно непрерывного отображения

$$\widehat{\Phi} : \prod_{\alpha\in A} \beta\, X_\alpha \to \beta Y.$$

Определение 1.1. Пусть A — множество, $\{X_\alpha : \alpha \in A\}$ — семейство пространств, Y — пространство и $X = \prod_{\alpha\in A} X_\alpha$. Предположим, что задано отображение $\Phi : X \to Y$ и натуральное число n. Отображение Φ называется

- *n-раздельно непрерывным* если $r(\Phi, X, \bar{x})$ непрерывно;
- *n-β-продолжаемым* если g является β-продолжаемым отображением, то есть $g = r(\Phi, X, \bar{x})$ продолжается до раздельно непрерывного отображения $\hat{g} : \prod_{\alpha\in B} \beta\, X_\alpha \to \beta\, Y$;
- *n-квазинепрерывным* если $r(\Phi, X, \bar{x})$ квазинепрерывно

для каждого $B \subset A$ с $|B| \le n$ и любой $\bar{x} \in \prod_{\alpha\in A\setminus B} X_\alpha$.

Раздельно непрерывные отображения это в точности 1-раздельно непрерывные отображения.

Группы с топологией

Пусть на группе G задана топология.

Перечислим связи топологии с групповой структурой.

(O_p) умножение $(g, h) \mapsto gh$ в группе непрерывно;

(O_s) умножение в группе раздельно непрерывно;

(O_i) операция взятия обратного элемента $g \mapsto g^{-1}$ непрерывна;

(O_l) левые сдвиги $\lambda_g : G \to G, x \mapsto gx$ непрерывны для любого $g \in G$;

(O_r) правые сдвиги $\rho_g : G \to G, x \mapsto xg$ непрерывны для любого $g \in G$.

Напомним, группа G называется

- *право полутопологической* если выполняется O_r;
- *лево полутопологической* если выполняется O_l;
- *полутопологической* если выполняется O_s;
- *квазитопологической* если выполняется O_s и O_i;
- *паратопологической* если выполняется O_p;
- *топологической* если выполняется O_p и O_i.

В некоторых работах лево (право) полутопологические группы также называются лево (право) топологическими.

Перечислим связи между топологией и групповой структурой группы G:

(O_t) имеет (O_p) и (O_i), т.е. G — топологическая группа;

(O_{pe}) умножение $\mathfrak{m}$ в группе непрерывно в (e, e);

(O_{qpe}) $\mathfrak{m}$ квазинепрерывна по первой координате в (e, e);

(O_{sqpe}) $\mathfrak{m}$ квазинепрерывна в (e, e);

(O_{fpe}) $\mathfrak{m}$ слабо непрерывен в (e, e);

(O_{fi}) операция взятия обратного элемента $\mathfrak{i}$ слабо непрерывна;

(O_{ie}) $\mathfrak{i}$ непрерывен в единице e;

(O_{nie}) $\mathfrak{i}$ почти непрерывна в e;

(O_{qie}) $\mathfrak{i}$ квазинепрерывна в e;

(O_{sie}) $\mathfrak{i}$ полу преднепрерывным в e;

(O_{fie}) $\mathfrak{i}$ слабо непрерывен в e;

(O_{fl}) сдвиги влево λ_g слабо непрерывны для любого $g \in G$;

(O_{dfl}) существует плотное $H \subset G$ такое, что λ_g слабо непрерывны для любого $g \in H$;

(O_{dfl^*}) существует плотное $H \subset G$ такое, что λ_g являются слабыми гомеоморфизмами для любого $g \in H$;

(O_{ql}) сдвиги влево λ_g квазинепрерывны для любого $g \in G$;

(O_{dql}) существует плотное $H \subset G$ такое, что λ_g квазинепрерывны для любого $g \in H$;

(O_{dql^*}) существует плотное $H \subset G$ такое, что λ_g являются квазигомеоморфизмами для любого $g \in H$;

(O_{dl}) существует плотное $H \subset G$ такое, что λ_g непрерывны для любого $g \in H$;

(O_{dl^*}) существует плотное $H \subset G$ такое, что λ_g являются гомеоморфизмами для любого $g \in H$.

Обозначим

$$
\begin{aligned}
\Lambda(G) &\coloneqq \{g \in G \,:\, \lambda_g \text{ непрерывен}\}, & \Lambda^*(G) &\coloneqq \{g \in G \,:\, g, g^{-1} \in \Lambda(G)\},\\
\Lambda_f(G) &\coloneqq \{g \in G \,:\, \lambda_g \text{ слабо непрерывен}\}, & \Lambda^*_f(G) &\coloneqq \{g \in G \,:\, g, g^{-1} \in \Lambda_f(G)\},\\
\Lambda_q(G) &\coloneqq \{g \in G \,:\, \lambda_g \text{ квазинепрерывна}\}, & \Lambda^*_q(G) &\coloneqq \{g \in G \,:\, g, g^{-1} \in \Lambda_q(G)\}.
\end{aligned}
$$

Множество $\Lambda(G)$ называется *топологическим центром*.

Композиция непрерывных функций непрерывна и композиция слабо непрерывных функций слабо непрерывна. Из этого вытекает

Утверждение 1.2.1. *Множества $\Lambda_f(G)$, $\Lambda(G)$ являются подполугруппами группы G. Множества $\Lambda^*_f(G)$, $\Lambda^*(G)$ являются подгруппами группы G.*

Верны следующие альтернативные определения перечисленных свойств: (O_l) $\Lambda(G) = G$; (O_{fl}) $\Lambda_f(G) = G$; (O_{ql}) $\Lambda_q(G) = G$; (O_{dl}) $\overline{\Lambda(G)} = G$; (O_{dfl}) $\overline{\Lambda_f(G)} = G$; (O_{dql}) $\overline{\Lambda_q(G)} = G$; (O_{dl^*}) $\overline{\Lambda^*(G)} = G$; (O_{dfl^*}) $\overline{\Lambda^*_f(G)} = G$; (O_{dql^*}) $\overline{\Lambda^*_q(G)} = G$.

Дадим альтернативное определение некоторых из перечисленных свойств. Пусть $\mathcal{T}^*$ — все непустые открытые подмножества G.

(O_{pe}) для любого $U \in \mathcal{N}_e$ существует $V \in \mathcal{N}_e$, так что $V^2 \subset U$;

(O_{sqpe}) для любого $U \in \mathcal{N}_e$ существуют $V \in \mathcal{N}_e$ и $W \in \mathcal{T}^*$, так что $VW \subset U$;

(O_{fpe}) для любого $U \in \mathcal{N}_e$ существуют $V \in \mathcal{T}^*$ и $W \in \mathcal{T}^*$, так что $VW \subset U$;

(O_{fi}) $\operatorname{Int} U^{-1} \neq \varnothing$ для любого $U \in \mathcal{T}^*$;

(O_{ie}) $e \in \operatorname{Int} U^{-1}$ для любого $U \in \mathcal{N}_e$;

(O_{nie}) $e \in \operatorname{Int} \overline{U^{-1}}$ для любого $U \in \mathcal{N}_e$;

(O_{qie}) $e \in \overline{\operatorname{Int} U^{-1}}$ для любого $U \in \mathcal{N}_e$;

(O_{sie}) $e \in \overline{\operatorname{Int} \overline{U^{-1}}}$ (или $\operatorname{Int} \overline{U \cap U^{-1}} \neq \varnothing$) для любого $U \in \mathcal{N}_e$;

(O_{fie}) $\operatorname{Int} U^{-1} \neq \varnothing$ для любого $U \in \mathcal{N}_e$;

(O_l) $gU \in \mathcal{T}^*$ для любых $U \in \mathcal{N}_e$ и $g \in G$;

(O_r) $Ug \in \mathcal{T}^*$ для любых $U \in \mathcal{N}_e$ и $g \in G$;

(O_{fl}) $\operatorname{Int} gU \neq \varnothing$ для любых $U \in \mathcal{N}_e$ и $g \in G$;

(O_{ql}) $g \in \overline{\operatorname{Int} Ug}$ для любых $U \in \mathcal{N}_e$ и $g \in G$.

Определение 1.2. Для

$$\{x_1, x_2, ..., x_n\} \subset \\ \{p, s, i, l, r, pe, qpe, sqpe, fpe, ie, nie, fie, qie, sie, fl, dfl, ql, dql, dl, dfl^*, dql^*, dl^*\}$$

скажем, что группа G является $O(x_1, x_2, ..., x_n)$-топологической, если условие (O_{x_i}) выполнено для всех $i = 1, 2, ..., n$.

Топологические группы являются $O(p, i)$-топологическими группами, другие введенные классы групп с топологией могут быть определены аналогично с помощью введенной нотации.

Право полутопологическая группа G называется *допустимой*, если топологический центр $\Lambda(G)$ является плотным подмножеством G. Мы пишем “CHART” (compact Hausdorff admissible right topological) для компактной хаусдорфовой допустимой право полутопологической группы. CHART группа это компактная хаусдорфова $O(dl, r)$-топологическая группа.

1.3 Пространства функций

Пространство отображений пространства

Пусть X и Y множества. Обозначим $M(X, Y) = Y^X$ — все отображения из X в Y. Если Y топологическое пространство, то топология поточечной сходимости на $M(X, Y)$ это топология тихоновского произведения на Y^X, обозначим $M(X, Y)$ с топологией поточечной сходимости как $M_p(X, Y)$. Обозначим

$$M(X) \coloneqq M(X, \mathbb{R}), \qquad\qquad M_p(X) \coloneqq M_p(X, \mathbb{R}).$$

Пусть d есть метрика на Y. Обозначим

$$\operatorname{diam}_d(M) \coloneqq \sup\{d(x, y) \,:\, x, y \in Y\}$$

для $M \subset Y$. Будем писать $\operatorname{diam}(M)$ вместо $\operatorname{diam}_d(M)$ если понятно о какой метрике d идет речь. Отображение $f : X \to Y$ называется *ограниченным*, если $\operatorname{diam}_d(f(X)) < \infty$. Множество всех ограниченных отображений из X в Y обозначим через $M^*(X, Y)$. Это множество с sup-метрикой

$$d_{\sup}(f, g) = \sup\{d(f(x), g(x)) \,:\, x \in X\}$$

будем обозначать через $M_u^*(X, Y)$. Обозначим $M^*(X, Y)$ с топологией поточечной сходимости как $M_p^*(X, Y)$. Обозначим

$$M_p^*(X) \coloneqq M_p^*(X, \mathbb{R}), \qquad\qquad M_u^*(X) \coloneqq M_u^*(X, \mathbb{R}),$$

где на $\mathbb{R}$ рассматривается стандартная метрика $d(x, y) = |x - y|$.

Пусть X и Y пространства. Обозначим через $C(X, Y)$ множество непрерывных функций из X в Y. Множество $C(X, Y)$ с топологией поточечной сходимости обозначим через $C_p(X, Y)$, эта топология, которая наследуется из $M_p(X, Y)$.

Пусть X пространства и (Y, d) метрическое пространства. Обозначим $C^*(X, Y) \coloneqq C(X, Y) \cap M^*(X, Y)$; это множество с метрикой из $M_u^*(X, Y)$ как $C_u^*(X, Y)$; с топологией из $M_p^*(X, Y)$ как $C_p^*(X, Y)$.

Обозначим $C(X, \mathbb{R})$, $C_p(X, \mathbb{R})$, $C^*(X, \mathbb{R})$, $C_p^*(X, \mathbb{R})$, $C_u^*(X, \mathbb{R})$ как $C(X)$, $C_p(X)$, $C^*(X)$, $C_p^*(X)$, $C_u^*(X)$.

Пространство X псевдокомпактно если и только если $C(X) = C^*(X)$, так что для псевдокомпактных X пространство $C_u^*(X)$ будем обозначать также как $C_u(X)$.

Пространство отображений произведения двух пространств

Пусть X, Y и Z множества и $\Phi : X \times Y \to Z$ есть отображение. Обозначим

$$\Lambda_{X,Y}(\Phi) : X \to Z^Y,\ \Lambda_{X,Y}(\Phi)(x)(y) = \Phi(x,y),$$
$$\Lambda_{Y,X}(\Phi) : Y \to Z^X,\ \Lambda_{Y,X}(\Phi)(y)(x) = \Phi(x,y).$$

Пусть X, Y и Z пространства. Отображение называется Φ *раздельно непрерывным*, если отображения

$$\Lambda_{X,Y}(\Phi)(x) : Y \to Z,\ y \mapsto \Phi(x,y),$$
$$\Lambda_{Y,X}(\Phi)(y) : X \to Z,\ x \mapsto \Phi(x,y)$$

непрерывны для всех $x \in X$ и $y \in Y$. Обозначим через $SC(X \times Y, Z)$ множество всех раздельно непрерывных отображений из $X \times Y$ в Z. Это множество в топологии поточечной сходимости обозначим через $SC_p(X \times Y, Z)$.

Пусть X, Y пространства и (Z,d) метрическое пространства. Множество ограниченных функций из $SC(X \times Y, Z)$ обозначим через $SC^*(X \times Y, Z)$. Это множество с топологией поточечной сходимости обозначим как $SC_p^*(X \times Y, Z)$ и с sup-метрикой из $M_u^*(X \times Y, Z)$ как $SC_u^*(X \times Y, Z)$.

Обозначим $SC(X \times Y, \mathbb{R})$, $SC_p(X \times Y, \mathbb{R})$, $SC^*(X \times Y, \mathbb{R})$, $SC_p^*(X \times Y, \mathbb{R})$, $SC_u^*(X \times Y, \mathbb{R})$ как $SC(X \times Y)$, $SC_p(X \times Y)$, $SC^*(X \times Y)$, $SC_p^*(X \times Y)$, $SC_u^*(X \times Y)$.

Пространство отображений произведений нескольких пространств

Пусть $\{X_\alpha : \alpha \in A\}$ семейство пространств, Y пространство, $X = \prod_{\alpha \in A} X_\alpha$ и $B \subset A$. Тогда биекция

$$\Lambda_B^X : Y^X \to \left(Y^{\prod_{\alpha \in A \setminus B} X_\alpha}\right)^{\prod_{\alpha \in B} X_\alpha}$$

является гомеоморфизмом. Обозначим через $SC(X,Y)$ все раздельно непрерывные отображения из X в Y. Обозначим через $SC_p(X,Y)$ множество $SC(X,Y)$ с топологией поточечной сходимости, то есть с топологией, индуцированной из Y^X. Тогда Λ_B^X гомеоморфно отображает $SC_p(X,Y)$ на

$$SC_p(\prod_{\alpha \in B} X_\alpha, SC_p(\prod_{\alpha \in A \setminus B} X_\alpha, Y)).$$

Если $\beta \in A$, то обозначим $\Lambda_{\{\beta\}}^X$ как Λ_β^X, это отображение гомеоморфно отображает $SC_p(X,Y)$ на

$$SC_p(X_\beta, SC_p(\prod_{\alpha \in A \setminus \{\beta\}} X_\alpha, Y)).$$

Обозначим $SC_p(X,\mathbb{R})$ как $SC_p(X)$.

1.4 Теория игр

За редким исключением, мы будем использовать игры с двумя игроками, в этом случае будем обозначать их α и β. Игры последовательные со счетным числом ходов. Ходы нумеруются начиная с нуля. Мы используем булевы игры с нулевой суммой — у каждого игрока может быть два исхода: выиграл или проиграл, выигрывает в точности один игрок. Если кто то выигрывает, то остальные проигрывают.

Пусть G есть игра, γ некоторой игрок в этой игре. Если у игрока γ существует выигрышная стратегия. Будем называть такую игру G *γ-благоприятной*. Если такой стратегии нет, то игра G *ga-неблагоприятна*.

Бесконечные последовательные игры

Мы рассматриваем бесконечные последовательные игры счетной длины. Игроки делают счетное число ходов. Первый ход может делать как α так и β. Для определенности, далее α начинает первым. Правила игры определяются набором отображением $C_{\gamma,n}$, где $\gamma \in \{\alpha,\beta\}$ и $n \in \omega$.

Первый ход. Игрок α выбирает $x_0 \in C_{\alpha,0}(\varnothing)$. Игрок β выбирает $y_0 \in C_{\beta,0}(x_0)$.

n**ый ход.** Игрок α выбирает

$$x_n \in C_{\alpha,n}(x_0, y_0, ..., y_{n-1}).$$

Игрок β выбирает

$$y_n \in C_{\beta,0}(x_0, y_0, ..., y_{n-1}, x_n).$$

Конечные последовательности

$$(x_0, y_0, ..., y_{n-1}) \text{ и } (x_0, y_0, ..., y_{n-1}, x_n)$$

называются *частичными партиями*.

Бесконечная последовательность

$$\xi = (x_0, y_0, ..., x_n, y_n, ...)$$

называется *партией* (play). Пусть R есть множество всех партий. В правилах игры по партии ξ определяется кто выиграл, α или β. То есть все партии R разбиваются на два множества R_α и R_β. Для $\gamma \in \{\alpha,\beta\}$, игрок γ выиграл, если $\xi \in R_\gamma$.

Стратегией игрока α это отображение s_α с переменным четным количеством аргументов, так что

$$s_\alpha(x_0, y_0, ..., y_{n-1}) = x_n \in C_{\alpha,n}(x_0, y_0, ..., y_{n-1}).$$

Аналогично, стратегией игрока β это отображение s_β с переменным нечетным количеством аргументов, так что

$$s_\beta(x_0, y_0, ..., y_{n-1}, x_n) = y_n \in C_{\beta,n}(x_0, y_0, ..., y_{n-1}, x_n).$$

Топологические игры.

Базовые понятия и терминологию по топологическим играм можно найти в [34; 81; 143].

Топологические игры можно охарактеризовать как игры с параметрами, где в качестве параметров выступают некоторые множества. Для топологов важно, что среди параметров встречаются топологические пространства. Топологическую игру можно воспринимать как функтор из некоторой категории в категорию игр.

Если определение игры G зависит только от одного параметра, а именно, некоторого пространства X, то есть игра $G = \Gamma(X)$, то будем писать *пространство* X (γ, Γ)-*благоприятно* если игра $\Gamma(X)$ γ-благоприятна и *пространство* X (γ, Γ)-*неблагоприятно* если игра $\Gamma(X)$ γ-неблагоприятна.

Использование топологических игр в топологии основывается на том, что свойства (γ, Γ)-благоприятности и (γ, Γ)-неблагоприятности являются топологическими свойствами, то есть если пространства X и Y гомеоморфны, то пространство X (γ, Γ)-благоприятно ((γ, Γ)-неблагоприятно) если и только если пространство Y (γ, Γ)-благоприятно ((γ, Γ)-неблагоприятно).

Пусть G_1 и G_2 есть две игры с игроками α и β. Назовем игры G_1 и G_2 *эквивалентными играми*, если игра G_1 γ-благоприятна если и только если игра G_2 γ-благоприятна для всех $\gamma \in \{\alpha, \beta\}$. Будем писать $G_1 \sim G_2$ для эквивалентных игр.

Для топологических игр $\Gamma_1(X_1, ..., X_n)$ и $\Gamma_2(X_1, ..., X_n)$ с одинаковым набором параметров, будем говорить, что они эквивалентны, если для всех наборов параметров $(X_1, ..., X_n)$ игры $\Gamma_1(X_1, ..., X_n)$ и $\Gamma_2(X_1, ..., X_n)$ эквивалентны. Выражение

$$\Gamma_1(X_1, ..., X_n) \sim \Gamma_2(X_1, ..., X_n)$$

означают, как правило, что эти игры эквивалентны для всех допустимых наборов параметров.

Игра Банаха–Мазура

Игра Банаха–Мазура $BM(X)$ играется на топологическом пространстве X, двумя игроками α и β. Положим $U_{-1} = X$. На n-м ходу игрок β выбирает открытое непустое $V_n \subset U_{n-1}$, игрок α выбирает открытое $U_n \subset V_n$. После счетного числа ходов, игрок α выиграл, если пересечение $\bigcap_n U_n$ не пусто.

Фундаментальное значение игры Банаха–Мазура определяется теоремой Банаха–Окстоби [143]: пространство X является бэровским (т.е. обладает свойством Бэра) если и только если у игрока β нет выигрышной стратегии в игре Банаха–Мазура, то есть пространство X (β, BM)-неблагоприятно.

Игра $MB(X)$ похожа на $BM(X)$, разница в том, что начинает игрок α. Эту игру можно описать как $BM(X)$, в которой игрок β первый ход всегда делает $V_0 = X$. Дадим точное определение.

Игра $MB(X)$ играется на топологическом пространстве X, двумя игроками α и β. Положим $U_0 = X$. На первом ходу игрок α выбирает непустое открытое $V_0 \subset U_0$. Для $n > 0$, на n-м ходу игрок β выбирает открытое непустое $V_n \subset U_{n-1}$, игрок α выбирает открытое $U_n \subset V_n$. После счетного числа ходов, игрок α выиграл, если пересечение $\bigcap_n U_n$ не пусто.

Значение игры $MB(X)$ определяется тем что пространство X является тучным если и только если пространство X (β, MB)-неблагоприятно.

Игра $\widetilde{BM}(X)$ является модификацией игры $BM(X)$, если на n-м ходу игрок β выбирает открытое $V_n \subset U_{n-1}$ и еще что то, игрок α выбирает открытое $U_n \subset V_n$ и еще что то. После счетного числа ходов, игрок α выиграл, если $\bigcap_n U_n \neq \varnothing$ и еще дополнительно некоторое условие. $(\beta, \widetilde{BM})$-неблагоприятные пространства являются бэровскими пространства.

Точное определение игры.

Точные определения используются в главе 3.5.

Игра $\mathfrak{g}$ определяется следующими своими компонентами:

(P) P — множеством *игроков* (players);

($\mathcal{S}$) $\mathcal{S} = (S_\alpha)_{\alpha \in P}$ — индексируемое семейством *стратегий* (strategy) игроков, у каждого игрока α есть непустой набор стратегий S_α. Множество

$$\mathcal{S}^{[P]} = \prod \mathcal{S}$$

это *множество всех стратегий* (strategy space) в игре.

(R) R — множество *партий* (plays), запись ходов игроков, после того как они реализуют свои стратегии;

(π) $\pi : \mathcal{S}^{[P]} \to R$ — *игровая функция* (outcome function), реализация стратегий игроков в процессе игры, формирование партии из множества *партий* (plays) R;

($\mathcal{O}$) $\mathcal{O} = (O_\alpha)_{\alpha \in P}$ — семейство *исходов игры* (outcome of the game), с помощью O_α определяется выигрыш для игрока α;

(ν) $\nu : R \to \mathcal{O}^{[P]}$ — *функция выигрыша* (payoff function), определение результата игры, $\nu = \triangle_{\alpha \in P} \nu_\alpha$, где $\nu_\alpha = \pi_\alpha \circ \nu$.

Игра происходит следующим образом:

- каждый из игроков $\alpha \in P$ выбирает стратегию $s_\alpha \in S_\alpha$;
- игроки играют игру в соответствии со своими выбранными стратегиями и получают партию $r = \pi(s) \in R$, где $s = (s_\alpha)_{\alpha \in P} \in \mathcal{S}^{[P]}$;
- с помощью функции выигрыша ν определяется результат игры $(v_\alpha)_{\alpha \in P} = \nu(r) \in \mathcal{O}^{[P]}$, $v_\alpha = \nu_\alpha(r)$ —выигрыш для игрока α.

Мы рассматриваем игры, когда $\mathcal{O} = (\mathbb{D}_\alpha)_{\alpha \in P}$, где $\mathbb{D}_\alpha = \mathbb{D} = \{0, 1\}$ то есть ν_α есть булева функция, 0 трактуется как **ложь** (false), а 1 как **правда** (true). Результат игры $\nu_\alpha(r)$ трактуется как выигрыш игрока α: α выиграл если $\nu_\alpha(r) = 1$ и α проиграл, если $\nu_\alpha(r) = 0$. Такие игры будем называть *играми с булевой функцией выигрыша*.

Игра с булевой функцией выигрыша называется *игрой с нулевой суммой* (zero-sum game), если для любой партии $r \in R$ существует единственный игрок $\alpha \in P$, для которого $\nu_\alpha(r)$ равно 1. Для игр с двумя игроками игра с нулевой суммой если выигрыш первого игрока это проигрыш для второго и проигрыш первого игрока это выигрыш для второго игрока, т.е. $\nu_\beta = \neg \nu_\alpha$ если $P = \{\alpha, \beta\}$.

Игрока α называют *природой* (natura), если ν_α тождественно равно нулю.

Коалиция (coalition) $K \subset P$ это любое множество игроков. Множество $K^c = P \setminus K$ есть *оппозиционная коалиция* (opposite coalition). Множество

$$\mathcal{S}^{[K]} \coloneqq \prod_{\alpha \in K} S_\alpha$$

называется *множеством стратегий для коалиции* K и $s = (s_\alpha)_{\alpha \in K} \in \mathcal{S}^{[K]}$ *стратегией для коалиции* K.

Если игра с булевой функцией выигрыша, то обозначим

$$\nu_K \coloneqq \bigvee_{\alpha \in K} \nu_\alpha$$

Для $r \in R$, $\nu_K(r) = 1$ если и только если $\nu_\alpha(r) = 1$ для некоторого $\alpha \in K$.

Стратегия $s \in \mathcal{S}^{[K]}$ для коалиции K называется K-*выигрышной*, если $\pi_K(\pi(s \frown t)) = 1$ для всех $t \in \mathcal{S}^{[K^c]}$. Игра называется K-*благоприятной*, если у коалиции K существует K-выигрышная стратегия. Игра называется K-*неблагоприятной*, если не существует K-выигрышной стратегии.

Непосредственно проверяется

Утверждение 1.4.1. *Пусть $K \subset T \subset P$. Если игра $\mathfrak{g}$ является K-благоприятной, то $\mathfrak{g}$ является T-благоприятной. Если игра $\mathfrak{g}$ является T-неблагоприятной, то $\mathfrak{g}$ является K-неблагоприятной.*

Для $\alpha \in P$, стратегия $s_\alpha \in S_\alpha$ называется *α-выигрышной* если стратегия $\{\alpha \to s_\alpha\}$ коалиции $\{\alpha\}$ является $\{\alpha\}$-выигрышной. Игра *α-благоприятна* если игра $\{\alpha\}$-благоприятна и игра *α-неблагоприятна* если игра $\{\alpha\}$-неблагоприятна.

Пусть $Q = K^c = P \setminus K$, $s \in \mathcal{S}^{[K]}$ есть стратегия коалиции K и $\alpha \in Q$. Определим игры $\mathfrak{g}' = \mathfrak{g}[s]$ и $\mathfrak{g}'' = \mathfrak{g}[s, \alpha]$. Компоненты игр $\mathfrak{g}'$ и $\mathfrak{g}''$ совпадают, отличия в функции выигрыша для игрока α. Игра $\mathfrak{g}'$ определяется следующими своими компонентами:

(P) Q — множеством игроков;

($\mathcal{S}$) $(S_\alpha)_{\alpha \in Q}$ — семейством стратегий;

(R) R — множество партий как в игре $\mathfrak{g}$;

(π) $\pi' : \mathcal{S}^{[Q]} \to R$, $\pi'(q) = \pi(q \frown s)$ для $q \in \mathcal{S}^{[Q]}$ — игровая функция;

($\mathcal{O}$) игра булева;

(ν) $\nu'', \nu' : R \to \mathcal{O}^{[Q]}$ — функции выигрыша, $\nu''_\delta = \nu'_\delta = \nu_\delta$ если $\delta \neq \alpha$, $\nu'_\alpha = \nu_\alpha$ и $\nu''_\alpha = \nu_{K \cup \{\alpha\}} = \nu_\alpha \vee \nu_K$.

Коалицию K назовем *природой* (nature) если каждый игрок в коалиции является природой, то есть $\nu_K \equiv 0$. Коалицию K назовем *фиктивной* (dummy) если K является природой и для любой коалиции $L \subset Q$ игра является L-выигрышной если и только если игра является $L \cup K$-выигрышной.

Из определений вытекает

Предложение 1.4.2. *Пусть $\mathfrak{g}$ игра с булевой функцией выигрыша, P есть множество игроков игры $\mathfrak{g}$, $K \subset P$ есть коалиция, $Q = K \setminus K$ есть оппозиционная коалиция, $s \in \mathcal{S}^{[K]}$.*

(1) Игра $\mathfrak{g}[s, \alpha]$ является игрой с нулевой сумой для всех $\alpha \in Q$.

(2) Игра $\mathfrak{g}[s]$ является игрой с нулевой сумой если и только если коалиции K является природой. В этом случае игра $\mathfrak{g}[s]$ совпадает с $\mathfrak{g}[s, \alpha]$ для всех $\alpha \in Q$.

(3) Пусть коалиция K является природой. Коалиция K является фиктивной коалицией если и только если $\mathfrak{g}[s] \sim \mathfrak{g}[s']$ для любого $s' \in \mathcal{S}^{[K]}$.

Глава 2

Продолжение и факторизация отображений произведений пространств

2.1 Обозначения, определения и предварительные результаты

Компакты Эберлейна — это компакты, которые можно вложить в банаховы пространства со слабой * топологией. Компактное пространство X является компактом Эберлейна тогда и только тогда, когда X можно вложить в $C_p(Y)$, для некоторых компакта Y.

Компакты Корсона — это компакты, которые можно вложить в Σ-произведение прямых:

$$\{(x_\alpha)_{\alpha \in A} \in \mathbb{R}^A \,:\, |\{\alpha \in A \,:\, x_\alpha \neq 0\}| \leq \omega\}.$$

Пространство X называется *монолитным*, если если для $nw(\overline{M}) \neq |M|$ для любого $M \subset X$. В компактном монолитном пространстве X, $w(\overline{M}) \neq |M|$ для любого $M \subset X$.

Компакты Эберлейна являются компактами Корсона. Классы компактов Корсона и Эберлейна замкнуты относительно счетных произведений, переходу к замкнутым подпространствам, непрерывным образам. Компакты Корсона монолитны и имеют счетную тесноту [79].

Теорема 2.1 (Теорема Шапировского [113], [100, с. 3.25]). *Компакт счетной тесноты с калибром ω_1 сепарабелен.*

Теорема 2.2 (Теорема Хейдона [122]). *Если Y — псевдокомпактное пространство, то компактные подпространства $C_p(Y)$ и $C_p(\beta Y)$ одинаковы (здесь мы отождествляем эти пространства как множества). Следовательно, компактные подпространства $C_p(Y)$ являются компактами Эберлейна.*

Теорема 2.3 (Теорема Прейсс-Симона [118]). *Любое псевдокомпактное подпространство компакта Эберлейна является компактом.*

Теорема 2.4 (Теорема Розенталя [125, Theorem 4.5]). *Компакт Эберлейна со счетным числом Суслина метризуем.*

Отображение пространств $f : X \to Y$ называется $\mathbb{R}$-*факторным*, если функция $g : Y \to \mathbb{R}$ непрерывна если и только если непрерывна функция $g \circ f$.

Предложение 2.1.1 ([86, Lemma 5.10]). *Пусть X псевдокомпактное пространство, Y есть компакт Эберлейна. Любое непрерывное сюръективное отображение $f : X \to Y$ $\mathbb{R}$-факторно.*

Пространство X называется *pc-Гротендика* (*pe-Гротендика*) если любое псевдокомпактное подпространство $C_p(X)$ является компактом (Эберлейна). Пространство X называется *слабо pc-Гротендика* если любое псевдокомпактное подпространство $C_p(X)$ имеет компактное замыкание в $C_p(X)$) [55].

Предложение 2.1.2 ([55]). *Ниже перечисленные классы пространств являются пространствами слабо pc-Гротендика:*

(1) *компактные пространства;*

(2) *счетно компактные пространства;*

(3) *пространства счетной тесноты;*

(4) *сепарабельные пространства;*

(5) *k-пространства;*

(6) *пространства с плотным σ-компактным подпространством.*

2.2 Продолжение функций двух переменных

Продолжение функций и функциональные пространства

Из определений несложно проверяется:

Предложение 2.2.1. *Пусть X и Y пространства. Тогда*

$$\Lambda_{X,Y}(SC(X \times Y)) = C(X, C_p(Y)),$$
$$\Lambda_{X,Y}(C^*(X \times Y)) \supset C^*(X, C_u^*(Y)).$$

Предложение 2.2.2. *Пусть X и Y пространства, $f \in SC(X \times Y)$, $\varphi = \Lambda_{X,Y}(f)$. Тогда следующие условия эквивалентны:*

(a) *функцию f можно продолжить до раздельно непрерывной функции*

$$\hat{f} : \beta X \times Y \to \mathbb{R};$$

(b) *замыкание $\varphi(X)$ в $C_p(Y)$ компактно.*

Доказательство. $(a) \Rightarrow (b)$. Из утверждения 2.2.1 следует, что отображение

$$\hat{\varphi} = \Lambda_{\beta X,Y}(f) : \beta X \to C_p(Y)$$

непрерывно. Множество $\varphi(X)$ содержится в компакте $\hat{\varphi}(\beta X)$ и его замыкание компактно.

$(b) \Rightarrow (a)$. Из того, что замыкание $\varphi(X)$ в $C_p(Y)$ компактно, отображение φ можно продолжить до непрерывного отображения $\hat{\varphi} : \beta X \to C_p(Y)$. Из предложение 2.2.1 следует, что функция

$$\hat{f} = \Lambda^{-1}_{\beta X,Y} : \beta X \times Y \to \mathbb{R}$$

является раздельно непрерывной. Ясно, что $\hat{f}$ является продолжением f. □

Предложение 2.2.3. *Пусть X и Y пространства, $f \in C^*(X \times Y)$, $\varphi = \Lambda_{X,Y}(f)$. Тогда следующие условия эквивалентны:*

(a) *функцию f можно продолжить до непрерывной функции*

$$\hat{f} : \beta X \times \beta Y \to \mathbb{R};$$

(b) *$\varphi \in C(X, C^*_u(Y))$ и замыкание $\varphi(X)$ в $C^*_u(Y)$ компактно.*

Доказательство. $(a) \Rightarrow (b)$. Отображение

$$\hat{\varphi} = \Lambda_{\beta X,\beta Y}(f) : \beta X \to C_u(\beta Y)$$

непрерывно [130, Theorem XII.5.3, p. 265]. Учитывая что, $C_u(\beta Y)$ канонически гомеоморфно $C^*_u(Y)$, можно считать, что $\hat{f}$ непрерывно отображает βX в $C^*_u(X)$. Тогда $\varphi(X) \subset \hat{\varphi}(\beta X)$ и замыкание $\varphi(X)$ в $C^*_u(X)$ компактно.

$(b) \Rightarrow (a)$. Из того что φ непрерывно и замыкание $\varphi(X)$ в $C^*_u(Y)$ компактно, отображение φ можно продолжить до непрерывного отображения $\hat{\varphi} : \beta X \to C^*_u(Y)$. Из предложение 2.2.1 следует, что функция

$$\hat{f} = \Lambda^{-1}_{\beta X,\beta Y} : \beta X \times \beta Y \to \mathbb{R}$$

является непрерывной. Ясно, что $\hat{f}$ является продолжением f. □

Предложение 2.2.4. *Пусть X и Y псевдокомпактные пространства, $f \in SC(X \times Y)$, $\varphi = \Lambda_{X,Y}(f)$. Тогда следующие условия эквивалентны:*

(a) *функцию f можно продолжить до раздельно непрерывной функции на $\beta X \times Y$;*

(b) *функцию f можно продолжить до раздельно непрерывной функции на $X \times \beta Y$;*

(c) *функцию f можно продолжить до раздельно непрерывной функции на $\beta X \times \beta Y$;*

(d) *замыкание $\varphi(X)$ в $C_p(Y)$ компактно;*

(e) *$\varphi(X)$ есть компакт;*

(f) *$\varphi(X)$ есть компакт Эберлейна.*

Доказательство. Импликации $(c) \Rightarrow (a)$, $(c) \Rightarrow (b)$, $(e) \Rightarrow (d)$ и $(f) \Rightarrow (e)$ очевидны. Импликации $(a) \Leftrightarrow (d)$ вытекают из предложения 2.2.2.

$(d) \Rightarrow (f)$ Пусть K есть замыкание $\varphi(X)$ в $C_p(Y)$. Тогда K — компакт и из теоремы Хейдона 2.2 следует, что K будет компактно компакт в $C_p(\beta Y)$ и является компактом Эберлейна. Поэтому псевдокомпактное пространство $\varphi(X)$ плотно лежит в компакте Эберлейна K. Из теоремы Прейсса-Симона 2.3 следует что $\varphi(X) = K$ — компакт Эберлейна.

$(e) \Rightarrow (c)$ Из теоремы Хейдона 2.2 следует, что $\varphi(X)$ компактно в $C_p(\beta Y)$, так как мы можем предположить, что φ непрерывно отображает X в $C_p(\beta Y)$. Из предложения 2.2.2 следует что функция $f_1 = \Lambda^{-1}_{X,\beta Y}(\varphi)$ продолжается до раздельно непрерывной функции

$$\hat{f} : \beta X \times \beta Y \to \mathbb{R}.$$

$(b) \Rightarrow (c)$ вытекают из $(a) \Rightarrow (c)$. □

Предложение 2.2.5. *Пусть X и Y псевдокомпактные пространства, $f \in C(X \times Y)$, $\varphi = \Lambda_{X,Y}(f)$. Тогда следующие условия эквивалентны:*

(a) *функцию f можно продолжить до непрерывной функции на $\beta X \times Y$;*

(b) *функцию f можно продолжить до непрерывной функции на $X \times \beta Y$;*

(c) *функцию f можно продолжить до непрерывной функции на $\beta X \times \beta Y$;*

(d) *отображение $\varphi : X \to C_u(Y)$ непрерывно;*

(e) *$\varphi(X)$ есть компактное подпространство $C_u(Y)$;*

(f) *замыкание $\varphi(X)$ в $C_u(Y)$ компактно.*

Доказательство. Импликации $(c) \Rightarrow (a)$, $(c) \Rightarrow (b)$ и $(e) \Rightarrow (f)$ очевидны. Импликации $(c) \Rightarrow (d)$ и $(c) \Rightarrow (f)$ вытекают из предложения 2.2.2.

$(a) \Rightarrow (c)$ Пусть f_1 — непрерывное продолжение f на $\beta X \times Y$. Произведение $\beta X \times Y$ псевдокомпактно как произведение компакта и псевдокомпактного пространства [110, следствие 3.10.27]. Из теоремы Гликсберга [137] следует что функцию f_1 можно продолжить до непрерывной функции на $\beta X \times \beta Y$.

$(b) \Rightarrow (c)$ вытекает из $(a) \Rightarrow (c)$.

$(d) \Rightarrow (c)$ Так как φ непрерывно, то $\varphi(X)$ есть псевдокомпактное подпространство метрического пространства $C_u(X)$. Следовательно, $\varphi(X)$ есть компакт. Из предложения 2.2.3 вытекает (c).

$(d) \Rightarrow (e)$ Поскольку отображение φ непрерывно, $\varphi(X)$ является псевдокомпактным подпространством метрическое пространство $C_u(X)$, поэтому $\varphi(X)$ компактно в $C_u(X)$.

$(f) \Rightarrow (d)$ Пусть F есть замыкание $\varphi(X)$ в $C_u(Y)$. Тождественное отображение $C_u(Y)$ на $C_p(Y)$ непрерывно. Отсюда вытекает, что топологии поточечной сходимости и равномерной сходимости совпадают на компакте F и тем более на $\varphi(X)$. Следовательно, отображение $\varphi : X \to C_u(Y)$ непрерывно. □

Определение 2.5 ([16])**.** Пару пространств X и Y назовем *парой Гротендика*, если любой непрерывный образ X в $C_p(Y)$ имеет компактное замыкание.

Ясно, если (X, Y) пара Гротендика, то X псевдокомпактное пространство. Из предложения 2.2.2 вытекает

Предложение 2.2.6. *Пространства X и Y образуют пару Гротендику если и только если любая раздельно непрерывная функция на $X \times Y$ продолжается до раздельно непрерывной функции на $\beta X \times Y$.*

Предложение 2.2.7. *Пусть X и Y псевдокомпактные пространства. Тогда следующие условия эквивалентны:*

(a) *(X, Y) пара Гротендика;*

(b) *(Y, X) пара Гротендика;*

(c) *любую раздельно непрерывную функцию на $X \times Y$ можно продолжить до раздельно непрерывной функции на $\beta X \times \beta Y$;*

(d) *любой непрерывный образ Y в $C_p(X)$ имеет компактное замыкание;*

(d) *любой непрерывный образ Y в $C_p(X)$ компакт;*

(e) *любой непрерывный образ Y в $C_p(X)$ компакт Эберлейна.*

Из предложения 2.2.7 вытекает следующее утверждение.

Предложение 2.2.8. *Пусть X — псевдокомпактные пространство. Тогда следующие условия эквивалентны:*

(a) (Y, X) *пара Гротендика для любого псевдокомпактного* Y*;*

(b) X *— пространство слабо рс-Гротендика;*

(c) X *— пространство рс-Гротендика;*

(d) X *— пространство ре-Гротендика.*

Из предложений 2.1.2 и 2.2.8 вытекает следующее утверждение.

Предложение 2.2.9. *Псевдокомпактные пространства из ниже перечисленных классов пространств являются пространствами рс-Гротендика:*

(1) *компактные пространства;*

(2) *счетно компактные пространства;*

(3) *пространства счетной тесноты;*

(4) *сепарабельные пространства;*

(5) k*-пространства;*

(6) *пространства с плотным* σ*-компактным подпространством.*

Предложение 2.2.10. *Пусть X и Y есть компактные пространства, $\Phi \in SC(X \times Y)$, $Z \subset X \times Y$ псевдокомпактно и функция $\Phi|_Z$ непрерывна. Тогда функция $\Phi|_{\overline{Z}}$ непрерывна.*

Доказательство. Положим

$$
\begin{aligned}
&\varphi_X = \Lambda_{X,Y}(\Phi) : X \to C_p(Y), && X' = \varphi_X(X),\\
&\varphi_Y : Y \to C_p(X'),\ \varphi_Y(y)(f) = f(y), && Y' = \varphi_Y(Y),\\
&\varphi = \varphi_X \times \varphi_Y : X \times Y \to X' \times Y', &&\\
&\Phi' : X' \times Y' \to \mathbb{R},\ \Phi'(x', f) = f(x'). &&
\end{aligned}
$$

Тогда X' и Y' являются компактами Эберлейна, отображение φ непрерывно, функция Φ' раздельно непрерывна и $\Phi = \Phi' \circ \varphi$. Пусть $Z' = \varphi(Z)$. Так как Z' псевдокомпактно, то из теоремы Прейсса–Симона 2.3 вытекает, что Z' есть компакт Эберлейна. Из предложения 2.1.1 вытекает, что отображение $\varphi|_Z : Z \to Z'$ $\mathbb{R}$-факторно. Так как функция $\Phi|_Z = \Phi'|_{Z'} \circ \varphi|_Z$ непрерывна и отображение $\varphi|_Z : Z \to Z'$ $\mathbb{R}$-факторно, то функция $\Phi'|_{Z'}$ непрерывна. Следовательно, функция $\Phi|_{\overline{Z}} = \Phi'|_{Z'} \circ \varphi|_{\overline{Z}}$ непрерывна. □

Квазинепрерывные функции на произведении двух пространств

Определим топологические игры $G_g(y_*, Y)$ и $G_{\tilde{g}}(y_*, Y)$ для пространства Y и $y \in Y$ [21; 112] . Играют игроки α и β. На nм ходу игрок α выбирает

- открытую окрестность $W_n \subset Y$ точки y_* в игре $G_g(y_*, Y)$;
- открытое непустое множество $W_n \subset Y$ в игре $G_{\tilde{g}}(y_*, Y)$.

Игрок β выбирает $y_n \in W_n$. Игрок α выигрывает, если $y_* \in \overline{\{y_n : n \in \omega\}}$.

Точка $x \in X$ называется *W-точкой* (*$\widetilde{W}$-точкой*), если у игрока α есть выигрышная стратегия в игре $G_g(y_*, Y)$ ($G_{\tilde{g}}(y_*, Y)$). Пространство X называется W-пространством ($\widetilde{W}$-пространством), если каждая точка в Y является W-точкой ($\widetilde{W}$-точкой) [21; 112].

Предложение 2.2.11 ([21, Теорема 11])**.** *Предположим, что X и Y — топологические пространства и $\Phi : X \times Y \to \mathbb{R}$ — раздельно непрерывная функция. Если X — бэровское пространство, Y — $\widetilde{W}$-пространство, то Φ квазинепрерывно.*

Предложение 2.2.12. *Предположим, что X и Y — топологические пространства, $\Phi : X \times Y \to \mathbb{R}$ — раздельно непрерывная функция, $M \subset Y \subset \overline{M}$ и функция*

$$\Phi|_{X \times M} : X \times M \to \mathbb{R}$$

является квазинепрерывным. Тогда Φ квазинепрерывна.

Доказательство. Пусть $(x', y') \in X \times Y$ и $W = U \times V$ есть окрестность точки (x', y') и $O \subset \mathbb{R}$ есть окрестность $\Phi(x', y')$. Пусть S есть такая окрестность точек $\Phi(x', y')$, что $\overline{S} \subset O$. Так как Φ является раздельно непрерывным, то $\Phi(x', y'') \in S$ для $y'' \in M \cap V$. Так как $\Psi = \Phi|_{X \times M}$ является квазинепрерывным, то

$$\Psi(U' \times (M \cap V')) \subset S$$

для некоторого непустого открытого $U' \times V' \subset U \times V$. Тогда $\Phi(U' \times V') \subset \overline{S} \subset O$. $\square$

Из предложений 2.2.11 и 2.2.12 вытекает следующее предложение.

Предложение 2.2.13. *Предположим, что X и Y — топологические пространства, $Z \subset Y = \overline{Z}$ и $\Phi : X \times Y \to \mathbb{R}$ — раздельно непрерывная функция. Если X — бэровское пространство, а Z — $\widetilde{W}$-пространство, то Φ квазинепрерывно.*

Пространство со счетным характером является W-пространством [112].

Предложение 2.2.14. *Пространство со счетным π-характером является $\widetilde{W}$-пространством.*

Доказательство. Пусть Y пространство со счетным π-характерном, $y_* \in Y$ и $(W_n)_{n\in\omega}$ есть счетная π-база в y_*.

Укажем выигрышную стратегию для игрока α в игре $G_{\tilde{g}}(y_*, Y)$. На nм ходу игрок выбирает W_n. $\square$

Из предложений 2.2.13 и 2.2.14 вытекает следующее предложение.

Следствие 2.6. *Предположим, что X и Y — топологические пространства и $\Phi : X \times Y \to \mathbb{R}$ — раздельно непрерывная функция. Если X — бэровское пространство и $\{y \in Y \,:\, \pi\chi(y, Y) \leq \omega\}$ плотно в Y, то Φ квазинепрерывно.*

Функции двух переменных, продолжаемые до раздельно непрерывных функций

Предложение 2.2.15. *Пусть X и Y есть псевдокомпактные пространства, $\Phi : X \times Y \to \mathbb{R}$ раздельно непрерывная квазинепрерывная функция. Тогда f продолжается до раздельно непрерывной функции $\widehat{\Phi} : \beta X \times Y \to \mathbb{R}$.*

Доказательство. Обозначим через C множество точек в $X \times Y$, в которых функция Φ непрерывна. Обозначим $C_y = \{x \in X \,:\, (x, y) \in C\}$ для $y \in Y$.

Лемма 2.2.16. *Множество C_y плотно в X для всех $y \in Y$.*

Доказательство. Предположим, противное, то есть $U' = X \setminus \overline{C_{y'}} \neq \varnothing$ для некоторого $y' \in Y$. Положим

$$\Psi(x, y) = |\Phi(x, y) - \Phi(x, y')|$$

для $(x, y) \in X \times Y$. Функция Ψ не отрицательна, раздельно непрерывна, квазинепрерывна, $\Psi(x, y') = 0$ для $x \in X$ и разрывна в точках множества $U' \times \{y'\}$. Для $O \subset X \times Y$ и $(x, y) \in X \times Y$ положим

$$\omega_\Psi(O) = \sup\{|\Phi(x_1, y_1) - \Phi(x_2, y_2)| \,:\, (x_1, y_1), (x_2, y_2) \in O\},$$
$$\omega_\Psi(x, y) = \inf\{\omega_\Psi(O) \,:\, O \text{ есть окрестность точки } (x, y)\}.$$

Положим

$$F_n = \{(x, y) \in X \times Y \,:\, \omega_\Psi(x, y) \geq \frac{1}{2^n}\}, \qquad F'_n = \{x \in X \,:\, (x, y') \in F_n\}$$

для $n \in \omega$. Множество F_n замкнуто в $X \times Y$ и F'_n замкнуто в X. Множество $\bigcup_{n\in\omega} F_n$ является множеством точек разрыва функции Ψ, поэтому

$U' \subset \bigcup_{n\in\omega} F'_n$. Так как X есть бэровское пространство, то существует непустое открытое $U \subset U' \cap F'_n$ для некоторого $n \in \omega$. Положим $\varepsilon = \frac{1}{3\cdot 2^n}$ и

$$M = \{(x,y) \in X \times Y \,:\, \Psi(x,y) > 2\varepsilon\}.$$

Тогда $U \times \{y'\} \subset \overline{M}$. Положим $U_{-1} = U$ и $V_{-1} = Y$. Индукцией по n построим последовательность

$$(x_n, V_n, U_n, W_n)_{n\in\omega},$$

где $x_n \in U$, $V_n \subset Y$ открытая окрестность y', $U_n \subset U$ открытое непустое множество, $W_n \subset Y$ открытое непустое множество таким образом, что для каждого $n \in \omega$ выполняются условия:

(1) $x_n \in U_n$ и $\overline{U_n} \subset U_{n-1}$;

(2) $y' \in V_n$, $\overline{V_n} \subset V_{n-1}$ и $W_n \subset V_n$;

(3) $\Psi(\{x_n\} \times V_n) \subset [0, \varepsilon)$;

(4) $\Psi(U_n \times W_n) \subset (2\varepsilon, +\infty)$.

Проведем построение на nм шаге. Так как $U \times \{y'\} \subset \overline{M}$, $y' \in V_{n-1}$ и $U_{n-1} \subset U$, то существует $(x'', y'') \in M \cap (U_{n-1} \times V_{n-1})$. Тогда $\Psi(x'', y'') > 2\varepsilon$. Так как функция квазинепрерывна, то $\Psi(U_n \times W_n) \subset (2\varepsilon, +\infty)$ для некоторых непустых открытых $U_n \subset \overline{U_n} \subset U_{n-1}$ и $W_n \subset \overline{W_n} \subset V_{n-1}$. Возьмем $x_n \in U_n$. Выберем окрестность V_n точки y' таким образом, $\overline{V_n} \subset V_{n-1}$ и $\Psi(\{x_n\} \times V_n) \subset [0, \varepsilon)$.

Пусть $G = \bigcap_{n\in\omega} U_n$. Так как X псевдокомпактно, то G непустое замкнутое подмножество X. Так как Y псевдокомпактно, то последовательность $(W_n)_{n\in\omega}$ накапливается к некоторой точке $y_* \in Y$. Положим $f(x) = \Psi(x, y_*)$ для $x \in X$. Функция $f : X \to \mathbb{R}$ непрерывна. Из (2) вытекает, что $y_* \in Q = \bigcap_{n\in\omega} V_n$. Из (4) вытекает, что $f(G) \subset [2\varepsilon, +\infty)$. Так как $y_* \in V_n$, то из (3) вытекает, что $f(x_n) < \varepsilon$ для $n \in \omega$. Возьмем такую окрестность O_n точки x_n, что $O_n \subset U_n$ и $f(O_n) \subset [0, \varepsilon)$. Так как X псевдокомпактно, то последовательность $(O_n)_{n\in\omega}$ накапливается к некоторой точке $x_* \in G$. Так как $f(O_n) \subset [0, \varepsilon)$ для $n \in \omega$, то $f(x_*) \le \varepsilon$. Противоречие с тем что $x_* \in G$ и $f(G) \subset [2\varepsilon, +\infty)$. □

Для $x \in X$ и $y \in Y$, обозначим $\Phi_y(x) = \Phi(x,y)$. Функция $\Phi_y : X \to \mathbb{R}$ непрерывна и ограниченны. Пусть $\widehat{\Phi}_y : \beta X \to \mathbb{R}$ есть непрерывное продолжение Φ_y. Положим $\widehat{\Phi}(x,y) = \widehat{\Phi}^x(y) = \widehat{\Phi}_y(x)$ для $x \in \beta X$ и $y \in Y$. Проверим, что функция $\widehat{\Phi}$ раздельно непрерывна. Предположим противное. Тогда $f = \widehat{\Phi}^{\bar{x}}$ разрывна для некоторого $\bar{x} \in \beta X$. Пусть $\bar{y} \in Y$ точка разрыва f. Не ограничивая общности, можно считать, что $f(\bar{y}) = 0$ и $\bar{y} \in \overline{M}$, где $M = f^{-1}([1, +\infty))$. Положим $W = \operatorname{Int} \Phi^{-1}((-\infty, \frac{1}{3}))$ и $U = \{x \in X \,:\, (x, \bar{y}) \in W\}$. Из Леммы 2.2.16 вытекает, что $C_{\bar{y}}$ плотно в X. Следовательно, $\bar{x} \in \overline{U}^{\beta X}$.

Для $y \in M$, пусть $U_y \subset \beta X$ есть такая открытая окрестность точки $\bar{x}$, что $\widehat{\Phi}_y(U_y) \subset (\frac{2}{3}, +\infty)$.

Положим $V_{-1} = Y$. Индукцией по $n \in \omega$ построим $y_n \in Y$, U_n, $V_n \ni \bar{y}$, где U_n открытое непустое подмножество X и V_n открыто в Y. При этом выполняются условия:

(1) $y_n \in V_{n-1} \cap M$;

(2) $U_n \times V_n \subset W$;

(3) $U_n \subset \bigcap_{i=0}^n U_{y_i}$;

(4) $\overline{V_n} \subset V_{n-1}$.

На nм ходу выберем $y_n \in V_{n-1} \cap M$. Пусть $U' = \bigcap_{i=0}^n U_{y_i}$ и $(x', \bar{y}) \in W \cap (U' \times V_{n-1})$. Возьмем открытые $U_n \subset X$ и $V_n \subset Y$, так что

$$(x', \bar{y}) \in U_n \times V_n \subset \overline{U_n \times V_n} \subset W \cap (U' \times V_{n-1}).$$

Так как пространство X псевдокомпактно, то последовательность $(U_n)_n$ накапливается к некоторой точке $x_* \in X$. Положим $g = \widehat{\Phi}^{x_*}$. Так как (3), то $g(y_n) \geq \frac{2}{3}$. Так как (1) и функция g непрерывна, то существует существует такая окрестность S_n точки y_n, что $g(S_n) \subset (\frac{1}{2}, +\infty)$ и $S_n \subset V_{n-1}$. Так как (4) и пространство Y псевдокомпактно то $(S_n)_n$ накапливается к некоторой точке $y_* \in G = \bigcap_n V_n$. Из непрерывности g вытекает, что $g(y_*) \geq \frac{1}{2}$. Так как (2), то $g(y_*) \leq \frac{1}{3}$. Противоречие. □

Теорема 2.7. *Пусть X и Y есть псевдокомпактные пространства, $\Phi : X \times Y \to \mathbb{R}$ раздельно непрерывная функция. Обозначим*

$$\varphi_X : X \to C_p(Y),\ \varphi_X(x)(y) = \Phi(x, y),$$
$$\varphi_Y : Y \to C_p(X),\ \varphi_Y(y)(x) = \Phi(x, y).$$

Следующие условия эквивалентны:

(1) *существует плотное типа G_δ подмножество $D \subset Y = \overline{D}$ так что Φ непрерывна в каждой точке $(x, y) \in X \times D$;*

(2) *функция Φ квазинепрерывна;*

(3) *замыкание $\varphi_X(X)$ в $C_p(Y)$ компактно;*

(4) *$\varphi_X(X)$ является компактом Эберлейна;*

(5) *Φ продолжается до раздельно непрерывной функции на $\beta X \times Y$;*

(6) *Φ продолжается до раздельно непрерывной функции на $\beta X \times \beta Y$;*

(7) Φ *продолжается до раздельно непрерывной функции на* $X \times \beta Y$*;*

(8) $\varphi_Y(Y)$ *является компактом Эберлейна;*

(9) *замыкание* $\varphi_Y(Y)$ *в* $C_p(X)$ *компактно;*

(10) *существует плотное типа* G_δ *подмножество* $E \subset X = \overline{E}$ *так что* Φ *непрерывна в каждой точке* $(x, y) \in E \times Y$*.*

Доказательство. Эквивалентность условий с (3) по (9) вытекают из предложения 2.2.7. Импликации (1) $\Rightarrow$ (2) $\Leftarrow$ (10) очевидны. Импликация (2) $\Rightarrow$ (5) это предложение 2.2.15.

Докажем (6) $\Rightarrow$ (1). Пусть $\widehat{\Phi} : \beta X \times \beta Y \to \mathbb{R}$ есть раздельно непрерывное продолжение функции Φ. Пара компактных пространств βX и βY удовлетворяют свойству Намиоки $\mathcal{N}(\beta X, \beta Y)$ [117]. Следовательно, существует плотное типа G_δ подмножество $D' \subset \beta Y = \overline{D'}$ так что $\widehat{\Phi}$ непрерывна в каждой точке $(x, y) \in \beta X \times D$. Так как Y псевдокомпактно, то $D = Y \cap D'$ плотно в Y и типа G_δ в Y. Тогда Φ непрерывна в каждой точке $(x, y) \in X \times D$.

Импликация (6) $\Rightarrow$ (10) вытекает из импликации (6) $\Rightarrow$ (1). □

Теорема 2.8. *Пусть* X *есть псевдокомпактное пространство и* $Y \subset C_p(X)$ *псевдокомпактно. Следующие условия эквивалентны:*

(1) $\overline{Y}$ *компактно;*

(2) Y *компактно;*

(3) Y *есть компакт Эберлейна;*

(4) Y *является слабо pc-Гротендика;*

(5) *множество* $\{f \in Y \,:\,$ *ограничение на* Y *топологий поточечной и равномерной сходимости в* f *совпадают* $\}$ *плотно в* Y*;*

(6) *множество* $\{f \in Y \,:\, \chi(f, Y) \leq \omega\}$ *плотно в* Y*;*

(7) *множество* $\{f \in Y \,:\, \pi\chi(f, Y) \leq \omega\}$ *плотно в* Y*.*

Доказательство. Положим $\Phi : X \times T \to \mathbb{R}$, $(x, f) \mapsto f(x)$, $\varphi_Y : Y \to C_p(X)$, $\varphi_Y(y)(x) = \Phi(x, y)$. Тогда φ_Y есть тождественное отображение Y на Y.

(1) $\Leftrightarrow$ (2) $\Leftrightarrow$ (3). Эти импликации вытекают из теоремы 2.7 (8) и (9).

(2) $\Rightarrow$ (4). Эта импликация вытекает из теоремы Асанова–Величко [96] (см. также [65, III.4.1. Theorem]).

(4) $\Rightarrow$ (1). Так как Y является pc-Гротендика, то $\varphi_X(X)$ является компактом. Из теоремы 2.7 (9) вытекает, что $\overline{Y}$ является компактом.

(2) $\Rightarrow$ (5). Отождествим $C(X)$ и $C(\beta X)$ естественным образом. Из теоремы Хейдона 2.2 вытекает, что ограничение топологий $C_p(X)$ и $C_p(\beta X)$ на Y совпадают. Следовательно, импликацию достаточно доказать для компактных X. Для компактных X эта импликация в точности теорема Намиоки [117, Theorem 2.31].

Очевидно, (5) $\Rightarrow$ (6) $\Rightarrow$ (7).

(7) $\Rightarrow$ (2). Из следствия 2.6 вытекает, что функция Φ квазинепрерывна. Из теоремы 2.7 (8) вытекает, что Y является компактом. □

2.3 Продолжение функций нескольких переменных

Продолжение раздельно непрерывных функций с произведения нескольких пространств

Пусть X_1, X_2, ... , X_n есть псевдокомпактные пространства. В этом разделе выясняется когда любая раздельно непрерывная функция Φ на произведении

$$X = X_1 \times X_2 \times ... \times X_n$$

пространств продолжается на произведение

$$\widetilde{X} = \beta X_1 \times \beta X_2 \times ... \times \beta X_n$$

стоун–чеховских произведений.

Утверждение 2.3.1. *Пусть Y псевдокомпактное пространство, (Y, X_i) пара Гротендика для $i = 1, ..., n$. Тогда любое непрерывное отображение φ : $Y \to SC_p(X)$ продолжается до непрерывного отображения $\hat{\varphi} : \beta Y \to SC_p(X)$.*

Доказательство. Подпространство $\varphi(Y) \subset SC_p(X) \subset \mathbb{R}^X$ псевдокомпактно, поэтому замыкание K множества $\varphi(Y)$ в $\mathbb{R}^X$ компактно. Отображение φ продолжается до непрерывного отображения $\hat{\varphi} : \beta Y \to K$. Нам достаточно проверить, что $K \subset SC_p(X)$. Пусть $y_* \in \beta Y$ и $\Phi = \hat{\varphi}(y_*)$. Проверим, что Φ раздельно непрерывная функция, то есть для $i \in \{1, 2, ..., n\}$ и

$$\bar{x} = (x_1, ..., x_{i-1}, x_{i+1}, ..., x_n) \in X_1 \times X_2 \times ... X_{i-1} \times X_{i+1} \times ... \times X_n$$

функция

$$f = r(\Phi, X, \bar{x}) : X_i \to \mathbb{R},\ x \mapsto \Phi(x_1, ..., x_{i-1}, x, x_{i+1}, ..., x_n)$$

непрерывна. Положим

$$\Omega : Y \times X_i \to \mathbb{R},\ (x, y) \mapsto r(\varphi(y), X, \bar{x})(x).$$

Так как функция Ω раздельно непрерывна и (Y, X_i) пара Гротендика, то Ω продолжается до раздельно непрерывной функции $\widehat{\Omega} : \beta\, Y \times X_i \to \mathbb{R}$. Тогда $\Lambda_{Y,X_i}(\beta\, Y) \subset C_p(X_i)$ и $\Lambda_{Y,X_i}(y_*) = f$. Следовательно, $f \in C_p(X_i)$. $\square$

Утверждение 2.3.2. *Пусть $i \in \{1, 2, ..., n\}$ и для всех $j \neq i$ пара (X_i, X_j) является парой Гротендика. Тогда любая раздельно непрерывная функция Φ на*

$$X_1 \times X_2 \times ... \times X_n$$

продолжается на

$$X_1 \times X_2 \times ... \times \beta\, X_i \times ... \times X_n.$$

Доказательство. Пусть $X' = \prod_{j \neq i} X_j$ и $\varphi = \Lambda_i^X(\Phi) : X_i \to SC_p(X')$. Из утверждения 2.3.1 вытекает, что отображение φ продолжается до непрерывного отображения $\hat{\varphi} : \beta\, X_i \to SC_p(X')$. Положим $\widehat{\Phi}(\bar{x}, x) = \hat{\varphi}(x)(\bar{x})$ для $\bar{x} \in X'$ и $x \in \beta\, X_i$. Продолжение $\widehat{\Phi}$ функции Φ является искомым. $\square$

Теорема 2.9. *Пусть X_1, X_2, ... , X_n есть псевдокомпактные пространства и для различных $i, j \in \{1, 2, ..., n\}$ пара (X_i, X_j) является парой Гротендика. Тогда любая раздельно непрерывная функция на произведение*

$$X_1 \times X_2 \times ... \times X_n$$

продолжается до раздельно непрерывной функции на произведение

$$\beta\, X_1 \times \beta\, X_2 \times ... \times \beta\, X_n.$$

Доказательство. Обозначим

$$X = X_1 \times X_2 \times ... \times X_n,$$
$$\widetilde{X} = \beta\, X_1 \times \beta\, X_2 \times ... \times \beta\, X_n.$$

Пусть $\Phi : X \to \mathbb{R}$ есть раздельно непрерывная функция. Для $l = 0, 1, ..., n$ и $m = 1, ..., n$ положим

$$Y_{l,m} = \begin{cases} \beta\, X_m, & m \leq l \\ X_m, & m > l, \end{cases}$$

$Y_l = \prod_{m=1}^n Y_{l,m}$. Отметим, что $Y_0 = X$ и $\widetilde{X} = Y_n$. Так как компактные пространства являются пространства pc-Гротендика (утверждение 2.2.9), то для $l = 0, 1, ..., n$ и для различных $i, j \in \{1, 2, ..., n\}$ пара $(Y_{l,i}, Y_{l,j})$ является парой Гротендика.

Индукцией по $l = 0, 1, ..., n$ построим раздельно непрерывные функции Φ_l на Y_l, так что Φ_{l+1} продолжает Φ_l. Положим $\Phi_0 = \Phi$. Предположим, функция F_l построена. Из утверждения 2.3.2 вытекает, что раздельно непрерывная функция F_l продолжается до раздельно непрерывной функции Φ_{l+1} на

$$Y_{l,1} \times ... \times Y_{l,l} \times \beta\, Y_{l,l+1} \times Y_{l,l+2} \times ... \times Y_{l,n} = Y_{l+1}.$$

Функция Φ_n раздельно непрерывна и продолжает Φ с X на $\widetilde{X}$. $\square$

Из теоремы 2.9 и утверждения 2.3.2 вытекают следующие следствия.

Следствие 2.10. *Пусть $X_1,\ X_2,\ \dots\ ,\ X_n$ — псевдокомпактные пространства и X_i — пространство pc-Гротендика для $i < n$. Тогда любая раздельно непрерывная функция Φ на произведение $\prod_{i=1}^n X_i$ продолжается до раздельно непрерывной функции на произведение $\prod_{i=1}^n \beta\, X_i$ стоун–чеховских расширений.*

Следствие 2.11. *Пусть $X_1,\ \dots\ ,\ X_{n-1}$ — счетно компактные пространства, X_n — псевдокомпактное пространство. Тогда любая раздельно непрерывная функция Φ на произведение $\prod_{i=1}^n X_i$ продолжается на произведение $\prod_{i=1}^n \beta\, X_i$ стоун–чеховских расширений.*

Следствие 2.12. *Пусть $X_1,\ X_2,\ \dots\ ,\ X_n$ — псевдокомпактные пространства pc-Гротендика. Тогда любая раздельно непрерывная функция Φ на произведение $\prod_{i=1}^n X_i$ продолжается до раздельно непрерывной функции на произведение $\prod_{i=1}^n \beta\, X_i$ стоун–чеховских расширений.*

Следствие 2.13. *Пусть $X_1,\ X_2,\ \dots\ ,\ X_n$ — счетно компактные пространства. Тогда любая раздельно непрерывная функция Φ на произведение $\prod_{i=1}^n X_i$ продолжается на произведение $\prod_{i=1}^n \beta\, X_i$ стоун–чеховских расширений.*

Функции нескольких переменных, продолжаемые до раздельно непрерывных функций

Утверждение 2.3.3. *Пусть X_1, X_2 и X_3 псевдокомпактные пространства, $\Phi : X_1 \times X_2 \times X_3 \to \mathbb{R}$ 2-β-продолжаемая функция. Тогда Φ продолжается до раздельно непрерывной функции $\widehat{\Phi} : \beta X_1 \times \beta X_2 \times \beta X_3 \to \mathbb{R}$.*

Доказательство. Положим $Y_1 = \beta X_1$, $Y_2 = \bigcup\{\overline{M}^{\beta X_2} \ :\ M \subset X_2, |X| \leq \omega\}$, $Y_3 = X_3$.

Лемма. *Функция Φ продолжается до раздельно непрерывной функции Ψ : $Y_1 \times Y_2 \times Y_3 \to \mathbb{R}$.*

Доказательство. Пусть $z \in Y_3$. Так $z \in X_3$ и функция Φ 2-β-продолжаема, то функция

$$g_z = r(\Phi, X_1 \times X_2 \times X_3, z) : X_1 \times X_2 \to \mathbb{R}$$

продолжается до раздельно непрерывной функции

$$\hat{g}_z : \beta X_1 \times \beta X_2 \to \mathbb{R}$$

Определим функцию $\Psi : Y_1 \times Y_2 \times Y_3 \to \mathbb{R}$. Пусть $x \in Y_1$ и $y \in Y_2$. Положим

$$\Psi(x, y, z) = \hat{g}_z(x, y)$$

Проверим что функция Ψ раздельно непрерывна. Для $(y_1, y_2, y_3) \in Y_1 \times Y_2 \times Y_3$ надо проверить, что функции

$$\begin{aligned} h_1 &= r(\Psi, Y_1 \times Y_2 \times Y_3, (y_2, y_3)) : Y_1 \to \mathbb{R}, \\ h_2 &= r(\Psi, Y_1 \times Y_2 \times Y_3, (y_1, y_3)) : Y_2 \to \mathbb{R}, \\ h_3 &= r(\Psi, Y_1 \times Y_2 \times Y_3, (y_1, y_2)) : Y_3 \to \mathbb{R}. \end{aligned}$$

непрерывны. Так как

$$\begin{aligned} h_1(y_1') &= \Psi(y_1', y_2, y_3) = \hat{g}_{y_3}(y_1', y_2), \\ h_2(y_2') &= \Psi(y_1, y_2', y_3) = \hat{g}_{y_3}(y_1, y_2') \end{aligned}$$

для $y_1' \in Y_1$, $y_2' \in Y_2$ и $\hat{g}_{y_3}$ раздельно непрерывная функция, то функции h_1 и h_2 непрерывны.

Нам осталось проверить непрерывность функции h_3. Существует счетное $P \subset Y_2$, так что $y_2 \in \overline{P}$. Пусть $P = \{p_n : n \in \omega\}$. Положим

$$\begin{aligned} f_n &= r(\Phi, X_1 \times X_2 \times X_3, (p_n)) : X_1 \times X_3 \to \mathbb{R}, \\ f_n(x, y) &= \Phi(x, p_n, y) \text{ для } (x, y) \in X_1 \times X_3, \\ \varphi_n &= \Lambda_{X_1, X_3}(f_n) : X_1 \to C_p(X_3). \end{aligned}$$

Так как функция Φ 2-β-продолжаема, то функция f_n продолжается до раздельно непрерывной функции $\hat{f}_n : \beta X_1 \times \beta X_3 \to \mathbb{R}$. Из теоремы 2.7 вытекает, что $\varphi_n(X_1)$ является компактом Эберлейна. Пусть

$$\hat{\varphi}_n : \beta X_1 \to \varphi_n(X_1)$$

есть непрерывное продолжение отображения φ_n. Положим

$$E = \prod_{n \in \omega} \varphi_n(X_1), \qquad\qquad \varphi = \mathop{\Delta}_{n \in \omega} \varphi_n : X_1 \to E.$$

Пространство E является счетным произведением компактов Эберлейна и поэтому является компактом Эберлейна. Отображение φ непрерывно, следовательно $\varphi(X_1)$ является псевдокомпактным подпространством компакта Эберлейна. Из теоремы Прейсс–Симона 2.3 вытекает, что $\varphi(X_1)$ является компактом Эберлейна. Пусть

$$\hat{\varphi} : \beta X_1 \to E$$

есть непрерывное продолжение отображения φ. Так как $\varphi(X_1)$ является компактом, то $\varphi(X_1) = \hat{\varphi}(\beta X_1)$. Следовательно, существует такое $y_1' \in X_1$, что $\varphi(y_1') = \hat{\varphi}(y_1)$. Отметим, что $\varphi_n(y_1') = \hat{\varphi}_n(y_1)$ для каждого $\in \omega$. Положим

$$h_3' = r(\Psi, Y_1 \times Y_2 \times Y_3, (y_1', y_2)) : Y_3 \to \mathbb{R}.$$

Проверим, что $h_3 = h_3'$. Предположим, противное, то есть $h_3 \neq h_3'$. Тогда $h_3(z) \neq h_3'(z)$ для некоторого $z \in X_3$. Так как

$$h_3(z) = \Psi(y_1, y_2, z) = \hat{g}_z(y_1, y_2),$$
$$h_3'(z) = \Psi(y_1', y_2, z) = \hat{g}_z(y_1', y_2)$$

то

$$\hat{g}_z(y_1, y_2) \neq \hat{g}_z(y_1', y_2)$$

Так как функция $\hat{g}_z$ раздельно непрерывна и $y_2 \in \overline{P}$, то

$$\hat{g}_z(y_1, p_n) \neq \hat{g}_z(y_1', p_n)$$

для некоторого $n \in \omega$. Так как

$$\hat{g}_z(y_1, p_n) = \hat{\varphi}_n(y_1)(z)$$
$$g_z(y_1', p_n) = \varphi_n(y_1')(z)$$

то $\hat{\varphi}_n(y_1)(z) \neq \varphi_n(y_1')(z)$. Противоречие с тем что $\varphi_n(y_1') = \hat{\varphi}_n(y_1)$ для каждого $n \in \omega$.

Итак, мы показали, что $h_3 = h_3'$. Положим

$$q = r(\Phi, X_1 \times X_2 \times X_3, (y_1')) : X_2 \times X_3 \to \mathbb{R},$$
$$q(x, y) = \Phi(y_1', x, y) \text{ для } (x, y) \in X_2 \times X_3,$$
$$\psi = \lambda_{\{2\}}^{X_2 \times X_3}(q) : X_2 \to C_p(X_3).$$

Так как функция Φ 2-β-продолжаема, то функция q продолжается до раздельно непрерывной функции $\hat{q} : \beta X_2 \times \beta X_3 \to \mathbb{R}$. Из предложения 2.2.4 вытекает, что $\psi(X_2)$ является компактом Эберлейна. Пусть

$$\hat{\psi} : \beta X_2 \to \psi(X_2)$$

есть непрерывное продолжение отображения ψ. Так как $\psi(X_2) = \hat{\psi}(\beta X_2)$, то $\psi(y_2') = \hat{\psi}(y_2)$ для некоторого $y_2' \in X_2$. Положим

$$h_3'' = r(\Psi, Y_1 \times Y_2 \times Y_3, (y_1', y_2')) : Y_3 \to \mathbb{R}.$$

Проверим, что $h_3 = h_3' = h_3''$. Предположим, противное, то есть $h_3' \neq h_3''$. Тогда $h_3'(z) \neq h_3''(z)$ для некоторого $z \in X_3$. Так как

$$h_3'(z) = \Psi(y_1', y_2, z) = \hat{g}_z(y_1', y_2),$$
$$h_3''(z) = \Psi(y_1', y_2, z) = \hat{g}_z(y_1', y_2')$$

то

$$\hat{g}_z(y_1', y_2) \neq \hat{g}_z(y_1', y_2').$$

Так как

$$\hat{g}_z(y_1', y_2) = \hat{\psi}(y_2)(z),$$
$$\hat{g}_z(y_1', y_2') = \psi(y_2')(z)$$

то $\hat{\psi}(y_2)(z) \neq \psi(y_2')(z)$. Противоречие с тем что $\psi(y_2') = \hat{\psi}(y_2)$.

Итак, мы показали, что $h_3 = h_3' = h_3''$. Так как $y_1' \in X_1$, $y_2' \in X_2$ и $X_3 = Y_3$, то

$$h_3'' = r(\Phi, X_1 \times X_2 \times X_3, (y_1', y_2')) : X_3 \to \mathbb{R}.$$

Так как функция Φ раздельно непрерывна, то функция $h_3 = h_3''$ непрерывна. $\square$

Пусть $\Psi : Y_1 \times Y_2 \times Y_3 \to \mathbb{R}$ есть раздельно непрерывное продолжение функции Φ. Так как Y_1 компактно, Y_2 счетно компактно и Y_3 псевдокомпактно, из следствия 2.11 вытекает, что функция Ψ продолжается до раздельно непрерывной функции $\widehat{\Phi} : \beta Y_1 \times \beta Y_2 \times \beta Y_3 \to \mathbb{R}$. Для доказательства утверждения осталось отметить, что $\beta X_1 = \beta Y_1$, $\beta X_2 = \beta Y_2$ и $\beta X_3 = \beta Y_3$. $\square$

Утверждение 2.3.4. *Пусть A множество, X_α есть псевдокомпактное пространство для $\alpha \in A$. Тогда любая 2-β-непрерывная функция*

$$\Phi : X = \prod_{\alpha \in A} X_\alpha \to \mathbb{R}$$

является 3-β-непрерывной функцией.

Доказательство. Пусть $B \subset A$, $|B| \leq 3$, $y \in \prod_{\alpha \in A \setminus B} X_\alpha$,

$$f = r(X, \Phi, y) : \prod_{\alpha \in B} X_\alpha \to \mathbb{R}.$$

Функция f является 2-β-непрерывной функцией, $|B| \leq 3$, следовательно, из утверждения 2.3.3 вытекает, что функция f продолжается до раздельно непрерывной функции

$$\hat{f} : \prod_{\alpha \in B} \beta X_\alpha \to \mathbb{R}.$$

$\square$

Утверждение 2.3.5. *Пусть A множество, X_α есть пространство для $\alpha \in A$, m натуральное число, $B \subset A$, $|B| < m$, $l = m - |B|$,*

$$Y_\alpha = \begin{cases} X_\alpha & \alpha \notin B \\ \beta X_\alpha & \alpha \in B \end{cases}$$

для $\alpha \in A$,

$$X = \prod_{\alpha\in A} X_\alpha \qquad Y = \prod_{\alpha\in A} Y_\alpha$$

Тогда любая m-β-продолжаемая функция функция $\Phi : X \to \mathbb{R}$ продолжается до l-β-продолжаемой функция функция $\Psi : Y \to \mathbb{R}$.

Доказательство. Определим функцию Ψ. Пусть $y \in Y$, $u = \pi_B(y)$,

$$v = \pi_{A\setminus B}(y) \in \prod_{\alpha\in A\setminus B} X_\alpha, \qquad f = r(\Phi, X, v) : \prod_{\alpha\in B} X_\alpha \to \mathbb{R}.$$

Так Φ m-β-продолжаема, то функция f продолжается до раздельно непрерывной функции $\hat{f} : \prod_{\alpha\in B} \beta X_\alpha \to \mathbb{R}$. Положим $\Psi(y) = \hat{f}(u)$. Функция Ψ определена.

Проверим, что Ψ является l-β-продолжаемой функцией. Пусть $C \subset A$, $|C| \le l$, $z \in \prod_{\alpha\in A\setminus C} Y_\alpha$,

$$g = r(\Psi, Y, z) : \prod_{\alpha\in C} Y_\alpha \to \mathbb{R}.$$

Достаточно доказать, что функция g продолжается до раздельно непрерывной функции $q : \prod_{\alpha\in C} \beta Y_\alpha \to \mathbb{R}$. Отметим, что $\beta X_\alpha = \beta Y_\alpha$ для $\alpha \in A$, так что $\prod_{\alpha\in C} \beta Y_\alpha = \prod_{\alpha\in C} \beta X_\alpha$. Положим $D = B \cup C$, $y' = \pi_{A\setminus D}(y)$,

$$h = r(\Phi, X, y') : \prod_{\alpha\in D} X_\alpha \to \mathbb{R}.$$

Так как $|D| \le m$ и Φ m-β-продолжаемая функция, то h продолжается до раздельно непрерывной функции $\hat{h} : \prod_{\alpha\in D} \beta X_\alpha \to \mathbb{R}$. Положим

$$q = r(\prod_{\alpha\in D} \beta X_\alpha, \hat{h}, \pi_{D\setminus C}(y)) : \prod_{\alpha\in C} \beta X_\alpha \to \mathbb{R}.$$

Так как $\hat{h}$ раздельно непрерывная функция, то q тоже раздельно непрерывна. По построению, q продолжает g. $\square$

Следствие 2.14. *Пусть A множество, X_α есть пространство для $\alpha \in A$, $\beta \in A$*

$$Y_\alpha = \begin{cases} X_\alpha, & \alpha \ne \beta \\ \beta X_\alpha, & \alpha = \beta \end{cases}$$

для $\alpha \in A$,

$$X = \prod_{\alpha\in A} X_\alpha, \qquad Y = \prod_{\alpha\in A} Y_\alpha.$$

Тогда любая 3-β-продолжаемая функция функция $\Phi : X \to \mathbb{R}$ продолжается до 2-β-продолжаемой функции $\Psi : Y \to \mathbb{R}$.

Из утверждения 2.3.4 и следствия 2.14 вытекает

Утверждение 2.3.6. *Пусть A множество, X_α есть псевдокомпактное пространство для $\alpha \in A$, $\beta \in A$*

$$Y_\alpha = \begin{cases} X_\alpha & \alpha \neq \beta \\ \beta X_\alpha & \alpha = \beta \end{cases}$$

для $\alpha \in A$,

$$X = \prod_{\alpha \in A} X_\alpha \qquad Y = \prod_{\alpha \in A} Y_\alpha$$

Тогда любая 2-β-продолжаемая функция функция $\Phi : X \to \mathbb{R}$ продолжается до 2-β-продолжаемой функции $\Psi : Y \to \mathbb{R}$.

Теорема 2.15. *Пусть X_1, X_2, ...,X_n псевдокомпактные пространства, $\Phi : \prod_{i=1}^n X_i \to \mathbb{R}$ — раздельно непрерывная функция. Тогда следующие условия эквивалентны:*

(1) *функция Φ продолжается до раздельно непрерывной функции*

$$\widehat{\Phi} : \prod_{i=1}^n \beta X_i \to \mathbb{R};$$

(2) *функция Φ 2-β-продолжаемая;*

(3) *функция Φ 2-квазинепрерывная.*

Доказательство. (2) $\Leftrightarrow$ (3) вытекает из теоремы 2.7, условия (2) и (6). Импликация (1) $\Rightarrow$ (2) очевидна. Докажем (1) $\Leftrightarrow$ (2). Если $n \leq 3$, то теорема вытекает из утверждения 2.3.3. Далее будем считать, что $n > 3$. Положим

$$Y_{l,m} = \begin{cases} \beta X_m & m \leq l \\ X_m & m > l \end{cases}$$

для $l = 0, 1, ..., n$ и $m = 1, ..., n$, $Y_l = \prod_{m=1}^n Y_{l,m}$ для $l = 0, 1, ..., n$. Отметим, что

$$Y_0 = \prod_{i=1}^n X_i \text{ и } Y_n = \prod_{i=1}^n \beta X_i.$$

Индукцией по l определим 2-β-продолжаемые отображения $\Psi_l : Y_l \to \mathbb{R}$ для $l = 0, 1, ..., n$ таким образом, что Ψ_l продолжает Ψ_{l-1} для $l > 0$ и $\Psi_0 = \Phi$.

$l = 0$. Положим $\Psi_0 = \Phi$.

$l > 0$. 2-β-продолжаемое отображение $\Psi_{l-1} : Y_{l-1} \to \mathbb{R}$ построено. Каждое $Y_{l,m}$ псевдокомпактно, $Y_{l,m} = Y_{l-1,m}$ для $l \neq m$ и $Y_{m,m} = \beta Y_{m-1,m} =$

βX_m. Из утверждения 2.3.6 вытекает, что функция Ψ_{l-1} продолжается до 2-β-продолжаемого отображения $\Psi_l : Y_l \to \mathbb{R}$.

Отображения Ψ_l построены. По построение, каждое Ψ_l раздельно непрерывно и продолжает Φ. Получаем, что отображение

$$\hat{\Phi} = \Psi_n : \prod_{i=1}^{n} \beta X_i \to \mathbb{R}$$

раздельно непрерывно и продолжает Φ. $\square$

Из теоремы 2.15 вытекает следующее утверждение.

Теорема 2.16. *Пусть X_1, X_2, ...,X_n псевдокомпактные пространства, $\Phi : \prod_{i=1}^{n} X_i \to \mathbb{R}$ 2-раздельно непрерывная функция. Тогда Φ продолжается до раздельно непрерывной функции $\widehat{\Phi} : \prod_{i=1}^{n} \beta X_i \to \mathbb{R}$.*

Непрерывная функция на произведение пространств 2-раздельно непрерывна, так что из теоремы 2.16 вытекает

Теорема 2.17. *Пусть X_1, X_2, ...,X_n псевдокомпактные пространства, $\Phi : \prod_{i=1}^{n} X_i \to \mathbb{R}$ непрерывная функция. Тогда Φ продолжается до раздельно непрерывной функции $\widehat{\Phi} : \prod_{i=1}^{n} \beta X_i \to \mathbb{R}$.*

2.4 Продолжение отображений произведения пространств и операций алгебр на стоун–чеховское расширение

Отображения на произведениях, продолжаемые до раздельно непрерывных отображений

Пусть $X_1, X_2, \ldots, X_n$ есть псевдокомпактные пространства. В этом разделе выясняется когда раздельно непрерывное отображение Φ произведения

$$X = X_1 \times X_2 \times \ldots \times X_n$$

пространств в некоторое пространство Y продолжается до раздельно непрерывного отображения $\widehat{\Phi}$ на произведение

$$\widetilde{X} = \beta X_1 \times \beta X_2 \times \ldots \times \beta X_n$$

стоун–чеховских произведений в пространство μY.

Утверждение 2.4.1. *Если $\widehat{\Phi} : X \to \beta Y$ есть раздельно непрерывное продолжение отображения Φ, $M \subset Y$ полно по Дьедонне и $\Phi(X) \subset M$, то $\widehat{\Phi}(\widetilde{X}) \subset M$.*

Доказательство. Индукцией по $k = 0, 1, ..., n$ покажем, что $\widehat{\Phi}(Y_n) \subset M$, где

$$Y_k = \beta X_1 \times \beta X_2 \times ... \times \beta X_k \times X_{k+1} \times ... \times X_n.$$

Шаг индукции вытекает из того, что X_{k+1} есть объединение замыканий некоторых псевдокомпактных подмножеств X_k и факта, что замыкание псевдокомпактного подпространства в полном по Дьедонне пространстве компактно. □

Из утверждение 2.4.1 вытекает

Утверждение 2.4.2. *Если $\widehat{\Phi} : \widetilde{X} \to \beta Y$ есть раздельно непрерывное продолжение отображения Φ и $\Phi(X) \subset Y$, то $\widehat{\Phi}(\widetilde{X}) \subset \mu Y$.*

Утверждение 2.4.3. *Отображение Φ β-продолжаемое если и только если существует раздельно непрерывное продолжение $\widehat{\Phi} : \widetilde{X} \to \mu X$ отображения Φ.*

Если $Y = \mathbb{R}$ (то есть Φ есть функция), то функция Φ β-продолжаемая если и только если существует раздельно непрерывное продолжение $\widehat{\Phi} : \widetilde{X} \to \mathbb{R}$ функции Φ.

Пусть $m \leq n$ есть натуральное число. Обозначим $A = \{1, 2, ..., n\}$ и

$$\mathcal{P} = \{\{\bar{x}\} \times \prod_{\alpha \in B} X_\alpha \,:\, B \subset A,\ |B| = m,\ \bar{x} \in \prod_{\alpha \in A \setminus B} X_\alpha\}.$$

Из определений вытекает

Утверждение 2.4.4. *Отображение Φ является*

- *m-раздельно непрерывным если и только если $\Phi|_P$ непрерывно;*
- *m-β-продолжаемым если и только если $\Phi|_P$ β-продолжаемо;*
- *m-квазинепрерывным если и только если $\Phi|_P$ квазинепрерывно*

для всех $P \in \mathcal{P}$.

Несложно проверяется

Утверждение 2.4.5. *Пусть $f : P \to Y$ отображение пространств. Тогда отображение*

(1) f непрерывно если и только если функция $g \circ f$ непрерывна;

(2) f квазинепрерывно если и только если функция $g \circ f$ квазинепрерывна

для всех $g \in C(Y)$.

Утверждение 2.4.6. *Отображение* Φ

(1) *β-продолжаемо если и только если функция $g \circ \Phi$ β-продолжаема;*

(2) *раздельно непрерывно если и только если функция $g \circ \Phi$ раздельно непрерывна;*

(3) *Φ m-раздельно непрерывно если и только если функция $g \circ \Phi$ m-раздельно непрерывна;*

(4) *Φ m-β-продолжаемо если и только если функция $g \circ \Phi$ m-β-продолжаема;*

(5) *Φ m-квазинепрерывно если и только если функция $g \circ \Phi$ m-квазинепрерывна*

для всех $g \in C(Y)$.

Доказательство. (1) ($\Rightarrow$) Пусть $\widehat{\Phi} : \widetilde{X} \to \beta\, Y$ есть раздельно непрерывное продолжение отображения Φ. Для $g \in C(Y)$, обозначим $\beta g : \beta\, Y \to \beta\, \mathbb{R}$ продолжение функции g. Тогда отображение $q = \beta g \circ \widehat{\Phi} : \widetilde{X} \to \beta\, \mathbb{R}$ является раздельно непрерывным продолжением функции $g \circ \Phi$. ($\Leftarrow$) Для $g \in C(Y)$ обозначим через $q_g : \widetilde{X} \to \beta\, \mathbb{R}$ раздельно непрерывное продолжение функции $g \circ \Phi$. Положим

$$\widehat{\Phi} = \mathop{\Delta}_{g \in C(Y)} q_g : \widetilde{X} \to (\beta\, \mathbb{R})^{C(Y)}$$

$\beta\, Y$ естественным образом вкладывается в $(\beta\, \mathbb{R})^{C(Y)}$, при таком отождествлении, $\widehat{\Phi}(\widetilde{X}) \subset \beta\, Y$ и $\widehat{\Phi}$ является раздельно непрерывном продолжением отображения Φ.

Пункт (2) является частным случаем пункта (3) при $m = 1$.

Пункты (3), (4) и (5) вытекают из утверждений 2.4.4 и 2.4.5. □

Из теоремы 2.15, утверждений 2.4.6 и 2.4.3 вытекает следующая теорема.

Теорема 2.18. *Пусть X_1, X_2, ... , X_n есть псевдокомпактные пространства, Y пространство и*

$$\Phi : X_1 \times X_2 \times ... \times X_n \to Y$$

есть раздельно непрерывное отображение. Тогда следующие условия эквивалентны:

(1) *отображение Φ продолжается до раздельно непрерывного отображения*
$$\widehat{\Phi} : \beta X_1 \times \beta X_2 \times ... \times \beta X_n \to \mu Y;$$

(2) *отображение Φ 2-β-продолжаемо;*

(3) отображение Φ 2-квазинепрерывно.

Следствие 2.19. *Пусть X и Y есть псевдокомпактные пространства, Z есть пространство,*

$$\Phi : X \times Y \to Z$$

есть раздельно непрерывное отображение. Тогда следующие условия эквивалентны:

(1) отображение Φ продолжается до раздельно непрерывного отображения

$$\widehat{\Phi} : \beta\, X \times \beta\, Y \to \beta\, Z;$$

(2) отображение Φ квазинепрерывно.

Следствие 2.20. *Пусть X_1, X_2, ... , X_n есть псевдокомпактные пространства, Y пространство и отображение $\Phi : \prod_{i=1}^n X_i \to Y$ непрерывно. Тогда отображение Φ продолжается до раздельно непрерывного отображения $\widehat{\Phi} : \prod_{i=1}^n \beta\, X_i \to \mu Y$.*

Из теорем 2.9 и 2.20, утверждений 2.4.6 и 2.4.3 вытекает следующая теорема.

Теорема 2.21. *Пусть X_1, X_2, ... , X_n есть псевдокомпактные пространства, Y — пространство и для различных $i, j \in \{1, 2, ..., n\}$ пара (X_i, X_j) является парой Гротендика. Тогда любое раздельно непрерывное отображение*

$$\Phi : X_1 \times X_2 \times ... \times X_n \to Y$$

продолжается до раздельно непрерывного отображения

$$\widehat{\Phi} : \beta\, X_1 \times \beta\, X_2 \times ... \times \beta\, X_n \to \mu Y.$$

Из теоремы 2.21 и утверждения 2.3.2 вытекают следующие следствия.

Следствие 2.22. *Пусть X_1, X_2, ... , X_n — псевдокомпактные пространства, Y — пространство и X_i — пространство pc-Гротендика для $i < n$. Тогда любое раздельно непрерывное отображение $\Phi : \prod_{i=1}^n X_i \to Y$ продолжается до раздельно непрерывного отображения $\widehat{\Phi} : \prod_{i=1}^n \beta\, X_i \to \mu Y$.*

Следствие 2.23. *Пусть X_1, ... , X_{n-1} — счетно компактные пространства, X_n — псевдокомпактное пространство, Y — пространство. Тогда любое раздельно непрерывное отображение $\Phi : \prod_{i=1}^n X_i \to Y$ продолжается до раздельно непрерывного отображения $\widehat{\Phi} : \prod_{i=1}^n \beta\, X_i \to \mu Y$.*

Следствие 2.24. *Пусть* X_1, X_2, ... , X_n *— псевдокомпактные пространства pc-Гротендика,* Y *— пространство. Тогда любое раздельно непрерывное отображение* $\Phi : \prod_{i=1}^n X_i \to Y$ *продолжается до раздельно непрерывного отображения* $\widehat{\Phi} : \prod_{i=1}^n \beta X_i \to \mu Y$.

Следствие 2.25. *Пусть* X_1, X_2, ... , X_n *— счетно компактные пространства,* Y *— пространство. Тогда любое раздельно непрерывное отображение* $\Phi : \prod_{i=1}^n X_i \to Y$ *продолжается до раздельно непрерывного отображения* $\widehat{\Phi} : \prod_{i=1}^n \beta X_i \to \mu Y$.

Теорема 2.26. *Пусть* X *и* Y *компактные пространство,* $Z \subset X \times Y$ *псевдокомпактное подпространство,* S *пространство и* $\Phi : X \times Y \to S$ *раздельно непрерывное отображение. Если отображение* $\Phi|_Z$ *непрерывно, то отображение* $\Phi|_{\overline{Z}}$ *непрерывно.*

Доказательство. Достаточно проверить, что функция $f|_{\overline{Z}}$ непрерывна для любой $g \in C(S)$ и $f = g \circ \Phi$. Так как $f \in SC(X \times Y)$ и $f|_Z$ непрерывна, то из предложения 2.2.10 вытекает что функция $f|_{\overline{Z}}$ непрерывна. □

Следствие 2.27. *Пусть* X *псевдокомпактное пространство,* Y *пространство, отображение* $\Phi : X \times X \to Y$ *раздельно непрерывное отображение и отображение* $\Phi|_{\Delta_X}$ *непрерывно* (Δ_X *— диагональ в* X^2*). Тогда отображение* $\Phi|_{\Delta_{\beta X}}$ *непрерывно.*

Следствие 2.28. *Пусть* X *псевдокомпактное пространство,* Y *пространство, отображение* $\Phi : X \times X \to Y$ *раздельно непрерывное отображение и* $\Phi(x, x) = \{y\}$ *для некоторого* $y \in Y$ *и всех* $x \in X$*. Тогда* $\Phi(x, x) = y$ *для всех* $x \in \beta X$.

Продолжение операций алгебр на стоун–чеховское расширение

Из теоремы 2.18 вытекает следующее утверждение.

Теорема 2.29. *Пусть* $\mathbf{X} = (X, f_1, f_2, ..., f_m)$ *есть алгебра с раздельно непрерывными операциями* $f_1, f_2, ..., f_m$ *и типом* $\bar{n} = (n_1, n_2, ..., n_m)$*. Предположим, что* X *псевдокомпактное пространство и операция* f_i *2-квазинепрерывна для* $i = 1, ..., m$*. Тогда операции* f_i *продолжаются до раздельно непрерывных операций*

$$\hat{f}_i : (\beta X)^{n_i} \to \beta X$$

на βX *для для* $i = 1, ..., m$ *и, следовательно, алгебра* $\mathbf{X}$ *гомоморфно вкладывается в компактную алгебру*

$$\mathbf{Y} = (\beta X, \hat{f}_1, \hat{f}_2, ..., \hat{f}_m)$$

с раздельно непрерывными операциями.

Так как непрерывное отображение является 2-квазинепрерывным, то из теоремы 2.29 вытекает следующее утверждение.

Теорема 2.30. *Пусть* $\mathbf{X} = (X, f_1, f_2, ..., f_m)$ *есть псевдокомпактная алгебра с непрерывными операциями* $f_1, f_2, ..., f_m$ *и типом* $\bar{n} = (n_1, n_2, ..., n_m)$*. Тогда операции* f_i *продолжаются до раздельно непрерывных операций на* βX *для для* $i = 1, ..., m$ *и, следовательно, алгебра* $\mathbf{X}$ *гомоморфно вкладывается в компактную алгебру*

$$\mathbf{Y} = (\beta X, \hat{f}_1, \hat{f}_2, ..., \hat{f}_m)$$

с раздельно непрерывными операциями.

Из теоремы 2.21 вытекает следующее утверждение.

Теорема 2.31. *Пусть* $\mathbf{X} = (X, f_1, f_2, ..., f_m)$ *есть алгебра с раздельно непрерывными операциями* $f_1, f_2, ..., f_m$ *и типом* $\bar{n} = (n_1, n_2, ..., n_m)$*. Предположим, что* X *псевдокомпактное пространство и* (X, X) *есть пара Гротендика. Тогда операции* f_i *продолжаются до раздельно непрерывных операций на* βX *для для* $i = 1, ..., m$ *и, следовательно, алгебра* $\mathbf{X}$ *гомоморфно вкладывается в компактную алгебру*

$$\mathbf{Y} = (\beta X, \hat{f}_1, \hat{f}_2, ..., \hat{f}_m)$$

с раздельно непрерывными операциями.

Из теорем 2.29, 2.31 и следствий 2.22, 2.23, 2.24, 2.25 вытекает следующее следствие

Следствие 2.32. *Пусть* $\mathbf{X} = (X, f_1, f_2, ..., f_m)$ *есть псевдокомпактная алгебра с раздельно непрерывными операциями. Предположим выполняется одно из перечисленных ниже условий:*

(1) *операции* $\mathbf{X}$ *2-квазинепрерывны;*

(2) *операции* $\mathbf{X}$ *непрерывны;*

(3) (X, X) *есть пара Гротендика;*

(4) X *есть пространство pc-Гротендика;*

(5) X *принадлежит одному из перечисленных ниже классам пространств:*

   (a) *счетно компактные пространства;*

   (b) *пространства счетной тесноты;*

   (c) *сепарабельные пространства;*

(d) k-пространства;

(e) пространства с плотным σ-компактным подпространством.

Тогда операции $\mathbf{X}$ продолжаются до раздельно непрерывных операций на βX и $\mathbf{X}$ гомоморфно вкладывается в компактную алгебру $\mathbf{Y} = (\beta X, \hat{f}_1, \hat{f}_2, ..., \hat{f}_m)$ с раздельно непрерывными операциями.

2.5 Факторизация раздельно непрерывных отображений и вложение алгебр в произведение метризуемых алгебр

Факторизация раздельно непрерывных отображений нескольких переменных

Пусть X_1, X_2, ..., X_n, Y есть пространства, $X = \prod_{i=1}^n X_n$, $\Phi : X \to Y$ раздельно непрерывное отображение.

Пусть X'_1, X'_2, ..., X'_n пространства, $X' = \prod_{i=1}^n X'_n$. Отображение Φ *sc-факторизуется через произведение* X', если существуют непрерывные сюрьективные отображения $f'_i : X_i \to X'_i$ для $i = 1, ..., n$ и раздельно непрерывное отображение $\Phi' : X' \to Y$, так что $\Phi = \Phi' \circ f'$, где $f = f'_1 \times f'_2 \times ... \times f'_n$. Набор (f', X', Φ') назовем *sc-факторизацией* отображения Φ.

На всех sc-факторизациях отображения Φ введем отношение частичного порядка. Пусть (f', X', Φ') и (f'', X'', Φ'') две sc-факторизации отображения Φ. Тогда sc-факторизация (f', X', Φ') меньше sc-факторизации (f'', X'', Φ''), если существуют непрерывные отображения $g_i : X'_i \to X''_i$ для $i = 1, ..., n$, так что $f'' = f' \circ g$, где $g = g_1 \times ... \times g_n$.

Тождественная sc-факторизация (id_X, X, Φ) является минимальной sc-факторизацией в этом порядке.

Порядок на sc-факторизациях задает отношение эквивалентности на sc-факторизациях: sc-факторизация $a' = (f', X', \Phi')$ эквивалентна sc-факторизации $a'' = (f'', X'', \Phi'')$ если $a' \le a''$ и $a'' \le a'$. sc-факторизация a' эквивалентна a'' если и только если существуют гомеоморфизмы $g_i : X'_i \to X''_i$ для $i = 1, ..., n$, так что $f'' = f' \circ g$, где $g = g_1 \times ... \times g_n$ есть гомеоморфизм X' на X''.

Нас интересует, когда отображение Φ sc-факторизуется через произведение X' пространств, чем либо лучшее чем исходное произведение X.

Обозначим

$$\begin{aligned}
X_{(i)} &= \prod\{X_j : j = 1, 2, ..., i-1, i+1, ..., n\} \\
&= \prod\{X_j : j \neq i \text{ и } 1 \leq j \leq n\}, \\
\pi_i &: X \to X_i, \ (x_1, x_2, ..., x_n) \mapsto x_i, \\
\pi_{(i)} &: X \to X_{(i)}, \ (x_1, x_2, ..., x_n) \mapsto (x_1, x_2, ..., x_{i-1}, x_{i+1}, ..., x_n).
\end{aligned}$$

Напомним,

$$\Lambda_i(\Phi) : X_i \to SC_p(X_{(i)}, Y),$$
$$\Lambda_i(\Phi)(x_i)(x_1, x_2, ..., x_{i-1}, x_{i+1}, ..., x_n) = \Phi(x_1, x_2, ..., x_n).$$

Обозначим

$$\widetilde{X}_i \coloneqq \Lambda_i(\Phi)(X_i), \ \ \delta_i^{(\Phi)} \coloneqq \Lambda_i(\Phi) : X_i \to \widetilde{X}_i, \ \ \widetilde{X} \coloneqq \prod_{i=1}^n \widetilde{X}_i,$$
$$\delta^{(\Phi)} \coloneqq \prod_{i=1}^n \delta_i^{(\Phi)} : X \to \widetilde{X}.$$

Будем говорить, что Φ *определяет топологию* X_i, если отображение $\delta_i^{(\Phi)} : X_i \to \widetilde{X}_i$ является гомеоморфизмом. Будем говорить, что Φ *определяет топологию сомножителей*, если Φ определяет топологию каждого X_i для $i = 1, ..., n$.

Утверждение 2.5.1.

(1) Пусть $\bar{x}, \bar{y} \in X$, $\delta^{(\Phi)}(\bar{x}) = \delta^{(\Phi)}(\bar{y})$. Тогда $\Phi(\bar{x}) = \Phi(\bar{y})$.

(2) Существует и единственное отображение $\widetilde{\Phi} : \widetilde{X} \to Y$, так что $\Phi = \widetilde{\Phi} \circ \delta^{(\Phi)}$.

(3) Отображение $\widetilde{\Phi}$ раздельно непрерывно.

(4) $(\delta^{(\Phi)}, \widetilde{X}, \widetilde{\Phi})$ является максимальной sc-факторизацией.

(5) Отображение $\widetilde{\Phi}$ определяет топологию сомножителей.

(6) $\widetilde{X}$ вкладывается в Y^A для некоторого множества A.

Доказательство. (1) Пусть

$$\begin{aligned}\bar{x} = \bar{w}_1 &= (x_1, ..., x_n),\\ \bar{w}_2 &= (y_1, x_2, ..., x_n),\\ &...\\ \bar{w}_i &= (y_1, y_2, ...y_i, x_{i+1}, ..., x_n),\\ &...\\ \bar{w}_{n-1} &= (y_1, y_2, ..., y_{n-1}, x_n),\\ \bar{y} = \bar{w}_n &= (y_1, ..., y_n).\end{aligned}$$

Из того, что $\delta_i^{(\Phi)}(x_i) = \delta_i^{(\Phi)}(y_i)$ вытекает, что $\Phi(\bar{u}) = \Phi(\bar{v})$, если $\pi_{(i)}(\bar{u}) = \pi_{(i)}\bar{v}$, $\pi_i(\bar{u}) = x_i$ и $\pi_i(\bar{v}) = y_i$. Из этого факта вытекает, что $\Phi(\bar{w}_i) = \Phi(\bar{w}_{i+1})$ для $i = 1, 2, ..., n-1$. Следовательно, $\Phi(\bar{x}) = \Phi(\bar{w}_1) = \Phi(\bar{w}_n) = \Phi(\bar{y})$.

(2) Пусть $\tilde{x} \in \widetilde{X}$ и $\bar{x} \in (\delta^{(\Phi)})^{-1}(\tilde{x})$. Положим $\widetilde{\Phi}(\tilde{x}) = \Phi(\bar{x})$. Из (1) вытекает, что отображение $\widetilde{\Phi}$ определено корректно. По построению, $\Phi = \widetilde{\Phi} \circ \delta^{(\Phi)}$. Из этого вытекает, что $\widetilde{\Phi}$ определено однозначно.

(3) Пусть $i \in \{1, ..., n\}$,

$$\begin{aligned}&(u_1, u_2, ...u_{i-1}, u_{i+1}, ..., u_n) \in \widetilde{X}_{(i)},\\ &s : \widetilde{X}_i \to Y,\ u \mapsto \widetilde{\Phi}(u_1, u_2, ...u_{i-1}, u, u_{i+1}, ..., u_n).\end{aligned}$$

Нам надо проверить, что отображение s непрерывно. Пусть $x_j \in (\delta_j^{(\Phi)})^{-1}(u_j)$ для $j \neq i$ и $x = (x_1, ..., x_{i-1}, x_{i+1}, ..., x_n) \in X_{(i)}$. Тогда $s(u) = u(x)$. Так как $u \in \widetilde{X}_i \subset SC_p(X_{(i)}, Y)$ и $x \in X_{(i)}$, то отображение $\widetilde{X}_i \to Y,\ u \mapsto u(x)$ непрерывно.

(4) Пусть (f', X', Φ') есть sc-факторизация Φ. Пусть $i \in \{1, ..., n\}$, $x' \in X'_i$ и $\bar{x} = (x_1, ..., x_{i-1}, x_{i+1}, ..., x_n) \in X_{(i)}$. Определим $g_i(x') : X'_i \to \widetilde{S}C_p(X_{(i)}, Y)$ и $q_i(\bar{x}) \in C_p(X'_i, Y)$. Положим

$$q_i(\bar{x})(x') = g_i(x')(\bar{x}) = \Phi'(f'_1(x_1), ..., f'_{i-1}(x_{i-1}), x', f'_{i+1}(x_{i+1}), ..., f'_n(x_n)).$$

Так как Φ' раздельно непрерывно, то отображение $q_i(\bar{x})$ непрерывно, то есть $q_i(\bar{x}) \in C_p(X'_i, Y)$. Так как отображения f'_j для $j = 1, ..., n$ непрерывны и Φ' раздельно непрерывно, то отображение $g_i(x')$ раздельно непрерывно, то есть $g_i(x') \in SC_p(X_{(i)}, Y)$. Пусть $x_i \in (f'_i)^{-1}(x')$. Тогда

$$\begin{aligned}g_i(f'_i(x_i))(\bar{x}) &= \Phi'(f'_1(x_1), ..., f'_{i-1}(x_{i-1}), f'_i(x_i), f'_{i+1}(x_{i+1}), ..., f'_n(x_n))\\ &= \Phi' \circ f'(x_1, ..., x_n) = \Phi(x_1, ..., x_n) = \delta_i^{(\Phi)}(x_i)(\bar{x}).\end{aligned}$$

Следовательно, $g_i \circ f'_i = \delta_i^{(\Phi)}$, $g_i(X'_i) = \widetilde{X}_i$ и $g \circ f' = \delta^{(\Phi)}$, где $g = \prod_{i=1}^n g_i$ и $f' = \prod_{i=1}^n f'_i$.

Нам осталось проверить непрерывность отображения g_i. Предбазу пространства $SC_p(X_{(i)}, Y) \supset \widetilde{X}_i$ образуют множества вида

$$W(\bar{x}, U) = \{\tilde{x} \in SC_p(X_{(i)}, Y) \,:\, \tilde{x}(\bar{x}) \in U\},$$

где $\bar{x} \in X_{(i)}$ и $U \subset Y$ открыто. Тогда

$$g_i^{-1}(W(\bar{x}, U)) = \{x' \in X'_n \,:\, q_i(\bar{x})(x') = g_i(x')(\bar{x}) \in U\}.$$

Так как отображение $q_i(\bar{x})(x')$ непрерывно, то множество $g_i^{-1}(W(\bar{x}, U))$ открыто.

(5) sc-факторизация $(\delta^{(\widetilde{\Phi})} \circ \delta^{(\Phi)}, \widetilde{\widetilde{X}}, \widetilde{\widetilde{\Phi}})$ больше или равна sc-факторизации $(\delta^{(\Phi)}, \widetilde{X}, \widetilde{\Phi})$. Так как $(\delta^{(\Phi)}, \widetilde{X}, \widetilde{\Phi})$ максимальная sc-факторизация, то отображение $\delta^{(\widetilde{\Phi})} : \widetilde{X} \to \widetilde{\widetilde{X}}$ является гомеоморфизмом, то есть $\delta_i^{(\widetilde{\Phi})} : \widetilde{X}_i \to \widetilde{\widetilde{X}}_i$ является гомеоморфизмом для $i = 1, ..., n$, что и означает, что $\widetilde{\Phi}$ определяет топологию сомножителей $\widetilde{X}$.

(6) Так как

$$\widetilde{X}_i = \Lambda_i(X_i) \subset SC_p(X_{(i)}, Y) \subset Y^{X_{(i)}},$$

то $\widetilde{X} \subset Y^A$, где $A = X_{(1)} \cup X_{(2)} \cup ... \cup X_{(n)}$. □

Из утверждения 2.5.1 вытекает следующее утверждение.

Предложение 2.5.2. *Пусть X_1, X_2, ..., X_n, Y есть пространства, $X = \prod_{i=1}^n X_n$, $\Phi : X \to Y$ раздельно непрерывное отображение.*

(1) sc-факторизация $(\delta^{(\Phi)}, \widetilde{X}, \widetilde{\Phi})$ является максимальной sc-факторизацией и $\widetilde{\Phi}$ определяет топологию сомножителей $\widetilde{X}$. Пространство $\widetilde{X}$ вкладывается в Y^A для некоторого множества A.

(2) Отображение Φ определяет топологию сомножителей X если и только если тождественная sc-факторизация (id_X, X, Φ) является максимальной.

Нас интересует следующий общий вопрос.

Задача 2.33. Пусть $\mathcal{A}$ и $\mathcal{B}$ классы пространств. Пусть $X_1, X_2, ..., X_n \in \mathcal{A}$ и $\Phi : X = \prod_{i=1}^n X_i \to Y$ раздельно непрерывное отображение. Существует ли sc-факторизация (f, X', Φ') отображения $\mathcal{F}$ через произведение $X' = \prod_{i=1}^n X'_i$, где $X'_1, X'_2, ..., X'_n \in \mathcal{B}$?

Как показывает предложение 2.5.2, в случае, когда класс $\mathcal{A}$ инвариантен относительно непрерывных образов, задача 2.33 эквивалентна следующей задаче.

Задача 2.34. Пусть $\mathcal{A}$ и $\mathcal{B}$ классы пространств. Пусть $X_1, X_2, ..., X_n \in \mathcal{A}$ и отображение $\Phi : X = \prod_{i=1}^n X_i \to Y$ раздельно непрерывно и определяет топологию сомножителей в X. Верно ли, что $X_1, X_2, ..., X_n \in \mathcal{B}$?

Предложение 2.5.3. *Пусть X_1 и X_2 есть компактные пространства, $X = X_1 \times X_2$, $\Phi \in SC(X)$ определяет топологию сомножителей в произведении X. Тогда X_1 и X_2 компакты Эберлейна.*

Доказательство. Так как Φ определяет топологию сомножителей, то отображения $\delta_1^{(\Phi)} : X_1 \to C_p(X_2)$ и $\delta_2^{(\Phi)} : X_2 \to C_p(X_1)$ являются топологическими вложениями. Так как компактные подпространства пространства функций над компактами в топологии поточечной сходимости являются компактами Эберлейна, то X_1 и X_2 являются компактами Эберлейна. □

Предложение 2.5.4. *Пусть X_1, X_2 и X_3 есть компактные пространства, у пространство X_3 сепарабельно, $X = X_1 \times X_2 \times X_3$, $\Phi \in SC(X)$ определяет топологию сомножителей в произведении X. Тогда X_1 и X_2 компакты Эберлейна.*

Доказательство. Так как Φ определяет топологию сомножителей, то отображение $\delta_1^{(\Phi)} : X_1 \to SC_p(X_{(1)})$ являются топологическим вложением. Пусть $M \subset X_3$ есть счетное плотное множество. Отображение

$$\pi : SC_p(X_{(1)}) \to \left(C_p(X_2)\right)^M,\ \pi(f)(m)(x_2) = f(x_2, m)$$

непрерывно и взаимнооднозначно. Следовательно, X_1 вкладывается в $\left(C_p(X_2)\right)^M$. Компактные подпространства $C_p(X_2)$ являются компактами Эберлейна и классы компактов Эберлейна замкнуты относительно счетных произведений, переходу к замкнутым подпространствам. Поэтому X_1 компакт Эберлейна. Аналогично, X_2 компакт Эберлейна. □

Предложение 2.5.5 (Theorem 2.1 [52])**.** *Пусть X_1, X_2 и X_3 есть компактные пространства, у пространства X_3 счетное число Суслина, $X = X_1 \times X_2 \times X_3$, $\Phi \in SC(X)$ определяет топологию сомножителей в произведении X. Тогда X_1 и X_2 компакты Корсона.*

Предложение 2.5.6. *Пусть X_1 и X_2 есть компактные пространства, $X = X_1 \times X_2$, Y есть такое пространство, что любое компактное подмножество Y метризуемо, $\Phi \in SC(X, Y)$ определяет топологию сомножителей в произведении X. Тогда*

(1) $d(X_1) = d(X_2) = w(X_1) = w(X_2)$;

(2) компакты X_1 и X_2 монолитны.

Доказательство. (1) Покажем, что $w(X_1) \le d(X_2)$. Пусть $D \subset X_2 \subset \overline{D}$. Отображение $\delta_1^{(\Phi)} : X_1 \to C_p(X_2, Y)$ является топологическим вложением. Отображение

$$\varphi : C_p(X_2, Y) \to X^D,\ f \mapsto f|_D$$

непрерывно и иньективно. Тогда отображение $\varphi \circ \delta_1^{(\Phi)} : X_1 \to Y^D$ непрерывно и иньективно. Так как X_1 компакт, то $\varphi \circ \delta_1^{(\Phi)}$ является топологическим вложением и $K = \varphi(\delta_1^{(\Phi)}(X_1))$ гомеоморфно X_1. Тогда K вкладывается в $\prod_{\alpha \in D} K_\alpha$, где K_α есть проекция K на Y_α, $K_\alpha = \{f(\alpha) : f \in K\}$. Пространство $K_\alpha \subset Y$ компактно и метризуемо, следовательно $w(K) \leq \omega \cdot |D|$.

Аналогично, $w(X_2) \leq d(X_1)$. Получаем $w(X_1) \leq d(X_2) \leq w(X_2) \leq d(X_1) \leq w(X_1)$.

(2) Пусть $M \subset X_1$. Положим $S_1 = \overline{M}$, $S_2 = X_2$, $S = S_1 \times S_2$, $\Psi = \Phi|_S$. Так как $\delta_1^{(\Phi)}$ является топологическим вложением, то $\delta_1^{(\Psi)} = \delta_1^{(\Phi)}\big|_{S_1}$ также является топологическим вложением и S_1 гомеоморфно $\widetilde{S}_1 = \delta_1^{(\Psi)}(S_1)$. Так как, в силу предложения 2.5.2, $\widetilde{\Psi}$ определяет топологию в произведении $\widetilde{S}_1 \times \widetilde{S}_2$ и пространства $\widetilde{S}_1$ и $\widetilde{S}_2$ компактны, то из (1) вытекает, что $w(\overline{M}) = w(\widetilde{S}_1) \leq |M|$. □

На произведении X рассмотрим топологию $\mathcal{T}_{SC}$, которая порождена всеми раздельно непрерывным функциями на X, относительно этой топологии, отображение

$$\mathop{\triangle}_{f \in SC(X)} f : (X, \mathcal{T}_{SC}) \to \mathbb{R}^{SC(X)}$$

является топологическим вложением. Пространство $(X, \mathcal{T}_{SC})$ будем обозначать как $(X)_{SC}$. Тогда

$$C_p((X)_{SC}) = SC_p(X).$$

Утверждение 2.5.7. *Если X_i с калибром ω_1 для $i = 1, ..., n$, то $(X)_{SC}$ с калибром ω_1.*

Доказательство. Докажем индукцией по n. Для $n = 1$ утверждение очевидно. Пусть $n > 1$. Пусть γ есть несчетное семейство открытых множеств в $(X)_{SC}$. Отображение $\pi_n : (X)_{SC} \to X_n$ открыто. Тогда $\{\pi_n(U) : U \in \gamma\}$ есть несчетное семейство открытых множеств в X_n. Так как у X_n калибр ω_1, то существует $x_n \in \bigcap\{\pi_n(U) : U \in \gamma'\} \neq \varnothing$ для некоторого несчетно $\gamma' \subset \gamma$. Положим $X' = \pi_n^{-1}(x_n)$. Пространство X' гомеоморфно $(\prod_{i=1}^{n-1} X_i)_{SC}$. Несчетное семейство $\{U \cap X' : U \in \gamma'\}$ состоит из непустых открытых подмножеств X'. По предположению индукции, у пространства X' калибр ω_1. Следовательно, $\varnothing \neq \bigcap\{U \cap X' : U \in \gamma''\} \subset \bigcap\{U : U \in \gamma''\}$ для некоторого несчетного $\gamma'' \subset \gamma' \subset \gamma$. □

Утверждение 2.5.8. *Пусть $\Phi \in SC(X)$ определяет топологию сомножителей в X. Положим*

$$\Psi : X_1 \times X_2 \to Y = SC_p(X_3 \times ... \times X_n), \Psi(x_1, x_2)(x_3, ..., x_n) = \Phi(x_1, x_2, x_3, ..., x_n).$$

Тогда Ψ определяет топологию сомножителей в $X_1 \times X_2$.

Доказательство. Для естественных гомеоморфизмов

$$j_1 : C_p(X_2, Y) \to SC_p(X_{(1)}),\ j_1(f)(x_2, x_3, ..., x_n) = f(x_2)(x_3, ..., x_n),$$
$$j_2 : C_p(X_1, Y) \to SC_p(X_{(2)}),\ j_2(g)(x_1, x_3, ..., x_n) = g(x_1)(x_3, ..., x_n),$$

следующие диаграммы коммутативны:

$$\begin{tikzcd} & X_1 \arrow[dl, "\delta_1^{(\Psi)}"'] \arrow[dr, "\delta_1^{(\Phi)}"] & \\ C_p(X_2, Y) \arrow[rr, "j_1"'] & & SC_p(X_{(1)}) \end{tikzcd}$$

$$\begin{tikzcd} & X_2 \arrow[dl, "\delta_2^{(\Psi)}"'] \arrow[dr, "\delta_2^{(\Phi)}"] & \\ C_p(X_1, Y) \arrow[rr, "j_2"'] & & SC_p(X_{(2)}) \end{tikzcd}$$

Следовательно, для $i = 1, 2$, из того, что $\delta_i^{(\Phi)}$ является топологическим вложением, вытекает, что $\delta_i^{(\Psi)}$ является топологическим вложением. $\square$

Предложение 2.5.9 (Theorem 11.12 [64])**.** *Пусть X пространство с калибром ω_1. Тогда любой монолитный компакт в $C_p(X)$ метризуем.*

Предложение 2.5.10. *Пусть X_1, X_2, ..., X_n есть компактные пространства с калибром ω_1, $X = \prod_{i=1}^n X_n$ и Y есть сепарабельное метризуемое пространство. Тогда любое компактное подмножество $SC_p(X, Y)$ метризуемо.*

Доказательство. Пространство Y вкладывается в $\mathbb{R}^\omega$, поэтому $SC_p(X, Y)$ вкладывается в $SC_p(X, \mathbb{R}^\omega)$. Пространство $SC_p(X, \mathbb{R}^\omega)$ гомеоморфно $SC_p(X, \mathbb{R})^\omega$. Любое компактное подпространство $SC_p(X, Y)$ вкладывается в $SC_p(X)^\omega$, так что достаточно показать, что любое компактное подпространство $SC_p(X)$ метризуемо.

Докажем индукцией по n. Для $n = 0$, $SC_p(X)$ гомеоморфно $\mathbb{R}$. Пусть $n > 0$ и $X_{n+1} \subset SC_p(X)$ есть компактное подпространство.

Лемма. *Компакт X_{n+1} монолитен.*

Доказательство. Положим

$$\Phi : X' = X \times X_{n+1} = \prod_{i=1}^{n+1} X_i \to \mathbb{R},\ (x_1, ..., x_n, x_{n+1}) \mapsto x_{n+1}(x_1, ..., x_n).$$

Функция Φ раздельно непрерывно. Отображение

$$\delta_{n+1}^{(\Phi)} : X_{n+1} \to SC_p(X'_{(n+1)}) = SC_p(X)$$

есть тождественное отображение X_{n+1} на $\widetilde{X}_{n+1} = X_{n+1}$. Функция $\widetilde{\Phi}$ определяет топологию сомножителей в $\widetilde{X'} = \prod_{i=1}^{n+1} \widetilde{X}_i$. Положим $X'' = \prod_{i=1}^{n-1} \widetilde{X}_i$, $Y = SC_p(X'') = C_p((X'')_{SC})$ и

$$\Psi : \widetilde{X}_n \times \widetilde{X}_{n+1} \to Y,\ \Psi(x_n, x_{n+1})(x_1, ..., x_{n-1}) = \widetilde{\Phi}(x_1, ..., x_{n-1}, x_n, x_{n+1}).$$

Из утверждения 2.5.8 вытекает, что Ψ определяет топологию сомножителей в $\widetilde{X}_n \times \widetilde{X}_{n+1}$. Для $i = 1, ..., n-1$, компакт $\widetilde{X}_i$ является непрерывным образом компакта X_i с калибром ω_1, поэтому $\widetilde{X}_i$ с калибром ω_1. Из предположения индукции вытекает, что каждое компактное подмножество Y метризуемо. Из предложения 2.5.6 вытекает, что компакты $\widetilde{X}_n$ и $\widetilde{X}_{n+1}$ монолитны. Так как $\widetilde{X}_{n+1} = X_{n+1}$, то X_{n+1} монолитный компакт. □

Из утверждения 2.5.7 вытекает, что у пространства $(X)_{SC}$ калибр ω_1. Монолитный компакт X_{n+1} есть подпространство пространства $SC_p(X) = C_p((X)_{SC})$. Из предложения 2.5.9 вытекает, что X_{n+1} метризуемо. □

Предложение 2.5.11. *Пусть X_1, X_2, ..., X_n есть компактные пространства, у пространства X_i калибр ω_1 для $i = 1, ..., n-1$, $X = \prod_{i=1}^n X_i$ и Y есть сепарабельное метризуемое пространство. Если $\Phi \in SC_p(X, Y)$ определяет топологию сомножителей, то X метризуемо.*

Доказательство. Отображение $\delta_n^{(\Phi)}$ вкладывает компакт X_n в $SC_p(X_{(n)}, Y)$. Из предложения 2.5.10 вытекает, что любое компактное подпространство $SC_p(X_{(n)}, Y)$ метризуемо, в частности $\delta_i^{(\Phi)}(X_i) = \widetilde{X}_i \subset SC_p(X_{(n)}, Y)$ метризуемо. Так как $\delta_n^{(\Phi)} : X_n \to \widetilde{X}_n$ есть гомеоморфизм, то X_n метризуемо. У метризуемых компактов калибр ω_1, так что у X_n калибр ω_1.

Пусть $i \in 1, 2, ..., n-1$. Отображение $\delta_i^{(\Phi)}$ вкладывает компакт X_i в $SC_p(X_{(i)}, Y)$. У всех пространств X_1, ..., X_{i-1}, X_{i+1}, ..., X_n калибр ω_1. Из предложения 2.5.10 вытекает, что любое компактное подпространство $SC_p(X_{(i)}, Y)$ метризуемо, в частности $\delta_i^{(\Phi)}(X_i) = \widetilde{X}_i \subset SC_p(X_{(i)}, Y)$ метризуемо. Так как $\delta_i^{(\Phi)} : X_i \to \widetilde{X}_i$ есть гомеоморфизм, то X_i метризуемо. □

Теорема 2.35. *Пусть X_1, X_2, ..., X_n есть компактные пространства, у пространства X_i калибр ω_1 для $i = 1, ..., n-1$, $X = \prod_{i=1}^n X_i$ и Y есть сепарабельное метризуемое пространство, $\Phi : X \to Y$ раздельно непрерывное отображение. Тогда отображение Φ sc-факторизуется через метризуемые компакты, то есть существуют метризуемые компакты $\widetilde{X}_1$, $\widetilde{X}_2$, ..., $\widetilde{X}_n$, непрерывные отображения $\delta_i : X_i \to \widetilde{X}_i$ для $i = 1, ..., n$ и раздельно непрерывное отображение $\widetilde{F} : \prod_{i=1}^n \widetilde{X}_i \to Y$ так что*

$$\Phi = \widetilde{\Phi} \circ \prod_{i=1}^n \delta_i.$$

Доказательство. Пусть $(\delta^{(\Phi)}, \widetilde{X}, \widetilde{\Phi})$ есть максимальной sc-факторизация отображения Φ. Из предложения 2.5.2 вытекает, что $\widetilde{\Phi}$ определяет топологию сомножителей в $\widetilde{X}$. Положим $\delta_i = \delta_i^{(\Phi)}$ для $i = 1, ..., n$. Так как $\widetilde{X}_i$ есть непрерывный образ X_i, то у $\widetilde{X}_i$ калибр ω_1 для $i = 1, ..., n-1$. Из предложения 2.5.11 вытекает, что $\widetilde{X}_i$ метризуемо для $i = 1, ..., n$. $\square$

Теорема 2.36. *Пусть X_1, X_2 есть компактные пространства, у пространства X_1 счетное число Суслина, $X = X_1 \times X_2$ и Y есть сепарабельное метризуемое пространство, $\Phi : X \to Y$ раздельно непрерывное отображение. Тогда отображение Φ sc-факторизуется через метризуемые компакты.*

Доказательство. Пусть $(\delta^{(\Phi)}, \widetilde{X}, \widetilde{\Phi})$ есть максимальной sc-факторизация отображения Φ. Из предложения 2.5.2 вытекает, что $\widetilde{\Phi}$ определяет топологию сомножителей в $\widetilde{X}$. Из предложения 2.5.3 вытекает, что $\widetilde{X}_1$ и $\widetilde{X}_2$ компакты Эберлейна. Так как у компакта Эберлейна $\widetilde{X}_1$ счетное число Суслина, то из теорема Розенталя 2.4 вытекает, что компакт $\widetilde{X}_1$ метризуем. Так как $\widetilde{\Phi}$ определяет топологию сомножителей в $\widetilde{X}$, то из предложения 2.5.11 вытекает, что $\widetilde{X}_2$ метризуем. $\square$

Теорема 2.37. *Пусть X_1, X_2 и X_3 есть компактные пространства, у пространства X_1 счетное число Суслина, у пространства X_2 калибр ω_1, $X = X_1 \times X_2 \times X_3$ и Y есть сепарабельное метризуемое пространство, $\Phi : X \to Y$ раздельно непрерывное отображение. Тогда отображение Φ sc-факторизуется через метризуемые компакты.*

Доказательство. Пусть $(\delta^{(\Phi)}, \widetilde{X}, \widetilde{\Phi})$ есть максимальной sc-факторизация отображения Φ. Из предложения 2.5.2 вытекает, что $\widetilde{\Phi}$ определяет топологию сомножителей в $\widetilde{X}$. У пространства $\widetilde{X}_1$ счетное число Суслина и у пространства $\widetilde{X}_2$ калибр ω_1. Из предложения 2.5.5 вытекает, что компакты $\widetilde{X}_2$ и $\widetilde{X}_3$ являются компактами Корсона. В компактах Корсона счетная теснота, поэтому из теоремы Шапировского 2.1 вытекает, что $\widetilde{X}_2$ сепарабелен. Так как компакты Корсона монолитны, то $\widetilde{X}_2$ метризуем. Из предложения 2.5.4 вытекает, что $\widetilde{X}_1$ и $\widetilde{X}_3$ компакты Эберлейна. Так как у компакта Эберлейна $\widetilde{X}_1$ счетное число Суслина, то из теорема Розенталя 2.4 вытекает, что компакт $\widetilde{X}_1$ метризуем. Компакты $\widetilde{X}_1$ и $\widetilde{X}_2$ метризуемы, следовательно имеют калибр ω_1. Из предложения 2.5.11 вытекает, что $\widetilde{X}_3$ метризуемо. $\square$

Факторизация раздельно непрерывных операций и вложение алгебр в произведение метризуемых алгебр

Пусть X и Y множества, $n \in \omega$ и $f : X^n \to X$ есть n-арная операция. Отображение $\varphi : X \to Y$ назовем *f-морфизмом*, если существует n-арная операция g на Y, такая что φ является гомоморфизмом алгебр (X, f) и (Y, g).

В этом разделе мы будем рассматривать алгебры (X, f), где X является топологическим пространством и операция f раздельно непрерывна. Непрерывное отображение $\varphi : X \to Y$ будем называть называть *f-морфизмом*, если существует n-арная раздельно непрерывная операция на Y, такая что φ является гомоморфизмом алгебр.

Пусть $\psi : X \to Z$ есть непрерывное отображение пространств, Y пространство, отображения $\varphi : X \to Y$, $\theta : Y \to Z$ непрерывны. Тройку (φ, Y, θ) назовем *факторизацией* отображения ψ, если φ является сюрьективным отображением и $\psi = \theta \circ \varphi$, то есть следующая диаграмма коммутативна:

$$\begin{tikzcd} X \arrow[rr, "\psi"] \arrow[dr, "\varphi"'] & & Z \\ & Y \arrow[ur, "\theta"'] & \end{tikzcd}$$

На множестве всех факторизаций отображения ψ рассмотрим частичный порядок, $(\varphi, Y, \theta) \le (\varphi', Y', \theta')$ если существует непрерывное отображение $\xi : Y \to Y'$, для которого следующая диаграмма коммутативна:

$$\begin{tikzcd} X \arrow[rr, "\psi"] \arrow[dr, "\varphi"] \arrow[ddr, "\varphi'"'] & & Z \\ & Y \arrow[ur, "\theta"'] \arrow[d, "\xi"] & \\ & Y' \arrow[uur, "\theta'"'] & \end{tikzcd}$$

Наименьшей факторизацией является факторизация (id_X, X, ψ). Если $\mathcal{F} = \{(\varphi_\alpha, Y_\alpha, \theta_\alpha) : \alpha \in A\}$ есть множество факторизаций отображения ψ, то факторизацию (φ, Y, θ) назовем *инфинумум множества факторизаций* $\mathcal{F}$ (обозначим через $\inf \mathcal{F}$), если

(1) факторизация (φ, Y, θ) меньше каждой факторизации $(\varphi_\alpha, Y_\alpha, \theta_\alpha)$;

(2) если некоторая факторизация (φ', Y', θ') меньше каждой факторизации $(\varphi_\alpha, Y_\alpha, \theta_\alpha)$, то (φ', Y', θ') меньше (φ, Y, θ).

Инфинум $(\varphi, Y, \theta) = \inf \mathcal{F}$ существует и единственен, при этом Y вкладывается в $\prod_{\alpha \in A} Y_\alpha$,

$$\varphi = \mathop{\triangle}_{\alpha \in A} : X \to \prod_{\alpha \in A} Y_\alpha,\ Y = \varphi(X).$$

Если ξ_α есть проекция Y на Y_α и $\theta = \theta_\alpha \circ \xi_\alpha$ то $(\varphi, Y, \theta) = \inf \mathcal{F}$ есть факторизация ψ.

Факторизации (φ, Y, θ) и (φ', Y', θ') эквивалентны, если $(\varphi, Y, \theta) \leq (\varphi', Y', \theta')$ и $(\varphi, Y, \theta) \geq (\varphi', Y', \theta')$, то есть отображение ξ в диаграмме выше является гомеоморфизмом.

Факторизацию (φ, Y, θ) назовем *f-факторизацией*, если отображение φ является f-морфизмом.

Факторизацию (φ, Y, θ) назовем *f-отмеченной*, если существует раздельно непрерывное отображение $g : Y^n \to Z$, такая что следующая диаграмма коммутативна:

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{\psi} & Z \\ {\scriptstyle f}\uparrow & & \uparrow{\scriptstyle g} \\ X^n & \xrightarrow{\varphi^n} & Y^n \end{array} \tag{2.1}$$

f-Факторизация является f-отмеченной.

Предложение 2.5.12. *Пусть Υ и Θ направленные множества, $\{X_\alpha, \upsilon_\alpha^\beta, \Upsilon\}$ и $\{Y_\gamma, \theta_\gamma^\delta, \Theta\}$ есть обратные спектры пространств,*

$$X = \varprojlim\{X_\alpha, \upsilon_\alpha^\beta, \Upsilon\},$$
$$Y = \varprojlim\{Y_\gamma, \theta_\gamma^\delta, \Theta\}$$

есть пределы обратных спектров, $n \in \omega$, $\xi : \Theta \to \Upsilon$ есть неубывающая функция и

$$g_\gamma : X^n_{\xi(\gamma)} \to Y_\gamma$$

есть раздельно непрерывное отображение для $\gamma \in \Theta$ и

$$g = \varprojlim\{\xi, g_\gamma\} : X^n \to Y$$

есть отображение предела обратного спектра пространств

$$X^n = \varprojlim\{X^n_\alpha, (\upsilon_\alpha^\beta)^n, \Upsilon\}$$

в Y. Тогда отображение g раздельно непрерывно.

Доказательство. Пусть $k \in \{1, 2, ..., n\}$, $x_i \in X$ для $i \neq k$,

$$s : X \to X^n,\ x \mapsto (x_1, x_2, ..., x_{k-1}, x, x_{k+1}, ..., x_n).$$

Для раздельной непрерывности g надо показать, что отображение $g \circ s$ непрерывно. Пусть υ_α есть проекция предела обратного спектра X на X_α для $\alpha \in \Upsilon$ и θ_γ есть проекция предела обратного спектра Y на Y_γ для $\gamma \in \Theta$. Положим

$$s_\alpha : X_\alpha \to X^n_\alpha,\ x \mapsto (\upsilon_\alpha(x_1), \upsilon_\alpha(x_2), ..., \upsilon_\alpha(x_{k-1}), x, \upsilon_\alpha(x_{k+1}), ..., \upsilon_\alpha(x_n))$$

для $\alpha \in \Upsilon$. Тогда

$$g \circ s = \varprojlim\{\xi, g_\gamma \circ s_{\xi(\gamma)}\} : X \to Y.$$

Так как g_γ раздельно непрерывное отображение, то отображение

$$g_\gamma \circ s_{\xi(\gamma)} : X_{\xi(\gamma)} \to Y$$

непрерывно для $\gamma \in \Theta$. Следовательно, отображение $g_\gamma \circ s$ непрерывно. $\square$

Предложение 2.5.13. *Пусть X есть пространство, $\psi : X \to Z$ есть непрерывное отображение, $(\varphi_i, Y_i, \theta_i)$, $i \in \omega$ есть убывающая последовательность факторизаций отображения ψ и*

$$(\varphi, Y, \theta) = \inf_{i\in\omega}(\varphi_i, Y_i, \theta_i).$$

(1) Пространство Y вкладывается в $\prod_{i\in\omega} Y_i$.

(2) Пусть

(a) f есть раздельно непрерывная n-арная операция на X;

(b) $\pi_i^{i+1} : Y_{i+1} \to Y_i$ есть непрерывное отображение и $\pi_i^{i+1} \circ \varphi_{i+1} = \varphi_i$ для $i \in \omega$;

(c) факторизация $(\varphi_{i+1}, Y_{i+1}, \pi_i^{i+1})$ отображения φ_i является f-отмеченной факторизацией для $i \in \omega$.

Тогда (φ, Y, θ) является f-факторизацией.

Доказательство. Так как последовательность $\xi = (\varphi_i, Y_i, \theta_i)_i$ убывающая, то существуют π_i^{i+1} как в подпункте (b) пункта (2), положим

$$\pi_i^j = \pi_i^{i+1} \circ \pi_{i+1}^{i+2} \circ ... \circ \pi_{j-1}^j : Y_j \to Y_i$$

для $i < j < \omega$; Пусть

$$Y = \varprojlim\{Y_i, \pi_i^j, \omega\}$$

есть обратный предел последовательности пространств,

$$\varphi = \varprojlim(\varphi_i)_{i\in\omega} : X \to Y$$

есть предельное отображение, индуцированное семейством $(\varphi_i)_{i\in\omega}$ и π_i есть проекция предела Y обратной последовательности на Y_i. Положим $\theta = \theta_0 \circ \pi_0$. Тогда (φ, Y, θ) инфинум.

(1) Так как Y есть обратный предел последовательности пространств $\{Y_i, \pi_i^j, \omega\}$, то Y вкладывается в $\prod_{i\in\omega} Y_i$.

(2) Из (c) вытекает, что существует непрерывное отображение $g_i : Y^n_{i+1} \to Y_i$, для которого $\varphi_i \circ f = \varphi^n_{i+1} \circ g_i$ для $i \in \omega$. Пусть

$$\xi : \omega \to \omega,\ m \mapsto m+1,$$

$$\{\xi, g_i\} : \{Y^n_i, (\pi^j_i)^n, \omega\} \to \{Y_i, \pi^j_i, \omega\}$$

есть отображение обратной последовательности пространств $\{Y^n_i, (\pi^j_i)^n, \omega\}$ в обратную последовательность пространств $\{Y_i, \pi^j_i, \omega\}$ и

$$g = \varprojlim\{\xi, g_i\} : Y^n \to Y$$

есть отображение пределов обратных последовательностей, индуцированное отображением обратных последовательностей. Тогда следующая диаграмма коммутативна:

$$\begin{tikzcd}
Y \arrow[ddrr, "\pi_i"] \arrow[ddrrr, "\pi_{i-1}"] \arrow[ddrrrrr, "\pi_1"] \arrow[ddrrrrrr, "\pi_0"] & & & & & & \\
X \arrow[u, "\varphi"] \arrow[drr, "\varphi_i"] \arrow[drrr, "\varphi_{i-1}"] \arrow[drrrrr, "\varphi_1"] \arrow[drrrrrr, "\varphi_0"] & & & & & & \\
 & \cdots \arrow[r, "\pi^{i+1}_i"'] & Y_i \arrow[r, "\pi^i_{i-1}"'] & Y_{i-1} \arrow[r, "\pi^{i-1}_{i-2}"'] & \cdots \arrow[r, "\pi^2_1"'] & Y_1 \arrow[r, "\pi^1_0"'] & Y_0 \\
 & \cdots \arrow[r, "(\pi^{i+2}_{i+1})^n"] & Y^n_{i+1} \arrow[u, "g_i"] \arrow[r, "(\pi^{i+1}_i)^n"] & Y^n_i \arrow[u, "g_{i-1}"] \arrow[r, "(\pi^i_{i-1})^n"] & \cdots \arrow[r, "(\pi^3_2)^n"] & Y^n_2 \arrow[u, "g_1"] \arrow[r, "(\pi^2_1)^n"] & Y^n_1 \arrow[u, "g_0"] \\
X^n \arrow[uuu, bend left, "f"] \arrow[d, "\varphi^n"'] \arrow[urr, "(\varphi_{i+1})^n"] \arrow[urrr, "(\varphi_i)^n"] \arrow[urrrrr, "(\varphi_2)^n"] \arrow[urrrrrr, "(\varphi_1)^n"] & & & & & & \\
Y^n \arrow[uuuuu, bend left, "g"] \arrow[uurr, "(\pi_{i+1})^n"] \arrow[uurrr, "(\pi_i)^n"] \arrow[uurrrrr, "(\pi_2)^n"] \arrow[uurrrrrr, "(\pi_1)^n"] & & & & & &
\end{tikzcd}$$

Следовательно, $\varphi \circ f = g \circ \varphi^n$, то есть диаграмма (1.1) коммутативна. Из предложения 2.5.12 вытекает, что отображение g раздельно непрерывно. Следовательно, отображение φ является f-гомоморфизмом и (φ, Y, θ) есть f-факторизацией. $\square$

Предложение 2.5.14. *Пусть X есть пространство с раздельно непрерывной операцией f и $\psi : X \to Z$ есть непрерывное отображение. Среди всех f-отмеченных факторизаций отображения ψ существует максимальная f-отмеченная факторизация (φ, Y, θ). При этом выполняются условия:*

(1) пространство Y вкладывается в Z^A для некоторого множества A;

(2) если X компактное пространство с калибром ω_1 и Z есть сепарабельное метризуемое пространство, то Y метризуемый компакт.

Доказательство. Пусть $X_1 = X_2 = ... = X_n = X$, $P = X^n = \prod_{i=1}^n X_i$, $\Phi = \psi \circ f : P \to Z$. Из предложения 2.5.2 вытекает, что sc-факторизация $(\delta^{(\Phi)}, \widetilde{X}, \widetilde{\Phi})$ является максимальной sc-факторизацией раздельно непрерывного отображения Φ. Пусть

$$\delta = \mathop{\triangle}_{i=1}^{n} \delta_i^{(\Phi)} : X \to \widetilde{X} = \prod_{i=1}^{n} \widetilde{X}_i,$$

$S = \delta(X)$, $\varphi = \delta \triangle \psi$, $Y = \varphi(X)$ и $\theta = \pi_Z|_Y$, где

$$\pi_S : S \times Z \to S,\ (s,z) \mapsto s, \qquad \pi_Z : S \times Z \to Z,\ (s,z) \mapsto z.$$

Пусть $\delta_i : S \to X_i$ есть проекция S на X_i, $\delta_i^{(\Phi)} = \delta_i \circ \delta$ для $i = 1, ..., n$. Тогда для

$$g = (\pi_S)^n \circ \prod_{i=1}^{n} \delta_i \circ \widetilde{\Phi} : Y^n \to Z$$

следующая диаграмма коммутативна

$$\begin{tikzcd}
 & Y \arrow[drr, "\theta"] & & \\
X \arrow[ur, "\varphi"] \arrow[rrr, "\psi"] & & & Z \\
X^n \arrow[u, "f"] \arrow[urrr, "\Phi"] \arrow[r, "\varphi^n"] \arrow[rrr, bend right, "\delta^{(\Phi)}"'] & Y^n \arrow[urr, "g"] \arrow[r, "(\pi_S)^n"] & S^n \arrow[r, "\prod_{i=1}^n \delta_i"] & \widetilde{X} \arrow[u, "\widetilde{\Phi}"']
\end{tikzcd}$$

Отображение g раздельно непрерывно, как композиция непрерывных и раздельно непрерывных отображений и диаграмма 2.1 коммутативна. Следовательно, (φ, Y, θ) является f-отмечанной факторизацией отображения ψ.

Покажем, что (φ, Y, θ) является максимальной f-отмеченной факторизацией среди всех f-отмеченных факторизаций отображения ψ. Пусть (ρ, T, ν) есть f-отмеченная факторизация отображения ψ, $h : T^n \to Z$ раздельно непрерывное отображение и $\Phi = \psi \circ f = h \circ \rho^n$, то есть следующая диаграмма коммутативна

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "\psi"] & Z \\ X^n \arrow[u, "f"] \arrow[ur, "\Phi"] \arrow[r, "\rho^n"] & T^n \arrow[u, "h"'] \end{tikzcd}$$

Тройка (ρ^n, T^n, h) является sc-факторизацией отображения Φ, поэтому из того, что sc-факторизация $(\delta^{(\Phi)}, \widetilde{X}, \widetilde{\Phi})$ является максимальной sc-факторизацией раздельно непрерывного отображения Φ вытекает, что существуют непрерывные отображения $\eta_i : T \to \widetilde{X}_i$ для $i = 1, ..., n$ такие что следующая диаграмма коммутативна:

$$\begin{tikzcd} X^n \arrow[r, "\Phi"] \arrow[d, "\rho^n"'] \arrow[dr, "\delta^{(\Phi)}"] & Z \\ T^n \arrow[r, "\prod_{i=1}^n \eta_i"'] & \widetilde{X} \arrow[u, "\widetilde{\Phi}"'] \end{tikzcd}$$

Положим

$$\eta = \mathop{\triangle}_{i=1}^{n} \eta_i : T \to \widetilde{X}.$$

Так как $\delta_i^{(\Phi)} = \eta_i \circ \rho$ для $i = 1, ..., n$ и $\delta = \triangle_{i=1}^n \delta_i^{(\Phi)}$, то $\delta = \eta \circ \rho$. Тогда

$$\varphi = \delta \triangle \psi = (\eta \circ \rho) \triangle \psi = (\eta \circ \rho) \triangle (\nu \circ \rho) = (\eta \triangle \nu) \circ \rho.$$

Следовательно, факторизация (ρ, T, ν) меньше факторизации (φ, Y, θ).

Докажем (1). Пространство Y вкладывается в $\widetilde{X} \times Z$, пространство $\widetilde{X}$, в силу предложения 2.5.2, вкладывается в некоторую степень Z.

Докажем (2). Из предложения 2.5.2 вытекает что $\widetilde{\Phi}$ определяет топологию сомножителей $\widetilde{X}$. Для $i = 1, ..., n$, так как $\widetilde{X}_i$ есть непрерывный образ компакта X_i с калибром ω_1, то $\widetilde{X}_i$ есть компакт с калибром ω_1. Так как Z метризуемое сепарабельное пространство, то из предложения 2.5.11 вытекает, что компакт $\widetilde{X}$ метризуем. Так как Y вкладывается в $\widetilde{X} \times Z$, то Y метризуем. $\square$

Предложение 2.5.15. *Пусть X есть пространство с раздельно непрерывной операцией f и $\psi : X \to Z$ есть непрерывное отображение. Среди всех f-факторизаций отображения ψ существует максимальная f-факторизация (φ, Y, θ). При этом выполняются условия:*

(1) пространство Y вкладывается в Z^A для некоторого множества A;

(2) если X компактное пространство с калибром ω_1 и Z есть сепарабельное метризуемое пространство, то Y метризуемый компакт.

Доказательство. Индукцией по $i \in \omega$ построим убывающею последовательность факторизаций $(\varphi_i, Y_i, \theta_i)_{i\in\omega}$ отображения ψ. Положим $Y_0 = \psi(X)$, $\varphi_0 = \psi$ и $\theta_0 = \mathrm{id}_{Y_0}$. Для $i > 0$, пусть $(\varphi_i, Y_i, \pi^i_{i-1})$ есть максимальная среди f-отмеченных факторизаций отображения φ_{i-1}, которая существует в силу предложения 2.5.14. Положим $\theta_i = \theta_{i-1} \circ \pi^i_{i-1}$.

Положим $(\varphi, Y, \theta) = \inf_{i\in\omega}(\varphi_i, Y_i, \theta_i)$. Из предложения 2.5.13 вытекает, что (φ, Y, θ) является f-факторизацией отображения ψ.

Докажем (1). Пространство Y вкладывается в $\prod_{i\in\omega} Y_i$, $Y_0 \subset Z$ и, в силу предложения 2.5.14, Y_i вкладывается в некоторую степень пространства Y_{i-1} для $i > 0$.

Докажем (2). Покажем индукцией по $i \in \omega$, что Y_i есть метризуемый компакт. Так $Y_0 \subset Z$ и Y_0 непрерывный образ X, то Y_0 метризуемый компакт. Для $i > 0$, Y_{i-1} есть метризуемый компакт и $(\varphi_i, Y_i, \pi^i_{i-1})$ есть максимальная среди f-отмеченных факторизаций отображения φ_{i-1}. Так как X компактное пространство с калибром ω_1, то из предложения 2.5.14 вытекает, что Y_i есть метризуемый компакт. Так как Y вкладывается в $\prod_{i\in\omega} Y_i$, то X является метризуемым компактом. $\square$

Теорема 2.38. *Пусть $\mathbf{X} = (X, f_1, f_2, ..., f_m)$ есть алгебра с раздельно непрерывными операциями $f_1, f_2, ..., f_m$ и типом $\bar{n} = (n_1, n_2, ..., n_m)$. Пусть Z есть пространство и $\psi : X \to Z$ непрерывное отображение. Существует алгебра $\mathbf{Y} = (Y, g_1, g_2, ..., g_m)$ с раздельно непрерывными операциями и с типом $\bar{n}$, непрерывные отображения $\varphi : X \to Y$ и $\theta : Y \to Z$ с $\psi = \theta \circ \varphi$, таким образом, что $\varphi : \mathbf{X} \to \mathbf{Y}$ является непрерывным гомоморфизмом алгебр и выполняются следующие условия:*

(1) если $\mathbf{S} = (S, q_1, ..., q_n)$ есть алгебра с раздельно непрерывными операциями и с типом $\bar{n}$, отображения $\mu : X \to S$ и $\nu : S \to Z$ непрерывны с $\psi = \nu \circ \mu$, отображение $\mu : \mathbf{X} \to \mathbf{S}$ есть непрерывный гомоморфизм, то существует непрерывное отображение $\upsilon : S \to Y$ таким образом, что $\varphi = \upsilon \circ \mu$, то есть следующая диаграмма коммутативна:

$$\begin{tikzcd}
X \arrow[rrr, "\psi"] \arrow[dr, "\mu"'] \arrow[drr, "\varphi"] & & & Z \\
& S \arrow[urr, "\nu"] \arrow[r, "\upsilon"'] & Y \arrow[ur, "\theta"'] &
\end{tikzcd}$$

(2) пространство Y вкладывается в Z^A для некоторого множества A;

(3) если Z метризуемое сепарабельное пространство и X компакт с калибром ω_1, то Y является метризуемым компактом.

Доказательство. Индукцией по $i \in \omega$ построим убывающею последовательность факторизаций $(\varphi_i, Y_i, \theta_i)_{i\in\omega}$ отображения ψ. Положим $Y_0 = \psi(X)$, $\varphi_0 = \psi$ и $\theta_0 = \mathrm{id}_{Y_0}$. Пусть $i > 0$ и $i = qm + r$, где $q, r \in \omega$ и $r < m$. Пусть $(\varphi_i, Y_i, \pi^i_{i-1})$ есть максимальная среди f_{r+1}-факторизаций отображения φ_{i-1}, которая существует в силу предложения 2.5.15. Положим $\theta_i = \theta_{i-1} \circ \pi^i_{i-1}$.

Положим

$$\pi^j_i = \pi^i_{i+1} \circ \pi^{i+1}_{i+2} \circ ... \circ \pi^j_{j-1}$$

для $i < j$.

Положим $(\varphi, Y, \theta) = \inf_{i\in\omega}(\varphi_i, Y_i, \theta_i)$. Пусть $k \in \{1, 2, ..., m\}$. Пусть $q > 0$ и $i = qm + k - 1$. Так как $(\pi^i_{i-1}, Y_i, \theta_i$ является f_k-факторизацией отображения φ_{i-1} и $\pi^i_{i-m} = \pi^{i-1}_{i-m} \circ \pi^i_{i-1}$, то $(\pi^i_{i-m}, Y_i, \theta_i)$ является f_k-факторизацией отображения φ_{i-m} и, тем более, является f_k-отмеченной факторизацией отображения φ_{i-m}. Так как

$$(\varphi, Y, \theta) = \inf_{q\in\omega}(\varphi_{qm+k-1}, Y_{qm+k-1}, \theta_{qm+k-1}),$$

то из предложения 2.5.13 вытекает, что φ является f_k-гомоморфизмом. Пусть g_k есть такая раздельно непрерывная операция на Y, относительно которой отображение $\varphi : (X, f_k) \to (Y, g_k)$ является гомоморфизмом.

Для $\mathbf{Y} = (Y, g_1, g_2, ..., g_m)$, отображение $\varphi : \mathbf{X} \to \mathbf{Y}$ является гомоморфизмом.

Докажем (1). Так как $(\varphi, Y, \theta) = \inf_{i\in\omega}(\varphi_i, Y_i, \theta_i)$, то достаточно показать, что (μ, S, ν) меньше $(\varphi_i, Y_i, \theta_i)$ для всех $i \in \omega$. Докажем это индукцией по $i \in \omega$. Так как (μ, S, ν) есть факторизация ψ, то (μ, S, ν) меньше $(\varphi_0, Y_0, \theta_0)$. Пусть $i > 0$ и $i = qm + r$, где $q, r \in \omega$ и $r < m$. Так как (μ, S, ν) меньше $(\varphi_{i-1}, Y_{i-1}, \theta_{i-1})$, то $\varphi_{i-1} = \upsilon_{i-1} \circ \mu$ для некоторого непрерывного отображения $\upsilon_{i-1} : S \to Y_{i-1}$. Так как μ является f_{r+1}-гомоморфизмом, то (μ, S, υ_{i-1}) является f_{r+1}-факторизацией отображения φ_{i-1}. Так как $(\varphi_i, Y_i, \pi^i_{i-1})$ есть максимальная среди f_{r+1}-факторизаций отображения φ_{i-1}, то (μ, S, υ_{i-1}) меньше $(\varphi_i, Y_i, \pi^i_{i-1})$. Следовательно, $\varphi_i = \upsilon_i \circ \mu$ для некоторого непрерывного отображения $\upsilon_i : S \to Y_i$ и (μ, S, ν) меньше $(\varphi_i, Y_i, \theta_i)$.

Докажем (2). Пространство Y вкладывается в $\prod_{i\in\omega} Y_i$, $Y_0 \subset Z$ и, в силу предложения 2.5.15, Y_i вкладывается в некоторую степень пространства Y_{i-1} для $i > 0$.

Докажем (3). Покажем индукцией по $i \in \omega$, что Y_i есть метризуемый компакт. Так $Y_0 \subset Z$ и Y_0 непрерывный образ X, то Y_0 метризуемый компакт. Пусть $i > 0$ и $i = qm + r$, где $q, r \in \omega$ и $r < m$. Тогда Y_{i-1} есть метризуемый компакт и $(\varphi_i, Y_i, \pi^i_{i-1})$ есть максимальная среди f_{r+1}-отмеченных факторизаций отображения φ_{i-1}. Так как X компактное пространство с калибром ω_1, то из предложения 2.5.14 вытекает, что Y_i есть метризуемый компакт. Так как Y вкладывается в $\prod_{i\in\omega} Y_i$, то X является метризуемым компактом. $\square$

Теорема 2.39. *Пусть* $\mathbf{X} = (X, f_1, f_2, ..., f_m)$ *есть алгебра с раздельно непрерывными операциями* $f_1, f_2, ..., f_m$ *и типом* $\bar{n} = (n_1, n_2, ..., n_m)$. *Предположим, что* X *компакт с калибром* ω_1. *Тогда алгебра* $\mathbf{X}$ *гомоморфно вкладывается в произведение метризуемых компактных алгебр с раздельно непрерывными операциями.*

Подробнее, существует индексное множество A *и семейство алгебр* $\{\mathbf{X}_\alpha : \alpha \in A\}$, *так что у алгебры* $\mathbf{X}_\alpha = (X_\alpha, f_{\alpha,1}, f_{\alpha,2}, ..., f_{\alpha,m})$ *тип* $\bar{n}$, *операции* $f_{\alpha,i}$ *для* $i = 1, ..., m$ *раздельно непрерывны,* X_α *метризуемый компакт для* $\alpha \in A$ *и алгебра* $\mathbf{X}$ *вкладывается в алгебру* $\prod_{\alpha\in A} \mathbf{X}_\alpha$ *как подалгебра.*

Доказательство. Заиндексируем множество $C(X)$ некоторым индексным множеством A: $C(X) = \{\psi_\alpha : \alpha \in A\}$. Пусть $\alpha \in A$. Из теоремы 2.38 вытекает, что существует алгебра $\mathbf{X}_\alpha = (X_\alpha, f_{\alpha,1}, f_{\alpha,2}, ..., f_{\alpha,m})$ с типом $\bar{n}$ и непрерывные отображения $\varphi_\alpha : X \to X_\alpha$ и $\theta_\alpha : X_\alpha \to \mathbb{R}$, так что X_α есть метрический компакт, $\psi_\alpha = \theta_\alpha \circ \varphi_\alpha$ и отображение $\varphi_\alpha : \mathbf{X} \to \mathbf{X}_\alpha$ является гомоморфизмом алгебр. Положим

$$\varphi = \mathop{\triangle}_{\alpha\in A} \varphi_\alpha : X \to \prod_{\alpha\in A} X_\alpha.$$

Тогда $\varphi : \mathbf{X} \to \prod_{\alpha\in A} \mathbf{X}_\alpha$ является гомоморфизмом алгебр и топологическим вложением. □

Из теоремы 2.39 и следствия 2.29 вытекает следующие утверждение.

Теорема 2.40. *Пусть* $\mathbf{X} = (X, f_1, f_2, ..., f_m)$ *есть псевдокомпактная алгебра с раздельно непрерывными операциями и* ω_1 *является предкалибром* X. *Предположим выполняется одно из перечисленных ниже условий:*

(1) операции $\mathbf{X}$ *2-квазинепрерывны;*

(2) операции $\mathbf{X}$ *непрерывны;*

(3) (X, X) *есть пара Гротендика;*

(4) X *есть пространство pc-Гротендика;*

(5) X *принадлежит одному из перечисленных ниже классам пространств:*

- *(a) счетно компактные пространства;*
- *(b) пространства счетной тесноты;*
- *(c) сепарабельные пространства;*
- *(d) k-пространства;*
- *(e) пространства с плотным* σ*-компактным подпространством.*

Тогда алгебра $\mathbf{X}$ *гомоморфно вкладывается в произведение метризуемых компактных алгебр с раздельно непрерывными операциями.*

Глава 3

Классы бэровских пространств определяемые с помощью топологических игр и диагонали

3.1 Модификации игры Банаха-Мазура

Пусть $(X, \mathcal{T})$ есть пространство, $\mathcal{T}^* = \mathcal{T} \setminus \{\varnothing\}$. Обозначим

$$\mathfrak{V}(X) \coloneqq \{(V_n)_{n\in\omega} \in (\mathcal{T}^*)^\omega \,:\, V_{n+1} \subset V_n \text{ для } n \in \omega\}.$$

Положим

$$\mathfrak{U}(X) \coloneqq \{\Upsilon \in (\mathrm{Exp}_*(\mathcal{T}^*))^{\mathcal{T}^*} \,:\, \Upsilon(U) \text{ есть } \pi\text{-база в } U \in \mathcal{T}^*\}.$$

Пусть $\mathcal{P}$ есть некоторая π-база пространства X. Определим $\Upsilon_t(X), \Upsilon_r(X), \Upsilon_p(X, \mathcal{P})$ $(\mathrm{Exp}(\mathcal{T}^*))^{\mathcal{T}^*}$. Для $U \in \mathcal{T}^*$ положим

$$\Upsilon_t(X)(U) = \{V \in \mathcal{T}^* \,:\, V \subset U\}, \qquad \Upsilon_p(X, \mathcal{P})(U) = \{V \in \mathcal{P} \,:\, V \subset U\},$$
$$\Upsilon_r(X)(U) = \{V \in \mathcal{T}^* \,:\, \overline{V} \subset U\}, \qquad \Upsilon_{pr}(X, \mathcal{P})(U) = \{V \in \mathcal{P} \,:\, \overline{V} \subset U\}.$$

Очевидно, $\Upsilon_t(X), \Upsilon_p(X, \mathcal{P}) \in \mathfrak{U}(X)$ и если пространство X квазирегулярно, то $\Upsilon_r(X), \Upsilon_{pr}(X, \mathcal{P}) \in \mathfrak{U}(X)$.

Определим игры $BM(X, \mathcal{V}; \Upsilon, \Psi)$ и $MB(X, \mathcal{V}; \Upsilon, \Psi)$. Пусть $\mathcal{V} \subset \mathfrak{V}(X)$ и $\Upsilon, \Psi \in \mathfrak{U}(X)$. Играют два игрока, α и β. Эти игры отличаются первым ходом игрока α. На первом ходу игрок α выбирает $U_0 = X$ в игре $BM(X, \mathcal{V}; \Upsilon, \Psi)$ и $U_0 \in \Upsilon(X)$ в игре $MB(X, \mathcal{V}; \Upsilon, \Psi)$. Игрок β выбирает $V_0 \in \Psi(U_0)$. На n-том ходу α выбирает $U_n \in \Upsilon(V_{n-1})$ и β выбирает $V_n \in \Psi(U_n)$. После счетного числа ходов определяется победитель: игрок α выиграл, если $(V_n)_{n\in\omega} \in \mathcal{V}$.

Положим

$$BM(X, \mathcal{V}) \coloneqq BM(X, \mathcal{V}; \Upsilon_t(X), \Upsilon_t(X)),$$
$$MB(X, \mathcal{V}) \coloneqq MB(X, \mathcal{V}; \Upsilon_t(X), \Upsilon_t(X)).$$

Определение 3.1. Пусть X пространство. Семейство $\mathcal{V} \subset \mathfrak{V}(X)$ назовем *монолитным* (monolithic) если выполняется условие:

> Пусть $(U_n)_{n\in\omega} \in \mathfrak{V}(X)$ и $(V_n)_{n\in\omega} \in \mathcal{V}$. Если $U_{n+1} \subset V_n \subset U_n$ для $n \in \omega$, то $(U_n)_{n\in\omega} \in \mathcal{V}$.

Замечание 3.2. В [34] вводится схожее понятие устойчивого (stable) семейства, а в [81] понятие монотонного (monotonic) семейства. Монотонное семейство является устойчивым и монолитным. Причина, по которой вводится новый класс монолитных семейств, заключается в том, что $\mathfrak{V}_{BM}(X)$ (см. раздел 3.2) является монолитным, но не монотонным или устойчивым семейством.

Предложение 3.1.1. *Пусть X есть пространство, $\mathcal{V} \subset \mathfrak{V}(X)$, $\Upsilon, \Psi \in \mathfrak{U}(X)$. Если $\mathcal{V}$ есть монолитное семейство, то*

$$BM(X, \mathcal{V}) \sim BM(X, \mathcal{V}; \Upsilon, \Psi), \qquad MB(X, \mathcal{V}) \sim MB(X, \mathcal{V}; \Upsilon, \Psi).$$

Замечание 3.3. Предложение 3.1.1 докажем после 3.1.3. Предложение 3.1.1 позволяет переходить от игры $BM(X, \mathcal{V})$ к игре $BM(X, \mathcal{V}; \Upsilon, \Psi)$ в которой игроки выбирают открытые множества не произвольно, а неким специальным способом, например, из какой либо удобной π-базы.

Пусть

$$\mathfrak{W}(X) \coloneqq \{(V_n, M_n)_{n\in\omega} \in (\mathcal{T}^* \times \mathrm{Exp}_*(X))^\omega : M_{n+1} \subset V_n \text{ и } V_{n+1} \subset V_n \text{ для } n \in \omega\}.$$

Определим игры $OD(X, \mathcal{N}, \mathcal{W}; \Upsilon, \Psi)$ и $DO(X, \mathcal{N}, \mathcal{W}; \Upsilon, \Psi)$. Пусть $\mathcal{N}$ есть π-сеть пространства X, $\mathcal{W} \subset \mathfrak{W}(X)$ и $\Upsilon, \Psi \in \mathfrak{U}(X)$. Играют два игрока, α и β. Эти игры отличаются первым ходом игрока α. На первом ходу игрок α выбирает $U_0 = X$ в игре $OD(X, \mathcal{N}, \mathcal{W}; \Upsilon, \Psi)$ и $U_0 \in \Upsilon(X)$ в игре $DO(X, \mathcal{N}, \mathcal{W}; \Upsilon, \Psi)$. Игрок β выбирает $V_0 \in \Psi(U_0)$ и $M_0 \in \mathcal{N}$, $M_0 \subset U_0$. На n-том ходу α выбирает $U_n \in \Upsilon(V_{n-1})$ и β выбирает $V_n \in \Psi(U_n)$ и $M_n \in \mathcal{N}$, $M_n \subset U_n$. После счетного числа ходов определяется победитель: игрок α выиграл, если $(V_n, M_n)_{n\in\omega} \in \mathcal{W}$.

Положим

$$OD(X, \mathcal{N}, \mathcal{W}) \coloneqq OD(X, \mathcal{N}, \mathcal{W}; \Upsilon_t(X), \Upsilon_t(X)),$$
$$DO(X, \mathcal{N}, \mathcal{W}) \coloneqq DO(X, \mathcal{N}, \mathcal{W}; \Upsilon_t(X), \Upsilon_t(X)).$$

Определение 3.4. Пусть X пространство. Семейство $\mathcal{W} \subset \mathfrak{W}(X)$ назовем *монолитным* (monolithic) если выполняется условие:

> Пусть $(U_n)_{n\in\omega} \in \mathfrak{V}(X)$ и $(V_n, M_n)_{n\in\omega} \in \mathcal{W}$. Если $U_{n+1} \subset V_n \subset U_n$ для $n \in \omega$, то $(U_n, M_n)_{n\in\omega} \in \mathcal{W}$.

Предложение 3.1.2. *Пусть X есть пространство, $\mathcal{N}$ есть π-сеть пространства X, $\mathcal{W} \subset \mathfrak{W}(X)$, $\Upsilon, \Psi \in \mathfrak{U}(X)$. Если $\mathcal{W}$ есть монолитное семейство, то*

$$OD(X, \mathcal{N}, \mathcal{W}) \sim OD(X, \mathcal{N}, \mathcal{W}; \Upsilon, \Psi),$$
$$DO(X, \mathcal{N}, \mathcal{W}) \sim DO(X, \mathcal{N}, \mathcal{W}; \Upsilon, \Psi).$$

Предложение 3.1.2 докажем позднее, смотри предложение 3.5.10.

Пусть $\mathcal{V} \subset \mathfrak{V}(X)$. Положим

$$\mathfrak{W}_v(X, \mathcal{V}) \coloneqq \{(V_n, M_n)_{n\in\omega} \in \mathfrak{W}(X) : (V_n)_{n\in\omega} \in \mathcal{V}\}.$$

Предложение 3.1.3. *Пусть X есть пространство, $\mathcal{V} \subset \mathfrak{V}(X)$, $\mathcal{N}$ π-сеть пространства X, $\mathcal{W} = \mathfrak{W}_v(X, \mathcal{V})$, $\Upsilon, \Psi \in \mathfrak{U}(X)$. Тогда*

$$BM(X, \mathcal{V}; \Upsilon, \Psi) \sim OD(X, \mathcal{N}, \mathcal{W}; \Upsilon, \Psi), \quad MB(X, \mathcal{V}; \Upsilon, \Psi) \sim DO(X, \mathcal{N}, \mathcal{W}; \Upsilon, \Psi).$$

Доказательство. Для $\mathcal{W} = \mathfrak{W}_v(X, \mathcal{V})$ исход игр OD и DO не зависит от выбора M_n, поэтому стратегии из игр BM и MB подойдут для игр OD и DO. □

Предложение 3.1.3 показывает, что игры вида BM (MB) являются частным случаем игр OD (DO).

Доказательство предложения 3.1.1. Пусть $\mathcal{N}$ есть какая нибудь π-сеть пространства X, $\mathcal{W} = \mathfrak{W}_v(X, \mathcal{V})$. Из предложения 3.1.3 вытекает, что

$$BM(X, \mathcal{V}; ...) \sim OD(X, \mathcal{N}, \mathcal{W}; ...), \qquad MB(X, \mathcal{V}; ...) \sim DO(X, \mathcal{N}, \mathcal{W}; ...).$$

Семейство $\mathcal{W}$ является монолитным если и только если семейство $\mathcal{V}$ монолитно. Осталось применить предложение 3.1.2. □

Предложение 3.1.4. *Пусть X есть пространство, $\mathcal{W} \subset \mathfrak{W}(X)$, $\Upsilon, \Psi \in \mathfrak{U}(X)$, $\mathcal{N}_1$ и $\mathcal{N}_2$ есть π-сети пространства X. Предположим что выполняются условия:*

1. *для $M_1 \in \mathcal{N}_1$ существует $M_2 \in \mathcal{N}_2$ так что $M_2 \subset M_1$ и для $M_2 \in \mathcal{N}_2$ существует $M_1 \in \mathcal{N}_1$ так что $M_1 \subset M_2$;*
2. *если $(V_n, M_n)_{n\in\omega} \in \mathcal{W}$, $M_n \subset L_n \subset V_n$ для $n \in \omega$, то $(V_n, L_n)_{n\in\omega} \in \mathcal{W}$.*

Тогда

$$OD(X, \mathcal{N}_1, \mathcal{W}; \Upsilon, \Psi) \sim OD(X, \mathcal{N}_2, \mathcal{W}; \Upsilon, \Psi),$$
$$DO(X, \mathcal{N}_1, \mathcal{W}; \Upsilon, \Psi) \sim DO(X, \mathcal{N}_2, \mathcal{W}; \Upsilon, \Psi).$$

Доказательство. Зафиксируем $\varphi_1 : \mathcal{N}_1 \to \mathcal{N}_2$ и $\varphi_2 : \mathcal{N}_2 \to \mathcal{N}_1$ так что $\varphi_1(M_1) \subset M_1$ для $M_1 \in \mathcal{N}_1$ и $\varphi_2(M_2) \subset M_2$ для $M_2 \in \mathcal{N}_2$.

Пусть у игрока α в игре $G_1 = OD(X, \mathcal{N}_1, \mathcal{W}; \Upsilon, \Psi)$ есть выигрышная стратегия s_1. Укажем выигрышную стратегию s_2 для α в игре $G_2 = OD(X, \mathcal{N}_2, \mathcal{W}; \Upsilon, \Psi)$. Положим

$$s_2(U_0, V_0, M_0, ..., V_{n-1}, M_{n-1}) = U_n = s_1(U_0, V_0, \varphi_2(M_0), ..., V_{n-1}, \varphi_2(M_{n-1})).$$

Пусть у игрока β в игре G_1 есть выигрышная стратегия s_1. Укажем выигрышную стратегию s_2 для β в игре G_2. Игрок β в игре G_2 выбирает на k-ом шаге открытое V_k и $L_k \in \mathcal{N}_1$, $L_k \subset V_k$, $M_k = \varphi_1(L_k)$. Положим

$$\begin{aligned} (V_n, L_n) &= s_1(U_0, V_0, L_0, ..., V_{n-1}, L_{n-1}, U_n), \\ M_n &= \varphi_1(L_n), \\ s_2(U_0, V_0, M_0, ..., V_{n-1}, M_{n-1}, U_n) &= (V_n, M_n). \end{aligned}$$

Для игры DO доказательство аналогично. □

Определение 3.5. Стратегию игрока α в играх BM, MB, OD, DO будем называть *регулярной стратегией*, если $\overline{U_{n+1}} \subset V_n$ для $n \in \omega$.

Предложение 3.1.5. *Пусть X квазирегулярное пространство, G есть одна из игр $BM(X, \mathcal{V}), MB(X, \mathcal{V}), OD(X, \mathcal{N}, \mathcal{W}), DO(X, \mathcal{N}, \mathcal{W})$, где $\mathcal{V} \subset \mathfrak{V}(X)$, $\mathcal{N}$ есть π-сеть пространства X, $\mathcal{W} \subset \mathfrak{W}(X)$, $\mathcal{V}$ и $\mathcal{W}$ есть монолитные семейства.*

(1) *Если у α есть выигрышная стратегия в G, то есть выигрышная регулярная стратегия.*

(2) *Предположим, игрок β выбрал стратегию s в G и у игрока α есть стратегия, которая выигрывает у стратегии s. Тогда у игрока α есть регулярная стратегия, которая выигрывает у стратегии s.*

Доказательство. Если X квазирегулярное пространство, то $\Upsilon = \Upsilon_r(X) \in \mathfrak{U}(X)$. Пусть $\Psi = \Upsilon_t(X) \in \mathfrak{U}(X)$. Тогда, в силу предложений 3.1.1 и 3.1.2,

$$\begin{aligned} &BM(X, \mathcal{V}) \sim BM(X, \mathcal{V}; \Upsilon, \Psi), && MB(X, \mathcal{V}) \sim MB(X, \mathcal{V}; \Upsilon, \Psi), \\ &OD(X, \mathcal{N}, \mathcal{W}) \sim OD(X, \mathcal{N}, \mathcal{W}; \Upsilon, \Psi), && DO(X, \mathcal{N}, \mathcal{W}) \sim DO(X, \mathcal{N}, \mathcal{W}; \Upsilon, \Psi). \end{aligned}$$

□

3.2 Обобщение бэровости и тучности с помощью игр

Пусть $(X, \mathcal{T})$ есть пространство, $\mathcal{T}^* = \mathcal{T} \setminus \{\varnothing\}$. Обозначим

$$\begin{aligned}
\mathfrak{V}_{BM}(X) &\coloneqq \{(V_n)_{n\in\omega} \in \mathfrak{V}(X) \,:\, \bigcap_{n\in\omega} V_n \neq \varnothing\},\\
\mathfrak{V}^*_{BM}(X) &\coloneqq \mathfrak{V}(X) \setminus \mathfrak{V}_{BM}(X),\\
\mathfrak{V}_{R}(X) &\coloneqq \{(V_n)_{n\in\omega} \in \mathfrak{V}(X) \,:\, \overline{V_{n+1}} \subset V_n \text{ для } n \in \omega\}.
\end{aligned}$$

Игра $BM(X) = BM(X, \mathfrak{V}_{BM}(X))$ это классическая игра Банаха-Мазура, положим $BM(X) = BM(X, \mathfrak{V}_{BM}(X))$.

Теорема 3.6 (Банаха-Окстоби (Banach-Oxtoby) [143], см. также [34; 81])**.** *Пусть X пространство.*

(1) *X бэровское если и только если $BM(X)$ β-неблагоприятна;*

(2) *X тучное если и только если $MB(X)$ β-неблагоприятна.*

Определение 3.7. Пусть X пространство, $\mathcal{V} \subset \mathfrak{V}(X)$, $\mathcal{V}^* = \mathcal{V} \cup \mathfrak{V}^*_{BM}(X)$. Назовем пространство X

- $\Gamma^{BM}(\mathcal{V})$-*тучным*, если $MB(X, \mathcal{V})$ β-неблагоприятна;
- $\Gamma^{BM}(\mathcal{V})$-*бэровским*, если $BM(X, \mathcal{V})$ β-неблагоприятна;
- $\Gamma^{BM}(\mathcal{V})$-*пространством*, если $BM(X, \mathcal{V}^*)$ α-благоприятна.

Предложение 3.2.1. *Пусть X есть пространство, $\mathcal{V}_1 \subset \mathcal{V}_2 \subset \mathfrak{V}(X)$.*

(1) *Если X $\Gamma^{BM}(\mathcal{V}_1)$-тучное, то X $\Gamma^{BM}(\mathcal{V}_2)$-тучное.*

(2) *Если X $\Gamma^{BM}(\mathcal{V}_1)$-бэровское, то X $\Gamma^{BM}(\mathcal{V}_2)$-бэровское.*

(3) *Если X $\Gamma^{BM}(\mathcal{V}_1)$-пространство, то $\Gamma^{BM}(\mathcal{V}_2)$-пространство.*

Доказательство. Игрок α в играх $MB(X, \mathcal{V}_2)$ и $BM(X, \mathcal{V}_2)$ использует стратегию из игр $MB(X, \mathcal{V}_1)$ и $BM(X, \mathcal{V}_1)$, соответственно. □

Предложение 3.2.2. *Пусть X есть пространство, семейство $\mathcal{V} \subset \mathfrak{V}(X)$ монолитно.*

(1) *Если X тучное и X $\Gamma^{BM}(\mathcal{V})$-пространство, то X $\Gamma^{BM}(\mathcal{V})$-тучное.*

(2) *Если X бэровское и X $\Gamma^{BM}(\mathcal{V})$-пространство, то X $\Gamma^{BM}(\mathcal{V})$-бэровское.*

Замечание 3.8. В [34] доказывается Theorem 4.3., которая похожа на предложение 3.2.2. В [34] рассматривается игра $G_{\mathcal{V}}$, которая незначительно отличается от $BM(X,\mathcal{V})$ функцией выигрыша: в игре $BM(X,\mathcal{V})$ игрок α выиграл если $(V_n)_{n\in\omega}\in\mathcal{V}$, а в игре $G_{\mathcal{V}}$ если $(U_n)_{n\in\omega}\in\mathcal{V}$. Для реально используемых в приложениях $\mathcal{V}$ игры $G_{\mathcal{V}}$ и $BM(X,\mathcal{V})$ эквивалентны. Ниже, после предложения 3.2.5, мы приведем еще одно доказательство предложения 3.2.2.

Положим

$$\mathfrak{W}_e(X) \coloneqq \{(V_n, M_n)_{n\in\omega}\in\mathfrak{W}(X) : \bigcap_{n\in\omega} V_n = \varnothing\}.$$

Определение 3.9. Пусть X пространство, $\mathcal{N}$ есть π-сеть X, $\mathcal{W}\subset\mathfrak{W}(X)$, $\mathcal{W}^*=\mathcal{W}\cup\mathfrak{W}_e(X)$. Назовем пространство X

- $\Gamma^{OD}(\mathcal{N},\mathcal{W})$-*тучным*, если $DO(X,\mathcal{N},\mathcal{W})$ β-неблагоприятна;
- $\Gamma^{OD}(\mathcal{N},\mathcal{W})$-*бэровским*, если $OD(X,\mathcal{N},\mathcal{W})$ β-неблагоприятна;
- $\Gamma^{OD}(\mathcal{N},\mathcal{W})$-*пространством*, если $OD(X,\mathcal{N},\mathcal{W}^*)$ α-благоприятна.

Предложение 3.2.3. *Пусть X есть пространство, $\mathcal{N}_1,\mathcal{N}_2$ есть π-сети X, $\mathcal{N}_2\subset\mathcal{N}_1$, $\mathcal{W}_1\subset\mathcal{W}_2\subset\mathfrak{W}(X)$.*

(1) *Если X $\Gamma^{OD}(\mathcal{N}_1,\mathcal{W}_1)$-тучное, то X $\Gamma^{OD}(\mathcal{N}_2,\mathcal{W}_2)$-тучное.*

(2) *Если X $\Gamma^{OD}(\mathcal{N}_1,\mathcal{W}_1)$-бэровское, то X $\Gamma^{OD}(\mathcal{N}_2,\mathcal{W}_2)$-бэровское.*

(3) *Если X $\Gamma^{OD}(\mathcal{N}_1,\mathcal{W}_1)$-пространство, то $\Gamma^{OD}(\mathcal{N}_2,\mathcal{W}_2)$-пространство.*

Доказательство. Игрок α в играх $OD(X,\mathcal{N}_2,\mathcal{W}_2)$ и $DO(X,\mathcal{N}_2,\mathcal{W}_2)$ использует стратегию из игр $OD(X,\mathcal{N}_1,\mathcal{W}_1)$ и $DO(X,\mathcal{N}_1,\mathcal{W}_1)$, соответственно. □

Для $\mathcal{W}\subset\mathfrak{W}(X)$ положим

$$\mathfrak{V}_w(X,\mathcal{N},\mathcal{W}) \coloneqq \{(V_n)_{n\in\omega}\in\mathfrak{V}(X) : \text{если } M_n\subset V_n \text{ и } M_n\in\mathcal{N} \\ \text{для } n\in\omega, \text{ то } (V_n,M_n)_{n\in\omega}\in\mathcal{W}\}.$$

Предложение 3.2.4. *Пусть X пространство, $\mathcal{N}$ π-сеть X, $\mathcal{W}\subset\mathfrak{W}(X)$, $\mathcal{V}=\mathfrak{V}_w(X,\mathcal{N},\mathcal{W})$.*

(1) *Если X $\Gamma^{BM}(\mathcal{V})$-тучное, то X $\Gamma^{OD}(\mathcal{N},\mathcal{W})$-тучное.*

(2) *Если X $\Gamma^{BM}(\mathcal{V})$-бэровское, то X $\Gamma^{OD}(\mathcal{N},\mathcal{W})$-бэровское.*

Доказательство. (1) эквивалентно тому, что если $OD(X,\mathcal{N},\mathcal{W})$ β-благоприятна, то $BM(X,\mathcal{V})$ β-благоприятна. Стратегию для β в игре $BM(X,\mathcal{V})$ заключается в том, что β выбирает V_n в соответствии с выигрышной стратегией в игре $OD(X,\mathcal{N})$ и $M_n\in\mathcal{N}$, $M_n\subset V_n$ произвольно. (2) доказывается также как и (1). □

Предложение 3.2.5. *Пусть X пространство, $\mathcal{N}$ есть π-сеть X, $\mathcal{W} \subset \mathfrak{W}(X)$ есть монолитное семейство.*

(1) *Если X тучное и X $\Gamma^{OD}(\mathcal{N},\mathcal{W})$-пространство, то X $\Gamma^{OD}(\mathcal{N},\mathcal{W}))$-тучное.*

(2) *Если X бэровское и X $\Gamma^{OD}(\mathcal{N},\mathcal{W})$-пространство, то X $\Gamma^{OD}(\mathcal{N},\mathcal{W})$-бэровское.*

Замечание 3.10. В [6] (Предложение 3) предложение 3.2.5 доказывается для нескольких конкретных $\mathcal{W}$ и $\mathcal{N}$, но идея доказательства годится и для общего случая. Ниже мы приведем доказательство предложения 3.2.5, смотри предложение 3.5.11.

Доказательство предложения 3.2.2. Пусть $\mathcal{V}^* = \mathcal{V} \cup \mathfrak{V}^*_{BM}(X)$, $\mathcal{W} = \mathfrak{W}_v(X,\mathcal{V})$, $\mathcal{W}^* = \mathcal{W} \cup \mathfrak{W}_e(X)$. Из предложения 3.1.3 вытекает, что игры $BM(X,\mathcal{V})$, $MB(X,\mathcal{V})$ и $BM(X,\mathcal{V}^*)$ эквивалентны играм $OD(X,\mathcal{N},\mathcal{W})$, $DO(X,\mathcal{N},\mathcal{W})$ и $OD(X,\mathcal{N},\mathcal{W}^*)$, соответственно. Следовательно, свойства $\Gamma^{BM}(X,\mathcal{V})$-тучность, $\Gamma^{BM}(X,\mathcal{V})$-бэровость и $\Gamma^{BM}(X,\mathcal{V})$-пространство совпадают со свойствами $\Gamma^{OD}(X,\mathcal{N},\mathcal{W})$-тучность, $\Gamma^{OD}(X,\mathcal{N},\mathcal{W})$-бэровость и $\Gamma^{OD}(X,\mathcal{N},\mathcal{W})$-пространство, соответственно. Из того что $\mathcal{V}$ монолитно вытекает, что $\mathcal{W}$ монолитно. Теперь предложение 3.2.2 вытекает из предложения 3.2.5. □

Для $q \in \{l,k\}$ определим семейства $\mathfrak{W}_q(X) \subset \mathfrak{W}(X)$, последовательность $(V_n,M_n)_{n\in\omega} \in \mathfrak{W}(X)$ принадлежит $\mathfrak{W}_q(X)$ если выполняется условие $(\mathfrak{W}_q)$:

$(\mathfrak{W}_l)$ $\overline{\mathrm{lt}}_{n\in\omega} M_n \cap \bigcap_{n\in\omega} V_n \neq \varnothing$;

$(\mathfrak{W}_k)$ существует последовательность $(x_n)_{n\in\omega}$, так что выполняется условие:

(LSQ) $x_n \in M_n$ для $n \in \omega$ и для каждого $p \in \omega^*$ существует $x \in \bigcap_{n\in\omega} V_n$, так что $x = \lim_p x_n$.

Отметим, что если X регулярное пространство, то условие (LSQ) эквивалентно условию

$(LSQ)'$ $x_n \in M_n$ для $n \in \omega$, подпространство $\overline{\{x_n : n \in \omega\}}$ компактно и $\overline{\mathrm{lt}}_{n\in\omega} x_n \subset \bigcap_{n\in\omega} V_n$.

Обозначим

$$\mathrm{L}((V_n,M_n)_{n\in\omega}) = \{(x_n)_{n\in\omega} \in X^\omega : \text{для } (x_n)_{n\in\omega} \text{ выполняется условие } (LSQ)\}$$

$(V_n,M_n)_{n\in\omega} \in \mathfrak{W}_k(X)$ если и только если $\mathrm{L}((V_n,M_n)_{n\in\omega}) \neq \varnothing$.

Положим

$$\begin{aligned}
&\mathcal{N}_o(X) \coloneqq \mathcal{T}^*, && \mathcal{N}_p(X) \coloneqq \{\{x\} : x \in X\},\\
&\mathfrak{V}_o(X) \coloneqq \mathfrak{V}_w(X, \mathcal{N}_o(X), \mathfrak{W}_l(X)), && \mathfrak{V}_p(X) \coloneqq \mathfrak{V}_w(X, \mathcal{N}_p(X), \mathfrak{W}_l(X)),
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\mathfrak{V}_f(X) \coloneqq \{(U_n)_{n\in\omega} \in \mathfrak{V}_{BM}(X) :\ & \text{для некоторого } x \in \bigcap_{n\in\omega} U_n\\
& \text{семейство } (U_n)_{n\in\omega} \text{ образует базу в точке } x\},\\
\mathfrak{V}_k(X) \coloneqq \{(U_n)_{n\in\omega} \in \mathfrak{V}_{BM}(X) :\ & \bigcap_{n\in\omega} U_n = M \text{ компактно и семейство } (U_n)_{n\in\omega}\\
& \text{является внешней базой множества } M\}.
\end{aligned}$$

Отметим, что

- $(V_n)_{n\in\omega} \in \mathfrak{V}_o(X)$ если и только если $(V_n)_{n\in\omega} \in \mathfrak{V}_{BN}(X)$ и для для любой последовательности открытых непустых множеств $(M_n)_{n\in\omega}$, $M_n \subset V_n$ для $n \in \omega$ выполняется $\overline{\mathrm{lt}}_{n\in\omega} M_n \subset \bigcap_{n\in\omega} V_n$;
- $(V_n)_{n\in\omega} \in \mathfrak{V}_p(X)$ если и только если $(V_n)_{n\in\omega} \in \mathfrak{V}_{BN}(X)$ и для для любой последовательности точек $(x_n)_{n\in\omega}$, $x_n \in V_n$ для $n \in \omega$ выполняется $\overline{\mathrm{lt}}_{n\in\omega} x_n \subset \bigcap_{n\in\omega} V_n$.

Несложно проверяется следующее предложение.

Предложение 3.2.6. *Пусть X пространство. Семейства $\mathfrak{V}_r(X)$ и $\mathfrak{W}_q(X)$ являются монолитными для $r \in \{o, p, f, k\}$ и $q \in \{l, k\}$.*

Для $r \in \{o, p, f, k\}$ определим игры

$$\begin{aligned}
&BM_r(X) \coloneqq BM(X, \mathcal{V}), && MB_r(X) \coloneqq MB(X, \mathcal{V}),\\
&BM_r^*(X) \coloneqq BM(X, \mathcal{V}^*), && MB_r^*(X) \coloneqq MB(X, \mathcal{V}^*)
\end{aligned}$$

где

$$\mathcal{V} = \mathfrak{V}_r(X), \qquad \mathcal{V}^* = \mathcal{V} \cup \mathfrak{V}_{BM}^*(X).$$

Для $t \in \{o, p\}$ и $q \in \{l, k\}$ определим игры

$$\begin{aligned}
&OD_{t,q}(X) \coloneqq OD(X, \mathcal{N}, \mathcal{W}), && DO_{t,q}(X) \coloneqq DO(X, \mathcal{N}, \mathcal{W}),\\
&OD_{t,q}^*(X) \coloneqq OD(X, \mathcal{N}, \mathcal{W}^*), && DO_{t,q}^*(X) \coloneqq DO(X, \mathcal{N}, \mathcal{W}^*)
\end{aligned}$$

где

$$\mathcal{N} = \mathcal{N}_t(X),$$

$$\mathcal{W} = \mathfrak{W}_q(X), \qquad \mathcal{W}^* = \mathcal{W} \cup \mathfrak{W}_e(X).$$

Определение 3.11. Пусть X пространство, $r \in \{o, p, f, k\}$. Назовем пространство X

- Γ^{BM}_r*-тучным*, если X (β, MB_r)-неблагоприятно;
- Γ^{BM}_r*-бэровским*, если X (β, BM_r)-неблагоприятно;
- Γ^{BM}_r*-пространством*, если X (α, BM^*_r)-благоприятно.

  Класс Γ^{BM}_r-пространств будем обозначать как Γ^{BM}_r.

Пусть $t \in \{o, p\}$ и $q \in \{l, k\}$. Назовем пространство X

- $\Gamma^{OD}_{t,q}$*-тучным*, если X $(\beta, DO_{t,q})$-неблагоприятно;
- $\Gamma^{OD}_{t,q}$*-бэровским*, если X $(\beta, OD_{t,q})$-неблагоприятно;
- $\Gamma^{OD}_{t,q}$*-пространством*, если X $(\alpha, OD^*_{t,q})$-благоприятно.

Класс $\Gamma^{OD}_{t,q}$-пространств будем обозначать как $\Gamma^{OD}_{t,q}$.

Определение 3.12. Пусть X пространство, $x \in X$. Пусть $t \in \{o, p, k, f\}$. Назовем точку x *q_t-точкой*, если существует $(V_n)_{n\in\omega} \in \mathfrak{V}_t(X)$ так что $x \in \bigcap_{n\in\omega} V_n$.

Напомним, точка $x \in X$ называется *q-точкой* если существует $(V_n)_{n\in\omega} \in \mathfrak{V}_{BM}(X)$ так что $x \in \bigcap_{n\in\omega} V_n$ и для любая последовательность $(x_n)_{n\in\omega}$, $x_n \in V_n$ для $n \in \omega$, накапливается к некоторой точке, смотри [132]. Если X регулярное пространство, то x является q-точкой если и только если x является q_p-точкой. Пространства точечно-счетного типа это в точности пространства, в которых каждая точка является q_k-точкой. Точка является q_f-точкой если и только если в точке есть счетная база.

Из определений вытекает

Предложение 3.2.7. *Пусть X пространство, $t \in \{o, p, k, f\}$. Если X является Γ^{BM}_t-тучным (-бэровским) пространством, то в X существуют q_t-точки (множество q_t-точек плотно в X).*

Определение 3.13 ([6])**.** Пусть X пространство, $Y \subset X$. Назовем Y *C–плотным*, если $\overline{Y} = X$ и для любого счетного семейства γ открытых подмножеств X, семейство γ локально конечно если и только если семейство $\{U \cap Y : U \in \gamma\}$ локально конечно в Y.

Для тихоновского X, Y C–плотно в X если и только если Y плотно в X и C–вложено в X.

Предложение 3.2.8 ([6])**.** *Если X квазирегулярное пространство, $Y \subset X \subset \overline{Y}$. Пусть $\Gamma \in \{\Gamma^{BM}_o, \Gamma^{OD}_{o,l}\}$.*

(1) *Если Y есть Γ-тучное (Γ-бэровское) пространство, то X есть Γ-тучное (Γ-бэровское) пространство.*

(2) *Пусть X квазирегулярное пространство и Y C–плотно в X. Пространство Y Γ-тучное (Γ-бэровское) если и только если Y Γ-тучное (Γ-бэровское).*

Доказательство. (1) Каждой стратегии игрока α в игре на Y ставится в соответствие стратегия на X. Пусть к nму ходу построены открытые множества $U_0, V_0, \ldots$ пространства X. В соответствии со стратегией на Y, игрок α выбирает открытое в Y множество $U'_n \subset Y$ в зависимости от множеств $U_0 \cap Y, V_0 \cap Y, \ldots$. Открытое множество $U_n \subset X$ выбираем таким образом, что $U_n \cap Y = U'_n$ и $U_n \subset V_{n-1}$. Если α выигрывает в игре на Y, то тогда выиграет и в игре на X.

(2) В силу (1), достаточно показать, что если Y C–плотно в X, то если X есть Γ-тучное (Γ-бэровское) пространство, то Y есть Γ-тучное (Γ-бэровское) пространство. В силу предложения 3.1.5, у α есть регулярная стратегия на X. Регулярной стратегии игрока α в игре на X ставится в соответствие стратегия на Y. Пусть к n-му ходу построены открытые множества $U'_0, V'_0, \ldots$ пространства Y. В соответствии со стратегией на X, игрок α выбирает открытое в X множество $U_n \subset \overline{U_n} \subset V_{n-1}$ в зависимости от множеств $U_0 = \operatorname{Int} \overline{U'_0}, V_0 = \operatorname{Int} \overline{V'_0}, \ldots$. Положим $U'_n = U_n \cap Y$. Если α выигрывает в игре на X, то тогда выиграет и в игре на Y. □

Из предложений 3.2.1, 3.2.3, 3.2.4 и теоремы 3.6 вытекает

Предложение 3.2.9. *Пусть X пространство. В диаграммах ниже, стрелка*

$$A \to B$$

означает, что

(1) *Если X является A-тучным пространством, то X является B-тучным пространством;*

(2) *если X является A-бэровским пространством, то X является B-бэровским пространством;*

(3) *если X является A-пространством, то X является B-пространством.*

Нижняя стрелка означает, что из A-тучности и A-бэровости вытекает тучность и бэровость.

$$
\begin{tikzcd}
 & \Gamma_f^{BM} \arrow[r] & \Gamma_k^{BM} \arrow[dr] \arrow[ddr] & \\
\Gamma_o^{BM} \arrow[ddr] & & & \Gamma_p^{BM} \arrow[lll] \arrow[ddl] \\
\Gamma_{o,k}^{OD} \arrow[dr] & & & \Gamma_{p,k}^{OD} \arrow[lll] \arrow[dl] \\
 & \Gamma_{o,l}^{OD} \arrow[d] & \Gamma_{p,l}^{OD} \arrow[l] & \\
 & \Gamma^{BM} & &
\end{tikzcd}
$$

3.3 Γ_r^{BM} и $\Gamma_{t,q}^{OD}$ пространства

В этом разделе изучаются какие пространства являются Γ_r^{BM} и $\Gamma_{t,q}^{OD}$ пространствами. Значение этих пространств определяет следующее предложение, которое вытекает из предложений 3.2.2 и 3.2.5.

Предложение 3.3.1. *Пусть X пространство, $\Gamma \in \{\Gamma_r^{BM}, \Gamma_{t,q}^{OD}\}$, где $r \in \{o, p, f, k\}$, $t \in \{o, p\}$ и $q \in \{l, k\}$.*

(1) *Если X тучное и X Γ-пространство, то X Γ-тучное.*

(2) *Если X бэровское и X Γ-пространство, то X Γ-бэровское.*

Предложение 3.3.2. *Пусть X пространство, $\Upsilon, \Psi \in \mathfrak{U}(X)$, $r \in \{o, p, f, k\}$, $t \in \{o, p\}$ и $q \in \{l, k\}$. Тогда*

$$
BM_r^*(X) \sim BM(X, \mathcal{V}^*; \Upsilon, \Psi), \qquad OD_{t,q}^*(X) \sim OD(X, \mathcal{N}_t(X), \mathcal{W}^*; \Upsilon, \Psi),
$$

где $\mathcal{V}^* = \mathfrak{V}_r(X) \cup \mathfrak{V}_{BM}^*(X)$ и $\mathcal{W}^* = \mathfrak{W}_q(X) \cup \mathfrak{W}_e(X)$. Если $\mathcal{P}$ π-база в X, то $\Upsilon_p(X, \mathcal{P}) \in \mathfrak{U}(X)$ и если пространство X квазирегулярно, то $\Upsilon_r(X), \Upsilon_{pr}(X, \mathcal{P}) \in \mathfrak{U}(X)$.

(1) *$X \in \Gamma_r^{BM}$ если и только если $BM(X, \mathcal{V}^*; \Upsilon, \Psi)$ α-благоприятна.*

(2) *$X \in \Gamma_{t,q}^{OD}$ если и только если $OD(X, \mathcal{N}_t(X), \mathcal{W}^*; \Upsilon, \Psi)$ α-благоприятна.*

(3) *$X \in \Gamma_{o,q}^{OD}$ если и только если $OD(X, \mathcal{P}, \mathcal{W}^*; \Upsilon, \Psi)$ α-благоприятна если и только если $OD(X, \mathcal{P}, \mathcal{W}^*; \widetilde{\Upsilon}, \widetilde{\Upsilon})$ α-благоприятна, где $\widetilde{\Upsilon} = \Upsilon_p(X, \mathcal{P})$.*

(4) *если $X \in \Gamma_r^{BM}$, то для любого $n \in \omega$ существует выигрышная стратегия s для игрока α, такая что выполняется условие: если игрок β на шаге $k < n$ выбирает $V_k = X$, то α выбирает $U_{k+1} = X$.*

(5) *если $X \in \Gamma_{t,q}^{OD}$, то для любого $n \in \omega$ существует выигрышная стратегия s для игрока α, такая что выполняется условие: если игрок β на шаге $k < n$ выбирает $V_k = X$, то α выбирает $U_{k+1} = X$.*

(6) *если $X \in \Gamma_{o,q}^{OD}$, то существует выигрышная стратегия s для игрока α, такая что выполняется условие: если игрок β на шаге n выбирает $V_n = X$ и $M_n = X$, то α выбирает $U_{n+1} = X$.*

Доказательство. Эквивалентность игр и пункты (1) и (2) вытекают из предложений 3.1.1 и 3.2.6. Пункт (3) вытекает из предложения 3.1.4.

Докажем (4). Пусть $\tilde{s}$ есть выигрышная стратегия для α. Определим стратегию s. Пусть $k > 0$ и сделано k ходов: U_0, V_0, U_1, ..., U_k, V_k. Выберем U_{k+1} в соответствии со стратегией s. Если $V_k = X$ и $k < n$, то $U_{k+1} = X$. В противном случае положим, $n_0 = \min\{l, n \,:\, l < n, V_l \neq X\}$, $U_{k+1} = \tilde{s}(U_{n_0}, V_{n_0}, U_{n_0+1}, ..., U_k, V_k)$.

Докажем (5). Пусть $\tilde{s}$ есть выигрышная стратегия для α. Определим стратегию s. Пусть $k > 0$ и сделано k ходов: U_0, V_0, M_0, U_1, ..., U_k, V_k, M_k. Выберем U_{k+1} в соответствии со стратегией s. Если $V_k = X$ и $k < n$, то $U_{k+1} = X$. В противном случае положим, $n_0 = \min\{l, n \,:\, l < n, V_l \neq X\}$, $U_{k+1} = \tilde{s}(U_{n_0}, V_{n_0}, M_{n_0}, U_{n_0+1}, ..., U_k, V_k, M_k)$.

Докажем (6). Пусть $\tilde{s}$ есть выигрышная стратегия для α. Определим стратегию s. Пусть $k > 0$ и сделано k ходов: $U_0, V_0, M_0, U_1, ..., U_k, V_k, M_k$. Выберем U_{k+1} в соответствии со стратегией s. Если $V_k = X$ и $M_k = X$, то $U_{k+1} = X$. В противном случае положим, $n_0 = \min\{l < k \,:\, V_l \neq X$ или $M_l \neq X\}$, $U_{k+1} = \tilde{s}(U_{n_0}, V_{n_0}, M_{n_0}, U_{n_0+1}, ..., U_k, V_k, M_k)$. □

Пусть D есть индексное множество, $(X_\delta, \mathcal{T}_\delta)$ есть пространство и $\mathcal{T}_\delta^* = \mathcal{T}_\delta \setminus \{\varnothing\}$ для $\delta \in D$, $X = \prod_{\delta \in D} X_\delta$. Для $(U_\delta)_{\delta \in D} \in \prod_{\delta \in D} \mathcal{T}_\delta^*$ обозначим $\operatorname{supp}((U_\delta)_{\delta \in D}) = \{\delta \in D \,:\, U_\delta \neq X_\delta\}$. Семейство

$$\mathfrak{P}\left[(X_\delta)_{\delta \in D}\right] \coloneqq \{\prod_{\delta \in D} U_\delta \,:\, (U_\delta)_{\delta \in D} \in \prod_{\delta \in D} \mathcal{T}_\delta^* \text{ и } |\operatorname{supp}((U_\delta)_{\delta \in D})| < \omega\}$$

является базой пространства X.

Из предложения 3.3.2 вытекает

Предложение 3.3.3. *Пусть $r \in \{o, p, f, k\}$, $q \in \{l, k\}$, D есть индексное множество, $(X_\delta, \mathcal{T}_\delta)$ есть пространство для $\delta \in D$, $X = \prod_{\delta \in D} X_\delta$. Пусть $\mathcal{B} = \mathfrak{P}\left[(X_\delta)_{\delta \in D}\right]$, $\mathcal{V}^* = \mathfrak{V}_r(X) \cup \mathfrak{V}_{BM}^*(X)$, $\mathcal{W}^* = \mathfrak{W}_q(X) \cup \mathfrak{W}_e(X)$ и $\Upsilon = \Upsilon_p(X, \mathcal{B})$.*

(1) $X \in \Gamma_r^{BM}$ *если и только если* $BM(X, \mathcal{V}^*; \Upsilon, \Upsilon)$ *α-благоприятна.*

(2) $X \in \Gamma_{p,q}^{OD}$ *если и только если* $OD(X, \mathcal{N}_p(X), \mathcal{W}^*; \Upsilon, \Upsilon)$ *α-благоприятна.*

(3) $X \in \Gamma_{o,q}^{OD}$ *если и только если* $OD(X, \mathcal{B}, \mathcal{W}^*; \Upsilon, \Upsilon)$ *α-благоприятна.*

Предложение 3.3.4. *Пусть* $r \in \{o, p\}$, $X \in \Gamma_r^{BM}$, $Y \in \Gamma_k^{BM}$. *Тогда* $X \times Y \in \Gamma_r^{BM}$.

Доказательство. Пусть s_X и s_Y есть выигрышные стратегии для α на X и Y, соответственно. Опишем выигрышную стратегию для α. Из предложения 3.3.3 вытекает, что достаточно рассмотреть случай, когда игрок β выбирает множества вида $V_n = V_{X,n} \times V_{Y,n} \subset X \times Y$. На n-ом шаге, положим $U_{X,n} = s_X(U_{X,0}, V_{X,0}, ..., V_{X,n-1})$, $U_{Y,n} = s_Y(U_{Y,0}, V_{Y,0}, ..., V_{Y,n-1})$ и $U_n = U_{X,n} \times U_{Y,n}$. $\square$

Предложение 3.3.5. *Пусть* $r \in \{k, f\}$, $X_n \in \Gamma_r^{BM}$ *для* $n \in \omega$. *Тогда* $X = \prod_{n\in\omega} X_n \in \Gamma_r^{BM}$.

Доказательство. Опишем выигрышную стратегию для α. Пусть s_n есть выигрышная стратегия для α на X_n, для которой выполняется условие (4) предложения 3.3.2. Обозначим $\mathcal{B} = \mathfrak{P}\left[(X_n)_{n\in\omega}\right]$. Из предложения 3.3.3 вытекает, что достаточно рассмотреть случай, когда игрок β выбирает множества вида $V_k = \prod_{n\in\omega} V_{n,k} \in \mathcal{B}$. На k-ом шагу, положим $U_{n,k} = s_n(U_{n,0}, V_{n,0}, ..., V_{n,k-1})$ для $n \in \omega$ и $U_k = \prod_{n\in\omega} U_{n,k}$. $\square$

Утверждение 3.3.6. *Пусть* $(X, \mathcal{T})$ *есть квазирегулярное пространство,* $\mathcal{T}^* = \mathcal{T} \setminus \{\varnothing\}$, $\gamma_n \subset \mathcal{T}^*$, $\overline{\bigcup \gamma_n} = X$ *для* $n \in \omega$, $\mathcal{V} \subset \mathfrak{V}(X)$, $\mathcal{V}^* = \mathcal{V} \cup \mathfrak{V}^*_{BM}(X)$. *Предположим выполняется условие:*

- *если* $(U_n)_{n\in\omega} \in \mathfrak{V}_R(X)$, $U_0 = X$ *и для каждого* $n > 0$ *существует* $W_n \in \gamma_n$, *так что* $U_n \subset W_n$, *то либо* $\bigcap_{n\in\omega} U_n = \varnothing$ *либо* $(U_n)_{n\in\omega} \in \mathcal{V}$.

Тогда $BM(X, \mathcal{V}^*)$ *α-благоприятна.*

Доказательство. Опишем выигрышную стратегию для α. Положим $U_0 = X$. Для $n > 0$, на n-ом шаге игрок α выбирает $U_n \in \mathcal{T}^*$ таким образом, чтобы выполнялось условия:

- $\overline{U_n} \subset V_{n-1}$;
- $\overline{U_n} \subset W_n$ для некоторого $W_n \in \gamma_n$.

$\square$

Теорема 3.14. (1) $\Gamma_f^{BM} \subset \Gamma_k^{BM} \subset \Gamma_p^{BM} \subset \Gamma_o^{BM}$.

(2) *Пусть* $r \in \{o, p\}$, $X \in \Gamma_r^{BM}$, $Y \in \Gamma_k^{BM}$. *Тогда* $X \times Y \in \Gamma_r^{BM}$.

(3) *Пусть* $r \in \{k, f\}$, $X_n \in \Gamma_r^{BM}$ *для* $n \in \omega$. *Тогда* $\prod_{n\in\omega} X_n \in \Gamma_r^{BM}$.

(4) *Для* $r \in \{f, k, p, o\}$, *если* $X \in \Gamma_r^{BM}$ *и* $U \subset X$ *открытое подпространство, то* $U \in \Gamma_r^{BM}$.

(5) *Для* $r \in \{f, k, p, o\}$, *если пространство* X *локально* Γ_r^{BM} *(т.е. у любой точки есть окрестность* $U \in \Gamma_r^{BM}$*), то* $X \in \Gamma_r^{BM}$.

(6) *Если* X *квазирегулярное пространство и принадлежит одному из классов, перечисленных в пункте* (Γ_t^{BM}) *для* $t \in \{f, k, p, o\}$, *то* X *является* Γ_t^{BM}*-пространством.*

(Γ_f^{BM}) *метризуемые пространства, моровские пространства, разлагаемое пространство, полурегулярные* σ*-пространства и полурегулярные пространства со счетной сетью;*

(Γ_k^{BM}) *компактные пространства, p-пространства, полурегулярные сильно* Σ*-пространства;*

(Γ_p^{BM}) *счетно компактные пространства, полурегулярные* Σ*-пространства,* $w\Delta$*-пространства;*

(Γ_o^{BM}) *слабо компактные пространства.*

Доказательство. Пункт (1) вытекает из предложения 3.2.9, пункт (2) вытекает из предложения 3.3.4 и пункт (3) вытекает из предложения 3.3.5.

Докажем (4). Игрок α придерживается выигрышной стратегии игры на X.

Докажем (5). После первого хода, игрок α выбирает $U_1 \subset V_0$ таким образом, что $U_1 \in \Gamma_r^{BM}$, далее придерживается выигрышной стратегии для U_1.

Докажем (6). Пусть $\mathcal{T}$ есть топология X и $\mathcal{T}^* = \mathcal{T}\setminus\{\varnothing\}$. Для $\mathcal{F} \subset \mathrm{Exp}_*(X)$ обозначим

$$\Omega(\mathcal{F}) = \{U \in \mathcal{T}^* : \text{либо } U \cap M = \varnothing \text{ либо } \overline{U} \subset \overline{M} \text{ для } M \in \mathcal{F}\}.$$

Если $\mathcal{F}$ локально конечно, то $\overline{\bigcup \Omega(\mathcal{F})} = X$. Для $t \in \{f, k, p, o\}$ и $\mathcal{V} = \mathfrak{V}_t(X)$ построим $(\gamma_n)_{n\in\omega}$ как в утверждении 3.3.6.

(Γ_f^{BM}) Пусть X разлагаемое пространство. Возьмем $(\gamma_n)_{n\in\omega}$ разложение (development) пространства X.

Пусть X полурегулярные σ-пространство. Пусть $(\mathcal{F}_n)_{n\in\omega}$ последовательность локально конечных семейств, так что $\bigcup_{n\in\omega} \mathcal{F}_n$ сеть. Положим $\gamma_n = \Omega(\mathcal{F}_n)$.

(Γ_k^{BM}) Пусть X компактные пространство. Положим $\gamma_n = \{X\}$.

Пусть X p-пространства. Положим $\gamma_n = \mathcal{U}_n$ из определения p-пространств (Defenition 3.15, [87]).

Пусть X сильно Σ-пространства. Положим $\gamma_n = \Omega(\mathcal{F}_n)$, где $\mathcal{F} = \bigcup_n \mathcal{F}_n$ σ-дискретное семейство из (Defenition 4.13, [87]).

(Γ_p^{BM}) Пусть X счетно компактные пространства. Положим $\gamma_n = \{X\}$.

Пусть X Σ-пространства. Положим $\gamma_n = \Omega(\mathcal{F}_n)$, где $\mathcal{F} = \bigcup_n \mathcal{F}_n$ σ-дискретное семейство из (Defenition 4.13, [87]).

Пусть X $w\Delta$-пространство. Положим $\gamma_n = \mathcal{G}_n$ (Defenition 3.1, [87]).

(Γ_o^{BM}) Пусть X слабо компактное пространство. Положим $\gamma_n = \{X\}$.

□

В [34] доказано (Γ_k^{BM}) для p-пространств.

Предложение 3.3.7 ([6])**.** *Пусть $t \in \{o,p\}$, X есть $\Gamma_{t,k}^{OD}$-пространства и Y есть $\Gamma_{t,l}^{OD}$-пространство. Тогда $X \times Y$ есть $\Gamma_{t,l}^{OD}$-пространство.*

Доказательство. Открытые множества вида $V \times U$, где $V \subset X$ и $U \subset Y$, образуют базу $\mathcal{B}$ пространства $X \times Y$. Определим выигрышную стратегию для α. В силу предложения 3.3.2, достаточно рассматривать случай, когда игроки α и β выбирают открытые множества вида $V \times U \in \mathcal{B}$ и β выбирает множества M_n вида $M_n = M_{X,i} \times M_{Y,i}$, $M_{X,i} \in \mathcal{N}_t(X)$ и $M_{Y,i} \in \mathcal{N}_t(Y)$. На n-ом ходу выберем открытые непустые $U_{X,n} \subset V_{X,n-1}$ и $U_{Y,n} \subset V_{Y,n-1}$ в соответствии со стратегиями на X и Y, где $V_{n-1} = V_{X,n-1} \times V_{Y,n-1}$ и $M_{n-1} = M_{X,n-1} \times M_{Y,n-1}$ есть выбор β на $n-1$-ом шаге. Положим $U_n = U_{X,n} \times U_{Y,n}$. Проверим выигрыш игрока α.

Пусть $(x_n)_{n\in\omega} \in \mathrm{L}((V_{X,n}, M_{X,n})_{n\in\omega})$. Пусть $y \in \overline{\mathrm{lt}}_{n\in\omega} M_{Y,n} \cap \bigcap_{n\in\omega} V_{Y,n}$. Положим $N(U) = \{n \in \omega \ : \ M_{Y,n} \cap U \neq \varnothing\}$ для $U \subset Y$ и $\mathcal{F} = \{N(U) \ : U$ есть окрестность точки $x\}$. Семейство $\mathcal{F}$ является фильтром на ω. Пусть $p \in \omega^*$ есть некоторый ультрафильтр, содержащий $\mathcal{F}$. Существует $x \in \bigcap_{n\in\omega} V_{X,n}$, для которого $x = \lim_p (x_n)_{n\in\omega}$. Тогда $(x,y) \in \overline{\mathrm{lt}}_{n\in\omega} M_n \cap \bigcap_{n\in\omega} V_n$. □

Предложение 3.3.8 ([6])**.** *Пусть D есть индексное множество, X_δ есть $\Gamma_{o,k}^{OD}$-пространство для $\delta \in D$. Тогда $X = \prod_{\delta\in D} X_\delta$ есть $\Gamma_{o,k}^{OD}$-пространство.*

Доказательство. В силу предложения 3.3.3 (3), достаточно рассмотреть случай, когда игроки α и β выбирают множества U_n, V_n, M_n из $\mathcal{B} = \mathfrak{P}\left[(X_\delta)_{\delta\in D}\right]$.

Определим выигрышную стратегию для игрока α. Пусть s_δ есть выигрышная стратегия для α на X_δ, для которой выполняется условие (6) из предложения 3.3.2. Пусть сделано $n-1$ ходов и выбраны множества $U_k, V_k, M_k \in \mathcal{B}$, $U_k = \prod_{\delta\in D} U_{\delta,k}$, $V_k = \prod_{\delta\in D} V_{\delta,k}$, $M_k = \prod_{\delta\in D} M_{\delta,k}$ для $k < n$. Положим

$$U_{\delta,n} = s_\delta(U_{\delta,0}, V_{\delta,0}, M_{\delta,0}, ..., U_{\delta,n-1}, V_{\delta,n-1}, M_{\delta,n-1})$$

для $\delta \in D$ и $U_n = \prod_{\delta\in D} U_{\delta,n}$. Так как $U_{\delta,k} = V_{\delta,k} = M_{\delta,k} = X_\delta$ для почти всех δ, то $U_n \in \mathcal{B}$. □

Предложение 3.3.9. *Пусть X_n есть $\Gamma^{OD}_{p,k}$-пространство для $n \in \omega$. Тогда $X = \prod_{n\in\omega} X_n$ есть $\Gamma^{OD}_{p,k}$-пространство.*

Доказательство. Опишем выигрышную стратегию для α. Пусть s_n есть выигрышная стратегия для α на X_n, для которой выполняется условие (5) предложения 3.3.2. Обозначим $\mathcal{B} = \mathfrak{P}\,[(X_n)_{n\in\omega}]$. Из предложения 3.3.3 вытекает, что достаточно рассмотреть случай, когда игроки α и β выбирает множества $U_k, V_k \in \mathcal{B}$. Предположим, что выбраны $U_j, V_j \in \mathcal{B}$, $x_j \in X$, $U_j = \prod_{n\in\omega} U_{j,n}$, $V_j = \prod_{n\in\omega} V_{j,n}$, $x_j = (x_{j,n})_{n\in\omega}$ для $j < k$. Положим $U_{n,k} = s_n(U_{n,0}, V_{n,0}, x_{n,0}, ..., V_{n,k-1}, x$ для $n \in \omega$ и $U_k = \prod_{n\in\omega} U_{n,k}$. □

Теорема 3.15. (1) *В диаграмме ниже, стрелка $A \to B$ означает, что $A \subset B$.*

$$\begin{tikzcd}
\Gamma^{BM}_{o} \arrow[ddr] & & \Gamma^{BM}_{k} \arrow[dr] & \Gamma^{BM}_{p} \arrow[ddl] \\
\Gamma^{OD}_{o,k} \arrow[dr] & & & \Gamma^{OD}_{p,k} \arrow[lll] \arrow[dl] \\
& \Gamma^{OD}_{o,l} & \Gamma^{OD}_{p,l} \arrow[l] &
\end{tikzcd}$$

(2) *Пусть $t \in \{o, p\}$, X есть $\Gamma^{OD}_{t,k}$-пространства и Y есть $\Gamma^{OD}_{t,l}$-пространство. Тогда $X \times Y$ есть $\Gamma^{OD}_{t,l}$-пространство.*

(3) *Пусть D есть индексное множество, X_δ есть $\Gamma^{OD}_{o,k}$-пространство для $\delta \in D$. Тогда $\prod_{\delta\in D} X_\delta$ есть $\Gamma^{OD}_{o,k}$-пространство.*

(4) *Пусть X_n есть $\Gamma^{OD}_{p,k}$-пространство для $n \in \omega$. Тогда $\prod_{n\in\omega} X_n$ есть $\Gamma^{OD}_{p,k}$-пространство.*

(5) *Для $t \in \{o, p\}$ и $q \in \{l, k\}$, если $X \in \Gamma^{OD}_{t,q}$ и $U \subset X$ открытое подпространство, то $U \in \Gamma^{OD}_{t,q}$.*

(6) *Для $t \in \{o, p\}$ и $q \in \{l, k\}$, если пространство X локально $\Gamma^{OD}_{t,q}$ (т.е. у любой точки есть окрестность $U \in \Gamma^{OD}_{t,q}$), то $X \in \Gamma^{OD}_{t,q}$.*

(7) *Если X квазирегулярное пространство и принадлежит одному из классов, перечисленных в пункте $(\Gamma^{OD}_{t,q})$ для $t \in \{o, p\}$ и $q \in \{l, k\}$, то X является $\Gamma^{OD}_{t,q}$-пространством.*

$(\Gamma^{OD}_{p,k})$ *метризуемые пространства, моровские пространства, разлагаемое пространство, полурегулярные σ-пространства и полурегулярные пространства со счетной сетью, компактные пространства, p-пространства, полурегулярные сильно Σ-пространства;*

($\Gamma^{OD}_{p,l}$) *счетно компактные пространства, полурегулярные Σ-пространства, $w\Delta$-пространства;*

($\Gamma^{OD}_{o,l}$) *слабо компактные пространства.*

Доказательство. Пункт (1) вытекает из предложения 3.2.9, пункт (2) вытекает из предложения 3.3.7, пункт (3) вытекает из предложения 3.3.8 и пункт (4) вытекает из предложения 3.3.9.

Докажем (5). Игрок придерживается выигрышной стратегии из X.

Докажем (6). После первого хода, игрок α выбирает $U_1 \subset V_0$ таким образом, что $U_1 \in \Gamma^{BM}_r$, далее придерживается выигрышной стратегии для U_1.

Пункт (7) вытекает из теоремы 3.14. □

3.4 Игра против тактик

Стратегия в последовательной игре называется *тактикой* (tactic) если игрок в своем выборе учитывает только предыдущий ход противника.

Пусть $(X, \mathcal{T})$ есть пространство, $\mathcal{T}^* = \mathcal{T} \setminus \{\varnothing\}$, $\mathcal{N}$ есть π-сеть X. Обозначим

$$\begin{aligned} T(X,\mathcal{N}) &:= \{\psi \in \mathcal{N}^{\mathcal{T}^*} \,:\, M \subset U \text{ для } U \in \mathcal{T}^* \text{ и } M = \psi(U)\}, \\ T_{BM}(X) &:= T(X, \mathcal{T}^*), \\ T_{OD}(X,\mathcal{N}) &:= T(X, \mathcal{T}^*) \times T(X,\mathcal{N}). \end{aligned}$$

Каждому $\varphi \in T_{BM}(X)$ однозначно соответствует тактика игрока β в играх $BM(X, \mathcal{V})$ и $MB(X, \mathcal{V})$: на n-ом ходу игрок β выбирает $V_n = \varphi(U_n)$. Каждому $(\varphi, \psi) \in T_{OD}(X, \mathcal{N})$ однозначно соответствует тактика игрока β в играх $OD(X, \mathcal{N}, \mathcal{W})$ и $DO(X, \mathcal{N}, \mathcal{W})$: на n-ом ходу игрок β выбирает $V_n = \varphi(U_n)$ и $M_n = \psi(U_n)$.

Модификацию игр BM, MB, OD и DO, в которых игрок β использует только тактики, будем обозначать $\operatorname{tg} BM$, $\operatorname{tg} MB$, $\operatorname{tg} OD$, $\operatorname{tg} DO$, соответственно.

Будем считать, что

- $T_{BM}(X)$ есть множество стратегий игрока β в играх $\operatorname{tg} BM$ и $\operatorname{tg} MB$;
- $T_{OD}(X, \mathcal{N})$ есть множество стратегий игрока β в играх $\operatorname{tg} OD$ и $\operatorname{tg} DO$.

В этом разделе мы дадим варианты определений, в которых игры заменяются на игры "с крышечкой", то есть такие, в которых игрок β использует только тактики.

Определение 3.16. Пусть X пространство, $\mathcal{V} \subset \mathfrak{V}(X)$, $\mathcal{V}^* = \mathcal{V} \cup \mathfrak{V}^*_{BM}(X)$, $\mathcal{N}$ есть π-сеть X, $\mathcal{W} \subset \mathfrak{W}(X)$, $\mathcal{W}^* = \mathcal{W} \cup \mathfrak{W}_e(X)$. Назовем пространство X

- $\Gamma^{\widehat{BM}}(\mathcal{V})$-*тучным*, если $\operatorname{tg} MB(X, \mathcal{V})$ β-неблагоприятна;

- $\Gamma^{\widehat{BM}}(\mathcal{V})$-*бэровским*, если $\operatorname{tg} BM(X,\mathcal{V})$ β-неблагоприятна;
- $\Gamma^{\widehat{BM}}(\mathcal{V})$-*пространством*, если $\operatorname{tg} BM(X,\mathcal{V}^*)$ α-благоприятна;
- $\Gamma^{\widehat{OD}}(\mathcal{N},\mathcal{W})$-*тучным*, если $\operatorname{tg} DO(X,\mathcal{N},\mathcal{W})$ β-неблагоприятна;
- $\Gamma^{\widehat{OD}}(\mathcal{N},\mathcal{W})$-*бэровским*, если $\operatorname{tg} OD(X,\mathcal{N},\mathcal{W})$ β-неблагоприятна;
- $\Gamma^{\widehat{OD}}(\mathcal{N},\mathcal{W})$-*пространством*, если $\operatorname{tg} OD(X,\mathcal{N},\mathcal{W}^*)$ α-благоприятна.

Предложение 3.4.1. *Пусть $\mathfrak{i}$ есть игра с двумя игроками α и β, $T_\beta \subset S_\beta$ есть некоторое подмножество множества стратегий S_β игрока β. Обозначим через $\hat{\mathfrak{i}}$ игру, которая отличается от игры $\mathfrak{i}$ тем, что игрок β использует только стратегии из T_β. Тогда*

(1) *если игра $\mathfrak{i}$ α-благоприятна, то игра $\hat{\mathfrak{i}}$ α-благоприятна;*

(2) *если игра $\hat{\mathfrak{i}}$ β-неблагоприятна, то игра $\mathfrak{i}$ β-неблагоприятна.*

Доказательство. (1) Стратегия, выигрышная для α в игре $\mathfrak{i}$ будет выигрышной и в игре $\hat{\mathfrak{i}}$. (2) Пусть $s_\beta \in T_\beta$ есть стратегия для β в игре $\hat{\mathfrak{i}}$. Так как $T_\beta \subset S_\beta$, то $s_\beta \in S_\beta$. Так как игра $\hat{\mathfrak{i}}$ β-неблагоприятна, то у игрока α есть стратегия, которая выигрывает у стратегии s_α. □

Из предложения 3.4.1 вытекает

Предложение 3.4.2. *Пусть X пространство, $\mathcal{V} \subset \mathfrak{V}(X)$, $\mathcal{V}^* = \mathcal{V} \cup \mathfrak{V}^*_{BM}(X)$, $\mathcal{N}$ есть π-сеть X, $\mathcal{W} \subset \mathfrak{W}(X)$, $\mathcal{W}^* = \mathcal{W} \cup \mathfrak{W}_e(X)$. Тогда*

- *если X является $\Gamma^{\widehat{BM}}(\mathcal{V})$-тучным, то X является $\Gamma^{BM}(\mathcal{V})$-тучным;*
- *если X является $\Gamma^{\widehat{BM}}(\mathcal{V})$-бэровским, то X является $\Gamma^{BM}(\mathcal{V})$-бэровским;*
- *если X является $\Gamma^{BM}(\mathcal{V})$-пространством, то X является $\Gamma^{\widehat{BM}}(\mathcal{V})$-пространст*
- *если X является $\Gamma^{\widehat{OD}}(\mathcal{N},\mathcal{W})$-тучным, то X является $\Gamma^{OD}(\mathcal{N},\mathcal{W})$-тучным;*
- *если X является $\Gamma^{\widehat{OD}}(\mathcal{N},\mathcal{W})$-бэровским, то X является $\Gamma^{OD}(\mathcal{N},\mathcal{W})$-бэровским;*
- *если X является $\Gamma^{OD}(\mathcal{N},\mathcal{W})$-пространством, то X является $\Gamma^{\widehat{OD}}(\mathcal{N},\mathcal{W})$-пространством.*

По аналогии с определением 3.11 дадим следующее определения.
Для $r \in \{o,p,f,k\}$ определим игры

$$\operatorname{tg} BM_r(X) \coloneqq \operatorname{tg} BM(X,\mathcal{V}), \qquad \operatorname{tg} MB_r(X) \coloneqq \operatorname{tg} MB(X,\mathcal{V})$$

где $\mathcal{V} = \mathfrak{V}_r(X)$. Для $t \in \{o, p\}$ и $q \in \{l, k\}$ определим игры

$$\operatorname{tg} OD_{t,q}(X) \coloneqq \operatorname{tg} OD(X, \mathcal{N}, \mathcal{W}), \qquad \operatorname{tg} DO_{t,q}(X) \coloneqq \operatorname{tg} DO(X, \mathcal{N}, \mathcal{W})$$

где $\mathcal{N} = \mathcal{N}_t(X)$ и $\mathcal{W} = \mathfrak{W}_q(X)$.

Определение 3.17. Пусть X пространство, $r \in \{o, p, f, k\}$. Назовем пространство X

- $\Gamma_r^{\widehat{BM}}$-*тучным*, если X $(\beta, \operatorname{tg} MB_r)$-неблагоприятно;
- $\Gamma_r^{\widehat{BM}}$-*бэровским*, если X $(\beta, \operatorname{tg} BM_r)$-неблагоприятно.

Пусть $t \in \{o, p\}$ и $q \in \{l, k\}$. Назовем пространство X

- $\Gamma_{t,q}^{\widehat{OD}}$-*тучным*, если X $(\beta, \operatorname{tg} DO_{t,q})$-неблагоприятно;
- $\Gamma_{t,q}^{\widehat{OD}}$-*бэровским*, если X $(\beta, \operatorname{tg} OD_{t,q})$-неблагоприятно.

Из предложения 3.4.2 вытекает

Предложение 3.4.3. *Пусть X пространство, $r \in \{o, p, f, k\}$, $t \in \{o, p\}$ и $q \in \{l, k\}$. Тогда*

- *если X является $\Gamma_r^{\widehat{BM}}$-тучным ($\Gamma_r^{\widehat{BM}}$-бэровским), то X является Γ_r^{BM}-тучным (Γ_r^{BM}-бэровским);*
- *если X является $\Gamma_{t,q}^{\widehat{OD}}$-тучным ($\Gamma_{t,q}^{\widehat{OD}}$-бэровским), то X является $\Gamma_{t,q}^{OD}$-тучным ($\Gamma_{t,q}^{OD}$-бэровским).*

Из определений несложно выводится

Предложение 3.4.4. *Пусть X пространство.*

- *Пусть $\mathcal{V} \subset \mathfrak{V}(X)$. Пространство X является $\Gamma^{\widehat{BM}}(\mathcal{V})$-тучным ($\Gamma^{\widehat{BM}}(\mathcal{V})$-бэровским) если и только если для любого $\varphi \in T_{BM}(X)$ существует $(U_n)_{n\in\omega} \in \mathfrak{V}(X)$ (для которого $U_0 = X$), так что*
  - *$V_n = \varphi(U_n)$, $U_{n+1} \subset V_n$ для $n \in \omega$;*
  - *$(V_n)_{n\in\omega} \in \mathcal{V}$.*
- *Пусть $\mathcal{N}$ есть π-сеть X, $\mathcal{W} \subset \mathfrak{W}(X)$. Пространство X является $\Gamma^{\widehat{OD}}(\mathcal{N}, \mathcal{W})$-тучным ($\Gamma^{\widehat{OD}}(\mathcal{N}, \mathcal{W})$-бэровским) если и только если для любого $(\varphi, \psi) \in T_{OD}(X, \mathcal{N})$ существует $(U_n)_{n\in\omega} \in \mathfrak{V}(X)$ (для которого $U_0 = X$), так что*
  - *$V_n = \varphi(U_n)$, $M_n = \psi(U_n)$ и $U_{n+1} \subset V_n$ для $n \in \omega$;*
  - *$(V_n, M_n)_{n\in\omega} \in \mathcal{W}$.*

3.5 Модификации игры Банаха-Мазура с четырьмя игроками

Определение игры $\widetilde{OD}(X, \mathcal{N}, \mathcal{W}; \Omega)$

Пусть $(X, \mathcal{T})$ есть пространство, $\mathcal{T}^* = \mathcal{T} \setminus \{\varnothing\}$. Пусть $\mathcal{N}$ есть π-сеть пространства X, $\mathcal{W} \subset \mathfrak{W}(X)$ и $\Omega \subset \mathcal{T}^*$.

Параметры игры: $X, \mathcal{N}, \mathcal{W}$ и Ω.

Множество игроков игры: $P = \{\alpha, \gamma, \beta, \delta\}$ есть множество игроков, играют четыре игрока.

Определение n-го хода. На n-ом ходу игроки выбирают множества

$$U_n, G_n, \mathcal{G}_n, V_n, M_n, D_n, \mathcal{D}_n,$$

более подробно:

игрок	выбор	
α	U_n	$U_n \in \mathcal{T}^*$
γ	$G_n, \mathcal{G}_n$	$G_n \in \mathcal{T}^*$, $\mathcal{G}_n \subset \mathcal{T}^*$
β	V_n, M_n	$V_n \in \mathcal{T}^*$, $M_n \in \mathcal{N}$
δ	$D_n, \mathcal{D}_n$	$D_n \in \mathcal{T}^*$, $\mathcal{D}_n \subset \mathcal{T}^*$

Для $U \in \mathcal{T}^*$ обозначим

$$\Pi(U) = \{(V, \mathcal{P}) \in \mathcal{T}^* \times \operatorname{Exp}_*(\mathcal{T}^*) : \mathcal{P} \text{ является } \pi\text{-базой } V\}.$$

На первом ходу, для $n = 0$, определим выбор игроков:

игрок	выбор	определение выбора
α	U_0	$U_0 \in \Omega$
γ	$G_0, \mathcal{G}_0$	$G_0 = U_0$ и $(G_0, \mathcal{G}_0) \in \Pi(U_0)$
β	V_0, M_0	$V_0 \in \mathcal{G}_0$, $M_0 \in \mathcal{N}$ и $M_0 \subset U_0$
δ	$D_0, \mathcal{D}_0$	$(D_0, \mathcal{D}_0) \in \Pi(V_0)$

На n-ом ходу, для $n > 0$, определим выбор игроков:

игрок	выбор	определение выбора
α	U_n	$U_n \in \mathcal{D}_{n-1}$
γ	$G_n, \mathcal{G}_n$	$(G_n, \mathcal{G}_n) \in \Pi(U_n)$
β	V_n, M_n	$V_n \in \mathcal{G}_n$, $M_n \in \mathcal{N}$ и $M_n \subset U_n$
δ	$D_n, \mathcal{D}_n$	$(D_n, \mathcal{D}_n) \in \Pi(V_n)$

Отметим, что для $n \in \omega$

$$U_0 = G_0 \supset ... \supset U_n \supset G_n \supset V_n \supset D_n \supset U_{n+1} \supset ... \quad \text{и} \quad M_n \subset U_n.$$

Условия выигрыша игроков. Игрок α выиграл если $(U_n, M_n)_{n\in\omega} \in \mathcal{W}$. Игрок β выиграл если $(U_n, M_n)_{n\in\omega} \notin \mathcal{W}$. Игроки γ и δ являются природой, то есть они всегда проигрывают.

Обозначение компонентов игры. Для $\kappa \in P$ обозначим через S_κ стратегию игрока κ, $\mathcal{S} = (S_\kappa)_{\kappa\in P}$. Обозначим через π игровую функцию, $\pi = \mathcal{S}^{[P]} \to R$, где R есть множество партий игры.

Определение игры $\widetilde{BM}(X;\Omega)$

Пусть $(X, \mathcal{T})$ есть пространство, $\mathcal{T}^* = \mathcal{T} \setminus \{\varnothing\}$ и $\Omega \subset \mathcal{T}^*$.

Параметры игры: X и Ω.

Множество игроков игры: $P = \{\alpha, \beta\}$ есть множество игроков, играют два игрока.

Определение n-го хода. На n-ом ходу игроки выбирают множества

$$U_n, V_n \in \mathcal{T}^*.$$

На первом ходу, для $n = 0$, игрок α выбирает $U_0 \in \Omega$, игрок β выбирает $V_0 \in \mathcal{T}^*$, $V_0 \subset U_0$. На n-ом ходу, для $n > 0$, игрок α выбирает $U_n \in \mathcal{T}^*$, $U_n \subset V_{n-1}$ игрок β выбирает $V_n \in \mathcal{T}^*$, $V_n \subset U_n$.

Условия выигрыша игроков. Игрок α выиграл если $\bigcap_{n\in\omega} V_n \neq \varnothing$, в противном случае выиграл игрок β.

Связь игр MB, BM и $\widetilde{BM}$

Обозначим $\Omega_{BM} = \{X\}$, $\Omega_{MB} = \mathcal{T}^*$. Из построения вытекает

Утверждение 3.5.1.

$$\widetilde{BM}(X;\Omega_{BM}) \sim BM(X),$$
$$\widetilde{BM}(X;\Omega_{MB}) \sim MB(X).$$

Из теоремы 3.6 Банаха-Окстоби вытекает

Предложение 3.5.2. *Пусть X есть пространство, $\Omega \subset \mathcal{T}^*$. Игра $\widetilde{BM}(X;\Omega)$ β-неблагоприятна если и только если U бэровское для некоторого $U \in \Omega$.*

Свойства игры $\widetilde{OD}(X,\mathcal{N},\mathcal{W};\Omega)$

Зафиксируем отображение $\Lambda : \mathcal{T}^* \times \operatorname{Exp}_*(\mathcal{T}^*) \to \mathcal{T}$, для которого выполняются условие: если $(U,\mathcal{P}) \in \mathcal{T} \times \operatorname{Exp}_*(\mathcal{T}^*)$ и $V = \Lambda(U,\mathcal{P})$, то

- $V = U$ если $U \in \mathcal{P}$;
- $V \in \mathcal{P}' = \{W \in \mathcal{P} : W \subset U\}$ если $\mathcal{P}' \neq \varnothing$;
- $V = \varnothing$ в противном случае.

Утверждение 3.5.3. *Пусть $(s_\alpha, s_\gamma, s_\delta) \in S_\alpha \times S_\gamma \times S_\delta$. Существует такая стратегия $q_\alpha \in S_\alpha$, так что для любого набора $(q_\gamma, q_\beta, q_\delta) \in S_\gamma \times S_\beta \times S_\delta$ существует $s_\beta \in S_\beta$ так что для $s = (s_\kappa)_{\kappa\in P}$, $q = (q_\kappa)_{\kappa\in P}$,*

$$(\widetilde{U}_n, \widetilde{G}_n, \widetilde{\mathcal{G}}_n, \widetilde{V}_n, \widetilde{M}_n, \widetilde{D}_n, \widetilde{\mathcal{D}}_n)_{n\in\omega} = \pi(s),$$
$$(U_n, G_n, \mathcal{G}_n, V_n, M_n, D_n, \mathcal{D}_n)_{n\in\omega} = \pi(q)$$

выполняются условие:

(a) *для $n \in \omega$ выполняется*

(1) $\widetilde{U}_n \supset \widetilde{G}_n \supset U_n \supset G_n \supset V_n \supset D_n \supset \widetilde{V}_n \supset \widetilde{D}_n \supset \widetilde{U}_{n+1}$;

(2) $\widetilde{M}_n = M_n \subset U_n \subset \widetilde{U}_n$;

(3) $\widetilde{V}_{n+1} \subset V_{n+1} \subset \widetilde{V}_n \subset V_n$.

(b) *если семейство $\mathcal{W}$ монолитно и $(\widetilde{V}_n, \widetilde{M}_n)_{n\in\omega} \in \mathcal{W}$ то $(V_n, M_n)_{n\in\omega} \in \mathcal{W}$.*

Доказательство. Определим стратегии q_α и s_β, так чтобы выполнялся пункт (a). Пункт (b) вытекает из определения монолитности и пункта (a). На первом ходу, для $n = 0$, определим выбор игроков:

стратегия	выбор	определение выбора
s_α	$\widetilde{U}_0$	
s_γ	$\widetilde{G}_0, \widetilde{\mathcal{G}}_0$	
q_α	U_0	$U_0 = \widetilde{U}_0$
q_γ	$G_0, \mathcal{G}_0$	
q_β	V_0, M_0	
q_δ	$D_0, \mathcal{D}_0$	
s_β	$\widetilde{V}_0, \widetilde{M}_0$	$\widetilde{V}_0 = \Lambda(D_0, \widetilde{\mathcal{G}}_0)$, $\widetilde{M}_0 = M_0$
s_δ	$\widetilde{D}_0, \widetilde{\mathcal{D}}_0$	

На n-ом ходу, для $n > 0$, определим выбор игроков:

стратегия	выбор	определение выбора
s_α	$\widetilde{U}_n$	
s_γ	$\widetilde{G}_n, \widetilde{\mathcal{G}}_n$	
q_α	U_n	$U_n = \Lambda(\widetilde{G}_n, \mathcal{D}_{n-1})$
q_γ	$G_n, \mathcal{G}_n$	
q_β	V_n, M_n	
q_δ	$D_n, \mathcal{D}_n$	
s_β	$\widetilde{V}_n, \widetilde{M}_n$	$\widetilde{V}_n = \Lambda(D_n, \widetilde{\mathcal{G}}_n)$, $\widetilde{M}_n = M_n$
s_δ	$\widetilde{D}_n, \widetilde{\mathcal{D}}_n$	

□

Утверждение 3.5.4. *Пусть $(s_\gamma, s_\beta, s_\delta) \in S_\gamma \times S_\beta \times S_\delta$. Существует такая стратегия $q_\beta \in S_\beta$, так что для любого набора $(q_\alpha, q_\gamma, q_\delta) \in S_\alpha \times S_\gamma \times S_\delta$ существует $s_\alpha \in S_\alpha$ так что для $s = (s_\kappa)_{\kappa \in P}$, $q = (q_\kappa)_{\kappa \in P}$,*

$$(\widetilde{U}_n, \widetilde{G}_n, \widetilde{\mathcal{G}}_n, \widetilde{V}_n, \widetilde{M}_n, \widetilde{D}_n, \widetilde{\mathcal{D}}_n)_{n \in \omega} = \pi(s),$$
$$(U_n, G_n, \mathcal{G}_n, V_n, M_n, D_n, \mathcal{D}_n)_{n \in \omega} = \pi(q)$$

выполняются условие:

(a) *для $n \in \omega$ выполняется*

(1) $U_n \supset G_n \supset \widetilde{U}_n \supset \widetilde{G}_n \supset \widetilde{V}_n \supset \widetilde{D}_n \supset V_n \supset D_n \supset U_{n+1}$;

(2) $\widetilde{M}_n = M_n \subset \widetilde{U}_n \subset U_n$;

(3) $V_{n+1} \subset \widetilde{V}_{n+1} \subset V_n \subset \widetilde{V}_n$;

(b) *если семейство $\mathcal{W}$ монолитно и $(V_n, M_n)_{n \in \omega} \in \mathcal{W}$ то $(\widetilde{V}_n, \widetilde{M}_n)_{n \in \omega} \in \mathcal{W}$.*

Доказательство. Определим стратегии s_α и q_β, так чтобы выполнялся пункт (a). Пункт (b) вытекает из определения монолитности и пункта (a). На первом ходу, для $n = 0$, определим выбор игроков:

стратегия	выбор	определение выбора
q_α	U_0	
q_γ	$G_0, \mathcal{G}_0$	
s_α	$\widetilde{U}_0$	$\widetilde{U}_0 = G_0 = U_0$
s_γ	$\widetilde{G}_0, \widetilde{\mathcal{G}}_0$	
s_β	$\widetilde{V}_0, \widetilde{M}_0$	
s_δ	$\widetilde{D}_0, \widetilde{\mathcal{D}}_0$	
q_β	V_0, M_0	$V_0 = \Lambda(\widetilde{D}_0, \mathcal{G}_0)$, $M_0 = \widetilde{M}_0$
q_δ	$D_0, \mathcal{D}_0$	

На n-ом ходу, для $n > 0$, определим выбор игроков:

стратегия	выбор	определение выбора
q_α	U_n	
q_γ	$G_n, \mathcal{G}_n$	
s_α	$\widetilde{U}_n$	$\widetilde{U}_n = \Lambda(G_n, \widetilde{\mathcal{D}}_n)$
s_γ	$\widetilde{G}_n, \widetilde{\mathcal{G}}_n$	
s_β	$\widetilde{V}_n, \widetilde{M}_n$	
s_δ	$\widetilde{D}_n, \widetilde{\mathcal{D}}_n$	
q_β	V_n, M_n	$V_n = \Lambda(\widetilde{D}_n, \mathcal{G}_n)$, $M_n = \widetilde{M}_n$
q_δ	$D_n, \mathcal{D}_n$	

□

Теорема 3.18. *Пусть $(X, \mathcal{T})$ есть пространство, $\mathcal{T}^* = \mathcal{T} \setminus \{\varnothing\}$, $\mathcal{N}$ есть π-сеть пространства X, $\Omega \subset \mathcal{T}^*$ и семейство $\mathcal{W} \subset \mathfrak{W}(X)$ монолитно. Пусть $\mathfrak{g} = \widetilde{OD}(X, \mathcal{N}, \mathcal{W}; \Omega)$.*

(1) *Игра $\mathfrak{g}$ α-благоприятна если и только если $\mathfrak{g}$ $\{\alpha, \gamma, \delta\}$-благоприятна.*

(2) *Игра $\mathfrak{g}$ β-благоприятна если и только если $\mathfrak{g}$ $\{\gamma, \beta, \delta\}$-благоприятна.*

(3) *Игра $\mathfrak{g}$ α-неблагоприятна если и только если $\mathfrak{g}$ $\{\alpha, \gamma, \delta\}$-неблагоприятна.*

(4) *Игра $\mathfrak{g}$ β-неблагоприятна если и только если $\mathfrak{g}$ $\{\gamma, \beta, \delta\}$-неблагоприятна.*

Доказательство. Пункт (3) и (4) вытекают из (1) и (2).

Докажем (1). В силу утверждения 1.4.1, достаточно показать, что если игра $\mathfrak{g}$ $\{\alpha, \gamma, \delta\}$-благоприятна, то $\mathfrak{g}$ α-благоприятна. Пусть $\{\alpha \to s_\alpha, \gamma \to s_\gamma, \delta \to s_\delta\}$ есть $\{\alpha, \gamma, \delta\}$-выигрышная стратегия. Пусть $q_\alpha \in S_\alpha$ есть стратегия из утверждения 3.5.3. Покажем что q_α есть выигрышная стратегия для игрока α. Пусть $(q_\gamma, q_\beta, q_\delta) \in S_\gamma \times S_\beta \times S_\delta$. Из утверждения 3.5.3 (b) и того что $\mathcal{W}$ монолитно вытекает что существует $s_\beta \in S_\beta$ так что для $s = (s_\kappa)_{\kappa \in P}$, $q = (q_\kappa)_{\kappa \in P}$,

$$(\widetilde{U}_n, \widetilde{G}_n, \widetilde{\mathcal{G}}_n, \widetilde{V}_n, \widetilde{M}_n, \widetilde{D}_n, \widetilde{\mathcal{D}}_n)_{n \in \omega} = \pi(s),$$
$$(U_n, G_n, \mathcal{G}_n, V_n, M_n, D_n, \mathcal{D}_n)_{n \in \omega} = \pi(q)$$

выполняются условие: если семейство $(\widetilde{V}_n, \widetilde{M}_n)_{n \in \omega} \in \mathcal{W}$ то $(V_n, M_n)_{n \in \omega} \in \mathcal{W}$. Так как $\{\alpha \to s_\alpha, \gamma \to s_\gamma, \delta \to s_\delta\}$ есть $\{\alpha, \gamma, \delta\}$-выигрышная стратегия, то $(\widetilde{V}_n, \widetilde{M}_n)_{n \in \omega} \in \mathcal{W}$. Следовательно $(V_n, M_n)_{n \in \omega} \in \mathcal{W}$ и игрок α выиграл с помощью стратегии q_α.

Докажем (1). В силу утверждения 1.4.1, достаточно показать, что если игра $\mathfrak{g}$ $\{\gamma, \beta, \delta\}$-благоприятна, то $\mathfrak{g}$ β-благоприятна. Пусть $\{\gamma \to s_\gamma, \beta \to s_\beta, \delta \to s_\delta\}$ есть $\{\gamma, \beta, \delta\}$-выигрышная стратегия. Пусть $q_\beta \in S_\beta$ есть стратегия из утверждения 3.5.4. Покажем что q_β есть выигрышная стратегия для игрока

β. Пусть $(q_\alpha, q_\gamma, q_\delta) \in S_\alpha \times S_\gamma \times S_\delta$. Из утверждения 3.5.4 (b) и того что $\mathcal{W}$ монолитно вытекает что существует $s_\alpha \in S_\alpha$ так что для $s = (s_\kappa)_{\kappa \in P}$, $q = (q_\kappa)_{\kappa \in P}$,

$$(\widetilde{U}_n, \widetilde{G}_n, \widetilde{\mathcal{G}}_n, \widetilde{V}_n, \widetilde{M}_n, \widetilde{D}_n, \widetilde{\mathcal{D}}_n)_{n\in\omega} = \pi(s),$$
$$(U_n, G_n, \mathcal{G}_n, V_n, M_n, D_n, \mathcal{D}_n)_{n\in\omega} = \pi(q)$$

выполняются условие: если семейство $(V_n, M_n)_{n\in\omega} \in \mathcal{W}$ то $(\widetilde{V}_n, \widetilde{M}_n)_{n\in\omega} \in \mathcal{W}$. Так как $\{\gamma \to s_\gamma, \beta \to s_\beta, \delta \to s_\delta\}$ есть $\{\gamma, \beta, \delta\}$-выигрышная стратегия, то $(\widetilde{V}_n, \widetilde{M}_n)_{n\in\omega} \notin \mathcal{W}$. Следовательно $(V_n, M_n)_{n\in\omega} \notin \mathcal{W}$ и игрок β выиграл с помощью стратегии q_β. $\square$

Из определения игры $\widetilde{OD}$ и теоремы 3.18 вытекает

Теорема 3.19. *Пусть $(X, \mathcal{T})$ есть пространство, $\mathcal{T}^* = \mathcal{T} \setminus \{\varnothing\}$, $\mathcal{N}$ есть π-сеть пространства X, $\Omega \subset \mathcal{T}^*$, $\mathcal{W} \subset \mathfrak{W}(X)$, $K = \{\gamma, \delta\}$. Пусть $\mathfrak{g} = \widetilde{OD}(X, \mathcal{N}, \mathcal{W}; \Omega)$.*

(1) *Коалиция K является природой для игры $\mathfrak{g}$.*

(2) *Если семейство $\mathcal{W}$ монолитно, то K является фиктивной коалицией.*

Утверждение 3.5.5. *Стратегия $\tilde{s} = \{\gamma \to \tilde{s}_\gamma, \delta \to \tilde{s}_\delta\} \in \mathcal{S}^{[\{\gamma,\delta\}]}$ является стратегией коалиции $\{\gamma, \delta\}$.*

Пусть $U \in \Omega \subset \mathcal{T}^*$. Если игра $\widetilde{OD}(X, \mathcal{N}, \mathcal{W}; \Omega_{BM})$ α-благоприятна, то существует выигрышная для игрока α стратегия s_α в игре $\widetilde{OD}(X, \mathcal{N}, \mathcal{W}; \Omega)$, так что игрок α выбирает на первом ходу $U_0 = U$, то есть $U = s_\alpha(\varnothing)$.

Утверждение 3.5.6. *Пусть $U \in \Omega \subset \mathcal{T}^*$. Если игра $\widetilde{OD}(X, \mathcal{N}, \mathcal{W}; \Omega_{BM})$ α-благоприятна, то существует выигрышная для игрока α стратегия s_α в игре $\widetilde{OD}(X, \mathcal{N}, \mathcal{W}; \Omega)$, так что игрок α выбирает на первом ходу $U_0 = U$, то есть $U = s_\alpha(\varnothing)$.*

Доказательство. Пусть $\bar{s}_\alpha$ есть выигрышная для игрока α стратегия s_α в игре $\widetilde{OD}(X, \mathcal{N}, \mathcal{W}; \Omega_{BM})$. Определим выигрышную для игрока α стратегию s_α в игре $\widetilde{OD}(X, \mathcal{N}, \mathcal{W}; \Omega)$.

На первом ходу игрок α выбирает $U_0 = U$. На n-ом ходу игрок α выбирает

$$U_n = \bar{s}_\alpha(X, G_0, \mathcal{G}_0, V_0, D_0, \mathcal{D}_0, ..., U_{n-1}, G_{n-1}, \mathcal{G}_{n-1}, V_{n-1}, D_{n-1}, \mathcal{D}_{n-1}).$$

$\square$

Утверждение 3.5.7. *Пусть $(s_\alpha, s_\gamma, s_\beta) \in S_\alpha \times S_\gamma \times S_\beta$, $U = s_\alpha(\varnothing)$, π_{BM} есть игровая функция в игре $BM(U)$. Существует стратегия q_β игрока β*

в игре $BM(U)$ так что для любой стратегии q_α игрока α в игре $BM(U)$ существует стратегия $s_\delta \in S_\delta$ так что для $s = (s_\kappa)_{\kappa \in P}$, $q = (q_\kappa)_{\kappa \in \{\alpha,\beta\}}$,

$$(U_n, G_n, \mathcal{G}_n, V_n, M_n, D_n, \mathcal{D}_n)_{n\in\omega} = \pi(s),$$
$$(\widetilde{U}_n, \widetilde{V}_n)_{n\in\omega} = \pi_{BM}(q).$$

выполняется условие:

$$\widetilde{V}_n = V_n \text{ для } n \in \omega \text{ и } \widetilde{U}_0 = U,\ \widetilde{U}_n = D_{n-1} \text{ для } n > 0.$$

Доказательство. Определим искомые стратегии q_α и s_δ. На первом ходу, для $n = 0$, определим выбор игроков:

ход	стратегия	выбор	определение выбора
0	q_α	$\widetilde{U}_0 = U$	
0	s_α	$U_0 = U$	
0	s_γ	$G_0, \mathcal{G}_0$	
0	s_β	V_0, M_0	
0	q_β	$\widetilde{V}_0$	$\widetilde{V}_0 = V_0$
1	q_α	$\widetilde{U}_1$	
0	s_δ	$D_0, \mathcal{D}_0$	$D_0 = \widetilde{U}_1$, $\mathcal{D}_0 = \{V \in \mathcal{T}^* : V \subset D_0\}$

На n-ом ходу определим выбор игроков:

ход	стратегия	выбор	определение выбора
n	s_α	U_n	
n	s_γ	$G_n, \mathcal{G}_n$	
n	s_β	V_n, M_n	
n	q_β	$\widetilde{V}_n$	$\widetilde{V}_n = V_n$
$n+1$	q_α	$\widetilde{U}_{n+1}$	
n	s_δ	$D_n, \mathcal{D}_n$	$D_n = \widetilde{U}_{n+1}$, $\mathcal{D}_n = \{V \in \mathcal{T}^* : V \subset D_n\}$

□

Теорема 3.20. *Пусть $(X, \mathcal{T})$ есть пространство, $\mathcal{T}^* = \mathcal{T} \setminus \{\varnothing\}$, $\mathcal{N}$ есть π-сеть пространства X, $\Omega \subset \mathcal{T}^*$ и $\mathcal{W} \subset \mathfrak{W}(X)$. Пусть $\mathfrak{g} = \widetilde{OD}(X, \mathcal{N}, \mathcal{W}; \Omega)$, $\mathcal{W}^* = \mathcal{W} \cup \mathfrak{W}_e(X)$, $\mathfrak{g}^* = \widetilde{OD}(X, \mathcal{N}, \mathcal{W}^*; \Omega_{BM})$, $\mathfrak{g}_{BM} = \widetilde{BM}(X; \Omega)$. Если $\mathfrak{g}^*$ α-благоприятно и $\mathfrak{g}_{BM}$ β-неблагоприятно, то $\mathfrak{g}$ $\{\gamma, \beta\}$-неблагоприятно.*

Доказательство. Пусть $(s_\gamma, s_\beta) \in S_\gamma \times S_\beta$. Нам надо найти такие стратегии $(s_\alpha, s_\delta) \in S_\alpha \times S_\delta$ так что для $s = (s_\kappa)_{\kappa \in P}$,

$$(U_n, G_n, \mathcal{G}_n, V_n, M_n, D_n, \mathcal{D}_n)_{n\in\omega} = \pi(s)$$

выполняется $(V_n, M_n)_{n\in\omega} \in \mathcal{W}$.

Так как $\mathfrak{g}_{BM}$ β-неблагоприятно то из предложения 3.5.2 вытекает, что существует бэровское $U \in \Omega$. Пусть $\bar{s}_\alpha$ есть выигрышная стратегия для игрока α в игре $\mathfrak{g}^*$. Из предложения 3.5.6 вытекает, что существует выигрышная для игрока α стратегия s_α в игре $\widetilde{OD}(X, \mathcal{N}, \mathcal{W}^*; \Omega)$, так что игрок α выбирает на первом ходу $U_0 = U$. Пусть q_β есть стратегия игрока β в игре $BM(U)$ из предложения 3.5.7. Так как U бэровское пространство, то, в силу теоремы 3.6 Банаха-Окстоби, игра $BM(U)$ β-неблагоприятна. Следовательно, существует стратегия q_α игрока α в игре $BM(U)$ так что для $q = (q_\kappa)_{\kappa\in\{\alpha,\beta\}}$,

$$(\widetilde{U}_n, \widetilde{V}_n)_{n\in\omega} = \pi_{BM}(q).$$

выполняется

$$\bigcap_{n\in\omega} \widetilde{U}_n = \bigcap_{n\in\omega} \widetilde{V}_n \neq \varnothing.$$

Из утверждения 3.5.7 вытекает что существует $s_\delta \in S_\delta$ так что для $s = (s_\kappa)_{\kappa\in P}$,

$$(U_n, G_n, \mathcal{G}_n, V_n, M_n, D_n, \mathcal{D}_n)_{n\in\omega} = \pi(s)$$

выполняется условие:

$$\widetilde{V}_n = V_n \text{ для } n \in \omega \text{ и } \widetilde{U}_0 = U,\ \widetilde{U}_n = D_{n-1} \text{ для } n > 0.$$

Следовательно, $\bigcap_{n\in\omega} V_n \neq \varnothing$ и $(V_n, M_n)_{n\in\omega} \notin \mathfrak{W}_e(X)$. Так как стратегия s_α выигрышная для α в игре $\widetilde{OD}(X, \mathcal{N}, \mathcal{W}^*; \Omega)$, то $(V_n, M_n)_{n\in\omega} \in \mathcal{W}^* = \mathcal{W} \cup \mathfrak{W}_e(X)$. Получаем $(V_n, M_n)_{n\in\omega} \in \mathcal{W}$. □

Связь игр OD, DO и $\widetilde{OD}$

Пусть $\Upsilon, \Psi \in \mathfrak{U}(X)$. Определим стратегию $\tilde{s}_\gamma$ для игрока γ: на n-ом шагу игрок γ выбирает $G_n = U_n$ и $\mathcal{G}_n = \Upsilon(G_n)$. Определим стратегию $\tilde{s}_\delta$ для игрока δ: на n-ом шагу игрок δ выбирает $D_n = V_n$ и $\mathcal{D}_n = \Psi(D_n)$. Стратегия $\tilde{s} = \{\gamma \to \tilde{s}_\gamma, \delta \to \tilde{s}_\delta\} \in \mathcal{S}^{[\{\gamma,\delta\}]}$ является стратегией коалиции $\{\gamma, \delta\}$. Из построения игр вытекает

Утверждение 3.5.8.

$$\widetilde{OD}(X, \mathcal{N}, \mathcal{W}; \Omega_{BM})[\tilde{s}] \sim OD(X, \mathcal{N}, \mathcal{W}; \Upsilon, \Psi),$$
$$\widetilde{OD}(X, \mathcal{N}, \mathcal{W}; \Omega_{MB})[\tilde{s}] \sim DO(X, \mathcal{N}, \mathcal{W}; \Upsilon, \Psi),$$

Определим стратегию $\bar{s}_\gamma$ для игрока γ: на n-ом шагу игрок γ выбирает $G_n = U_n$ и $\mathcal{G}_n = \{U \in \mathcal{T}^* : U \subset G_n\}$. Определим стратегию $\bar{s}_\delta$ для игрока δ: на n-ом шагу игрок δ выбирает $D_n = V_n$ и $\mathcal{D}_n = \{U \in \mathcal{T}^* : U \subset D_n\}$. Стратегия $\bar{s} = \{\gamma \to \tilde{s}_\gamma, \delta \to \tilde{s}_\delta\} \in \mathcal{S}^{[\{\gamma,\delta\}]}$ является стратегией коалиции $\{\gamma, \delta\}$. Из построения игр вытекает

Утверждение 3.5.9.

$$\widetilde{OD}(X,\mathcal{N},\mathcal{W};\Omega_{BM})[\bar{s}] \sim OD(X,\mathcal{N},\mathcal{W}),$$
$$\widetilde{OD}(X,\mathcal{N},\mathcal{W};\Omega_{MB})[\bar{s}] \sim DO(X,\mathcal{N},\mathcal{W}),$$

Из утверждений 3.5.8 и 3.5.9, теоремы 3.19 и и предложения 1.4.2 вытекает

Предложение 3.5.10 (Предложение 3.1.2). *Пусть X есть пространство, $\mathcal{N}$ есть π-сеть пространства X, $\mathcal{W} \subset \mathfrak{W}(X)$, $\Upsilon, \Psi \in \mathfrak{U}(X)$. Если $\mathcal{W}$ есть монолитное семейство, то*

$$OD(X,\mathcal{N},\mathcal{W}) \sim OD(X,\mathcal{N},\mathcal{W};\Upsilon,\Psi),$$
$$DO(X,\mathcal{N},\mathcal{W}) \sim DO(X,\mathcal{N},\mathcal{W};\Upsilon,\Psi).$$

Предложение 3.5.11 (Предложение 3.2.5). *Пусть X пространство, $\mathcal{N}$ есть π-сеть X, $\mathcal{W} \subset \mathfrak{W}(X)$ есть монолитное семейство. Пусть X $\Gamma^{OD}(\mathcal{N},\mathcal{W})$-пространство.*

(1) *Если X тучное, то X $\Gamma^{OD}(\mathcal{N},\mathcal{W}))$-тучное.*

(2) *Если X бэровское, то X $\Gamma^{OD}(\mathcal{N},\mathcal{W})$-бэровское.*

Доказательство. Пусть $\mathcal{W}^* = \mathcal{W} \cup \mathfrak{W}_e(X)$. Из утверждения 3.5.9, теоремы 3.18 и того, что X $\Gamma^{OD}(\mathcal{N},\mathcal{W})$-пространство вытекает, что игра $\widetilde{OD}(X,\mathcal{N},\mathcal{W}^*;\Omega_{BM})$ α-благоприятна.

Докажем (1). Из утверждения 3.5.1 и теоремы 3.6 Банаха-Окстоби вытекает что X тучное если и только если игра $\widetilde{BM}(X;\Omega_{MB})$ β-неблагоприятна. Из теоремы 3.20 вытекает что игра $\widetilde{OD}(X,\mathcal{N},\mathcal{W};\Omega_{MB})$ $\{\gamma,\beta\}$-неблагоприятна и, тем более β-неблагоприятна. Из теоремы 3.18 вытекает, что игра $\widetilde{OD}(X,\mathcal{N},\mathcal{W};\Omega_{MB})$ $\{\gamma,\beta,\delta\}$-неблагоприятна. Из утверждения 3.5.9 вытекает, что игра $DO(X,\mathcal{N},\mathcal{W})$ β-неблагоприятна, то есть X является $\Gamma^{OD}(\mathcal{N},\mathcal{W}))$-тучным пространством.

Докажем (2). Из утверждения 3.5.1 и теоремы 3.6 Банаха-Окстоби вытекает что X бэровское если и только если игра $\widetilde{BM}(X;\Omega_{BM})$ β-неблагоприятна. Из теоремы 3.20 вытекает что игра $\widetilde{OD}(X,\mathcal{N},\mathcal{W};\Omega_{BM})$ $\{\gamma,\beta\}$-неблагоприятна и, тем более β-неблагоприятна. Из теоремы 3.18 вытекает, что игра $\widetilde{OD}(X,\mathcal{N},\mathcal{W};\Omega_{BM})$ $\{\gamma,\beta,\delta\}$-неблагоприятна. Из утверждения 3.5.9 вытекает, что игра $OD(X,\mathcal{N},\mathcal{W})$ β-неблагоприятна, то есть X является $\Gamma^{OD}(\mathcal{N},\mathcal{W}))$-тучным пространством. □

3.6 Полуоткрытые окрестности диагонали

Пусть X множество, $P, Q \subset X \times X$. Обозначим

$$\begin{aligned}
P(x) &\coloneqq \{y \in X \,:\, (x,y) \in P\},\\
P(M) &\coloneqq \{y \in X \,:\, \text{ существует } x \in M, \text{ так что } (x,y) \in P\} = \bigcup_{x \in M} P(x),\\
P|_M &\coloneqq P \cap (M \times M),\\
P^{-1} &\coloneqq \{(x,y) \,:\, (y,x) \in P\},\\
P \circ Q &\coloneqq \{(x,y) \,:\, \text{существует } z \in X \text{ так что } (x,z) \in P \text{ и } (z,y) \in Q\}
\end{aligned}$$

для $x \in X$ и $M \subset X$.

Определение 3.21. Пусть X пространство, $P \subset X \times X$. Назовем множество P *полуоткрытым* (semiopen) если каждое $P(x)$ открыто. Назовем P *полуокрестностью диагонали*, если $x \in \operatorname{Int} P(x)$ для всех $x \in X$. Обозначим через $\mathfrak{S}(X)$ семейство всех полуокрестностей диагонали пространства X.

Замечание 3.22. В работе [6] в определении полуокрестностьи диагонали предполагалось, что множество $P(x)$ открыто, то есть предполагалось что P полуоткрыто. Понятие полуоткрытой полуокрестности диагонали по сути совпадает с понятием соответствия окрестности [43]: отображение $P : X \to \mathcal{T}$ называется *соответствием окрестности* (neighbourhood assignment) если $x \in P(x)$ и $P(x)$ открыто для $x \in X$.

Множество P является полуокрестностью диагонали если и только если в P лежит некоторая полуоткрытая полуокрестность диагонали.

Если X топологическое пространство, то обозначим

$$\overline{P}^{v} \coloneqq \{(x,y) \in X \times X \,:\, y \in \overline{P(x)}\}.$$

Ясно, что $\overline{P}^{v}(x) = \overline{P(x)}$ для $x \in X$.

Предложение 3.6.1. *Пусть X пространство, $P \subset X \times X$. Тогда*

$$\overline{P}(x) = \bigcap \{\overline{P(U)} \,:\, U \textit{ есть окрестность точки } x\}$$

для $x \in X$. Соответственно,

$$\overline{P} = \bigcap \{\overline{Q \circ P}^{v} \,:\, Q \in \mathfrak{S}(X)\}.$$

Доказательство. Пусть $x \in X$. Тогда $(x,y) \in \overline{P}$ если и только если $y \in \overline{P(U)}$ для каждой окрестности U точки x. $\square$

Введем на $\operatorname{Exp}(\mathfrak{S}(X))$ отношение порядка и связанное с ним отношение эквивалентности. Для $\mathcal{P}, \mathcal{Q} \subset \mathfrak{S}(X)$ положим

- $\mathcal{P} \preccurlyeq \mathcal{Q}$ если и только если для любого $Q \in \mathcal{Q}$ существует $P \in \mathcal{P}$, так что $P \subset Q$;
- $\mathcal{P} \sim \mathcal{Q}$ если и только если $\mathcal{P} \preccurlyeq \mathcal{Q}$ и $\mathcal{Q} \preccurlyeq \mathcal{P}$.

Отметим, что если $\mathcal{P} \supset \mathcal{Q}$, то $\mathcal{P} \preccurlyeq \mathcal{Q}$. Для $\mathcal{P} \subset \mathfrak{S}(X)$ обозначим

$$\Psi^e(\mathcal{P}) \coloneqq \{R \in \mathfrak{S}(X) \,:\, P \subset R, \text{ для некоторого } P \in \mathcal{P}\}.$$

Предложение 3.6.2. *Пусть X пространство. Для $\mathcal{P}, \mathcal{Q} \subset \mathfrak{S}(X)$*

- *$\mathcal{P} \preccurlyeq \mathcal{Q}$ если и только если $\Psi^e(\mathcal{P}) \supset \Psi^e(\mathcal{Q})$;*
- *$\mathcal{P} \sim \mathcal{Q}$ если и только если $\Psi^e(\mathcal{P}) = \Psi^e(\mathcal{Q})$.*

Для $\mathcal{P} \subset \mathfrak{S}(X)$ обозначим

$$\begin{aligned}
\Psi(\mathcal{P}) &\coloneqq \mathcal{P},\\
\Psi_+(\mathcal{P}) &\coloneqq \{Q \circ P \,:\, Q \in \mathfrak{S}(X) \text{ и } P \in \mathcal{P}\},\\
\Psi^v(\mathcal{P}) &\coloneqq \{\overline{P}^{\,v} \,:\, P \in \mathcal{P}\},\\
\Psi^c(\mathcal{P}) &\coloneqq \{\overline{P} \,:\, P \in \mathcal{P}\},\\
\Psi^c_+(\mathcal{P}) &\coloneqq \Psi^v(\Psi_+(\mathcal{P})).
\end{aligned}$$

Из предложения 3.6.1 вытекает

Предложение 3.6.3. *Пусть X пространство. Для $\mathcal{P} \subset \mathfrak{S}(X)$*

- *$\mathcal{P} \preccurlyeq \Psi_+(\mathcal{P}) \preccurlyeq \Psi^c_+(\mathcal{P})$*
- *$\mathcal{P} \preccurlyeq \Psi^v(\mathcal{P}) \preccurlyeq \Psi^c(\mathcal{P}) \preccurlyeq \Psi^c_+(\mathcal{P})$*

Пусть λ есть ординал, $P_\alpha \subset X \times X$ для $\alpha < \lambda$. Индукцией по $\beta < \gamma$ определим множества $\mathsf{p}_\beta(\mathcal{S}_\beta), \mathsf{p}^c_\beta(\mathcal{S}_\beta) \subset X \times X$, где $\mathcal{S}_\beta = (P_\alpha)_{\alpha<\beta}$.

$\beta = 0$. Положим

$$\mathsf{p}_0(\mathcal{S}_0) \coloneqq \mathsf{p}^c_0(\mathcal{S}_0) \coloneqq \{\varnothing\}.$$

$\beta = 1$. Положим

$$\mathsf{p}_1(\mathcal{S}_1) \coloneqq P_0, \qquad \mathsf{p}^c_1(\mathcal{S}_1) \coloneqq \overline{P_0}.$$

$1 < \beta \le \gamma$. Положим

$$\mathsf{p}_\beta(\mathcal{S}_\beta) \coloneqq \begin{cases} Q_\beta, & \text{если } \beta \text{ предельный кардинал}\\ Q_\beta \circ P_{\beta'}, & \text{если } \beta = \beta' + 1\end{cases}$$

$$\mathsf{p}^c_\beta(\mathcal{S}_\beta) \coloneqq \begin{cases} \overline{Q^c_\beta}, & \text{если } \beta \text{ предельный кардинал}\\ \overline{Q^c_\beta \circ P_{\beta'}}, & \text{если } \beta = \beta' + 1\end{cases}$$

где

$$Q_\beta = \bigcup_{\alpha<\beta} \mathsf{p}_\alpha(\mathcal{S}_\alpha) \qquad \text{и} \qquad Q^c_\beta = \bigcup_{\alpha<\beta} \mathsf{p}^c_\alpha(\mathcal{S}_\alpha).$$

Для $\mathcal{P} \subset \mathfrak{S}(X)$ обозначим

$$\begin{aligned} \Psi_\gamma(\mathcal{P}) &\coloneqq \{\mathsf{p}_\gamma(\mathcal{S}) \,:\, \mathcal{S} \in \mathcal{P}^\gamma\}, \\ \Psi^c_\gamma(\mathcal{P}) &\coloneqq \{\mathsf{p}^c_\gamma(\mathcal{S}) \,:\, \mathcal{S} \in \mathcal{P}^\gamma\}, \\ \mathcal{P}|_Y &\coloneqq \{P|_Y \,:\, P \in \mathcal{P}\} \end{aligned}$$

для $Y \subset X$.

Из предложения 3.6.3 и определений вытекает

Предложение 3.6.4. *Пусть X пространство, $\mathcal{P} \subset \mathfrak{S}(X)$ и $1 < \alpha < \beta$ ординалы. Тогда*

$$\begin{gathered} \Psi_+(\mathcal{P}) \preccurlyeq \Psi_2(\mathcal{P}) \preccurlyeq \Psi_\alpha(\mathcal{P}) \preccurlyeq \Psi_\beta(\mathcal{P}) \preccurlyeq \Psi^c_\beta(\mathcal{P}) \\ \Psi^c(\mathcal{P}) = \Psi^c_1(\mathcal{P}) \preccurlyeq \Psi^c_\alpha(\mathcal{P}) \preccurlyeq \Psi^c_\beta(\mathcal{P}) \\ \Psi^c(\mathcal{P}) \preccurlyeq \Psi^c_+(\mathcal{P}) \preccurlyeq \Psi^c_2(\mathcal{P}) \end{gathered}$$

Предложение 3.6.5. *Пусть X пространство, $Y \subset X$, $\mathcal{P} \subset \mathfrak{S}(X)$ и γ ординалы. Если $\tilde\Psi \in \{\Psi^v, \Psi^c, \Psi_+, \Psi^c_+, \Psi_\gamma, \Psi^c_\gamma\}$, то*

$$\tilde\Psi(\mathcal{P}|_Y) \preccurlyeq \tilde\Psi(\mathcal{P})\Big|_Y.$$

Предложение 3.6.6. *Пусть X пространство, λ ординал и $U \subset X$ есть непустое открытое подмножество X. Тогда*

$$\begin{aligned} \Psi_\gamma(\mathfrak{S}(X))|_U &\sim \Psi_\gamma(\mathfrak{S}(U)), \\ \Psi^c_\gamma(\mathfrak{S}(X))\big|_U &\sim \Psi^c_\gamma(\mathfrak{S}(U)). \end{aligned}$$

Определение 3.23. Пусть $(X, \mathcal{T})$ пространство, $\mathcal{T}^* = \mathcal{T} \setminus \{\varnothing\}$, $\mathcal{P} \subset \mathfrak{S}(X)$. Назовем семейство $\mathcal{P}$ *делимым* (partible) если выполняются условие

- (P) Пусть A индексное множество, семейство $\{U_\alpha \,:\, \alpha \in A\} \subset \mathcal{T}^*$ дизъюнктно, $\{P_\alpha \,:\, \alpha \in A\} \subset \mathcal{P}$. Тогда существуют $P \in \mathcal{P}$, семейство открытых множеств $\{V_\alpha \,:\, \alpha \in A\} \subset \mathcal{T}^*$ так что для каждого $\alpha \in A$ выполняются условия:
  1. $V_\alpha \subset U_\alpha \subset \overline{V_\alpha}$;
  2. $P(V_\alpha) \subset U_\alpha$;
  3. если $x \in V_\alpha$, то $P(x) \subset P_\alpha(x)$.

Из определения вытекает

Предложение 3.6.7. *Для пространства X семейство $\mathfrak{S}(X)$ является делимым.*

Предложение 3.6.8. *Пусть X пространство, $\mathcal{P}, \mathcal{Q} \subset \mathfrak{S}(X)$, $\mathcal{R} = \{P \circ Q : P \in \mathcal{P}$ и $Q \in \mathcal{Q}\}$. Если $\mathcal{P}$ и $\mathcal{Q}$ делимые семейства, то $\mathcal{R}$ делимое семейство.*

Доказательство. Пусть $\mathcal{T}$ есть топология пространства X, $\mathcal{T}^* = \mathcal{T} \setminus \{\varnothing\}$.

Пусть A индексное множество, семейство $\{U_\alpha : \alpha \in A\} \subset \mathcal{T}^*$ дизюнктно, $\{R_\alpha : \alpha \in A\} \subset \mathcal{R}$. Пусть $R_\alpha = P_\alpha \circ Q_\alpha$ для $\alpha \in A$. Так как $\mathcal{P}$ делимое семейство, то существуют такое $P \in \mathcal{P}$, семейство открытых множеств $\{W_\alpha : \alpha \in A\} \subset \mathcal{T}^*$ так что для каждого $\alpha \in A$ выполняются условия: $W_\alpha \subset U_\alpha \subset \overline{W_\alpha}$; $P(W_\alpha) \subset U_\alpha$; если $x \in W_\alpha$, то $P(x) \subset P_\alpha(x)$. Так как $\mathcal{Q}$ делимое семейство, то существуют такое $Q \in \mathcal{Q}$, семейство открытых множеств $\{V_\alpha : \alpha \in A\} \subset \mathcal{T}^*$ так что для каждого $\alpha \in A$ выполняются условия: $V_\alpha \subset W_\alpha \subset \overline{V_\alpha}$; $Q(V_\alpha) \subset W_\alpha$; если $x \in V_\alpha$, то $Q(x) \subset Q_\alpha(x)$.

Положим $R = P \circ Q$. Тогда для каждого $\alpha \in A$ выполняются условия: $V_\alpha \subset U_\alpha \subset \overline{V_\alpha}$; $R(V_\alpha) \subset U_\alpha$; если $x \in V_\alpha$, то $R(x) \subset R_\alpha(x)$. □

Предложение 3.6.9. *Пусть $(X, \mathcal{T})$ квазирегулярное пространство. Для каждого открытого непустого $U \subset X$ существует дизъюнктное семейство γ открытых подмножеств X, так что*

(1) $\bigcup \gamma \subset U \subset \overline{\bigcup \gamma}$;

(2) $\overline{V} \subset U$ *для каждого* $V \in \gamma$.

Доказательство. Пусть $\mathcal{T}$ есть топология пространства X, $\mathcal{T}^* = \mathcal{T} \setminus \{\varnothing\}$ и

$$\nu = \{V \in \mathcal{T}^* : \overline{V} \subset U\}.$$

Возьмем $\gamma \subset \nu$ максимальное дизьюнктное подсемейство ν. □

Утверждение 3.6.10. *Пусть $(X, \mathcal{T})$ квазирегулярное пространство, $\mathcal{T}^* = \mathcal{T} \setminus \{\varnothing\}$, $\mathcal{P} \subset \mathfrak{S}(X)$ есть делимое семейство. Пусть A индексное множество, семейство $\{U_\alpha : \alpha \in A\} \subset \mathcal{T}^*$ дизюнктно, $\{P_\alpha : \alpha \in A\} \subset \mathcal{P}$. Тогда существуют $P \in \mathcal{P}$, семейство открытых множеств $\{V_\alpha : \alpha \in A\} \subset \mathcal{T}^*$ так что для каждого $\alpha \in A$ выполняются условия:*

(1) $V_\alpha \subset U_\alpha \subset \overline{V_\alpha}$;

(2) $\overline{P}(V_\alpha) \subset U_\alpha$;

(3) *если* $x \in V_\alpha$, *то* $P(x) \subset P_\alpha(x)$.

Доказательство. Воспользуемся предложением 3.6.9 и для каждого $\alpha \in A$ выберем дизъюнктное семейство $\gamma_\alpha \subset \mathcal{T}^*$ так что $\bigcup \gamma_\alpha \subset U_\alpha \subset \overline{\bigcup \gamma_\alpha}$ и $\overline{U} \subset U_\alpha$ для каждого $U \in \gamma_\alpha$. Обозначим $\alpha(U) = \alpha$ и $P_U = P_\alpha$ для $U \in \gamma_\alpha$. Положим $\gamma = \bigcup_{\alpha\in A} \gamma_\alpha$. Так как $\mathcal{P}$ делимое семейство, то существуют такое $P \in \mathcal{P}$, семейство открытых множеств $\{V_U : U \in \gamma\} \subset \mathcal{T}^*$ так что для каждого $U \in \gamma$ выполняются условия:

- $V_U \subset U \subset \overline{V_U}$;
- $P(V_U) \subset U$;
- если $x \in V_U$, то $P(x) \subset P_U(x)$.

Положим $V_\alpha = \bigcup\{V_U : U \in \gamma_\alpha\}$ для $\alpha \in A$. По построению, пункты (1) и (3) выполняются.

Проверим (2). Пусть $x \in V_\alpha$. Тогда $x \in V_U$ для некоторого $U \in \gamma_\alpha$. Получаем

$$P(V_U) \subset \overline{P(V_U)} = \overline{U} \subset U_\alpha.$$

Из предложения 3.6.1 вытекает, что $\overline{P}(x) \subset \overline{P(V_U)} \subset U_\alpha$. □

Из предложений 3.6.7, 3.6.8 и утверждения 3.6.10 вытекает

Предложение 3.6.11. *Пусть X пространство, $\mathcal{P} \subset \mathfrak{S}(X)$ делимое семейство.*

- *Семейства $\Psi_+(\mathcal{P})$, $\Psi_n(\mathcal{P})$ для $n < \omega$ являются делимыми.*
- *Если X квазирегулярное пространство, то семейства $\Psi^v(\mathcal{P})$, $\Psi^c(\mathcal{P})$, $\Psi^c_+(\mathcal{P})$, $\Psi^c_n(\mathcal{P})$ для $n < \omega$ являются делимыми.*

Определение 3.24. Пусть X пространство, $\mathcal{P} \subset \mathfrak{S}(X)$. Обозначим

$$\begin{aligned}\mathrm{Aut}_{\mathcal{P}}(X) \coloneqq \{f \in \mathrm{Aut}(X) : \ & (f \times f)(P) \in \mathcal{P} \text{ и} \\ & (f^{-1} \times f^{-1})(P) \in \mathcal{P} \\ & \text{для всех } P \in \mathcal{P}\}.\end{aligned}$$

Пространство X назовем *$\mathcal{P}$-однородным*, если для любых $x, y \in X$ существует $f \in \mathrm{Aut}_{\mathcal{P}}(X)$ так что $f(x) = y$.

Из определений вытекает

Предложение 3.6.12. *Пусть X пространство, $\mathcal{P} \subset \mathfrak{S}(X)$, α есть ординал, $\mathcal{Q} \in \{\Psi^e(\mathcal{P}), \Psi^v(\mathcal{P}), \Psi^c(\mathcal{P}), \Psi_+(\mathcal{P}), \Psi^c_+(\mathcal{P}), \Psi_\alpha(\mathcal{P}), \Psi^c_\alpha(\mathcal{P})\}$. Тогда*

- $\mathrm{Aut}_{\mathcal{P}}(X) \subset \mathrm{Aut}_{\mathcal{Q}}(X)$;
- *если X является $\mathcal{P}$-однородным, то X является $\mathcal{Q}$-однородным.*

Предложение 3.6.13. *Пусть X пространство, $\mathcal{P} = \mathfrak{S}(X)$, α есть ординал, $\mathcal{Q} \in \{\mathcal{P}, \Psi^e(\mathcal{P}), \Psi^v(\mathcal{P}), \Psi^c(\mathcal{P}), \Psi_+(\mathcal{P}), \Psi^c_+(\mathcal{P}), \Psi_\alpha(\mathcal{P}), \Psi^c_\alpha(\mathcal{P})\}$. Тогда*

- $\mathrm{Aut}(X) = \mathrm{Aut}_{\mathcal{Q}}(X)$*;*
- *если X является однородным, то X является $\mathcal{Q}$-однородным.*

3.7 Нормальные функторы квадрата

Функтор $\mathfrak{Q}$, который топологическому пространству X ставит в соответствие семейство $\mathfrak{Q}(X) \subset \mathrm{Exp}_*(X \times X)$ непустых подмножеств $X \times X$, назовем *функтором квадрата*. Функтор квадрата $\mathfrak{Q}$ назовем *нормальным функтором квадрата* (NFS), если выполняются условия:

(Q_1) если $f : X \to Y$ есть гомеоморфизм, то

$$\mathfrak{Q}(Y) = \{(f \times f)(P) \,:\, P \in \mathfrak{Q}(X)\};$$

(Q_2) если U есть открытое непустое подмножество X, то

$$\mathfrak{Q}(U) = \mathfrak{Q}(X)|_U\,;$$

(Q_3) если $S \in \mathfrak{Q}(X)$, $S \subset Q \subset X \times X$, то $Q \in \mathfrak{Q}(X)$;

(Q_4) если $S \in \mathfrak{Q}(X)$ то $\overline{S} = X \times X$.

На нормальных функторах квадрата введем отношение порядка. Для NFS $\mathfrak{Q}$ и $\mathfrak{R}$ выполняется $\mathfrak{Q} \preccurlyeq \mathfrak{R}$ если и только если $\mathfrak{Q}(X) \supset \mathfrak{R}(X)$ для любого пространства X.

Определим NFS, которые мы будем использовать. Пусть $k \in \{d, h, v, s, a\}$, X есть пространство, $S \in \mathrm{Exp}_*(X \times X)$. Тогда $S \in \mathfrak{Q}_k(X)$ если и только если выполняется условие (L_k):

(L_d) $\overline{S} = X \times X$;

(L_v) $\overline{S(x)} = X$ для любого $x \in X$;

(L_h) $\overline{S^{-1}(x)} = X$ для любого $x \in X$;

(L_s) $M \times X \subset S$ для некоторого $M \subset X = \overline{M}$;

(L_a) $S = X$.

Из определения вытекает

Предложение 3.7.1. *Пусть $k \in \{d, h, v, s, a\}$, X есть пространство и $S \in \operatorname{Exp}_*(X \times X)$. Тогда $S \in \mathfrak{Q}_k(X)$ если и только если для любого $x \in X$ и любой окрестности $U \subset X$ точки x выполняется условие (L'_k):*

(L'_d) $\overline{S(U)} = X$;

(L'_v) $\overline{S(x)} = X$;

(L'_h) $S(U) = X$;

(L'_s) $S(z) = X$ *для некоторого* $z \in U$;

(L'_a) $S(x) = X$.

Предложение 3.7.2. *Для любого NFS $\mathfrak{Q}$*

$$\mathfrak{Q}_d \preccurlyeq \mathfrak{Q} \preccurlyeq \mathfrak{Q}_a,$$
$$\mathfrak{Q}_h \preccurlyeq \mathfrak{Q}_s.$$

Введем на NFS операцию инкрементирования: для NFS $\mathfrak{Q}$ определим NFS $\mathfrak{Q}^+$. Пусть X есть пространство, $Q \in \operatorname{Exp}_*(X \times X)$. Тогда $Q \in \mathfrak{Q}^+(X)$ если и только если $P \circ S \subset Q$ для некоторых $P \in \mathfrak{S}(X)$ и $S \in \mathfrak{Q}(X)$.

Предложение 3.7.3.

$$\mathfrak{Q}_v \preccurlyeq \mathfrak{Q}_d^+$$
$$\mathfrak{Q}_a = \mathfrak{Q}_s^+ = \mathfrak{Q}_h^+$$

3.8 $\Delta(\mathcal{P}; \mathfrak{Q})$-бэровские пространства

Определение 3.25. Пусть $\mathfrak{Q}$ есть нормальный функтор квадрата, $(X, \mathcal{T})$ пространство, $\mathcal{T}^* = \mathcal{T} \setminus \{\varnothing\}$, $\mathcal{P} \subset \mathfrak{S}(X)$. Назовем X

- $\Delta(\mathcal{P}; \mathfrak{Q})$-*тучным* ($\Delta(\mathcal{P}; \mathfrak{Q})$-nonmeagre) пространством, если для любого $P \in \mathcal{P}$ существует $V \in \mathcal{T}^*$, так что $P|_V \in \mathfrak{Q}(V)$;

- $\Delta(\mathcal{P}; \mathfrak{Q})$-*бэровским* ($\Delta(\mathcal{P}; \mathfrak{Q})$-Baire space) пространством, если для любого $P \in \mathcal{P}$ и любого $U \in \mathcal{T}^*$ существует открытое непустое $V \subset U$, так что выполняется условие $P|_V \in \mathfrak{Q}(V)$.

Из определений вытекает

Предложение 3.8.1. *Пусть X есть пространство, $\mathfrak{Q}$, $\mathfrak{R}$ есть NFS, $\mathcal{P}, \mathcal{R} \subset \mathfrak{S}(X)$. Предположим, что $\mathfrak{Q} \succcurlyeq \mathfrak{R}$ и $\mathcal{P} \preccurlyeq \mathcal{R}$.*

- *Если X $\Delta(\mathcal{P};\mathfrak{Q})$-бэровское пространство, то X $\Delta(\mathcal{R};\mathfrak{R})$-бэровское пространство.*
- *Если X $\Delta(\mathcal{P};\mathfrak{Q})$-тучное пространство, то X $\Delta(\mathcal{R};\mathfrak{R})$-тучное пространство.*

Для $P \subset X \times X$ обозначим

$$\mathcal{W}(P,\mathfrak{Q}) \coloneqq \{V \in \mathcal{T}^* : P|_V \in \mathfrak{Q}(V)\},$$
$$W(P,\mathfrak{Q}) \coloneqq \bigcup \mathcal{W}(P,\mathfrak{Q}).$$

Для $\mathcal{P} \subset \mathfrak{S}(X)$ обозначим

$$\mathcal{B}(\mathcal{P},\mathfrak{Q}) \coloneqq \{V \in \mathcal{T}^* : V \text{ является } \Delta(\mathcal{P}|_V;\mathfrak{Q})\text{-бэровским}\},$$
$$B(\mathcal{P},\mathfrak{Q}) \coloneqq \bigcup \mathcal{B}(\mathcal{P},\mathfrak{Q}).$$

Непосредственно проверяются следующие три утверждения.

Утверждение 3.8.2. *$B(\mathcal{P},\mathfrak{Q}) \subset \overline{W(P,\mathfrak{Q})}$ для $P \in \mathcal{P}$.*

Утверждение 3.8.3. *Пространство X является*

- *$\Delta(\mathcal{P};\mathfrak{Q})$-тучным пространством, если и только если $W(P,\mathfrak{Q}) \neq \varnothing$*
- *$\Delta(\mathcal{P};\mathfrak{Q})$-бэровским, если и только если $\overline{W(P,\mathfrak{Q})} = X$*

для любого $P \in \mathcal{P}$.

Утверждение 3.8.4. *$W(P,\mathfrak{Q}) \cap V = W(P|_V,\mathfrak{Q})$ для $V \in \mathcal{T}^*$.*

Из утверждения 3.8.3 вытекает

Предложение 3.8.5. *Пусть X есть пространство, $\mathfrak{Q}$ есть NFS, $\mathcal{P} \subset \mathfrak{S}(X)$. Если X является $\Delta(\mathcal{P};\mathfrak{Q})$-бэровским, то X является $\Delta(\mathcal{P};\mathfrak{Q})$-тучным.*

Из утверждений 3.8.3 и 3.8.4 вытекает

Предложение 3.8.6. *Пусть X есть пространство, $\mathfrak{Q}$ есть NFS, $\mathcal{P} \subset \mathfrak{S}(X)$.*

(1) *Пространство X является $\Delta(\mathcal{P};\mathfrak{Q})$-бэровским если и только если U является $\Delta(\mathcal{P}|_U;\mathfrak{Q})$-тучным пространством для любого непустого открытого $U \subset X$.*

(2) *Если $U \subset X$ непустое открытое и U является $\Delta(\mathcal{P}|_U;\mathfrak{Q})$-тучным пространством, то X является $\Delta(\mathcal{P};\mathfrak{Q})$-тучным.*

Утверждение 3.8.7. *Если $P,Q \in \mathfrak{S}(X)$, то $W(Q,\mathfrak{Q}) \subset W(P \circ Q,\mathfrak{Q}^+)$.*

Доказательство. Достаточно проверить $\mathcal{W}(Q,\mathfrak{Q}) \subset \mathcal{W}(P\circ Q,\mathfrak{Q}^+)$. Пусть $V\in\mathcal{W}(Q,\mathfrak{Q})$. Тогда $Q|_V\in\mathfrak{Q}(V)$ и, следовательно, $P|_V\circ Q|_V\in\mathfrak{Q}^+(X)$. Так как $P|_V\circ Q|_V\subset(P\circ Q)|_V$, то $(P\circ Q)|_V\in\mathfrak{Q}^+(V)$. □

Из утверждений 3.8.3 и 3.8.7 вытекает

Предложение 3.8.8. *Пусть X есть пространство, $\mathfrak{Q}$ есть NFS, $\mathcal{P}\subset\mathfrak{S}(X)$.*

(1) *Если X является $\Delta(\mathcal{P};\mathfrak{Q})$-тучным пространством, то X является $\Delta(\Psi_+(\mathcal{P});\mathfrak{Q}^+)$-тучным пространством.*

(2) *Если X является $\Delta(\mathcal{P};\mathfrak{Q})$-бэровским пространством, то X является $\Delta(\Psi_+(\mathcal{P});\mathfrak{Q}^+)$-бэровским пространством.*

Утверждение 3.8.9. *Если $P\in\mathfrak{S}(X)$, то $W(P,\mathfrak{Q}_d)\subset W(\overline{P},\mathfrak{Q}_a)$.*

Доказательство. Достаточно проверить $\mathcal{W}(P,\mathfrak{Q}_d)\subset\mathcal{W}(\overline{P},\mathfrak{Q}_a)$. Пусть $V\in\mathcal{W}(P,\mathfrak{Q}_d)$. Тогда $P|_V\in\mathfrak{Q}_d(V)$ и, следовательно, $V\times V\subset\overline{P|_V}\subset\overline{P}$. □

Из утверждений 3.8.3 и 3.8.9 вытекает

Предложение 3.8.10. *Пусть X есть пространство, $\mathcal{P}\subset\mathfrak{S}(X)$.*

(1) *Если X является $\Delta(\mathcal{P};\mathfrak{Q}_d)$-тучным пространством, то X является $\Delta(\Psi^c(\mathcal{P});\mathfrak{Q}_a)$-тучным пространством.*

(2) *Если X является $\Delta(\mathcal{P};\mathfrak{Q}_d)$-бэровским пространством, то X является $\Delta(\Psi^c(\mathcal{P});\mathfrak{Q}_a)$-бэровским пространством.*

Из предложения 3.8.10 вытекает

Предложение 3.8.11. *Пусть X есть пространство, $\mathcal{P}\subset\mathfrak{S}(X)$, $\Psi^c(\mathcal{P})=\mathcal{P}$, $\mathfrak{Q}$ есть NFS. Тогда*

(1) *X является $\Delta(\mathcal{P};\mathfrak{Q})$-тучным пространством если и только если X является $\Delta(\mathcal{P};\mathfrak{Q}_a)$-тучным пространством;*

(2) *X является $\Delta(\mathcal{P};\mathfrak{Q})$-бэровским пространством если и только если X является $\Delta(\mathcal{P};\mathfrak{Q}_a)$-бэровским пространством.*

Из предложений 3.6.3, 3.6.4, 3.7.2, 3.7.3, 3.8.1, 3.8.8, 3.8.10 и 3.8.11 вытекает

Предложение 3.8.12. *Пусть X пространство, $\mathcal{P}\subset\mathfrak{S}(X)$. В диаграммах ниже, стрелка*

$$(F)_k\to(G)_l$$

означает, что $F,G:\mathrm{Exp}(\mathfrak{S}(X))\to\mathrm{Exp}(\mathfrak{S}(X))$ есть отображения, $k,l\in\{d,v,h,s,a\}$ и выполняются условия

(1) *Если X является $\Delta(F(\mathcal{P});\mathfrak{Q}_k)$-тучным пространством, то X является $\Delta(G(\mathcal{P});\mathfrak{Q}_l)$-тучным пространством и*

(2) *если X является $\Delta(F(\mathcal{P});\mathfrak{Q}_k)$-бэровским пространством, то X является $\Delta(G(\mathcal{P});\mathfrak{Q}_l)$-бэровским пространством.*

$$(\Psi^c)_v \longleftrightarrow (\Psi^c)_a \longleftrightarrow (\Psi^c)_s \longleftrightarrow (\Psi^c)_h \longleftrightarrow (\Psi^c)_d$$

$$\begin{tikzcd}
(\Psi)_a \arrow[r] \arrow[d] & (\Psi)_s \arrow[r] & (\Psi)_h \arrow[d] \arrow[ddll] & \\
(\Psi)_v \arrow[rr] & & (\Psi)_d \arrow[dl] \arrow[dr] & \\
(\Psi_+)_a \arrow[r] \arrow[d] & (\Psi_+)_v \arrow[r] \arrow[ddl] & (\Psi^c_+)_a \arrow[ddr] & (\Psi^c)_a \arrow[l] \arrow[d, leftrightarrow] \\
(\Psi_2)_a \arrow[r] \arrow[d] & (\Psi_2)_s \arrow[r] & (\Psi_2)_h \arrow[d] & (\Psi^c_1)_a \arrow[d] \\
(\Psi_2)_v \arrow[rr] & & (\Psi_2)_d \arrow[r] & (\Psi^c_2)_a
\end{tikzcd}$$

Пусть $1 < \alpha < \beta$ ординалы.

$$(\Psi^c_\alpha)_v \longleftrightarrow (\Psi^c_\alpha)_a \longleftrightarrow (\Psi^c_\alpha)_s \longleftrightarrow (\Psi^c_\alpha)_h \longleftrightarrow (\Psi^c_\alpha)_d$$

$$\begin{tikzcd}
 & (\Psi_\alpha)_a \arrow[r] \arrow[d] & (\Psi_\alpha)_s \arrow[r] & (\Psi_\alpha)_h \arrow[d] \arrow[ddlll] \\
 & (\Psi_\alpha)_v \arrow[rr] & & (\Psi_\alpha)_d \arrow[d] \arrow[ddlll] \\
(\Psi_\beta)_a \arrow[r] \arrow[d] & (\Psi_\beta)_s \arrow[r] & (\Psi_\beta)_h \arrow[d] & (\Psi^c_\alpha)_a \arrow[d] \\
(\Psi_\beta)_v \arrow[rr] & & (\Psi_\beta)_d \arrow[r] & (\Psi^c_\beta)_a
\end{tikzcd}$$

Несложно проверяется следующие два утверждения.

Утверждение 3.8.13. *Пусть X есть пространство, $\mathfrak{Q}$ есть NFS, $P \in \mathfrak{S}(X)$. Если $f \in \mathrm{Aut}(X)$, то*

$$f(W(P, \mathfrak{Q})) = W((f \times f)(P), \mathfrak{Q}).$$

Утверждение 3.8.14. *Пусть X есть пространство, $\mathfrak{Q}$ есть NFS, $\mathcal{P} \subset \mathfrak{S}(X)$. Если $f \in \mathrm{Aut}_{\mathcal{P}}(X)$, то*

$$f(B(\mathcal{P}, \mathfrak{Q})) = B(\mathcal{P}, \mathfrak{Q}).$$

Утверждение 3.8.15. *Пусть X есть пространство, $\mathcal{P} \subset \mathfrak{S}(X)$, $\mathfrak{Q}$ есть NFS. Если X является $\mathcal{P}$-однородным пространством и $B(\mathcal{P}, \mathfrak{Q}) \neq \varnothing$, то X является $\Delta(\mathcal{P}; \mathfrak{Q})$-бэровским.*

Доказательство. Пусть $U = B(\mathcal{P}, \mathfrak{Q})$. Покажем что $U = X$. Возьмем произвольное $y \in X$. Пусть $x \in U$. Так как пространство X является $\mathcal{P}$-однородным, то существует $f \in \mathrm{Aut}_{\mathcal{P}}(X)$ такое что $f(x) = y$. Из утверждения 3.8.14 вытекает что $f(U) = U$. Следовательно $y \in U$. Доказано $U = X$.

Пусть $P \in \mathcal{P}$. Из утверждения 3.8.2 вытекает, что $U \subset \overline{W(P, \mathfrak{Q})}$. Следовательно, $\overline{W(P, \mathfrak{Q})} = X$. Из утверждения 3.8.3 вытекает, что X является $\Delta(\mathcal{P}; \mathfrak{Q})$-бэровским. □

Утверждение 3.8.16. *Пусть X есть пространство, $\mathcal{P} \subset \mathfrak{S}(X)$ делимое семейство, $\mathfrak{Q}$ есть NFS. Пространство X является $\Delta(\mathcal{P}; \mathfrak{Q})$-тучным если и только если $B(\mathcal{P}, \mathfrak{Q}) \neq \varnothing$.*

Доказательство. Пусть $\mathcal{T}$ есть топология пространства X, $\mathcal{T}^* = \mathcal{T} \setminus \{\varnothing\}$. Из предложений 3.8.5 и 3.8.6 вытекает, что если U является $\Delta(\mathcal{P}|_U; \mathfrak{Q})$-бэровским пространством для некоторого $U \in \mathcal{T}^*$, то X является $\Delta(\mathcal{P}; \mathfrak{Q})$-тучным.

Докажем обратное утверждение. Предположим противное: $B(\mathcal{P}, \mathfrak{Q}) = \varnothing$. Тогда U не является $\Delta(\mathcal{P}|_U; \mathfrak{Q})$-бэровским пространством для любого $U \in \mathcal{T}^*$. Из предложения 3.8.6 вытекает, что V не является $\Delta(\mathcal{P}|_V; \mathfrak{Q})$-тучным для некоторого $V \in \mathcal{T}^*$, $V \subset U$. Положим

$$\nu = \{V \in \mathcal{T}^* \,:\, V \text{ не является } \Delta(\mathcal{P}|_V; \mathfrak{Q})\text{-тучным}\}.$$

Семейство ν является π-базой X. Пусть $\gamma \subset \nu$ есть максимальное дизъюнктивное подсемейство семейства ν. Тогда $\overline{\bigcup \gamma} = X$. Из утверждения 3.8.3 вытекает, что для каждого $V \in \gamma$ существует $P_V \in \mathcal{P}$, для которого

$$W(P_V, \mathfrak{Q}) \cap V = W(P_V|_V, \mathfrak{Q}) = \varnothing.$$

Так как $\mathcal{P}$ является делимым семейством, то существуют $P \in \mathcal{P}$, $W_V \in \mathcal{T}^*$ для $V \in \gamma$, так что выполняются условия

- $W_V \subset V \subset \overline{W_V}$;

- $P(W_V) \subset V$;
- если $x \in W_V$, то $P(x) \subset P_V(x)$.

Получаем $W(P,\mathfrak{Q}) \cap W_V \subset W(P_V,\mathfrak{Q}) \cap W_V$ и $W(P,\mathfrak{Q}) \cap V = \varnothing$ для $V \in \gamma$. Следовательно, $W(P,\mathfrak{Q}) = \varnothing$. Из утверждения 3.8.3 вытекает, что X не $\Delta(\mathcal{P};\mathfrak{Q})$-тучное. Противоречие. □

Предложение 3.8.17. *Пусть X есть пространство, $\mathcal{P} \subset \mathfrak{S}(X)$ делимое семейство, $\mathfrak{Q}$ есть NFS. Предположим, что X является $\mathcal{P}$-однородным пространством. Тогда следующие условия эквивалентны:*

(1) *Пространство X является $\Delta(\mathcal{P};\mathfrak{Q})$-бэровским.*

(2) *Пространство X является $\Delta(\mathcal{P};\mathfrak{Q})$-тучным.*

Доказательство. Импликация (1) $\Longrightarrow$ (2) вытекает из предложения 3.8.5. Докажем (2) $\Longrightarrow$ (1). Из утверждения 3.8.16 вытекает, что $B(\mathcal{P},\mathfrak{Q}) \neq \varnothing$. Из утверждения 3.8.15 вытекает, что X является $\Delta(\mathcal{P};\mathfrak{Q})$-бэровским. □

Из предложения 3.7.1 вытекает

Предложение 3.8.18. *Пусть X есть пространство, $\mathcal{P} \subset \mathfrak{S}(X)$, $Y \subset X = \overline{Y}$, $\mathcal{Q} = \mathcal{P}|_Y$.*

(1) *Если Y является $\Delta(\mathcal{Q};\mathfrak{Q}_d)$-тучным, то X является $\Delta(\mathcal{P};\mathfrak{Q}_d)$-тучным.*

(2) *Пусть $k \in \{h,s\}$. Если Y является $\Delta(\mathcal{Q};\mathfrak{Q}_k)$-тучным, то X является $\Delta(\Psi^v(\mathcal{P});\mathfrak{Q}_k)$-тучным.*

3.9 $\Delta(\mathfrak{Q})$-бэровские пространства

Определение 3.26. Пусть $\mathfrak{Q}$ есть нормальный функтор квадрата, X есть пространство, γ есть ординал, $\mathcal{P} = \mathfrak{S}(X)$. Пусть $\Psi_l^k : \mathrm{Exp}(\mathfrak{S}(X)) \to \mathrm{Exp}(\mathfrak{S}(X))$ есть одно из отображений, рассматриваемых в разделе 3.6:

$$\Psi_l^k \in \{\Psi, \Psi^e, \Psi^v, \Psi^c, \Psi_+, \Psi_+^c, \Psi_\gamma, \Psi_\gamma^c\}.$$

Будем говорить, X является ${}^k\Delta^{\,l}(\mathfrak{Q})$-*бэровским* (${}^k\Delta^{\,l}(\mathfrak{Q})$-*тучным*) пространством, если X является $\Delta(\Psi_l^k(\mathfrak{S}(X));\mathfrak{Q})$-бэровским ($\Delta(\Psi_l^k(\mathfrak{S}(X));\mathfrak{Q})$-тучным) пространством. Для

$$\tilde{\Delta} \in \{\Delta, {}^e\Delta, {}^v\Delta, {}^c\Delta, \Delta^+, {}^c\Delta^+, \Delta^\gamma, {}^c\Delta^\gamma\}$$

мы определили $\tilde{\Delta}(\mathfrak{Q})$-бэровские ($\tilde{\Delta}(\mathfrak{Q})$-тучные) пространства. Для

$$k \in \{d,h,v,s,a\}$$

будем говорить, X является $\tilde{\Delta}_k$*-бэровским* ($\tilde{\Delta}_k$*-тучным*) пространством, если X является $\tilde{\Delta}(\mathfrak{Q}_k)$-бэровским ($\tilde{\Delta}(\mathfrak{Q}_k)$-тучным) пространством. Для

$$\tilde{\tilde{\Delta}} \in \{\Delta_k,\ {}^e\Delta_k,\ {}^v\Delta_k,\ {}^c\Delta_k, \Delta_k^+,\ {}^c\Delta_k^+, \Delta_k^\gamma,\ {}^c\Delta_k^\gamma\}$$

мы определили $\tilde{\tilde{\Delta}}$-бэровские ($\tilde{\tilde{\Delta}}$-тучные) пространства. Также, если нижний индекс не написан, подразумевается d: ${}^k\Delta^l$-тучность (${}^k\Delta^l$-бэровость) это ${}^k\Delta^l_d$-тучность (${}^k\Delta^l_d$-бэровость). Отдельное непосредственное определение для наиболее важных классов пространств: пространство X называется

(1) Δ-тучным (Δ-бэровским) если X является $\Delta(\mathfrak{S}(X);\mathfrak{Q}_d)$-тучным ($\Delta(\mathfrak{S}(X);\mathfrak{Q}_d)$ бэровским);

(2) Δ_h-тучным (Δ_h-бэровским) если X является $\Delta(\mathfrak{S}(X);\mathfrak{Q}_h)$-тучным ($\Delta(\mathfrak{S}(X);\mathfrak{Q}$ бэровским);

(3) Δ_s-тучным (Δ_s-бэровским) если X является $\Delta(\mathfrak{S}(X);\mathfrak{Q}_s)$-тучным ($\Delta(\mathfrak{S}(X);\mathfrak{Q}$ бэровским);

(4) Δ^γ-тучным (Δ^γ-бэровским) если X является $\Delta(\Psi_\gamma(\mathfrak{S}(X));\mathfrak{Q}_d)$-тучным ($\Delta(\Psi_\gamma(\mathfrak{S}(X));\mathfrak{Q}_d)$-бэровским);

(5) ${}^c\Delta^\gamma$-тучным (${}^c\Delta^\gamma$-бэровским) если X является $\Delta(\Psi^c_\gamma(\mathfrak{S}(X));\mathfrak{Q}_d)$-тучным ($\Delta(\Psi^c_\gamma(\mathfrak{S}(X));\mathfrak{Q}_d)$-бэровским);

Так как $\Psi_+(\mathfrak{S}(X)) = \Psi_2(\mathfrak{S}(X))$, то классы $\Delta^+(\mathfrak{Q})$-бэровских ($\Delta^+(\mathfrak{Q})$-тучных) и $\Delta^2(\mathfrak{Q})$-бэровских ($\Delta^2(\mathfrak{Q})$-тучных) пространств совпадают.

Замечание 3.27. Пространства, которые здесь называются "Δ-тучными" в работах [6; 22; 29] назывались "Δ-бэровскими". Я решил переименовать класс Δ-бэровских пространств из-за того, что, как показывает предложение 3.9.4, Δ-бэровость является обобщением беровости и Δ-тучность является обобщением тучности.

Из предложений 3.6.11, 3.6.13, 3.8.17 и утверждения 3.8.16 вытекает

Предложение 3.9.1. *Пусть X есть пространство, $\mathfrak{Q}$ есть NFS и $n \in \omega$. Рассмотрим условие*

(*) *(1) Пространство X является $\tilde{\Delta}(\mathfrak{Q})$-тучным если и только если некоторое непустое открытое $U \subset X$ является $\tilde{\Delta}(\mathfrak{Q})$-бэровским.*

(2) Если пространство X однородно, то X является $\tilde{\Delta}(\mathfrak{Q})$-тучным если и только если X является $\tilde{\Delta}(\mathfrak{Q})$-бэровским.

(1) *Если $\tilde{\Delta} \in \{\Delta, \Delta^n\}$, то выполняться* (*).

(2) *Если пространство X квазирегулярно и $\tilde{\Delta} \in \{\Delta, \Delta^n, {}^v\Delta\,, {}^c\Delta\,, {}^c\Delta^{\,+}, {}^c\Delta^{\,n}\}$, то выполняться* (*).

Утверждение 3.9.2. *Пусть $(X, \mathcal{T})$ есть квазирегулярное пространство, $\mathcal{T}^* = \mathcal{T} \setminus \{\varnothing\}$. Пространство X является тощим если и только если существует последовательность $\gamma_n \subset \mathcal{T}^*$ семейств открытых множеств, для которой выполняются условия:*

(1) $\gamma_0 = \{X\}$;

(2) семейство γ_n дизъюнктно, $\overline{\bigcup \gamma_n} = X$ и γ_{n+1} вписано в γ_n;

(3) $\overline{U} \cap \overline{V} = \varnothing$ для различных $U, V \in \gamma_n$;

(4) если $V \in \gamma_{n+1}$, $U \in \gamma_n$ и $V \cap U \neq \varnothing$, то $\overline{V} \subset U$;

(5) семейство $\gamma = \bigcup\limits_{n\in\omega} \gamma_n$ точечно конечно;

где $n \in \omega$.

Доказательство. Если γ_n с перечисленными свойствами существуют, то $F_n = X \setminus \bigcup \gamma_n$ нигде не плотно, $X = \bigcup_{n\in\omega} F_n$ и, следовательно, X есть тощее пространство.

Предположим, что X есть тощее пространство. Тогда существуют нигде не плотные замкнутые множества $F_n \subset X$, $n \in \omega$, так что $X = \bigcup_{n\in\omega} F_n$. Можно считать, что $F_0 = \varnothing$ и $F_n \subset F_{n+1}$ для $n \in \omega$. Индукцией по n построим γ_n.

Положим $\gamma_0 = \{X\}$.

Предположим, γ_n построено. Пусть $U \in \gamma_n$. Из предложения 3.6.9 вытекает, что существует такое дизъюнктивное семейство $\nu_U \subset \mathcal{T}^*$, так что

(1) $\bigcup \nu_U \subset U \setminus F_{n+1} \subset \overline{\bigcup \nu_U}$;

(2) $\overline{V} \subset U \setminus F_{n+1}$ для $V \in \nu_U$;

(3) $\overline{W} \cap \overline{V} = \varnothing$ для различных $W, V \in \nu_U$.

Положим $\gamma_{n+1} = \bigcup \{\nu_U \,:\, U \in \gamma_n\}$. □

Утверждение 3.9.3. *Пусть $(X, \mathcal{T})$ есть тощее квазирегулярное пространство, $\mathcal{T}^* = \mathcal{T} \setminus \{\varnothing\}$. Тогда существуют такие $P_n \in \mathfrak{S}(X)$ для $n \in \omega$, что*

(1) *P_n нигде не плотно в X;*

(2) *$P_0 \circ P_n = P_n$;*

(3) *$P_n \circ P_n \subset P_{2n}$;*

(4) $\overline{P_n} \subset P_{n+1}$;

(5) $\bigcup\limits_{n\in\omega} P_n = X \times X$.

Доказательство. Возьмем γ_n, $n \in \omega$ как в утверждении 3.9.2. Положим

$$f(x) = \max\{m \in \omega : x \in \bigcup \gamma_m\},$$
$$f_n(x) = \max\{0, f(x) - n\}$$

для $x \in X$ и $n \in \omega$. Положим

$$P_n = \{(x, y) \in X \times X : \text{существует } U \in \gamma_l, \text{ где } l = f_n(x), \text{ так что } x, y \in U\}.$$

Проверим (1). Пусть $U, V \in \mathcal{T}^*$. Пусть $y \in V$. Положим $m = f(y) + n + 1$. Возьмем такое $W \in \gamma_m$, что $U' = W \cap U \neq \varnothing$. Возьмем такое $U'' \in \gamma_{m-n}$, что $W \subset U''$. Тогда $P_n(U') \subset U''$ и $y \notin \overline{U''}$. Положим $V' = V \setminus \overline{U''}$. Тогда $\varnothing \neq U' \times V' \subset U \times V$ и $P_n \cap U' \times V' = \varnothing$.

Проверим (2). Пусть $x \in X$, $m = f(x)$. Если $m \leq n$, то $P_n(x) = X$. Рассмотрим случай $m > n$. Возьмем $V \in \gamma_m$ и $U \in \gamma_{m-n}$ так что $x \in V \subset U$. Тогда $P_0(x) = V$, $P_n(x) = U$ и $P_n(V) = U$.

Проверим (3). Пусть $x \in X$, $m = f(x)$. Если $m \leq 2n$, то $P_{2n}(x) = X \supset P_n(x)$. Рассмотрим случай $m > 2n$. Возьмем $V \in \gamma_{m-n}$ и $U \in \gamma_{m-2n}$ так что $x \in V \subset U$. Тогда $P_n(x) = V$, $P_{2n}(x) = U$ и $P_n(V) \subset U$.

Проверим (4). Из построения, $\overline{P_n}^v \subset P_{n+1}$. Из предложения 3.6.1 вытекает, что $\overline{P_n} \subset \overline{P_0 \circ P_n}^v$. Так как, в силу (2), $P_n = P_0 \circ P_n$, то $\overline{P_n} \subset P_{n+1}$.

Проверим (5). Пусть $x, y \in X$, $m = f(x)$. Тогда $P_{2m}(x) = X$ и $(x, y) \in P_{2m}$. □

Предложение 3.9.4. *Пусть X есть квазирегулярное пространство, $\mathfrak{Q}$ есть NFS и $n \in \omega$. Если $\tilde{\Delta} \in \{\Delta, \Delta^n, {}^v\Delta, {}^c\Delta, {}^c\Delta^+, {}^c\Delta^n\}$, то*

(1) *если X является $\tilde{\Delta}(\mathfrak{Q})$-тучным, то X является тучным;*

(2) *если X является $\tilde{\Delta}(\mathfrak{Q})$-бэровским, то X является бэровским.*

Доказательство. В силу предложения 3.9.1 достаточно доказать (1). Предположим противное, то есть X есть тощее пространство. Возьмем $P_n \in \mathfrak{S}(X)$, $n \in \omega$ как в утверждение 3.9.3. Если $\mathcal{P} = \mathfrak{S}(X)$ и

$$\mathcal{Q} \in \{\mathcal{P}, \Psi^v(\mathcal{P}), \Psi^c(\mathcal{P}), \Psi^c_+(\mathcal{P}), \Psi_n(\mathcal{P}), \Psi^c_n(\mathcal{P})\},$$

то $P_m \in \Psi^e(\mathcal{Q})$ для некоторого $m \in \omega$. Так как P_m нигде не плотно в $X \times X$, то X не является $\Delta(\mathcal{Q}; \mathfrak{Q})$-тучным. Противоречие. □

Предложение 3.9.5. *Пусть X есть пространство, $Y \subset X = \overline{Y}$.*

(1) *Пусть $\tilde{\Delta} \in \{\Delta, \Delta^n, {}^v\Delta\,, {}^c\Delta\,, {}^c\Delta^{\,+}, {}^c\Delta^{\,n}\}$. Если Y является $\tilde{\Delta}$-тучным, то X является $\tilde{\Delta}$-тучным.*

(2) *Предположим, что каждая точка множества Y является точкой полу регулярности пространства X, например, X полу регулярное пространство. Если Y является Δ_s-тучным, то X является Δ_s-тучным.*

Доказательство. Пункт (1) вытекает из предложений 3.6.5 и 3.8.18. Докажем (2). Пусть $P \in \mathfrak{S}(X)$. Возьмем такое $Q \in \mathfrak{S}(X)$, что $Q(y) \subset P(y)$ и $Q(y)$ есть каноническое открытое множество для $y \in Y$. Так как Y Δ_s-тучное пространство, то существует непустое открытое $U \subset X$, так что $R \in \mathfrak{Q}_s(S)$ где $S = Y \cap U$ и $R = Q|_S$.

Лемма. *Пусть $y \in S$. Если $S = R(y)$, то $U \subset Q(y) \subset P(y)$.*

Доказательство. $U \subset \operatorname{Int} \overline{S} \subset \operatorname{Int} \overline{R(y)} \subset \operatorname{Int} \overline{Q(y)} = Q(y)$. □

Из леммы, $R \in \mathfrak{Q}_l(S)$ и предложения 3.7.1 вытекает что $P|_U \in \mathfrak{Q}_s(U)$. □

3.10 Связь Δ и Γ бэровские

В этом разделе устанавливается связь между свойствами типа беровости и тучности, определяемые с помощью диагонали и топологических игр.

Предложение 3.10.1. *Пусть $(X, \mathcal{T})$ пространство, $\mathcal{T}^* = \mathcal{T} \setminus \{\varnothing\}$.*

(1) *Если X является $\Gamma_{o,l}^{\widehat{OD}}$-тучным (-бэровским), то X является Δ-тучным (-бэровским).*

(2) *Если X является $\Gamma_{p,l}^{\widehat{OD}}$-тучным (-бэровским), то X является Δ_h-тучным (-бэровским).*

(3) *Если X является $\Gamma_{f}^{\widehat{BM}}$-тучным (-бэровским), то X является Δ_s-тучным (-бэровским).*

Доказательство. Доказательства будем проводить от противного с использованием предложения 3.4.4. Доказательство проведем для обобщений тучных пространств, для обобщений беровости доказательство такое же, только дополнительно обеспечиваем при построении что $V_0 = \varphi(X)$ не является обобщенно тучным.

(1) Предположим, что X не является Δ-тучным. Тогда существует почти окрестность диагонали $P \in \mathfrak{S}(X)$, так что $P|_U \notin \mathfrak{Q}_d(U)$ для любого $U \in \mathcal{T}^*$. Определим $(\varphi, \psi) \in T_{OD}(X, \mathcal{N}_o(X))$. Напомним, $\mathcal{N}_o(X) = \mathcal{T}^*$. Пусть $U \in \mathcal{T}^*$. Так как $P|_U \notin \mathfrak{Q}_d(U)$ то, в силу предложения 3.7.1, существует такое $V \subset U$,

$V \in \mathcal{T}^*$, что $U \not\subset \overline{P(V)}$. Положим $\varphi(U) = V$ и $\psi(U) = M$, где $M = U \setminus \overline{P(V)}$. Отметим, $M \cap P(V) = \varnothing$. Отображения φ и ψ построены. В силу предложения 3.4.4, существует $(U_n)_{n\in\omega} \in \mathfrak{V}(X)$, так что

(a) $V_n = \varphi(U_n)$, $M_n = \psi(U_n)$, $U_{n+1} \subset V_n$ для $n \in \omega$;

(b) $(V_n, M_n)_{n\in\omega} \in \mathfrak{W}_l(X)$, то есть $\overline{\mathrm{lt}}_{n\in\omega} M_n \cap \bigcap_{n\in\omega} V_n \neq \varnothing$.

Из построения ψ вытекает

(c) $M_n \cap P(V_n) = \varnothing$ для любого $n \in \omega$.

Пусть $x_* \in \overline{\mathrm{lt}}_{n\in\omega} M_n \cap \bigcap_{n\in\omega} V_n$. Тогда $M_n \cap P(x_*) \neq \varnothing$ для некоторого $n \in \omega$. Получаем $M_n \cap P(V_n) \neq \varnothing$. Противоречие с (c).

(2) Предположим, что X не является Δ_h-тучным. Тогда существует почти окрестность диагонали $P \in \mathfrak{S}(X)$, так что $P|_U \notin \mathfrak{Q}_h(U)$ для любого $U \in \mathcal{T}^*$. Определим $(\varphi, \psi) \in T_{OD}(X, \mathcal{N}_p(X))$. Напомним, $\mathcal{N}_p(X) = \{\{x\} : x \in X\}$. Пусть $U \in \mathcal{T}^*$. Так как $P|_U \notin \mathfrak{Q}_h(U)$ то, в силу предложения 3.7.1, существует такое $V \subset U$, $V \in \mathcal{T}^*$, что $U \not\subset P(V)$. Положим $\varphi(U) = V$ и $\psi(U) = \{x\}$, где $x \in U \setminus P(V)$. Отметим, $x \notin P(V)$. Отображения φ и ψ построены. В силу предложения 3.4.4, существует $(U_n)_{n\in\omega} \in \mathfrak{V}(X)$, так что

(a) $V_n = \varphi(U_n)$, $\{x_n\} = \psi(U_n)$, $U_{n+1} \subset V_n$ для $n \in \omega$;

(b) $(V_n, \{x_n\})_{n\in\omega} \in \mathfrak{W}_l(X)$, то есть $\overline{\mathrm{lt}}_{n\in\omega} x_n \cap \bigcap_{n\in\omega} V_n \neq \varnothing$.

Из построения ψ вытекает

(c) $x_n \notin P(V_n)$ для любого $n \in \omega$.

Пусть $x_* \in \overline{\mathrm{lt}}_{n\in\omega} x_n \cap \bigcap_{n\in\omega} V_n$. Тогда $x_n \in P(x_*)$ для некоторого $n \in \omega$. Получаем $x_n \in P(V_n)$. Противоречие с (c).

(3) Предположим, что X не является Δ_s-тучным. Тогда существует почти окрестность диагонали $P \in \mathfrak{S}(X)$, так что $P|_U \notin \mathfrak{Q}_h(U)$ для любого $U \in \mathcal{T}^*$. Определим $\varphi \in T_{BM}(X)$. Пусть $U \in \mathcal{T}^*$. Так как $P|_U \notin \mathfrak{Q}_s(U)$ то, в силу предложения 3.7.1, существует такое $V \subset U$, $V \in \mathcal{T}^*$, что $U \not\subset P(x)$ для любого $x \in V$. Положим $\varphi(U) = V$. Отображение $\varphi : \mathcal{T}^* \to \mathcal{T}^*$ построено. В силу предложения 3.4.4, существует $(U_n)_{n\in\omega} \in \mathfrak{V}(X)$, так что

(a) $V_n = \varphi(U_n)$, $U_{n+1} \subset V_n$ для $n \in \omega$;

(b) $(V_n)_{n\in\omega} \in \mathfrak{V}_f(X)$, то есть $\bigcap_{n\in\omega} V_n \neq \varnothing$ и семейство $(V_n)_{n\in\omega}$ является базой некоторой точки $x_* \in \bigcap_{n\in\omega} V_n$.

Из построения φ вытекает

(c) $U_n \not\subset P(x)$ для любого $n \in \omega$ и $x \in V_n$.

Отметим, что семейство $(U_n)_{n\in\omega}$ также является базой точки x_*. Существует такое $n\in\omega$ что $U_n\subset P(x_*)$. Так как $x_*\in V_n$, то получаем противоречие с (c). $\square$

Из предложений 3.10.1, 3.8.12, 3.4.3, 3.3.1 и теорем 3.14, 3.15 вытекает

Теорема 3.28. *Пусть X пространство. В диаграмме ниже, стрелка*

$$A\to B$$

означает, что

(1) *Если X является A-тучным пространством, то X является B-тучным пространством;*

(2) *если X является A-бэровским пространством, то X является B-бэровским пространством.*

$$\begin{array}{ccccc}
\Gamma_f^{BM} & \longrightarrow & \Gamma_f^{\widehat{BM}} & \longrightarrow & \Delta_s \\
\downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\
\Gamma_{p,l}^{OD} & \longrightarrow & \Gamma_{p,l}^{\widehat{OD}} & \longrightarrow & \Delta_h \\
\downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\
\Gamma_{o,l}^{OD} & \longrightarrow & \Gamma_{o,l}^{\widehat{OD}} & \longrightarrow & \Delta
\end{array}$$

Пусть $\mathcal{P}_k$ ($\mathcal{P}_c$) есть наименьший класс пространств, который

- *содержит p-пространства и сильно Σ-пространства;*
- *замкнут относительно произвольных (счетных) произведений;*
- *переходу к открытым подпространствам.*

Для $\widetilde{\Delta}\in\{\Delta_s,\Delta_h,\Delta\}$, если регулярное бэровское (тучное) пространство X принадлежит классу пространств, описанных в пункте $(\widetilde{\Delta})$, то X является $\widetilde{\Delta}$-бэровским ($\widetilde{\Delta}$-тучным).

(Δ_s) *σ-пространства.*

(Δ_h) *наименьший класс пространств, который*

- *содержит Σ-пространства и $w\Delta$-пространства;*

– *замкнут относительно произведений на пространства из класса $\mathcal{P}_c$;*
– *переходу к открытым подпространствам.*

(Δ) *наименьший класс пространств, который*

- *содержит Σ-пространства, $w\Delta$-пространства и слабо компактные пространства;*
- *замкнут относительно произведений на пространства из класса $\mathcal{P}_k$;*
- *переходу к открытым подпространствам.*

3.11 CDP-бэровские пространства

Пусть X пространство, $\mathcal{G}$ семейство открытых подмножеств X. Обозначим

$$\begin{aligned}
B(X,\mathcal{G}) \coloneqq \{x \in X :\ & \text{семейство} \\
& \{\operatorname{st}(x,\gamma)\ :\ \gamma \in \mathcal{G} \text{ и } x \in \bigcup \gamma\} \\
& \text{является базой в точке } x\} \\
\operatorname{dev}(X) \coloneqq \min\{\, |\mathcal{G}| :\ & \mathcal{G} \text{ семейство открытое покрытие } X \\
& \text{и } X = B(X,\mathcal{G}),\}.
\end{aligned}$$

Пусть $Y \subset X$, $\mathcal{N}$ есть семейство всех нигде не плотных подмножеств X. Если $Y \not\subset \bigcup \mathcal{N}$, то положим $\operatorname{Nov}(Y,X) \coloneqq \infty$, в противном случае

$$\begin{aligned}
\operatorname{Nov}(Y,X) &\coloneqq \min\{|\mathcal{L}|\ :\ \mathcal{L} \subset \mathcal{N} \text{ и } Y \subset \bigcup \mathcal{L}\}, \\
\operatorname{Nov}(X) &\coloneqq \operatorname{Nov}(X,X).
\end{aligned}$$

Определение 3.29. Пусть X пространство.

- Назовем пространство *CDP-пространством*, если $\operatorname{dev}(X) < \operatorname{Nov}(X)$, то есть если существует семейство $\mathcal{P}$ открытых покрытий пространства X, так что $|\mathcal{P}| < \operatorname{Nov}(X)$ и $B(X,\mathcal{P}) = X$.
- Назовем пространство *CDP$_0$-пространством*, если существует семейство $\mathcal{P}$ открытых разбиений пространства X, так что $|\mathcal{P}| < \operatorname{Nov}(X)$ и $B(X,\mathcal{P}) = X$.
- Назовем пространство X *CDP-тучным*, если существует семейство $\mathcal{G}$ открытых семейств пространства X, так что $|\mathcal{G}| < \operatorname{Nov}(Y,X)$ для $Y = B(X,\mathcal{P})$.

- Назовем пространство X *CDP-бэровским*, если каждое непустое открытое подмножество X является CDP-тучным пространством.

В статье [35] изучают пространства, для которых $\operatorname{dev}(X) < \operatorname{Nov}(X)$, то есть CDP-пространства. Метризуемые тучные пространства являются CDP-пространствами. Примеры неметризуемых CDP-пространств можно получить используя аксиому Мартина (MA).

Напомним топологическую характеристику утверждения $MA(\tau)$:

$MA(\tau)$ если X есть компактное хаусдорфово пространство со счетным числом Суслина, то X нельзя представить в виде объединения не более τ нигде не плотных множеств (т.е. $\operatorname{Nov}(X) > \tau$).

Аксиома Мартина (MA): для всех $\tau < 2^\omega$, выполняется $MA(\tau)$.

Если X есть G_τ подмножества пространства Y с $\operatorname{Nov}(Y) > \tau$, то $\operatorname{Nov}(X) > \tau$. Поэтому верно следующее утверждение.

Предложение 3.11.1. *($MA(\tau)$) Если X есть абсолютное G_τ пространство со счетным числом Суслина, то* $\operatorname{Nov}(X) > \tau$.

Из предложения 3.11.1 вытекает следующее утверждение.

Предложение 3.11.2 (Theorem 2.3 [119]). *(MA) Пусть $\tau < 2^\omega$ бесконечный кардинал, X есть абсолютное G_τ пространство со счетным числом Суслина. Тогда* $\operatorname{Nov}(X) \geq 2^\omega$.

Из предложения 3.11.2 вытекает

Предложение 3.11.3. *(MA) Пусть $\tau < 2^\omega$ бесконечный кардинал, X есть абсолютное G_τ пространство со счетным числом Суслина и* $\operatorname{dev}(X) \leq \tau$, *например $X = \mathbb{R}^\tau$. Тогда X является CDP-пространством.*

Из предложения 3.11.1 вытекает более точная форма предложения 3.11.3.

Предложение 3.11.4. *($MA(\tau)$) Пусть X есть абсолютное G_τ пространство со счетным числом Суслина и* $\operatorname{dev}(X) \leq \tau$. *Тогда X является CDP-пространством.*

Следствие 3.30. *($MA(\tau)$) Пусть X есть компактное хаусдорфово пространство со счетным числом Суслина и $w(X) \leq \tau$. Тогда X является CDP-пространством.*

Ясно, CDP-пространство является CDP_0-пространством.

Предложение 3.11.5. *Пусть X есть CDP-тучное пространство.*

(1) *Тогда некоторое непустое открытое подмножество $U \subset X$ содержит плотное CDP_0-пространство $Y \subset U \subset \overline{Y}$.*

(2) *Если X является π-полурегулярным пространством, то U и Y можно выбрать таким образом, что X полу регулярно в каждой точке из Y.*

Доказательство. Пусть $\mathcal{G} = \{\gamma_\alpha : \alpha < \tau\}$ есть такое семейство открытых семейств пространства X, так что $\tau = |\mathcal{G}| < \mathrm{Nov}(S, X)$ для $S = B(X, \mathcal{G})$.

Пусть $\alpha < \tau$. Существует открытое дизъюнктивное семейство ν_α, так что

- если $U \in \nu_\alpha$ и $U \cap \bigcup \gamma_\alpha \neq \varnothing$, то $U \subset V$ для некоторого $V \in \gamma_\alpha$;
- $\overline{\bigcup \nu_\alpha} = X$.

Если X является π-полурегулярным пространством, то дополнительно можно обеспечить условие

- семейство ν_α состоит из канонически замкнутых множеств.

Пусть $G_\alpha = \bigcup \nu_\alpha$ и $F_\alpha = X \setminus G_\alpha$. Множество F_α нигде не плотно в X.

Положим $\mathcal{V} = \{\nu_\alpha : \alpha < \tau\}$, $G = \bigcap\{G_\alpha : \alpha < \tau\}$, $F = \bigcup\{F_\alpha : \alpha < \tau\}$,

$$Z = G \cap B(X, \mathcal{V}).$$

Тогда $S \setminus F \subset Z$ и $\mathrm{Nov}(Z, X) \geq \mathrm{Nov}(Y, X) > \tau$. Положим $U = \mathrm{Int}\,\overline{Z}$. Так как $\mathrm{Nov}(Z, X)$ несчетно, то $U \neq \varnothing$. Положим $Y = Z \cap U$. Пространство Y является CDP_0-пространством, $Y \subset U \subset \overline{Y}$. Если семейства ν_α состояли из канонически замкнутых множеств, то X полурегулрно в каждой точке из Y. □

Предложение 3.11.6. *Пусть X есть пространство, U открытое подмножество X, $Y \subset U \subset \overline{Y} \subset X$. Если Y CDP-бэровское и X полурегулярно в точках из Y, то X CDP-тучное.*

Доказательство. Возьмем семейство $\mathcal{P}$ открытых в Y покрытий пространства Y, так что $|\mathcal{P}| < \mathrm{Nov}(Y)$ и $B(Y, \mathcal{P}) = Y$. Для $\gamma \in \mathcal{P}$ положим $\tilde{\gamma} = \{\mathrm{Int}\,\overline{V} : V \in \gamma\}$. Положим $\widetilde{\mathcal{P}} = \{\tilde{\gamma} : \gamma \in \mathcal{P}\}$. Тогда $Y \subset \widetilde{Y} = B(X, \widetilde{\mathcal{P}})$ и $|\widetilde{\mathcal{P}}| < \mathrm{Nov}(Y) \leq \mathrm{Nov}(\widetilde{Y}, X)$. □

Из предложений 3.11.5 и 3.11.6 вытекает

Теорема 3.31. *Пусть X есть полурегулярное пространство. Следующие условия эквивалентны*

(1) *X есть CDP-бэровское пространство;*

(2) *некоторое непустое открытое подмножество $U \subset X$ содержит плотное CDP-пространство $Y \subset U \subset \overline{Y}$;*

(2) *некоторое непустое открытое подмножество* $U \subset X$ *содержит плотное* CDP_0*-пространство* $Y \subset U \subset \overline{Y}$;

Из теоремы 3.31 вытекает

Предложение 3.11.7. *Пусть* X *есть полурегулярное пространство. Если в* X *есть метризуемое тучное подпространство, то* X *CDP-тучное пространство.*

3.12 Δ_s-бэровские пространства

Из теоремы 3.28 вытекает, что Γ_f^{BM}-бэровское (-тучное) пространство является Δ_s-бэровским (-тучным) пространством. Предложение 3.3.1 и теорема 3.14 дают следующие примеры Γ_f^{BM}-бэровских (-тучных) пространств; бэровские (тучные) пространства из перечисленных ниже классов пространств являются Γ_f^{BM}-бэровскими (-тучными):

> метризуемые пространства, моровские пространства, разлагаемое пространство, полурегулярные σ-пространства и полурегулярные пространства со счетной сетью.

Предложение 3.12.1. *Пусть* X *есть пространство. Если* X *является CDP-тучным (бэровским), то* X *является* Δ_s*-тучным (бэровским).*

Доказательство. Докажем предложения для случая когда X является CDP-тучным. Пусть $\mathcal{G}$ есть такое семейство открытых семейств пространства X, так что $|\mathcal{G}| < \mathrm{Nov}(Y, X)$ для $Y = B(X, \mathcal{G})$. Пусть $P \in \mathfrak{S}(X)$ есть почти окрестность диагонали $X \times X$. Для каждого $y \in Y$ существует $\gamma_y \in \mathcal{G}$ так что $\mathrm{st}(y, \gamma_y) \subset P(y)$. Положим $Y_\gamma = \{y \in Y \,:\, \gamma_y = \gamma\}$. Так как $|\mathcal{G}| < \mathrm{Nov}(Y, X)$ то Y'_γ не является нигде не плотным для некоторого $\gamma' \in \mathcal{G}$. Выберем $y' \in V \cap Y$, где $V = \mathrm{Int}(\overline{Y_{\gamma'}})$. Пусть $W \in \mathrm{St}(y', \gamma')$. Положим $U = W \cap V$ и $M = U \cap Y$. Тогда M плотно в U и для $y \in M$ выполняется

$$U \subset W \subset \mathrm{st}(y, \gamma') \subset P(y).$$

Следовательно, $M \times U \subset P$. □

Примеры Δ_s-тучных пространств, которые получаются из Γ_f^{BM}-тучных пространств, всегда содержат точки с первой аксиомой счетности. Из предложений 3.12.1 и 3.11.3 вытекает что в предположении MA+¬CH пространство $\mathbb{R}^{\omega_1}$ является Δ_s-тучным.

3.13 Примеры

В этом разделе мы изучаем насколько различны введенные классы пространств.

На следующей диаграмме отображается взаимоотношение наиболее интересных классов пространств.

Любая стрелка A ... $\to B$ означает что любое A-бэровское пространство является B-бэровским пространством. Дополнительно, стрелка $A \longrightarrow B$ означает, что обратное утверждение не верно; стрелка $A \dashrightarrow B$ означает, что неизвестно, обратное утверждение верно или нет; стрелка $A \succ\!\dashrightarrow B$ означает, что есть контрпример для обратного утверждения в предположении дополнительных аксиом теории множеств ZFC.

Диаграмма вытекает из предложений 3.2.9 и 3.12.1 и теоремы 3.28. Контрпримеры будут построены ниже.

$$
\begin{tikzcd}
\Gamma_o^{BM} \arrow[ddr] & & \Gamma_p^{BM} \arrow[ll] \arrow[dd] & \Gamma_k^{BM} \arrow[l] \arrow[d] & \\
\Gamma_{o,k}^{OD} \arrow[dr] & & & \Gamma_{p,k}^{OD} \arrow[lll] \arrow[dl] & \\
& \Gamma_{o,l}^{OD} \arrow[d, dashed] & \Gamma_{p,l}^{OD} \arrow[l] \arrow[d, dashed] & & \Gamma_f^{BM} \arrow[uul] \arrow[dl, dashed, tail] \\
& \Delta & \Delta_h \arrow[l] & \Delta_s \arrow[l] & \mathrm{CDP} \arrow[l, dashed]
\end{tikzcd}
$$

Обозначим через $\mathbb{D}$ дискретное двоеточии $\{0,1\}$. Базу топологии в $\mathbb{D}^C$ образуют множества вида

$$W(A,B,C) \coloneqq \{(x_\alpha)_{\alpha\in C} \in \mathbb{D}^C \,:\, x_\alpha = 0 \text{ для } \alpha \in A \text{ и } x_\beta = 1 \text{ для } \beta \in B\}$$

для конечных непересекающихся $A, B \subset C$.

Из предложений 3.3.1, 3.2.7 и теорем 3.14, 3.15 вытекает

Утверждение 3.13.1. *Пусть X регулярное пространство без изолированных точек.*

(1) *Если X компактно, то X Γ_k^{BM}-бэровское.*

(2) *Если X $\Gamma_{o,k}^{OD}$-тучное, то X содержит бесконечный компакт.*

(3) *Если X счетно компактно, то X Γ_p^{BM}-бэровское.*

(4) *Если X $\Gamma_{p,l}^{OD}$-тучное, то X содержит не дискретное счетное пространство.*

(5) *Если X псевдокомпактно, то X Γ_o^{BM}-бэровское.*

(6) *Если X Γ_f^{BM}-тучное, то X содержит точки со счетной базой.*

(7) *Если X Γ_o^{BM}-тучное, то X содержит q_o-точки.*

(8) *Если X есть произведение локально компактных пространств (например, $X = \mathbb{R}^\tau$), то X $\Gamma_{p,k}^{OD}$-бэровское.*

Предложение 3.13.2 (Theorem 4 [66]). *Пусть X есть пространство, такое что X^ω есть псевдокомпактное пространство. Пусть H есть такая абелева группа что $|X| \leq |H| = |H|^\omega$. Тогда существует полутопологическая группа G, так что G^ω есть псевдокомпактное пространство, G непрерывно отображается на X и существует гомоморфизм $H \to G$.*

Напомним, группа называется *булевой* если в ней выполняется тождество $g^2 = e$. В булевой группе взятие обратного элемента является тождественной операцией. Полутопологическая булева группа является квазитопологической группой. Пусть H булева группа, для которой $|X| \leq |H| = |H|^\omega$. Тогда из предложения 3.13.2 получаем следующее следствие.

Следствие 3.32. *Пусть X есть пространство, такое что X^ω есть псевдокомпактное пространство. Тогда существует квазитопологическая булева группа G, так что G^ω есть псевдокомпактное пространство, G непрерывно отображается на X.*

Пусть X есть компакт с несчетным числом Суслина. Тогда из следствия 3.32 получаем следующее следствие.

Следствие 3.33. *Существует псевдокомпактная булева квазитопологическая группа G с несчетным числом Суслина, такая что G^ω псевдокомпактно.*

У псевдокомпактных топологических групп счетное число Суслина, следовательно, из следствия 3.33 вытекает следующее утверждение.

Следствие 3.34 (А.Коровин). *Существует псевдокомпактная булева квазитопологическая группа, которая не является топологической группой.*

Предложение 3.13.3 ([17]). *Для кардинала τ, для которого $\tau = \tau^\omega$, существует псевдокомпактное пространство X, для которого $|X| = \tau$ и $M \subset X$ дискретно и замкнуто, если $|M| < \tau$.*

Доказательство. Пусть $I = [0,1]$, Q есть все функции в I, область определения которых счетна и лежит в τ^2. Тогда $|Q| = \tau$, занумеруем $Q = \{q_t : t < \tau\}$. Пусть B_t есть область определения q_t. Определим функцию $f_t : \tau^2 \to I$:

$f_t(x,y) = q_t(x,y)$ если $(x,y) \in B_t$; $f_t(x,y) = 1$ если $x = t$ и $(x,y) \notin B_t$; $f_t(x,y) = 0$ в остальных случаях. Положим $X = \{f_t : t \in I\}$. Пространство X заполняет счетные грани $\left(\tau^2\right)^I$, поэтому оно псевдокомпактно [82]. Пусть $M \subset \tau$, $|M| < \tau$, $t \in \tau \setminus M$. Возьмем $y < \tau$ таким образом, что $(t,x) \notin B_t$ и $(t,x) \notin B_q$ для $q \in M$. Тогда $f_t(t,y) = 1$ и $f_q(t,y) = 0$ для $q \in M$. Следовательно, $f_t \notin \overline{\{f_q : q \in M\}}$. □

Приведем примеры, которые различают перечисленные классы пространств. В примерах ниже запись $A \nrightarrow B$: X означает что X является A-бэровским пространством, которое не является B-тучным.

Пример 3.35. $\Gamma_o^{BM} \nrightarrow \Gamma_{p,l}^{OD}$: X_p. Пусть X_p есть пространство из предложения 3.13.3 для $\tau = 2^\omega$ — бесконечное псевдокомпактное пространство без изолированных точек, в котором все счетные подмножества дискретны и замкнуты. Утверждение 3.13.1 (5) и (4).

Пример 3.36. $\Gamma_p^{BM} \nrightarrow \Gamma_{o,k}^{OD}$: X_c. Пусть X_c есть бесконечное счетно компактное пространство без изолированных точек, которое не содержит бесконечных компактов, например $X_c = X \setminus \omega$, где X счетно компактное плотное подпространство $\beta\omega$ мощности 2^ω (Предложение 16 [7]). Утверждение 3.13.1 (3) и (2).

Пример 3.37. $\Gamma_k^{BM} \nrightarrow \Gamma_f^{BM}$: $\mathbb{D}^{\omega_1}$. Пространство $\mathbb{D}^{\omega_1}$ есть компакт без точек с первой аксиомой счетности (Утверждение 3.13.1 (1) и (6)).

Пример 3.38. $\Gamma_{p,k}^{OD} \nrightarrow \Gamma_o^{BM}$: $\mathbb{R}^{\omega_1}$. Утверждение 3.13.1 (8) и (7).

Пример 3.39. $\Gamma_{o,k}^{OD} \nrightarrow \Gamma_{p,k}^{OD}$: Y. Положим

$$
\begin{aligned}
Y_0 &= \{(x_\alpha)_{\alpha<\omega_1} \in \mathbb{D}^{\omega_1} : |\{\alpha < \omega_1 : x_\alpha = 0\}| \le \omega\},\\
Y_1 &= \{(x_\alpha)_{\alpha<\omega_1} \in \mathbb{D}^{\omega_1} : |\{\alpha < \omega_1 : x_\alpha = 1\}| < \omega\},\\
Y &= Y_0 \cup Y_1.
\end{aligned}
$$

Покажем, что $OD_{o,k}(Y)$ α-благоприятно, предъявим выигрышную стратегию для α. Выберем U_n таким образом, что $\overline{U_n} \subset V_{n-1}$. Пусть $x_n \in M_n \cap Y_0$. Тогда $K = \overline{\{x_n : n < \omega\}}$ компактно.

Покажем, что $DO_{p,k}(Y)$ β-благоприятно, предъявим выигрышную стратегию для β. Выберем $V_n = W(A_n, B_n, \omega_1)$ таким образом, что $A_n \subset A_{n-1}$, $B_n \subset B_{n-1}$ и $|A_n| \ge n$, $x_n \in V_n \cap Y_1$, $M_n = \{x_n\}$. Тогда $(x_n)_{n\in\omega}$ дискретная и замкнутая последовательность в Y.

Пример 3.40. CDP $\nrightarrow \Gamma_f^{BM}$: $\mathbb{R}^{\omega_1}$ (в предположение MA+$\neg$CH). Утверждение 3.13.1 (7) и предложение 3.11.3.

Пример 3.41. $\Delta_s \nrightarrow \Gamma_k^{BM}$: $\mathbb{D}^{2^\omega}$. Обозначим $X = \mathbb{D}^{2^\omega}$. Пространство X является Γ_k^{BM}-бэровским (утверждение 3.13.1 (1)). Покажем, что X не является Δ_s-тучным. Существует покрытие $\{F_\alpha : \alpha < 2^\omega\}$ пространства X мощности 2^ω, состоящее из нигде ни плотных замкнутых множеств. Зафиксируем $\alpha_x < 2^\omega$ для $x \in X$ таким образом что $x \in F_{\alpha_x}$. Положим $\tilde{x} = (\tilde{x}_\alpha)_{\alpha \in 2^\omega}$, где $\tilde{x}_\alpha = x_\alpha$ для $\alpha \neq \alpha_x$ и $\tilde{x}_{\alpha_x} \neq x_{\alpha_x}$. Определим почти окрестность P диагонали $X \times X$, для $x \in X$ положим $P(x) = X \setminus \{\tilde{x}\}$. Покажем, что $P|_V \notin \mathfrak{Q}_s(V)$ для любого открытого непустого $V \subset X$. Пусть $U = W(A, B, 2^\omega) \subset V$ для некоторых конечных непересекающихся $A, B \subset 2^\omega$. Положим

$$W = V \setminus \bigcup_{\alpha \in A \cup B} F_\alpha.$$

Тогда W плотно и открыто в U и $\tilde{x} \in U$ для $x \in W$. Следовательно

$$M = \{x \in U : U \subset P(x)\} \cap W = \varnothing$$

и множество M нигде не плотно в U.

Пример 3.42. $\Gamma_o^{BM} \nrightarrow \Delta_h$: G. Пусть G есть псевдокомпактная булева квазитопологическая группа, которая не является топологической группой (Следствие 3.34). Пространство G является Γ_o^{BM}-бэровским пространством. Из теоремы 4.31, что G не является Δ_h-тучным пространством.

Задача 3.43. (1) Существует ли Δ-бэровское не $\Gamma_{o,l}^{OD}$-тучное пространство? (2) Существует ли Δ_h-бэровское не $\Gamma_{p,l}^{OD}$-тучное пространство? (3) Существует ли Δ_s-бэровское не CDP-тучное пространство? (4) Существует ли наивный пример Δ_s-бэровского не Γ_f^{BM}-тучного пространства? (5) Существует ли наивный пример CDP-пространства без точек с первой аксиомой счетности?

Задача 3.44. Пусть $\Gamma \in \{\Gamma_r^{BM} : r \in \{f, k, p, o\}\} \cup \{\Gamma_{t,q}^{OD} : t \in \{o, p\}$ и $q \in \{l, k\}\}$.

(1) Выяснить, существуют ли Γ-бэровское пространство, которое не является Γ-пространством.

(2) Будет ли класс Γ-пространств мультипликативен, то есть если $X, Y \in \Gamma$, то $X \times Y \in \Gamma$?

(3) Пусть X, Y есть Γ-бэровские пространства и $X \times Y$ бэровское пространство. Верно ли, что $X \times Y$ является Γ-бэровским пространством?

Задача 3.45. Пусть $\Gamma \in \{\Gamma_r^{BM} : r \in \{f, k, p, o\}\} \cup \{\Gamma_{t,q}^{OD} : t \in \{o, p\}$ и $q \in \{l, k\}\}$.

(1) Выяснить, существуют ли Γ-бэровское пространство, которое не является Γ-пространством.

(2) Будет ли класс Γ-пространств мультипликативен, то есть если $X, Y \in \Gamma$, то $X \times Y \in \Gamma$?

(3) Пусть X, Y есть Γ-бэровские пространства и $X \times Y$ бэровское пространство. Верно ли, что $X \times Y$ является Γ-бэровским пространством?

Самым маленьким классом пространств из перечисленных это Γ_f^{BM}-пространства, самый большой, $\Gamma_{o,l}^{OD}$-пространства.

Задача 3.46. Пусть X есть регулярное Γ_f^{BM}-бэровское пространство.

(1) Верно ли, что X является Γ_f^{BM}-пространством и содержит плотное метризуемое бэровское подпространство?

(2) Верно ли, что X является $\Gamma_{o,l}^{OD}$-пространством?

Пространство X называется *слабо псевдокомпактным* если существует компактное хаусдорфово расширение bX пространства X, в котором пространство X G_δ-плотно, то есть X пересекается с любым непустым G_δ подмножеством bX [9]. Ясно, произведение слабо псевдокомпактных пространств слабо псевдокомпактно, в частности, произведение псевдокомпактных пространств слабо псевдокомпактно.

Следующий вопрос является версией вопроса 3.44, пункты (2) и (3).

Задача 3.47. Пусть X есть слабо псевдокомпактное пространство (X есть произведение псевдокомпактных пространств). Каким из перечисленных классов принадлежит X:

> Γ_o^{BM}-пространства, Γ_o^{BM}-бэровские пространства, $\Gamma_{o,l}^{OD}$-пространства, $\Gamma_{o,l}^{OD}$-бэровские пространства, Δ-бэровские пространства?

Паратопологическая регулярная Δ-тучная группа является топологической группой (Теоремы 4.26 и 4.29).

Задача 3.48. Пусть G есть слабо псевдокомпактное (произведение псевдокомпактных пространств) паратопологическая группа. Верно ли что G является топологической группой?

Задача 3.49. Пусть X и Y есть (вполне) регулярные счетно компактные пространства. Каким из перечисленных классов принадлежит произведение $X \times Y$:

> Γ_p^{BM}-пространства, Γ_p^{BM}-бэровские пространства, $\Gamma_{p,l}^{OD}$-пространства, $\Gamma_{p,l}^{OD}$-бэровские пространства, Γ_o^{BM}-пространства, Γ_o^{BM}-бэровские пространства, $\Gamma_{o,l}^{OD}$-пространства, $\Gamma_{o,l}^{OD}$-бэровские пространства, Δ_h-бэровские пространства, Δ-бэровские пространства?

Глава 4

Непрерывность операций в группах и мальцевских пространствах

4.1 Разновидности непрерывности в группах

Лемма 4.1.1. *Пусть G есть право полутопологическая группа, $M \subset G$, $W \in \mathcal{N}_e$. Тогда $\overline{M} \subset W^{-1}M$.*

Доказательство. Пусть $x \in \overline{M}$. Тогда $Wx \cap M \neq \varnothing$. Следовательно, $x \in W^{-1}M$. □

Предложение 4.1.2. *Далее $(A) \to (B)$ означает, что $O(A)$-топологическая группа является $O(B)$-топологической группой а $(A) \leftrightarrow (B)$ означает, что G является $O(A)$-топологической группой тогда и только тогда, когда G является $O(B)$-топологической группой.*

$$(p,i) \leftrightarrow (t) \qquad (l,r) \leftrightarrow (s) \qquad (s,pe) \leftrightarrow (p) \qquad (s,ie) \leftrightarrow (s,i)$$
$$(l,i) \leftrightarrow (r,i) \leftrightarrow (s,i)$$
$$(p) \to (s) \qquad (p) \to (pe) \to (sqpe) \qquad (i) \to (ie) \to (fie)$$
$$(l) \to (fl) \to (dfl)$$
$$(ie) \to (nie) \to (sie) \qquad (ie) \to (qie) \to (sie) \qquad (qie) \to (fie)$$
$$(dfl^*, fie, r) \to (fl, fi) \qquad (dfl^*, fpe, r) \to (sqpe)$$
$$(pe, sie, r) \to (ie) \qquad (p, sie) \to (t) \qquad (dfl^*, ie, pe, r) \to (t)$$

Доказательство. Большинство этих утверждений либо тривиальны, либо широко известны (см. [35] и [36]). Докажем новые нетривиальные утверждения.

$(pe, sie, r) \to (ie)$. Пусть $V \in \mathcal{N}_e$. Так как G $O(pe)$-топологическая группа, то $U^3 \subset V$ для некоторого $U \in \mathcal{N}_e$. Положим $S = U \cap U^{-1}$. Так как G $O(sie)$-топологическая группа, то $\operatorname{Int} \overline{S} \neq \varnothing$. Нам надо показать, $e \in \operatorname{Int} V^{-1}$. Пусть $s \in S \cap \operatorname{Int} \overline{S}$. Из леммы 4.1.1 вытекает, что $\overline{S} \subset U^{-1}S$. Следовательно, $s \in \operatorname{Int} U^{-1}S$. Так как $s^{-1} \in S$, то $e \in \operatorname{Int} U^{-1}SS$. Так как $S \subset U^{-1}$, то $e \in \operatorname{Int}(U^{-1})^3 \subset V^{-1}$.

$(p, sie) \to (t)$. Теорема 2.3 из [35], Лемма 1.2 из [9]. Вытекает из $(pe, sie, r) \to (ie)$.

$(dfl^*, fie, r) \to (fl, fi)$. Покажем, что $(dfl^*, fie, r) \to (fi)$. Пусть $U \in \mathcal{T}^*$. Возьмем $g \in \Lambda^*_f(G) \cap U$. Из

$$U^{-1} = g^{-1}(Ug^{-1})^{-1}$$

следует, что $\operatorname{Int} U^{-1} \neq \varnothing$. Покажем (fl). Имеем $hU = (U^{-1}h^{-1})^{-1}$ для любого $h \in G$. Так как (fi, r), то $\operatorname{Int} hU \neq \varnothing$.

$(dfl^*, ie, pe, r) \to (t)$. Из предыдущего пункта следует, что G является $O(fl)$-топологической группой. В силу $(s, pe) \leftrightarrow (p)$ и $(s, ie) \leftrightarrow (s, i)$, достаточно доказать, что G является $O(l)$-топологической группой. Пусть $g \in G$ и $U \in \mathcal{T}^*$. Вам нужно проверить, что gU открыт. Пусть $q \in U$. Достаточно проверить, что $gq \in \operatorname{Int} gU$, что эквивалентно $g \in \operatorname{Int} gV$, где $V = Uq^{-1} \in \mathcal{N}_e$. Существует $W \in \mathcal{N}_e$, для которого $WW^{-1} \subset V$. Пусть $s \in \operatorname{Int} gW$ и $w = g^{-1}s \in W$. Существует $S \in \mathcal{N}_e$, поэтому $Ss \subset gW$. Тогда $s = gw$, $g = sw^{-1}$ и

$$Sg = Ssw^{-1} \subset gWw^{-1} \subset gWW^{-1} \subset gV.$$

Следовательно, $g \in \operatorname{Int} gV$.

$(dfl^*, fpe, r) \to (sqpe)$. Пусть $U \in \mathcal{N}_e$. Тогда $WVx \subset U$ для некоторых $x \in G$, $W \in \mathcal{T}^*$ и $V \in \mathcal{N}_e$. Пусть $y \in \Lambda^*_f(G) \cap W$. Тогда $Sy \subset W$ для некоторого $S \in \mathcal{N}_e$. Для некоторых $z \in \operatorname{Int} yV$ и $Q \in \mathcal{N}_e$ $Qz \subset yV$. Получаем $SQzx \subset U$. □

4.2 Непрерывность операций в псевдокомпактных группах и мальцевских пространствах

Теорема 4.1. *Пусть G есть псевдокомпактная группа с топологией, X — пространство, $\alpha : G \times X \to X$ есть раздельно непрерывное транзитивное действие G на X, $gx = \alpha(g, x)$ для $g \in G$ и $x \in X$. Следующие условия эквивалентны:*

(1) действие α непрерывно;

(2) действие α квазинепрерывно;

(3) действие α продолжается до раздельно непрерывного отображения $\hat\alpha : \beta G \times \beta X \to \beta X$;

(4) действие α продолжается до непрерывного отображения $\hat\alpha : \beta G \times \beta X \to \beta X$.

Доказательство. Пространство X псевдокомпактно, как непрерывный образ G, при отображение $G \to X,\ g \mapsto gx$, где $x \in X$.

Очевидно, (4) $\Rightarrow$ (3), (4) $\Rightarrow$ (1) $\Rightarrow$ (2). Из следствия 2.19 вытекает (2) $\Leftrightarrow$ (3).

Докажем (3) $\Rightarrow$ (4). Для непрерывности отображения $\hat{\alpha}$ достаточно проверить непрерывность функции $\widehat{\Phi} = \hat{f} \circ \hat{\alpha}$ для любого $\hat{f} \in C(\beta\, G)$. Положим $f = \hat{f}\Big|_X$, $\Phi = f \circ \alpha : G \times X \to \mathbb{R}$ и $\varphi : G \to C(X),\ \varphi(g)(x) = \Phi(g, x)$. Функция $\widehat{\Phi}$ является раздельно непрерывным продолжением функции Φ. Так как Φ раздельно непрерывно, то $\varphi : G \to C_p(X)$ непрерывно. Так как Φ продолжается до раздельно непрерывной функции на $\beta\, G \times \beta\, X$, то из теоремы 2.7 вытекает, что $\varphi(G)$ есть компактное подмножество $C_p(X)$.

Лемма. *Топологии поточечной и равномерной сходимости совпадают на $\varphi(G)$.*

Доказательство. Так как $\varphi(G)$ компактно в $C_p(X)$, то из теоремы 2.8 вытекает, что топологии поточечной и равномерной сходимости на $\varphi(G)$ совпадают в некоторой точке $f' \in \varphi(G)$. Действие α группы G на X индуцирует действие на $C(X)$: положим $\gamma(g, q)(x) = q(\alpha(g^{-1}, x))$ для $g \in G$, $q \in C(X)$ и $x \in X$. Функция $\gamma(g, q)$ непрерывна, так как действие α раздельно непрерывно. Отображение $\gamma : G \times C(X) \to C(X)$ является действием G на $C(X)$. Множество $\varphi(G)$ является орбитой функции f при действии G на $C(X)$: $\varphi(g) = \gamma(g^{-1}, f)$ для $g \in G$.

Покажем, что топологии поточечной и равномерной сходимости на $\varphi(G)$ совпадают в любой точке $f'' \in \varphi(G)$. Так как действие γ транзитивно на $\varphi(G)$, то существует $g \in G$, так что $f'' = \gamma(g, f')$. Положим $\gamma_g : C(X) \to C(X),\ \gamma_g(q) = \gamma(g, q)$. Тогда $f'' = \gamma_g(f')$, $\varphi(G) = \gamma_g(\varphi(G))$. Положим $\alpha_h : X \to X,\ \alpha_h(x) = \alpha(h, x)$ для $h \in G$. Так как действие α раздельно непрерывно, то отображения α_h и $\alpha_{h^{-1}} = (\alpha_h)^{-1}$ непрерывны и являются гомеоморфизмами. Так как $\gamma_g(q) = q \circ \alpha_{g^{-1}}$ для $q \in C(X)$, то $\gamma_g : C(X) \to C(X)$ является гомеоморфизмом как относительно топологии по точечно сходимости, так и относительно топологии равномерной сходимости на $C(X)$. Так как $\lambda_g(\varphi(G)) = \varphi(G)$, то отображение $\psi = \lambda_g|_{\varphi(G)} : \varphi(G) \to \varphi(G)$ является гомеоморфизмом как относительно топологии по точечно сходимости, так и относительно топологии равномерной сходимости. Так как $\psi(f') = f''$ и топологии поточечной и равномерной сходимости на $\varphi(G)$ совпадают в точке f', то топологии поточечной и равномерной сходимости на $\varphi(G)$ совпадают в точке f''. □

Так как $\varphi : G \to C_p(X)$ непрерывно, то учитывая лемму, получаем, что отображение $\varphi : G \to C_u(X)$ тоже непрерывно. Так как $\varphi(G)$ компактно, то из предложения 2.2.3 вытекает, что функция Φ продолжается до непрерывной функции на $\beta\, G \times \beta\, X$, это продолжение совпадает с $\widehat{\Phi}$. □

Теорема 4.2. *Пусть G есть псевдокомпактная полутопологическая группа. Следующие условия эквивалентны:*

(1) G является топологической группой;

(2) умножение $\mathfrak{m}$ непрерывно (то есть G есть паратопологическая группа);

(3) умножение $\mathfrak{m}$ квазинепрерывно;

(4) умножение $\mathfrak{m}$ продолжается до раздельно непрерывного отображения $\mathfrak{m} : \beta\, G \times \beta\, G \to \beta\, G$;

(5) умножение $\mathfrak{m}$ продолжается до непрерывного отображения $\mathfrak{m} : \beta\, G \times \beta\, G \to \beta\, G$, относительно которого $\beta\, G$ является топологической группой.

Доказательство. Очевидно, (5) $\Rightarrow$ (1) $\Rightarrow$ (2) $\Rightarrow$ (3). Группа G левыми сдвигами раздельно непрерывно и транзитивно действует на себя: $\alpha : G \times G \to G,\ \alpha(x, y) = xy$. Из теоремы 4.1 вытекает (3) $\Leftrightarrow$ (4).

Докажем (4) $\Rightarrow$ (5). Из теоремы 4.1 вытекает что действие $\alpha = \mathfrak{m}$ продолжается до непрерывного отображения $\hat{\mathfrak{m}} : \beta\, G \times \beta\, G \to \beta\, G$. Проверим, что $\beta\, G$ является топологической группой относительно операции умножения $\hat{\mathfrak{m}}$. Для $g, h \in \beta\, G$ будем писать $\hat{\mathfrak{m}}(g, h) = gh$. Непрерывные отображения

$$f_1 : (\beta\, G)^3 \to \beta\, G,\ (a, b, c) \mapsto (ab)c, \quad f_2 : (\beta\, G)^3 \to \beta\, G,\ (a, b, c) \mapsto a(bc)$$

совпадают на всюду плотном множестве G^3. Следовательно, операция $\hat{\mathfrak{m}}$ транзитивна, то есть $\beta\, G$ является полугруппой. Непрерывные отображения

$$g_1 : \beta\, G \to \beta\, G,\ a \mapsto ae, \quad g_2 : \beta\, G \to \beta\, G,\ a \mapsto ea, \quad g_3 : \beta\, G \to \beta\, G,\ a \mapsto a,$$

совпадают на всюду плотном множестве G. Следовательно, $ae = ea = a$ для всех $a \in \beta\, G$, то есть e есть единица $\beta\, G$. Положим $H = \{(g, h) \in (\beta\, G)^2 : gh = e\}$. Так как отображение $\hat{\mathfrak{m}}$ непрерывно, то H есть замкнутое подмножество компакта $(\beta\, G)^2$. Обозначим проекции

$$\pi_1 : (\beta\, G)^2 \to \beta\, G,\ (a, b) \mapsto a, \qquad \pi_2 : (\beta\, G)^2 \to \beta\, G,\ (a, b) \mapsto b.$$

Так как H компактно, то $\pi_1(H)$ и $\pi_2(H)$ компактно и, следовательно, замкнуто в $\beta\, G$. Так как G есть группа, то $G \subset \pi_1(H)$ и $G \subset \pi_2(H)$. Следовательно, $\beta\, G = \pi_1(H) = \pi_2(H)$. Получаем, что в полугруппе $\beta\, G$ для каждого $g \in \beta\, G$ существуют $h_1, h_2 \in \beta\, G$, так что $gh_1 = h_2 g = e$. То есть в полугруппе $\beta\, G$ у каждого элемента существует левый и правый обратный. Следовательно, $\beta\, G$ есть группа и $H = \{(g, g^{-1}) : g \in \beta\, G\}$. Обозначим $\theta_1 = \pi_1|_H$ и $\theta_2 = \pi_2|_H$.

Отображения θ_1 и θ_2 непрерывны, взаимнооднозначны и определены на компакте K. Следовательно, отображения θ_1 и θ_2 являются гомеоморфизмами. Следовательно, операция $\hat{\mathfrak{i}} = \theta_2 \circ \theta_1^{-1}$ взятия обратного элемента в $\beta\, G$ непрерывна. В группе $\beta\, G$ умножение $\hat{\mathfrak{m}}$ и инверсия $\hat{\mathfrak{i}}$ непрерывны, то есть $\beta\, G$ есть топологическая группа. $\square$

Отметим, что (1) $\Leftrightarrow$ (5) в теореме 4.2 вытекает из теоремы Комфорда–Росса [129, Theorem 4.1].

Из теорем 2.21 и 4.2 вытекает следующее утверждение.

Теорема 4.3. *Пусть G есть псевдокомпактная полутопологическая группа и (G, G) есть пара Гротендика. Тогда G есть топологическая группа.*

Следствие 4.4. *Пусть G есть псевдокомпактная полутопологическая группа pc-Гротендика. Тогда G есть топологическая группа.*

Теорема 4.5. *Пусть X есть псевдокомпактное пространство с раздельно непрерывной операцией Мальцева $M : X^3 \to M$. Следующие условия эквивалентны:*

(1) операция Мальцева M продолжается до раздельно непрерывной операцией Мальцева $\widehat{M} : (\beta\, X)^3 \to \beta\, X$;

(2) отображение M продолжается до раздельно непрерывного отображения $\widehat{M} : (\beta\, X)^3 \to \beta\, X$;

(3) отображение M 2-β-продолжаемое;

(4) отображение M 2-квазинепрерывное.

Доказательство. Очевидно, (1) $\Rightarrow$ (2). Из теоремы 2.18 вытекает (2) $\Leftrightarrow$ (3) $\Leftrightarrow$ (4). Докажем (2) $\Rightarrow$ (1). Для этого достаточно проверить, что $\widehat{M}$ является операцией Мальцева, то есть проверить тождества $\widehat{M}(x, x, y) = \widehat{M}(y, x, x) = y$ для $x, y \in \beta\, X$. Проверим сначала тождество $\widehat{M}(x, x, y) = y$.

Лемма. $\widehat{M}(x, x, y) = y$ *для* $x \in \beta\, X$ *и* $y \in X$.

Доказательство. Положим $\Phi(u, v) = \widehat{M}(u, v, y)$ для $u, v, y \in \beta\, X$. Отображение $\Phi : \beta\, X \times \beta\, X \to \beta\, X$ раздельно непрерывно. Так как M операция Мальцева, то $M(x, x, y) = \Phi(x, x) = y$ для $x \in X$. Из следствия 2.28 вытекает, что $\widehat{M}(x, x, y) = \Phi(x, x) = y$ для $x \in \beta\, X$. $\square$

Положим $\Omega(z) = \widehat{\Phi}(z, x, x)$ для $z \in \beta\, X$. Из леммы вытекает, что $\Omega(z) = z$ для $z \in X$. Так как отображение $\Omega : \beta\, X \to \beta\, X$ непрерывно, то $\Omega(z) = z$ для $z \in \beta\, X$. Получаем $\widehat{\Phi}(y, x, x) = \Omega(y) = y$.

Тождество $\widehat{M}(y, x, x) = y$ доказывается аналогично. $\square$

Из теорем 2.21 и 4.5 вытекает следующее утверждение.

Теорема 4.6. *Пусть X есть псевдокомпактное пространство с раздельно непрерывной операцией Мальцева $M : X^3 \to M$ и (X, X) есть пара Гротендика. Тогда операция Мальцева M продолжается до раздельно непрерывной операции Мальцева $\widehat{M} : (\beta X)^3 \to \beta X$.*

Следствие 4.7. *Пусть X есть псевдокомпактное пространство pc-Гротендика с раздельно непрерывной операцией Мальцева $M : X^3 \to M$. Тогда операция Мальцева M продолжается до раздельно непрерывной операции Мальцева $\widehat{M} : (\beta X)^3 \to \beta X$.*

4.3 Симметризация группы

Для группы G с топологией обозначим через $\operatorname{Inv} G$ группу, которая как группа совпадает с G. Топологию $\operatorname{Inv} G$ образуют множества вида U^{-1}, где U открыто в G.

Инверсия $\mathfrak{i} : G \to \operatorname{Inv} G, g \mapsto g^{-1}$ является гомеоморфизмом топологических пространств.

Обозначим через $\operatorname{Sym} G$ группу G с топологией, базу которой образуют множества вида $V \cap U^{-1}$, где V и U открытые подмножества G.

Предложение 4.3.1. *Пусть G группа с топологией.*

(1) Тождественное отображение $\mathrm{id}_G : \operatorname{Sym} G \to G$ непрерывно.

(2) Взятие обратного элемента в $\operatorname{Sym} G$, $\mathfrak{i} : \operatorname{Sym} G \to \operatorname{Sym} G$, является гомеоморфизмом.

(3) Отображение
$$\delta : \operatorname{Sym} G \to G \times \operatorname{Inv} G,\ \ g \mapsto (g, g)$$
является вложением группы $\operatorname{Sym} G$ с топологией в группу $G \times \operatorname{Inv} G$.

(4) Отображение
$$\theta : \operatorname{Sym} G \to G \times G,\ \ g \mapsto (g, g^{-1})$$
является вложением пространства $\operatorname{Sym} G$ в $G \times G$.

(5) Диаграмма
$$\begin{tikzcd} & \operatorname{Sym} G \arrow[dl, "\theta"'] \arrow[dr, "\delta"] & \\ G \times G \arrow[rr, "\mathrm{id}_G \times \mathfrak{i}"] & & G \times \operatorname{Inv} G \end{tikzcd}$$
коммутативна и отображение $\mathrm{id}_G \times \mathfrak{i}$ является гомеоморфизмом.

(6) Если G является полутопологической группой, то $\operatorname{Inv} G$ является полутопологической группой и $\operatorname{Sym} G$ является квазитопологической группой.

(7) Если G является паратопологической группой, то $\operatorname{Sym} G$ является топологической группой.

Доказательство. Пункты (1)–(5) очевидны.

(6) Пусть $U, V \subset G$ открытые множества, $g \in G$. Тогда gU^{-1} и $U^{-1}g$ открыты в $\operatorname{Inv} G$; $g(V \cap U^{-1})$ и $(V \cap U^{-1})g$ открыты в $\operatorname{Sym} G$, то есть $\operatorname{Sym} G$ является полутопологической группой. Из (2) вытекает, что $\operatorname{Sym} G$ квазитопологическая группа.

(7) Из (6) вытекает, что $\operatorname{Sym} G$ квазитопологическая группа. Базу e в $\operatorname{Sym} G$ образуют множества вида $U \cap U^{-1}$, где U открытая окрестность e в G. Пусть $V^2 \subset U$ для $V \ni e$ открытого в G множества. Тогда $(V \cap V^{-1})^2 \subset U \cap U^{-1}$. □

Определение 4.8. Группу G назовем *почти паратопологической*, если G полутопологическая группа и для любого $g \in G$, так ого что $e \notin \overline{\{g\}}$, существует окрестность U единицы e, так что $U^2 \subset G \setminus \overline{\{g\}}$.

Ясно, паратопологическая группа является почти паратопологической.

Предложение 4.3.2. *Пусть G есть группа с топологией. Если выполняется одно из перечисленных ниже условий, то G является почти паратопологической группой.*

(1) G подгруппа почти паратопологической группы.

(2) G полутопологическая группа и инъективным непрерывным гомоморфизмом отображается на почти паратопологическую группу.

(3) G есть произведение почти паратопологических групп.

(4) G паратопологическая группа.

(5) G хаусдорфова квазитопологическая группа.

Доказательство. Пункты (1), (2) и (4) очевидны.

(3) Пусть $G = \prod_{\alpha \in A} G_\alpha$, где G_α почти паратопологическая группа для $\alpha \in A$. Пусть $g = (g_\alpha)_{\alpha \in A} \in G$. Если $e \notin \overline{\{g\}}$, то $e \notin \overline{\{g\}_\alpha}$ для некоторого $\alpha \in A$. Существует открытая окрестность V единицы в группе G_α, так что $V^2 \subset G_\alpha \setminus \overline{\{g\}_\alpha}$. Тогда $U^2 \subset G \setminus \overline{\{g\}}$, где $U = \pi_\alpha^{-1}(V)$ и $\pi_\alpha : G \to G_\alpha$ есть проекция.

(5) Пусть $g \in G$, $g \neq e$. Существует симметричная окрестность $U = U^{-1}$ единицы, так что $eU \cap gU = \varnothing$. Тогда $U^2 \subset G \setminus \{g\}$. $\square$

Следствие 4.9. *Если полутопологическая группа G инъективным непрерывным гомоморфизмом отображается в произведение паратопологической группы и хаусдорфовой квазитопологической группы, то G является почти паратопологической группой.*

Теорема 4.10. *Пусть G группа с топологией. Группа $\operatorname{Sym} G$ изоморфна диагонали $\Delta = \delta(\operatorname{Sym} G)$ в $G \times \operatorname{Inv} G$, где*

$$\delta : \operatorname{Sym} G \to G \times \operatorname{Inv} G, \ \ g \mapsto (g, g).$$

Диагональ Δ замкнута в $G \times \operatorname{Inv} G$ если и только если G есть T_1 пространство и G является почти паратопологической группой.

Доказательство. Предположим, что Δ замкнута в $G \times \operatorname{Inv} G$. Пусть $g \in G \setminus \{e\}$. Тогда $(g, e) \notin \Delta$ и $gU \cap U^{-1} = \varnothing$ для некоторой окрестности единицы U. Следовательно $e \notin gU$ и $g \notin \overline{\{e\}}$. Так как $g \in G \setminus \{e\}$ мы брали произвольно, то $\{e\}$ замкнуто в G и G является T_1 пространством. Так как $(e, g) \notin \Delta$, то $U \cap gU^{-1} = \varnothing$ для некоторой окрестности единицы U. Тогда $g \notin U^2$. Следовательно, G почти паратопологическая группа.

Пусть G является T_1 почти паратопологической группой. Пусть $(x, y) \in G \times \operatorname{Inv} G \setminus \Delta$. Существует такая окрестность единицы U, так что $x^{-1}y \notin U^2$. Тогда $xU \cap yU^{-1} = \varnothing$. Следовательно, $(x, y) \notin \overline{\Delta}$. $\square$

Из теоремы 4.10 и предложения 4.3.1 вытекает следующие два следствия.

Следствие 4.11. *Если G есть T_1 почти паратопологическая группа, то $\operatorname{Sym} G$ является квазитопологической группой и замкнуто вкладывается в G^2.*

Следствие 4.12. *Если G есть T_1 паратопологическая группа, то $\operatorname{Sym} G$ является топологической группой и замкнуто вкладывается в G^2.*

Теорема 4.13. *Пусть G есть T_1 паратопологическая группа. Если выполняется одно из перечисленных ниже условий, то G является топологической группой.*

(1) G есть бэровское пространство и $e(G^2) \leq \omega$.

(2) G^2 счетно компактное пространство.

Доказательство.

Лемма. $\operatorname{Int} \overline{U \cap U^{-1}} \neq \varnothing$ *для любой окрестности U единицы.*

Доказательство. Множество $S = U \cap U^{-1}$ открытая окрестность единицы в $\operatorname{Sym} G$. Из следствия 4.12 вытекает, что $\operatorname{Sym} G$ является топологической группой и $\operatorname{Sym} G$ замкнуто вкладывается в G^2.

Случай (1). Тогда $e(\operatorname{Sym} G) \leq \omega$. Следовательно, топологическая группа $\operatorname{Sym} G$ является ω-ограниченной [36][Proposition 5.2.2]. Поэтому $G = MS$ для некоторого не более чем счетного M. Так как G бэровское пространство, то $\operatorname{Int} \overline{xS} \neq \varnothing$ для некоторого $x \in M$. Тогда $\operatorname{Int} \overline{S} \neq \varnothing$.

Случай (2). Тогда $\operatorname{Sym} G$ счетно компактное пространство. Следовательно, $\operatorname{Sym} G$ является предкомпактной группой [36][Theorem 3.7.2]. Поэтому $G = MS$ для некоторого конечного M.

Следовательно, топологическая группа $\operatorname{Sym} G$ является ω-ограниченной [36][Proposition 5.2.2]. Поэтому $G = MS$ для некоторого не более чем счетного $M = \{x_n : n \in \omega\}$. Пространство не может быть объединением конечного числа нигде не плотных множеств, поэтому $\operatorname{Int} \overline{xS} \neq \varnothing$ для некоторого $x \in M$. Тогда $\operatorname{Int} \overline{S} \neq \varnothing$. □

Из леммы вытекает, что операция взятия обратного элемента $\mathfrak{i}$ является полу преднепрерывным. Из предложения 4.1.2 $(p, sie) \to (t)$ вытекает, что G есть топологическая группа. □

4.4 R-топологичиские группы

Назовем группу G

- *R-полутопологической* если G является $O(r)$-топологической группой, то есть G является право полутопологической группой;
- *R-паратопологической* если G является $O(pe, r)$-топологической группой;
- *R-квазитопологической* если G является $O(ie, r)$-топологической группой;
- *R-топологической* если G является $O(ie, pe, r)$-топологической группой.

Пусть N есть вещественная функция на G. Назовем N а *преднормой* ([36], Section 3.3) на G если выполняются следующие условия для всех $x, y \in G$:

(PN1) $N(e) = 0$;

(PN2) $N(xy) \leq N(x) + N(y)$;

(PN3) $N(x^{-1}) = N(x)$.

Если, дополнительно, выполняется условие

(PN4) $N(x) \neq 0$ для $x \neq e$,

то N называется *нормой* (norm). В [37] преднорма называется псевдонормой (pseudo-norm).

Утверждение 4.4.1 (Proposition 3.3.1 и Proposition 3.3.2 из [36]). *Пусть N есть преднорма на группе G. Тогда для $x, y \in G$*

- $N(x) \geq 0$;
- $|N(x) - N(y)| \leq N(xy^{-1})$.

Утверждение 4.4.2. *Пусть $(U_n)_{n\in\omega}$ есть последовательность подмножеств группы G, так что $U_n = U_n^{-1}$ и $U_{n+1}^2 \subset U_n$ для $n \in \omega$.*

(1) *Существует такая преднорма N на G, что*

$$\{x \in G \,:\, N(x) < 1/2^n\} \subset U_n \subset \{x \in G \,:\, N(x) \leq 2/2^n\}$$

для $n \in \omega$.

(2) *Если G есть R-полутопологическая группа и $e \in \operatorname{Int} U_n$ для $n \in \omega$, то преднорма N непрерывна.*

Доказательство. Пункт (1) фактически доказан в Lemma 3.3.10 из [36]. Докажем (2). Пусть $y \in G$ и $\varepsilon > 0$. Существует $n \in \omega$, для которого $2/2^n < \varepsilon$. Тогда $y \in \operatorname{Int} U_n y$. Пусть $x \in U_n y$. Тогда $xy^{-1} \in U_n$ и

$$|N(x) - N(y)| \leq N(xy^{-1}) \leq 2/2^n < \varepsilon.$$

□

Для преднормы N обозначим

$$B_N \coloneqq \{g \in G \,:\, N(g) < 1\}.$$

Предложение 4.4.3. *Пусть G есть R-топологическая группа и $U \in \mathcal{N}_e$. Тогда $e \in B_N \subset U$ для некоторой непрерывной преднормы N на G.*

Доказательство. Существует $(U_n)_{n\in\omega}$ есть последовательность подмножеств группы G, так что $U = V_0$, $V_n \in \mathcal{N}_e$ и $V_{n+1}^2 \subset V_n$ для $n \in \omega$. Положим $U_n = V_n \cap V_n^{-1}$. Преднорма N из утверждения 4.4.2 искомая. □

Обозначим

$$d_N(x,y) \coloneqq N(xy^{-1}) \text{ и } B_N(x,r) \coloneqq \{y \in G : d_N(x,y) < r\}$$

для $x, y \in G$ и $r > 0$. Функция d_N является правоинвариантной песевдометрикой на G и d_N непрерывна, если непрерывна преднорма N. Правориантная метрика d определяет преднорму N_d: $N_d(x) = d(e, x)$. Отметим, что $d = d_{N_d}$. Таким образом между преднормами и правоинвариантными мектриками на G есть естественное взамнооднозначное соответствие, непрерывным преднормам соответствуют непрерывные правоинвариантные псевдометрики.

Семейство $\{d_\alpha : \alpha \in A\}$ псевдометрик на пространстве X задают топологию пространства X если семейство открытых относительно d_α множеств для $\alpha \in A$ образуют предбазу X.

Предложение 4.4.4. *Пусть G есть группа с топологией. Группа G является R-топологическая группой если и только если топология G задается семейством правоинвариантных псевдометрик.*

Доказательство. Пусть G является R-топологической группой. Из предложения 4.4.3 вытекает, что для $U \in \mathcal{N}_e$ существует N_U непрерывная преднорма, для которой $B_{N_U} \subset U$. Пусть $d_U = d_{N_U}$. Семейство $\{d_U : U \in \mathcal{N}_e\}$ непрерывных правоинвариантных метрик задают топологию G.

Пусть $\{N_\alpha : \alpha \in A\}$ есть семейство непрерывных преднорм так что $\{d_{N_\alpha} : \alpha \in A\}$ есть семейство правоинвариантных метрик, задающих топологию G. Правые сдвиги ρ_g непрерывны в G. Пусть $U \in \mathcal{N}_e$. Существует $\varepsilon > 0$ и конечное $B \subset A$ так что $\bigcap_{\alpha\in B} B_{N_\alpha}(e, \varepsilon) \subset U$. Положим $V = \bigcap_{\alpha\in B} B_{N_\alpha}(e, \varepsilon/2)$. Тогда $V \in \mathcal{N}_e$, $V = V^{-1}$ и $V^2 \subset U$. □

Предложение 4.4.5. *Пусть G есть отделимая R-топологическая группа.*

(1) *Если G пространство с первой аксиомой счетности, то существует непрерывная правоинвариантная метрика d на G, которая задает топологию на G.*

(2) *Если G пространство счетного псевдохарактера, то существует непрерывная правоинвариантная метрика d.*

Доказательство. Пусть $(W_n)_{n\in\omega}$ есть последовательность окрестностей единицы, которая в случае (1) образует базу в e и $\{e\} = \bigcap_{n\in\omega} W_n$ в случае (2). Существует последовательность $(V_n)_{n\in\omega}$ окрестностей единицы, так что $V_{n+1}^2 \subset V_n \subset W_n$ для $n \in \omega$. Положим $U_n = U_n \cap U_n^{-1}$ для $n \in \omega$. Пусть N есть преднорма как в утверждении 4.4.2 и $d = d_N$. □

Теорема 4.14. *Пусть G есть отделимая R-топологическая группа.*

(1) *Группа G метризуема если и только если G с первой аксиомой счетности.*

(2) *Группа G субметризуема если и только если G со счетным псевдохарактером.*

Теорема 4.14 является обобщением теоремы Биркгофа-Какутани, смотри Theorem 3.3.12 и Theorem 3.3.16 из [36].

Из предложения 4.1.2 вытекает

Теорема 4.15. *Пусть G есть R-топологическая группа. Если множество*

$$H_{fl} = \{g \in G \,:\, \lambda_g \text{ является слабым гомеоморфизмом}\}$$

плотно в G, то G является топологической группой.

Пример 4.16. Опишем Example (d) из [63]. Пусть $\mathbb{T} = \{z \in \mathbb{C} \,:\, |z| = 1\}$, $\varphi : \mathbb{T} \to \mathbb{T}$ разрывный автоморфизм группы $\mathbb{T}$, для которого $\varphi^2 = \mathrm{id}_\mathbb{T}$. Положим $H = \{\mathrm{id}_\mathbb{T}, \varphi\}$ с дискретной топологией, $G = \mathbb{T} \rtimes H$, G как множество и пространство гомеоморфно $\mathbb{T} \times H$. Напомним определение умножения в полупрямом произведении G:

$$(t_1, h_1) \cdot (t_2, h_2) = (t_1 h_1(t_2), h_1 h_2).$$

Группа G является компактной метризуемой право полутопологической группой. Подгруппа $\mathbb{T}$ нормальна и открыто замкнута в G. Так как $\mathbb{T}$ является топологической группой, то G является $O(ie, pe)$-топологической группой. Окончательно, G есть метризуемая компактная R-топологическая группа, которая не является топологической группой.

4.5 Свойства групп, определяемые с помощью инвариантных полу окрестностей диагонали

В этом разделе $(G, \mathcal{T})$ право полутопологическая группа, $\mathcal{T}^* = \mathcal{T} \setminus \{\varnothing\}$, $\mathcal{N}_e$ семейство открытых окрестностей единицы, $\widetilde{\mathcal{N}}_e$ семейство окрестностей единицы, не обязательно открытых.

Полу окрестности диагонали в группах

Множество $P \subset G \times G$ назовем *правоинвариантным*, если

$$\{(xg, yg) \,:\, (x, y) \in P\} = P$$

для всех $g \in G$. Для $M \subset G$ положим

$$\mathfrak{N}(M) \coloneqq \{(x, gx) \,:\, g \in M \text{ и } x \in G\}.$$

Если $P = \mathfrak{N}(M)$, то $P(g) = Mg$. Множество $\mathfrak{N}(M)$ правоинвариантно. Отображение $\mathfrak{N}$ устанавливает взаимно однозначное соответствие между подмножествами G и правоинвариантными подмножествами $G\times G$. Если $P \subset G\times G$ правоинваритантное подмножество, то $P = \mathfrak{N}(P(e))$. Обозначим

$$\overline{M}^d := \bigcap \{\overline{MV} \,:\, V \in \mathcal{N}_e\},$$
$$\overline{M}^h := \bigcap \{MV \,:\, V \in \mathcal{N}_e\}.$$

Утверждение 4.5.1. *Пусть $L, M \subset G$. Тогда*

(1) $(x, y) \in \mathfrak{N}(M)$ *если и только если* $yx^{-1} \in M$*;*

(2) $(\mathfrak{N}(M))^{-1} = \mathfrak{N}(M^{-1})$*;*

(3) $\overline{\mathfrak{N}(M)} = \mathfrak{N}(\overline{M}^d)$*;*

(4) $\mathfrak{N}(M) \circ \mathfrak{N}(L) = \mathfrak{N}(LM)$.

Доказательство. (1) $(x, y) \in \mathfrak{N}(M) \iff y = gx$ для некоторого $g \in M$ $\iff yx^{-1} \in M$.

(2) $(x, y) \in (\mathfrak{N}(M))^{-1} \iff (y, x) \in \mathfrak{N}(M) \iff xy^{-1} \in M \iff (x, y) \in \mathfrak{N}(M^{-1}$.

(3) $(x, y) \in \overline{\mathfrak{N}(M)} \iff (Vx \times Uy) \cap \mathfrak{N}(M) \neq \varnothing$ для любых $V, U \in \mathcal{N}_e \iff MUx \cap Vy \neq \varnothing$ для любых $V, U \in \mathcal{N}_e \iff y \in \overline{MUx}$ для любого $U \in \mathcal{N}_e \iff y \in \overline{M}^d x$.

(4) $(x, y) \in \mathfrak{N}(M) \circ \mathfrak{N}(L) \iff (x, z) \in \mathfrak{N}(M)$ и $(z, y) \in \mathfrak{N}(L)$ для некоторого $z \in G \iff z \in Mx$ и $y \in Lz$ для некоторого $z \in G \iff y \in LMx$. $\square$

Обозначим

$$\mathfrak{S}_g(G) := \{P \in \mathfrak{S}(G) \,:\, G \text{ есть правоинваринтное подмножество}\}.$$

Отображение $\mathfrak{N}$ устанавливает биекцию между $\widetilde{\mathcal{N}}_e$ и $\mathfrak{S}_g(G)$.

Введем на $\mathrm{Exp}(\widetilde{\mathcal{N}}_e)$ отношение порядка и связанное с ним отношение эквивалентности. Для $\mathcal{U}, \mathcal{V} \subset \widetilde{\mathcal{N}}_e$ положим

- $\mathcal{U} \preccurlyeq \mathcal{V}$ если и только если для любого $V \in \mathcal{V}$ существует $U \in \mathcal{U}$, так что $U \subset V$;
- $\mathcal{U} \sim \mathcal{V}$ если и только если $\mathcal{U} \preccurlyeq \mathcal{V}$ и $\mathcal{V} \preccurlyeq \mathcal{U}$.

Отметим, что если $\mathcal{U} \supset \mathcal{V}$, то $\mathcal{U} \preccurlyeq \mathcal{V}$. Для $\mathcal{U} \subset \widetilde{\mathcal{N}}_e$ обозначим

$$\mathsf{N}^e(\mathcal{U}) := \{W \in \widetilde{\mathcal{N}}_e \,:\, U \subset W, \text{ для некоторого } U \in \mathcal{U}\}.$$

Предложение 4.5.2. *Для* $\mathcal{U}, \mathcal{V} \subset \widetilde{\mathcal{N}}_e$

- $\mathcal{U} \preccurlyeq \mathcal{V}$ *если и только если* $\mathsf{N}^e(\mathcal{U}) \supset \mathsf{N}^e(\mathcal{V})$*;*
- $\mathcal{U} \sim \mathcal{V}$ *если и только если* $\mathsf{N}^e(\mathcal{U}) = \mathsf{N}^e(\mathcal{V})$*.*

Для $\mathcal{U} \subset \widetilde{\mathcal{N}}_e$ обозначим

$$\begin{aligned}
\mathsf{N}(\mathcal{U}) &\coloneqq \mathcal{U},\\
\mathsf{N}_+(\mathcal{U}) &\coloneqq \{UV \,:\, V \in \widetilde{\mathcal{N}}_e \text{ и } U \in \mathcal{U}\},\\
\mathsf{N}^v(\mathcal{U}) &\coloneqq \{\overline{U} \,:\, U \in \mathcal{U}\},\\
\mathsf{N}^c(\mathcal{U}) &\coloneqq \{\overline{U}^d \,:\, U \in \mathcal{U}\},\\
\mathsf{N}^c_+(\mathcal{U}) &\coloneqq \mathsf{N}^v(\mathsf{N}_+(\mathcal{U})).
\end{aligned}$$

Из определений вытекает

Предложение 4.5.3. *Пусть X пространство. Для $\mathcal{U} \subset \widetilde{\mathcal{N}}_e$*

- $\mathcal{U} \preccurlyeq \mathsf{N}_+(\mathcal{U}) \preccurlyeq \mathsf{N}^c_+(\mathcal{U})$
- $\mathcal{U} \preccurlyeq \mathsf{N}^v(\mathcal{U}) \preccurlyeq \mathsf{N}^c(\mathcal{U}) \preccurlyeq \mathsf{N}^c_+(\mathcal{U})$

Пусть λ есть ординал, $M_\alpha \subset G$ для $\alpha < \lambda$. Индукцией по $\beta < \gamma$ определим множества $\mathsf{n}_\beta(\mathcal{S}_\beta), \mathsf{n}^c_\beta(\mathcal{S}_\beta) \subset G$, где $\mathcal{S}_\beta = (M_\alpha)_{\alpha<\beta}$.

$\beta = 0$. Положим

$$\mathsf{n}_0(\mathcal{S}_0) \coloneqq \mathsf{n}^c_0(\mathcal{S}_0) \coloneqq \{\varnothing\}.$$

$\beta = 1$. Положим

$$\mathsf{n}_1(\mathcal{S}_1) \coloneqq M_0, \qquad \mathsf{n}^c_1(\mathcal{S}_1) \coloneqq \overline{M_0}^d.$$

$1 < \beta \le \gamma$. Положим

$$\mathsf{n}_\beta(\mathcal{S}_\beta) \coloneqq \begin{cases} Q_\beta, & \text{если } \beta \text{ предельный кардинал}\\ M_{\beta'}Q_\beta, & \text{если } \beta = \beta' + 1\end{cases}$$

$$\mathsf{n}^c_\beta(\mathcal{S}_\beta) \coloneqq \begin{cases} \overline{Q^c_\beta}^d, & \text{если } \beta \text{ предельный кардинал}\\ \overline{M_{\beta'}Q^c_\beta}^d, & \text{если } \beta = \beta' + 1\end{cases}$$

где

$$Q_\beta = \bigcup_{\alpha<\beta} \mathsf{n}_\alpha(\mathcal{S}_\alpha) \qquad \text{и} \qquad Q^c_\beta = \bigcup_{\alpha<\beta} \mathsf{n}^c_\alpha(\mathcal{S}_\alpha).$$

Для $\mathcal{U} \subset \widetilde{\mathcal{N}}_e$ обозначим

$$\begin{aligned}
\mathsf{N}_\gamma(\mathcal{U}) &\coloneqq \{\mathsf{n}_\gamma(\mathcal{S}) \,:\, \mathcal{S} \in \mathcal{U}^\gamma\},\\
\mathsf{N}^c_\gamma(\mathcal{U}) &\coloneqq \{\mathsf{n}^c_\gamma(\mathcal{S}) \,:\, \mathcal{S} \in \mathcal{U}^\gamma\}.
\end{aligned}$$

Из предложения 4.5.3 и определений вытекает

Предложение 4.5.4. *Пусть $\mathcal{U} \subset \widetilde{\mathcal{N}}_e$ и $1 < \alpha < \beta$ ординалы. Тогда*

$$
\begin{gathered}
\mathsf{N}_+(\mathcal{U}) \preccurlyeq \mathsf{N}_2(\mathcal{U}) \preccurlyeq \mathsf{N}_\alpha(\mathcal{U}) \preccurlyeq \mathsf{N}_\beta(\mathcal{U}) \preccurlyeq \mathsf{N}^c_\beta(\mathcal{U}) \\
\mathsf{N}^c(\mathcal{U}) = \mathsf{N}^c_1(\mathcal{U}) \preccurlyeq \mathsf{N}^c_\alpha(\mathcal{U}) \preccurlyeq \mathsf{N}^c_\beta(\mathcal{U}) \\
\mathsf{N}^c(\mathcal{U}) \preccurlyeq \mathsf{N}^c_+(\mathcal{U}) \preccurlyeq \mathsf{N}^c_2(\mathcal{U})
\end{gathered}
$$

Для $\mathcal{B} \subset \widetilde{\mathcal{N}}_e$, $\mathcal{B} \sim \widetilde{\mathcal{N}}_e$ если и только если $\mathcal{B}$ является базой в e.

Утверждение 4.5.5. *Пусть G есть R-паратопологическая группа.*

(1) $\mathsf{N}_\gamma(\widetilde{\mathcal{N}}_e) \sim \widetilde{\mathcal{N}}_e$ *для* $0 < \gamma \leq \omega$.

(2) *Если G есть регулярное пространство, то* $\mathsf{N}^c_\gamma(\widetilde{\mathcal{N}}_e) \sim \widetilde{\mathcal{N}}_e$ *для* $0 < \gamma < \omega$.

Доказательство. (1) Пусть $U \in \widetilde{\mathcal{N}}_e$. Существует $\mathcal{S} = (U_n)_{n<\lambda} \subset \widetilde{\mathcal{N}}_e$, так что $U_0^2 \subset U$ и $U_{n+1}^2 \subset U_n$ для $n < \lambda$. Тогда $V = \mathsf{n}_\gamma(\mathcal{S}) \in \mathsf{N}_\gamma(\widetilde{\mathcal{N}}_e)$ и $V \subset U$.

(2) Докажем индукцией по γ. Для $\gamma = 1$ утверждение очевидно. Пусть $\gamma = n + 1$ и $U \in \widetilde{\mathcal{N}}_e$. Тогда $\overline{V^2}^d \subset \overline{V^3} \subset U$ для некоторого $V \in \widetilde{\mathcal{N}}_e$. По предположению индукции $S \subset V$ для некоторого $S \in \mathsf{N}^c_n(\widetilde{\mathcal{N}}_e)$. Тогда $Q = \overline{VS}^d \in \mathsf{N}^c_\gamma(\widetilde{\mathcal{N}}_e)$ и $Q \subset U$. □

Из определений и утверждения 4.5.1 вытекает

Предложение 4.5.6. *Пусть $\mathcal{U} \subset \widetilde{\mathcal{N}}_e$, $\mathcal{P} = \mathfrak{N}(\mathcal{U})$ и γ ординал. Тогда*

$$
\begin{aligned}
\Psi^v(\mathcal{P}) &= \mathfrak{N}(\mathsf{N}^v(\mathcal{U})), & \Psi^c(\mathcal{P}) &= \mathfrak{N}(\mathsf{N}^c(\mathcal{U})), \\
\Psi_+(\mathcal{P}) &\preccurlyeq \mathfrak{N}(\mathsf{N}_+(\mathcal{U})), & \Psi^c_+(\mathcal{P}) &\preccurlyeq \mathfrak{N}(\mathsf{N}^c_+(\mathcal{U})), \\
\Psi_\gamma(\mathcal{P}) &= \mathfrak{N}(\mathsf{N}_\gamma(\mathcal{U})), & \Psi^c_\gamma(\mathcal{P}) &= \mathfrak{N}(\mathsf{N}^c_\gamma(\mathcal{U})).
\end{aligned}
$$

$g\Delta(\mathcal{U};\mathfrak{Q})$-бэровские группы

Определение 4.17. Пусть $\mathfrak{Q}$ есть нормальный функтор квадрата, $\mathcal{U} \subset \widetilde{\mathcal{N}}_e$. Назовем группу G $g\Delta(\mathcal{U};\mathfrak{Q})$-*бэровской* ($g\Delta(\mathcal{U};\mathfrak{Q})$-Baire) группой, если G является $\Delta(\mathfrak{N}(\mathcal{U});\mathfrak{Q})$-бэровским пространством.

Любой элемент $P \in \mathfrak{N}(\mathcal{U})$ является правоинвариантным подмножеством и $\rho_g \times \rho_g(P|_W) = P|_{\rho_g(W)}$ для $g \in G$ и $W \in \mathcal{T}^*$. Поэтому, если $P|_W \in \mathfrak{Q}(W)$, то $P|_{Wg} \in \mathfrak{Q}(Wg)$. Получаем, что G является $\Delta(\mathfrak{N}(\mathcal{U});\mathfrak{Q})$-бэровским пространством если и только если G является $\Delta(\mathfrak{N}(\mathcal{U});\mathfrak{Q})$-тучным пространством.

Из определений вытекает

Предложение 4.5.7. *Пусть $\mathfrak{Q}$, $\mathfrak{R}$ есть NFS, $\mathcal{U}, \mathcal{V} \subset \widetilde{\mathcal{N}}_e$. Предположим, что $\mathfrak{Q} \succcurlyeq \mathfrak{R}$ и $\mathcal{U} \preccurlyeq \mathcal{V}$. Если G $g\Delta(\mathcal{U};\mathfrak{Q})$-бэровская группа, то G $g\Delta(\mathcal{V};\mathfrak{R})$-бэровская группа.*

Аналогично предложению 3.8.12 проверяется

Предложение 4.5.8. *Пусть $\mathcal{U} \subset \widetilde{\mathcal{N}}_e$. Если в диаграмме из предложения 3.8.12 заменить Ψ на N, то стрелка*

$$(F)_k \to (G)_l$$

означает, что $F, G : \operatorname{Exp}(\widetilde{\mathcal{N}}_e) \to \operatorname{Exp}(\widetilde{\mathcal{N}}_e)$ есть отображения, $k, l \in \{d, v, h, s, a\}$ и выполняются условие:

> *если G является $g\Delta(F(\mathcal{U}); \mathfrak{Q}_k)$-бэровской группой, то G является $g\Delta(G(\mathcal{U}); \mathfrak{Q}_l)$-бэровской группой.*

Предложение 4.5.9. *Пусть G есть R-полутопологическая группа, $M \subset G$. Тогда*

$$\overline{M}^h = \overline{M^{-1}}^{-1}.$$

Доказательство. Пусть $x \in G$. Тогда $x \in \overline{M}^h$ если и только если для любого $V \in \mathcal{N}_e$ выполняется $x \in MV \iff x^{-1} \in V^{-1}M^{-1} \iff Vx^{-1} \cap M^{-1} \neq \varnothing$, то есть $x^{-1} \in \overline{M^{-1}}$ и $x \in \overline{M^{-1}}^{-1}$. □

Предложение 4.5.10. *Пусть $U \in \widetilde{\mathcal{N}}_e$ и $W \in \mathcal{T}^*$. Для $k \in \{d, v, h, s, a\}$, $\mathfrak{N}(U)|_W \in \mathfrak{Q}_k(W)$ если и только если выполняется условие (L_k^g):*

(L_d^g) *$WW^{-1} \subset \overline{U}^d$;*

(L_v^g) *$WW^{-1} \subset \overline{U}$;*

(L_h^g) *$WW^{-1} \subset \overline{U^{-1}}$ или, эквивалентно, $WW^{-1} \subset \overline{U}^h$;*

(L_s^g) *$WM^{-1} \subset U$ для некоторого $M \subset W \subset \overline{M}$;*

(L_a^g) *$WW^{-1} \subset U$.*

Доказательство. (L_a^g) Для $x, y \in W$, $(x, y) \in \mathfrak{N}(U)$ если и только если $yx^{-1} \in U$.

(L_s^g) Для $x \in M$, $\{x\} \times W \subset \mathfrak{N}(U)$ если и только если $Wx^{-1} \in U$.

(L_h^g) $W \subset \overline{U^{-1}x}$ для всех $x \in W$ если и только если $WW^{-1} \subset \overline{U^{-1}}$. Из предложения 4.5.9 вытекает, что условие $WW^{-1} \subset \overline{U^{-1}}$ эквивалентно тому что $WW^{-1} \subset \overline{U}^h$.

(L_v^g) $W \subset \overline{Ux}$ для всех $x \in W$ если и только если $WW^{-1} \subset \overline{U}$.

(L_v^g) Вытекает из $\overline{\mathfrak{N}(U)} = \mathfrak{N}(\overline{U}^d)$ и (L_a^g).

□

$g\Delta(\mathfrak{Q})$-бэровские группы

Определение 4.18. Пусть $\mathfrak{Q}$ есть нормальный функтор квадрата, G есть R-топологическая группа, γ есть ординал, $\mathcal{U} = \widetilde{\mathcal{N}}_e$. Пусть $\mathsf{N}_l^k : \operatorname{Exp}(\widetilde{\mathcal{N}}_e) \to \operatorname{Exp}(\widetilde{\mathcal{N}}_e)$ есть одно из отображений, рассматриваемых в разделе 4.5:

$$\mathsf{N}_l^k \in \{\mathsf{N}, \mathsf{N}^e, \mathsf{N}^v, \mathsf{N}^c, \mathsf{N}_+, \mathsf{N}_+^c, \mathsf{N}_\gamma, \mathsf{N}_\gamma^c\}.$$

Будем говорить, G является ${}^k\mathrm{g}\Delta^{\,l}(\mathfrak{Q})$-*бэровской* группой, если G является $g\Delta(\mathsf{N}_l^k(\widetilde{\mathcal{N}}_e); \mathfrak{Q})$-бэровской группой. Для

$$\tilde{\Delta} \in \{g\Delta,\ {}^e\mathrm{g}\Delta\,,\ {}^v\mathrm{g}\Delta\,,\ {}^c\mathrm{g}\Delta\,, g\Delta^+,\ {}^c\mathrm{g}\Delta^{\,+}, g\Delta^\gamma,\ {}^c\mathrm{g}\Delta^{\,\gamma}\}$$

мы определили $\tilde{\Delta}(\mathfrak{Q})$-бэровские группы. Для

$$k \in \{d, h, v, s, a\}$$

будем говорить, G является $\tilde{\Delta}_k$-*бэровской* группой, если G является $\tilde{\Delta}(\mathfrak{Q}_k)$-бэровской группой. Для

$$\tilde{\tilde{\Delta}} \in \{g\Delta_k,\ {}^e\mathrm{g}\Delta_{\,k},\ {}^v\mathrm{g}\Delta_{\,k},\ {}^c\mathrm{g}\Delta_{\,k}, g\Delta_k^+,\ {}^c\mathrm{g}\Delta_{\,k}^{\,+}, g\Delta_k^\gamma,\ {}^c\mathrm{g}\Delta_{\,k}^{\,\gamma}\}$$

мы определили $\tilde{\tilde{\Delta}}$-бэровские группы. Также, если нижний индекс не написан, подразумевается d: ${}^k\mathrm{g}\Delta^{\,l}$-бэровость это ${}^k\mathrm{g}\Delta_{\,d}^{\,l}$-бэровость. Отдельное непосредственное определение для наиболее важных классов групп: группа G называется

- $g\Delta$-бэровской если G является $g\Delta(\widetilde{\mathcal{N}}_e; \mathfrak{Q}_d)$-бэровской;
- $g\Delta_h$-бэровской если G является $g\Delta(\widetilde{\mathcal{N}}_e; \mathfrak{Q}_h)$-бэровской;
- $g\Delta_s$-бэровской если G является $g\Delta(\widetilde{\mathcal{N}}_e; \mathfrak{Q}_s)$-бэровской;
- $g\Delta_v$-бэровской если G является $g\Delta(\widetilde{\mathcal{N}}_e; \mathfrak{Q}_v)$-бэровской;
- $g\Delta_a$-бэровской если G является $g\Delta(\widetilde{\mathcal{N}}_e; \mathfrak{Q}_a)$-бэровской;
- $g\Delta^\gamma$-бэровской если G является $g\Delta(\mathsf{N}_\gamma(\widetilde{\mathcal{N}}_e); \mathfrak{Q}_d)$-бэровской;
- ${}^c\mathrm{g}\Delta^{\,\gamma}$-бэровской если G является $g\Delta(\mathsf{N}_\gamma^c(\widetilde{\mathcal{N}}_e); \mathfrak{Q}_d)$-бэровской.
- $g\Delta_a^\gamma$-бэровской если G является $g\Delta(\mathsf{N}_\gamma(\widetilde{\mathcal{N}}_e); \mathfrak{Q}_a)$-бэровской;

Так как $\mathsf{N}_+(\widetilde{\mathcal{N}}_e) = \mathsf{N}_2(\widetilde{\mathcal{N}}_e)$, то классы $g\Delta^+(\mathfrak{Q})$-бэровских и $g\Delta^2(\mathfrak{Q})$-бэровских групп совпадают.

Так как $\mathfrak{N}(\widetilde{\mathcal{N}}_e) = \mathfrak{S}_g(G) \subset \mathfrak{S}(G)$, то из предложения 4.5.6 вытекает

Предложение 4.5.11. *Пусть $\mathfrak{Q}$ есть нормальный функтор квадрата, G есть R-топологическая группа, γ есть ординал,*

$$\mathsf{N}^l_m \in \{\mathsf{N}, \mathsf{N}^e, \mathsf{N}^v, \mathsf{N}^c, \mathsf{N}_+, \mathsf{N}^c_+, \mathsf{N}_\gamma, \mathsf{N}^c_\gamma\}.$$

Если G является ${}^l\Delta^m(\mathfrak{Q})$-бэровским пространством, то G является ${}^l\mathrm{g}\Delta^m(\mathfrak{Q})$-бэровской группой.

Пусть

$${}^l\mathrm{g}\Delta^m_k \in \{g\Delta_k,\ {}^e\mathrm{g}\Delta_k,\ {}^v\mathrm{g}\Delta_k,\ {}^c\mathrm{g}\Delta_k, g\Delta^+_k,\ {}^c\mathrm{g}\Delta^+_k, g\Delta^\gamma_k,\ {}^c\mathrm{g}\Delta^\gamma_k\}$$

где $k \in \{d, h, v, s, a\}$. Если G является ${}^l\Delta^m_k$-бэровским пространством, то G является ${}^l\mathrm{g}\Delta^m_k$-бэровской группой.

Из предложения 4.5.10 вытекает

Предложение 4.5.12. *Пусть*

$$\tilde{\Delta} \in \{g\Delta, g\Delta_h, g\Delta_s, g\Delta_v, g\Delta_a\}.$$

Группа G является $\tilde{\Delta}$-бэровской, если для любого $U \in \mathcal{N}_e$ существует $W \in \mathcal{N}_e$, так что выполняется условие $(\tilde{\Delta})$:

$(g\Delta)$ $WW^{-1} \subset \overline{U}^d$;

$(g\Delta_h)$ $WW^{-1} \subset \overline{U^{-1}}$ или, эквивалентно, $WW^{-1} \subset \overline{U}^h$;

$(g\Delta_s)$ $WM^{-1} \subset U$ для некоторого $M \subset W \subset \overline{M}$;

$(g\Delta_v)$ $WW^{-1} \subset \overline{U}$;

$(g\Delta_a)$ $WW^{-1} \subset U$.

Предложение 4.5.13. *Пусть γ есть ординал и*

$$\tilde{\Delta} \in \{g\Delta^\gamma,\ {}^c\mathrm{g}\Delta^\gamma, g\Delta^\gamma_a\}.$$

Группа G является $\tilde{\Delta}$-бэровской, если для любого $\mathcal{S} = (W_\alpha)_{\alpha<\gamma} \in \mathcal{N}^\gamma_e$ существует $W \in \mathcal{N}_e$, так что выполняется условие $(\tilde{\Delta})$:

$(g\Delta^\gamma)$ $WW^{-1} \subset \overline{\mathsf{n}_\gamma(\mathcal{S})}^d$;

$({}^c\mathrm{g}\Delta^\gamma)$ $WW^{-1} \subset \mathsf{n}^c_\gamma(\mathcal{S})$;

$(g\Delta^\gamma_a)$ $WW^{-1} \subset \mathsf{n}_\gamma(\mathcal{S})$.

Из предложения 3.8.12 вытекает

Предложение 4.5.14. *В диаграммах ниже, стрелка*

$$A \to B$$

означает, что если G является A-бэровской группой, то G является B-бэровской группой.

$$\begin{tikzcd}
g\Delta_a \arrow[rr] \arrow[d] & & g\Delta_s \arrow[d] \\
g\Delta_v \arrow[dr] & & g\Delta_h \arrow[dl] \\
& g\Delta &
\end{tikzcd}$$

4.6 Непрерывность в R-полутопологических группах

Теорема 4.19.

(1) *R-полутопологическая группа G является R-топологической группой если и только если G является $g\Delta_a$-бэровской.*

(2) *R-квазитопологическая группа G является $g\Delta_v$-бэровской если и только если G является $g\Delta_h$-бэровской.*

(3) *Полурегулярная R-полутопологическая группа G является R-топологической группой если и только если G является $g\Delta_v$-бэровской.*

(4) *Полурегулярная R-квазитопологическая группа G является R-топологическо группой если и только если G является $g\Delta_h$-бэровской.*

(5) *Полурегулярная R-паратопологическая группа G является R-топологической группой если и только если G является $g\Delta$-бэровской.*

(6) *Пусть $\gamma \leq \omega$. R-паратопологическая группа G является R-топологической группой если и только если G является $g\Delta_a^\gamma$-бэровской.*

(7) *Пусть $\gamma < \omega$. Регулярная R-паратопологическая группа G является R-топологической группой если и только если G является ${}^c\mathrm{g}\Delta^\gamma$-бэровской.*

Доказательство. (1) Вытекает из предложения 4.5.12 ($g\Delta_a$).
(2) Вытекает из предложения 4.5.12 ($g\Delta_v$) и ($g\Delta_h$).

(3) Пусть $U \in \mathcal{N}_e$ есть канонически открытое множество. Из предложения 4.5.12 ($g\Delta_v$) вытекает, что $WW^{-1} \subset \overline{U}$ для некоторого $W \in \mathcal{N}_e$. Так как WW^{-1} открыто, то $WW^{-1} \subset \operatorname{Int}\overline{U} = U$.
(4) Вытекает из (2) и (3).
(5) Пусть $U \in \mathcal{N}_e$ есть канонически открытое множество. Для некоторого $V \in \mathcal{N}_e$, $V^2 \subset U$. Из предложения 4.5.12 ($g\Delta$) вытекает, что $WW^{-1} \subset \overline{V}^d \subset \overline{V^2} \subset \overline{U}$ для некоторого $W \in \mathcal{N}_e$. Тогда $WW^{-1} \subset \operatorname{Int}\overline{U} = U$.
(6) Вытекает из предложения 4.5.13 ($g\Delta^{\gamma}_a$) и утверждения 4.5.5 (1).
(7) Вытекает из предложения 4.5.13 (${}^c\mathrm{g}\Delta^{\,\gamma}$) и утверждения 4.5.5 (2). □

Теорема 4.20. *Пусть G есть R-полутопологическая $g\Delta_s$-бэровская группа, Тогда $\Lambda^*_f(G)$ является топологической группой и λ_g является гомеоморфизмом для всех $g \in \Lambda^*_f(G)$.*

Доказательство. Множество $H = \Lambda^*_f(G)$ есть подгруппа в G. Пусть $g \in H$. Покажем, что λ_g является гомеоморфизмом. Для $U \in \mathcal{T}^*$ обозначим

$$\widetilde{U} = \operatorname{Int} g^{-1} \operatorname{Int} gU = \operatorname{Int} \lambda_g^{-1}(\operatorname{Int} \lambda_g(U)).$$

Отметим, что $\widetilde{U} \in \mathcal{T}^*$, $\widetilde{U} \subset U \subset \overline{\widetilde{U}}$, $\widetilde{Ux} = \widetilde{U}x$ для $x \in G$ и $\widetilde{V} \subset \widetilde{W}$ для $V \subset U$, $V \in \mathcal{T}^*$. Предположим, что λ_g не является гомеоморфизмом. Тогда $x \notin \widetilde{Ux} = \widetilde{U}x$ для некоторого $x \in G$ и $U \in \mathcal{T}^*$. Тогда $e \notin \widetilde{U}$.

Лемма 4.6.1. *Пусть $U \in \mathcal{N}_e$. Тогда $WM^{-1} \subset U$ для некторого $W \in \mathcal{T}^*$ и $M \subset W \subset \overline{M}$ так что $e \in M$ и $W \subset U$.*

Доказательство. Так как G есть $g\Delta_s$-бэровская группа, то из предложения 4.5.10 вытекает, что $W_*M_*^{-1} \subset U$ для некоторого $W_* \in \mathcal{N}_e$ и $M_* \subset W \subset \overline{M}_*$. Положим $W = W_* \cap U$ и $M = M_* \cup \{e\}$. □

Из леммы 4.6.1 вытекает, что $WM^{-1} \subset U$ для некоторого $W \in \mathcal{N}_e$, $W \subset U$ и $M \subset W \subset \overline{M}$. Так как $\widetilde{W}$ открыто и плотно в W и M плотно в W, то существует $y \in \widetilde{W} \cap M$. Так как $Wy^{-1} \subset U$, то

$$e \in \widetilde{W}y^{-1} \subset \widetilde{Wy^{-1}} \subset \widetilde{U}.$$

Противоречие с тем что $e \notin \widetilde{U}$.

Группа H является полутопологической группой.

Лемма 4.6.2. *Пусть $M \subset G$, $W \in \mathcal{N}_e$. Тогда $H \cap \overline{M} \subset MW^{-1}$.*

Доказательство. Пусть $x \in H \cap \overline{M}$. Тогда $xW \cap M \neq \varnothing$. Следовательно, $x \in MW^{-1}$. □

Покажем, что H является квазитопологической группой, то есть для $U \in \mathcal{N}_e$ существет такое $W \in \mathcal{N}_e$, для которого $H \cap W \subset U^{-1}$. Из леммы 4.6.1 вытекает, что $WM^{-1} \subset U$ для некоторого $W \in \mathcal{N}_e$ и $M \subset W \subset \overline{M}$. Из леммы 4.6.2 вытекает, что

$$H \cap W \subset H \cap \overline{M} \subset MW^{-1} \subset U^{-1}.$$

Покажем, что H является паратопологической группой, то есть для $U \in \mathcal{N}_e$ существет такое $S \in \mathcal{N}_e$, для которого $(H \cap S)^2 \subset U$. Из леммы 4.6.1 вытекает, что $WM^{-1} \subset U$ для некоторого $W \in \mathcal{N}_e$ и $M \subset W \subset \overline{M}$ так что $e \in M$ и $W \subset U$. Также $VL^{-1} \subset W$ для некоторого $V \in \mathcal{N}_e$ и $L \subset V \subset \overline{V}$ так что $e \in L$ и $V \subset W$. Тогда $MLV^{-1} \subset U^{-1}$. Из леммы 4.6.2 вытекает, что $H \cap \overline{ML} \subset MLV^{-1} \subset U^{-1}$. Положим $W_* = W \cap H$ и $V_* = V \cap H$. Так как $\overline{M}L \subset \overline{ML}$ и $W_* \subset \overline{M}$, то $W_*L \subset \overline{ML}$. Так как $V_* \subset \overline{L}$ и $W_* \subset H$, то $W_*V_* \subset W_*\overline{L} \subset \overline{ML}$. Получаем $W_*V_* \subset U^1$. Так как $V_* \subset W_*$, то $(V \cap H)^2 \subset U^{-1}$. Так как H квазитопологиская группа, то $S \cap H \subset V^{-1}$ для некоторого $S \in \mathcal{N}_e$. Тогда $(H \cap S)^2 \subset U$. □

Из теоремы 4.20 вытекает

Теорема 4.21. *Пусть G есть R-полутопологическая $O(fl)$-топологическая $g\Delta_s$-бэровская группа. Тогда G является топологической группой.*

Теорема 4.22. *Пусть G есть R-полутопологическая $O(dfl)$-топологическая $g\Delta_s$-бэровская группа. Тогда*

(1) *G является $g\Delta_v$-бэровской группой;*

(2) *если G полурегулярна, то G является топологической группой.*

Доказательство. Пункт (2) вытекает из пункта (1), теоремы 4.19 (3) и теоремы 4.15. Докажем (1). Из теоремы 4.20 вытекает, что $H = \Lambda^*(G)$ плотно в G и H является топологической группой.

Лемма 4.6.3. *Пусть $U \in \mathcal{N}_e$. Существует такое $V \in \mathcal{N}_e$, что $\overline{V}^2 \subset \overline{U}$.*

Доказательство. Существует такое $V \in \mathcal{N}_e$, что $V_* = V_*^{-1}$ и $V_*^2 \subset U$, где $V_* = V \cap H$. Тогда $V_*\overline{V_*} \subset \overline{U}$ и $\overline{V_*}\,\overline{V_*} \subset \overline{U}$. Так как $\overline{V_*} = \overline{V}$, то $\overline{V}^2 \subset \overline{U}$. □

В силу предложения 4.5.12 ($g\Delta_s$), достаточно показать, что для $U \in \mathcal{N}_e$ существует такое $W \in \mathcal{N}_e$, что $WW^{-1} \subset \overline{U}$. Из леммы 4.6.3 вытекает, что существуют такие $V, S \in \mathcal{N}_e$ что $\overline{V}^2 \subset \overline{U}$ и $\overline{S}^2 \subset \overline{V}$. Тогда $S^{-1}S^{-1} \subset \overline{V}^{-1}$. Из леммы 4.1.1 вытекает $\overline{S^{-1}} \subset \overline{V}^{-1}$. Так как H плотно в G и H является топологической группой, то $e \in \operatorname{Int} \overline{S^{-1}}$. Положим $W = V \cap \operatorname{Int} \overline{S^{-1}}$. Тогда $W \in \mathcal{N}_e$, $W^{-1} \subset \overline{V}$ и $W \subset V$. Получаем $WW^{-1} \subset \overline{V}^2 \subset \overline{U}$. □

Лемма 4.6.4. *Пусть G есть R-полутопологическая $O(qpe)$-топологическая группа, $U \in \mathcal{T}^*$ и $M \subset G = \overline{M}$. Для любого положительного $n \in \omega$ существует $x \in M$ и $V \in \mathcal{N}_e$, так что $V^n x \subset U$.*

Доказательство. Докажем индукцией по n.

$n = 1$. Пусть $x \in U \cap M$ и $V = Ux^{-1}$.

$n > 1$. По предположению индукции, существует $x_* \in U \cap M$ и $V_* \in \mathcal{N}_e$, для которых $V_*^{n-1} x_* \subset U$. Пусть $h \in V_* x_*$. Так как G есть $O(qpe)$-топологическая группа, то существует $g \in V_* x_* h^{-1}$ и $S \in \mathcal{N}_e$, так что $S^2 g \subset V_* x_* h^{-1}$. Пусть $x \in Sgh \cap M$ и

$$V = Sghx^{-1} \cap S \cap V_*.$$

Тогда $V^2 x \subset SSgh \subset V_* x_*$ и $V^n x \subset V_*^{n-1} x_* \subset U$. □

Теорема 4.23. *Пусть G есть R-полутопологическая $O(dfl, fpe)$-топологическая $g\Delta$-бэровская группа.*

(1) *Если G π-полурегулярное пространство, то G является $g\Delta_v$-бэровской группой;*

(2) *Если G полурегулярное пространство, то G является топологической группой.*

Доказательство. Группа $H = \Lambda_f^*(G)$ плотна в G. Из предложения 4.1.2 ($(dfl, fpe, r) \to (qpe)$) вытекает, что G является $O(qpe)$-топологической группой, то есть умножение в G квази непрерывно по первой координате в (e, e).

Лемма 4.6.5. $\operatorname{Int} S^{-1} \neq \varnothing$ *для любого канонически открытого $S \in \mathcal{T}^*$.*

Доказательство. Из леммы 4.6.4 вытекает, что существует $g \in S \cap H$ и $U \in \mathcal{N}_e$, так что $U^2 g \subset S$. Из предложения 4.5.12 ($g\Delta$) вытекает, что $WW^{-1} \subset \overline{U}^d$ для некоторого $W \in \mathcal{N}_e$. Так как $\overline{U}^d \subset \overline{U^2}$, то

$$WW^{-1} g \subset \overline{U}^d g \subset \overline{U^2} g \subset \overline{S}.$$

Так как S канонически открытое подмножество G и $WW^{-1}g$ открыто, то $WW^{-1}g \subset S$. Тогда $g^{-1}WW^{-1} \subset S^{-1}$. Так как $g \in H$, то $\operatorname{Int} g^{-1}WW^{-1} \neq \varnothing$. Следовательно, $\operatorname{Int} S^{-1} \neq \varnothing$. □

Пункт (2) вытекает из пункта (1) и теоремы 4.19. Докажем (1). Так как G π-полурегулярное пространство, то из леммы 4.6.5 вытекает, что G является $O(fie)$-топологической группой. Из предложения 4.1.2 ($(dfl, fie, r) \to (fl, fi)$) вытекает, что G является $O(fl, fi)$-топологической группой. Итак, группа G является $O(fl, qpe, fi, r)$-топологической группой. Пусть $U \in \mathcal{N}_e$. Покажем, что $\operatorname{Int} \overline{U}^d \subset \overline{U}$. Предположим противное. Тогда $S = \operatorname{Int} \overline{U}^d \setminus \overline{U} \neq \varnothing$. Из леммы 4.6.4 вытекает, что существует $q \in S$ и $Q \in \mathcal{N}_e$, так что $Q^2 q \subset S$. Так как G

является $O(fi)$-топологической группой, то $\operatorname{Int}(Qq)^{-1} \neq \varnothing$ и $Vg^{-1} \subset \operatorname{Int}(Qq)^{-1}$ для некоторых $g \in Qq$ и $V \in \mathcal{N}_e$. Получаем $gV^{-1} \subset Qq$ и $QgV^{-1} \subset Q^2q \subset S$. Так как $QgV^{-1} \cap U = \varnothing$, то $Qg \cap UV = \varnothing$ и $g \notin \overline{UV} \supset \overline{U}^d$. Противоречие с тем, что $g \in S \subset \overline{U}^d$.

Мы показали, что $\operatorname{Int}\overline{U}^d \subset \overline{U}$. Из предложения 4.5.12 ($g\Delta$) вытекает, что $WW^{-1} \subset \overline{U}^d$ для некоторого $W \in \mathcal{N}_e$. Так как $WW^{-1} \in \mathcal{T}^*$, то $WW^{-1} \subset \operatorname{Int}\overline{U}^d \subset \overline{U}$. □

Предложение 4.6.6. *Пусть G есть R-полутопологическая $O(qpe)$-топологическая $g\Delta_h$-бэровская группа. Тогда G является квази регулярным пространством.*

Доказательство. Пусть $U \in \mathcal{T}^*$. Из леммы 4.6.4 вытекает, что $V^3g \subset U$ для некоторых $g \in U$ и $V \in \mathcal{T}^*$. Так как $\overline{V}^h \subset V^2$, то из предложения 4.5.12 ($g\Delta_h$) вытекает, что $WW^{-1} \subset \overline{V}^h \subset V^2$ для некоторого $W \in \mathcal{N}_e$. Тогда $SVg \subset U$, где $S = WW^{-1}$. Так как $S = S^{-1}$, то из леммы 4.1.1 вытекает, что $\overline{V} \subset SV$. Следовательно, $\overline{Vg} \subset U$. □

Теорема 4.24. *Пусть G есть R-полутопологическая $O(dfl, fpe)$-топологическая $g\Delta_h$-бэровская группа. Тогда*

(1) *G является $g\Delta_v$-бэровской группой;*

(2) *если G полурегулярное пространство, то G является топологической группой.*

Доказательство. Пункт (1) вытекает из теоремы 4.23 (1) и предложения 4.6.6. Пункт (2) вытекает из пункта (1) и теоремы 4.19. Также, пункт (2) вытекает из теоремы 4.23 (2). □

Теорема 4.25. *Пусть G есть полутопологическая $O(dl, fie)$-топологическая $g\Delta_h$-бэровская группа. Тогда*

(1) *G является $g\Delta_v$-бэровской группой;*

(2) *если G полурегулярное пространство, то G является топологической группой.*

Доказательство. Пункт (2) вытекает из пункта (1) и теоремы 4.19. Докажем (1). Из предложения 4.1.2 ($(dfl, fie, r) \to (fl, fi)$) вытекает, что G является $O(fi)$-топологической группой. Группа $H = \Lambda^*(G)$ плотна в G. Пусть $U \in \mathcal{N}_e$.

Лемма 4.6.7. $\operatorname{Int}\overline{U}^h \subset \overline{U}$.

Доказательство. Предположим противное. Тогда $S = \operatorname{Int} \overline{U}^h \setminus \overline{U} \neq \varnothing$. Так как G является $O(fi)$-топологической группой, то $\operatorname{Int} S^{-1} \neq \varnothing$. Тогда $Qg^{-1} \subset \operatorname{Int} S^{-1}$ для некоторого $g \in H \cap S$ и $Q \in \mathcal{N}_e$. Тогда $gQ^{-1} \subset S$ и $\overline{Q^{-1}} \subset g^{-1}\overline{S}$. Из предложения 4.5.12 ($g\Delta_h$) вытекает, что $V = WW^{-1} \subset \overline{Q^{-1}}$ для некоторого $W \in \mathcal{N}_e$. Тогда $gV \subset \overline{S}$ и $gV \cap U = \varnothing$. Следовательно, $g \notin UV \supset \overline{U}^h$. Противоречие с $g \in S \subset \overline{U}^h$. □

Из предложения 4.5.12 ($g\Delta_h$) вытекает, что $WW^{-1} \subset \overline{U}^h$ для некоторого $W \in \mathcal{N}_e$. Тогда $WW^{-1} \subset \operatorname{Int} \overline{U}^h \subset \overline{U}$. □

4.7 Основные результаты о R-полутопологических группах

В этом разделе мы сформулируем следствия из раздела 4.6.

Пусть G право полутопологическая группа. Множество $P \subset G \times G$ называется полуокрестностью диагонали, если $P(x) = \{y \in G : (x, y) \in P\}$ является окрестностью (не обязательно открытой) точки $x \in G$. Для окрестности единицы $U \in \mathcal{N}_e$, $\mathfrak{N}(U) = \{(x, y) \in G^2 : yx^{-1} \in U\}$ есть полуокрестностью диагонали.

Для $\widetilde{\Delta} \in \{\Delta, \Delta_g, \Delta_s\}$, пространство G (право полутопологическая группа G) является $\widetilde{\Delta}$-тучным ($g\widetilde{\Delta}$-бэровской), если для любой полуокрестности диагонали P (полуокрестности диагонали вида $P = \mathfrak{N}(U)$, где U окрестность единицы) существует открытое непустое $W \subset G$, так что выполняется условие ($\widetilde{\Delta}$):

(Δ) $W \times W \subset \overline{P \cap (W \times W)}$;

(Δ_h) $W \subset \overline{\{x : (x, y) \in P\}}$ для всех $y \in W$;

(Δ_s) $W \subset \overline{\{x : \{x\} \times W \subset P\}}$.

Пусть $\mathcal{P}_k$ ($\mathcal{P}_c$) есть наименьший класс пространств, который

- содержит p-пространства и сильно Σ-пространства;
- замкнут относительно произвольных (счетных) произведений;
- переходу к открытым подпространствам.

Пусть $\mathcal{D}_d$ наименьший класс пространств, который

- содержит Σ-пространства, $w\Delta$-пространства и слабо компактные пространства;

- замкнут относительно произведений на пространства из класса $\mathcal{P}_k$;
- переходу к открытым подпространствам.

Пусть $\mathcal{D}_h$ наименьший класс пространств, который

- содержит Σ-пространства и $w\Delta$-пространства;
- замкнут относительно произведений на пространства из класса $\mathcal{P}_c$;
- переходу к открытым подпространствам.

Пусть $\mathcal{D}_s$ есть класс полурегулярных пространств, которые содержат метризуемое тучное подмножество. К этому классу принадлежат бэровские полурегулярные пространства из следующих классов:

- σ-пространства, пространства со счетной сетью;
- моровские, разлагаемые пространства.

Теорема 4.26. *Пусть G есть право полутопологическая группа.*

($g\Delta$) *Право полутопологическая группа G является $g\Delta$-бэровской если G является Δ-тучным пространством. Класс Δ-тучных пространств содержит $\Gamma_{o,l}^{\widehat{OD}}$-тучные пространства, которые содержат регулярные бэровские пространства из класса $\mathcal{D}_d$.*

($g\Delta_h$) *право полутопологическая группа является $g\Delta_h$-бэровской если G является Δ_h-тучным пространством. Класс Δ_h-тучных пространств содержит $\Gamma_{p,l}^{\widehat{OD}}$-тучные пространства, которые содержат регулярные бэровские пространства из класса $\mathcal{D}_h$.*

($g\Delta_s$) *Право полутопологическая группа является $g\Delta_s$-бэровской если она является Δ_s-тучным пространством. Класс Δ_s-тучных пространств содержит $\Gamma_f^{\widehat{BM}}$-тучные и CDP-тучные пространства. Классы Δ_s-тучных и CDP-тучных пространств содержат класс $\mathcal{D}_s$.*

Доказательство. ($g\Delta$) Из предложения 4.5.12 вытекает, что право полутопологическая группа является $g\Delta$-бэровской если G является Δ-тучным пространством. Из предложения 3.10.1 (1) вытекает, что $\Gamma_{o,l}^{\widehat{OD}}$-тучные пространство является Δ-тучным. Из теоремы 3.28 вытекает, что класс $\Gamma_{o,l}^{\widehat{OD}}$-тучных пространств содержит регулярные бэровские пространства из класса $\mathcal{D}_d$.

($g\Delta_h$) Из предложения 4.5.12 вытекает, что право полутопологическая группа является $g\Delta_h$-бэровской если G является Δ_h-тучным пространством. Из предложения 3.10.1 (2) вытекает, что $\Gamma_{p,l}^{\widehat{OD}}$-тучные пространство является Δ_h-тучным. Из теоремы 3.28 вытекает, что класс $\Gamma_{p,l}^{\widehat{OD}}$-тучных пространств содержит регулярные бэровские пространства из класса $\mathcal{D}_h$.

($g\Delta_s$) Из предложения 4.5.12 вытекает, что право полутопологическая группа является $g\Delta_s$-бэровской если G является Δ_s-тучным пространством. Из предложения 3.10.1 (3) вытекает, что $\Gamma_f^{\widehat{BM}}$-тучные пространство является Δ_s-тучным. Из теоремы 3.28 вытекает, что класс $\Gamma_f^{\widehat{BM}}$-тучных пространств содержит регулярные бэровские пространства из класса $\mathcal{D}_s$. Из предложения 3.12.1 вытекает, что CDP-тучные пространства являются Δ_s-тучными пространствами. Из предложения 3.11.7 вытекает, что пространства из класса $\mathcal{D}_s$ являются CDP-тучными. □

Теорема 4.27 (Предложения 4.1.2 $(pe, sie, r) \to (ie)$)**.** *Пусть G есть R-паратопологическая группа с полу преднепрерывной в e операцией $g \mapsto g^{-1}$ взятия обратного элемента. Тогда G является R-топологической группой.*

Теорема 4.28 (Теорема 4.15)**.** *Пусть G есть R-топологическая группа. Если множество $\Lambda_f^*(G)$ плотно в G, то G является топологической группой.*

Теорема 4.29. *Пусть G есть $g\Delta$-бэровская право полутопологическая группа.*

(1) *Если G является R-паратопологической группой, то G является R-топологической группой.*

(2) *Если G полурегулярное пространство, множество $\Lambda_f^*(G)$ плотно в G и умножение $\mathfrak{m} : G \times G \to G,\ (g, h) \mapsto gh$ слабо непрерывно в (e, e), то G является топологической группой.*

Доказательство. Пункт (1) вытекает из теоремы 4.19 (5). Пункт (2) вытекает из теоремы 4.23. □

Лемма 4.7.1. *Пусть G есть компактная хаусдофова право полутопологическая группа. Тогда $\Lambda(G) = \Lambda^*(G)$.*

Доказательство. Ясно, $\Lambda(G) \supset \Lambda^*(G)$. Пусть $g \in \Lambda(G)$. Отображение $\lambda_g : G \to G$ есть биективное непрерывно отображение компактных хаусдофовых пространств. Следовательно, λ_g является гомеоморфизмами и отображение $(\lambda_g)^{-1} = \lambda_{g^{-1}}$ непрерывно, то есть $g^{-1} \in \Lambda^*(G)$. □

Следствие 4.30 ([23, Proposition 3.2])**.** *Если G — CHART группа со слабо непрерывным умножением, то G — топологическая группа.*

Доказательство. Из леммы 4.7.1 вытекает, что $\Lambda(G) = \Lambda^*(G) \subset \Lambda_f^*(G)$ и $\Lambda_f^*(G)$ плотно в G. Из теоремы 4.29 (2) вытекает, что G топологическая группа. □

Теорема 4.31. *Пусть G есть полурегулярная $g\Delta_h$-бэровская право полутопологическая группа.*

(1) *Если G R-квазитопологическая группа, то G является R-топологической группой.*

(2) *Если множество $\Lambda^*(G)$ плотно в G и отображение взятия обратного элемента $\mathfrak{i} : G \to G$, $g \mapsto g^{-1}$ слабо непрерывно в e, то G является топологической группой.*

Доказательство. Пункт (1) вытекает из теоремы 4.19 (2) и (4). Пункт (2) вытекает из теоремы 4.25. □

Теорема 4.32. *Пусть G есть $g\Delta_s$-бэровская право полутопологическая группа.*

(1) *Если λ_g слабо непрерывно для любого $g \in G$, то G является топологической группой.*

(2) *Если G полурегулярное пространство и множество $\Lambda^*_f(G)$ плотно в G, то G является топологической группой.*

Доказательство. Пункт (1) вытекает из теоремы 4.21. Пункт (2) вытекает из теоремы 4.22. □

Следствие 4.33. (MA(τ)) Пусть G есть CHART группа и $w(G) < \tau$. Тогда G является топологической группой.

Доказательство. У CHART групп существует правоинвариантная мера Хаара [24; 67]. Следовательно, у G счетное число Суслина. Из следствия 3.30 вытекает, что G является CDP-пространством. Следовательно, X является является CDP-тучным пространством. Из теоремы 4.32 (2) вытекает, что G топологическая группа. □

Так как $MA(\omega)$ выполняется в ZFC, то из следствия 4.33 вытекает

Следствие 4.34 (Theorem 2.1 [124]). *Пусть G есть метризуемая CHART группа. Тогда G является топологической группой.*

4.8 Примеры

Пример 4.35 (Пример 4.16). Существует метризуемая компактная R-топологическая не топологическая группа.

Пример 4.36. Пусть $G = \mathbb{R}$ с топологией, открытые множества которой имеют вид $U \setminus P$, где U открыто в $\mathbb{R}$ и P нигде не плотно в $\mathbb{R}$. Группа G является квазитопологической $O(qpe)$-топологической квазирегулярной хаусдорфовой $g\Delta_v$-бэровской $g\Delta_h$-бэровской Δ-бэровской не Δ_h-тучной группой, которая не является топологической группой.

Пример 4.37. Пусть $G = \mathbb{R}^2$ с топологией, у которой база точки $(x_*, y_*) \in G$ образуют множества вида

$$(U \cap \{(x,y) \in G \,:\, y > y_*\}) \cup \{(x_*, y_*)\},$$

где U есть открытая окрестность (x_*, y_*) в стандартной топологии $\mathbb{R}^2$ [35]. Группа G является хаусдорфовой квазирегулярной не регулярной паратопологической группой.

Пример 4.38 (Example 2.13 [35])**.** Существует метризуемая бэровская лево полутопологическая группа G, которая не является право полутопологической, в которой инверсия почти непрерывна, но не слабо непрерывна. Группа G является Δ_s-бэровской.

Пример 4.39. Пусть G есть псевдокомпактная булева квазитопологическая группа, которая не является топологической группой (Пример 3.42). Группа G является тихоновской Δ-бэровской не $g\Delta_h$-бэровской группой.

Задача 4.40. Пусть G есть (полу) регулярная R-полутопологическая группа. Какие из перечисленных ниже условий влекут, что G есть R-топологическая группа?

(1) Группа G является $g\Delta$-бэровской (Δ-бэровской, псевдокомпактной) и умножение $\mathfrak{m}$ в G квази (слабо) непрерывно (в (e,e)).

(2) Группа G является $g\Delta_h$-бэровской (Δ_h-бэровской, счетно компактной, компактной) и умножение $\mathfrak{m}$ в G квази (слабо) непрерывно (в (e,e)).

(3) Группа G является $g\Delta_s$-бэровской (Δ_s-бэровской, метризуемой бэровской) и умножение $\mathfrak{m}$ в G квази (слабо) непрерывно (в (e,e)).

(4) Группа G является $g\Delta_h$-бэровской (Δ_h-бэровской, счетно компактной, компактной) и операция взятия обратного $\mathfrak{i}$ в G квази (слабо) непрерывна (в e).

(5) Группа G является $g\Delta_s$-бэровской (Δ_s-бэровской, метризуемой бэровской) и операция взятия обратного $\mathfrak{i}$ в G квази (слабо) непрерывна (в e).

Задача 4.41. Пусть G есть (полу) регулярная $g\Delta_h$-бэровская (Δ_h-бэровской, счетно компактная, компактная) R-полутопологическая группа,

$$H_{fl} = \{g \in G \,:\, \lambda_g \text{ и } \lambda_{g^{-1}} \text{ слабо непрерывно}\},$$
$$H_l = \{g \in G \,:\, \lambda_g \text{ и } \lambda_{g^{-1}} \text{ непрерывно}\}.$$

Какие из перечисленных ниже условий влекут, что G есть топологическая группа?

(1) $G = \overline{H_{fl}}$.

(2) $G = \overline{H_l}$.

(3) $G = H_{fl}$.

Пространство X называется *слабо псевдокомпактным* если существует компактное хаусдорфово расширение bX пространства X, в котором пространство X G_δ-плотно, то есть X пересекается с любым непустом G_δ подмножеством bX [9]. Ясно, произведение слабо псевдокомпактных пространств слабо псевдокомпактно, в частности, произведение псевдокомпактных пространств слабо псевдокомпактно.

Задача 4.42. Пусть G есть (полу) регулярная полутопологическая группа. Какие из перечисленных ниже условий влекут, что G есть топологическая группа?

(1) Группа G является $g\Delta_h$-бэровской (Δ_h-бэровской).

(2) Группа G является паратопологической и G слабо псевдокомпактна (произведение псевдокомпактных пространств, произведение двух псевдокомпактных пространств) (Вопрос 3.47).

(3) Группа G слабо компактна и принадлежит одному из следующих классов пространств: сепарабельна; счетной тесноты; k-пространство (Problem 3.5 [29]).

Глава 5

Топологические свойства однородных пространств, мальцевских пространств и групп с топологией

5.1 Предварительные результаты

Последовательности в пространствах

Определение 5.1. Последовательность $\zeta = (x_n)_{n\in\omega}$ назовем *почти точной* если существут $N \in \omega$ так что $x_n \neq x_m$ для $n \neq m$ и $n, m > N$. Последовательность ζ назовем *почти стационарной* если существут $N \in \omega$ так что $x_n = x_m$ для $n, m > N$.

Утверждение 5.1.1. *Пусть $X = \prod_{n\in\omega} X_n$ есть произведение пространств, $M \subset X$ бесконечное подмножество, $\pi_n : X \to X_n$ проекция. Тогда существует точная последовательность $(x_k)_{k\in\omega} \subset M$, так что $(\pi_n(x_k)_{k\in\omega}$ либо почти стационарная, либо почти точная дискретная последовательность в X_n для всех n.*

Доказательство. Без труда по индукции строиться последовательность бесконечных множеств $(M_n \subset M)_{n\in\omega}$, так что для всех n $M_{n+1} \subset M_n$ и либо $|\pi_n(M_n)| = 1$ либо $\pi_n \restriction_M$ иньективное отображение и множество $\pi_n(M_n)$ дискретно в X_n. Пусть $(x_k)_{k\in\omega}$ точная последовательность, для которой $x_k \in M_k$ для всех k. □

Утверждение 5.1.2. *Пусть X пространство, $(U_n)_{n\in\omega} \in \mathfrak{O}(X)$. Существует бесконечное $M \subset \omega$ и семейство непустых открытых множеств $(V_n)_{n\in M}$ так что $V_n \subset U_n$ для $n \in M$ и выполняется одно из условий:*

(1) $\{V_n : n \in M\}$ дизъюнктное семейство;

(2) все V_n сопадают и состоят из одной точки.

Доказательство. Рассмотрим два случая.

Первый случий. Для любого конечного множество $U_n \setminus K$ не пусто K и бесконечно многих n. Тогда по индукции строится бесконечное $M' \subset \omega$ и последовательность $(x_n)_{n\in M'}$ так что $x_n \in U_n$ и $x_m \neq x_n$ для различных $n, m \in M'$. Выберем бесконечное $M \subset M'$ так что множество $\{x_n : n \in M\}$ дискретно. Возмем окрестности W_n так что семейство $\{W_n : n \in M\}$ дизъюнктно. Положим $V_n = U_n \cap W_n$. Тогда выпоняется (1).

Второй случай. Существует конечное $K \subset X$, которое содержит U_n для почти всех n. Тогда сущестут $U \subset K$ и бесконечное $M \subset \omega$ так что $U_n = U$ для $n \in M$. Пуст $u \in U$ и $V_n\{u\}$ для $n \in M$. Тогда выпоняется (2). □

Утверждение 5.1.3. *Пусть $X = \prod_{n\in\omega} X_n$ есть произведение пространств, $(W_k)_{k\in\omega} \in \mathfrak{O}(X)$. Существует возрастающая последовательность $(n_k)_{k\in\omega} \subset \omega$, $(U_{n,k})_{k\in\omega} \in \mathfrak{O}(X_n)$ для $n \in \omega$ так что $\prod_{n\in\omega} U_{n,k} \subset W_{n_k}$ и для $\zeta_n = \{U_{n,k} : k > n\}$ выполняется одно из условий*

(1) ζ_n дизъюнктное семейство;

(2) ζ_n состоит из совпадающих одноточечных элементов

для каждого $n \in \omega$.

Доказательство. Существуют $(V_{n,k})_{k\in\omega} \in \mathfrak{O}(X_n)$ для $n \in \omega$ так что $\prod_{n\in\omega} V_{n,k} \subset W_k$.

Используя утверждение 5.1.2 несложно строиться убывающая последовательность $(M_n)_{n\in\omega}$ бесконечных подмножеств ω и семейство последовательностей $(Q_{n,k})_{k\in\omega} \in \mathfrak{O}(X_n)$ так что $Q_{n,k} \subset V_{n,k}$ для всех n, k и выполняется одно из условий:

(1) $\{Q_{n,k} : k \in M_n\}$ дизъюнктное семейство;

(2) $\{Q_{n,k} : k \in M_n\}$ состоит из совпадающих одноточечных элементов.

Существует возрастающая последовательность $(n_k)_{k\in\omega} \subset \omega$, так что $n_k \in M_k$ для $k \in \omega$. Положим $U_{n,k} = Q_{n,n_k}$ для $k, n \in \omega$. □

Утверждение 5.1.4. *Пусть X пространство, $(U_n)_{n\in\omega}, (V_n)_{n\in\omega} \in \mathfrak{O}_d(X)$. Выполняется одно из условий:*

(1) $U_n = V_n$ и $|U_n| = 1$ для почти всех n;

(2) существует бесконечное $M \subset \omega$ и семейства непустых открытых множеств $(U'_n)_{n\in M}, (V'_n)_{n\in M}$ так что $\bigcup_{n\in M} U'_n \cap \bigcup_{n\in M} V'_n = \varnothing$ и $U'_n \subset U_n$, $V'_n \subset V_n$ для всех $n \in M$.

Доказательство. Предположим что (1) не выполняется. Тогда существует бесконечное $M' \subset \omega$ и семейства непустых открытых множеств $(U''_n)_{n\in M}$, $(V''_n)_{n\in M}$ так что $U''_n \cap V''_n = \varnothing$ и $U''_n \subset U_n$, $V''_n \subset V_n$ для всех $n \in M'$. Положим $A_n = \{m \in M' : U''_n \cap V''_m \neq \varnothing,\ m > n\}$ и $B_n = \{m \in M' : U''_m \cap V''_n \neq \varnothing,\ m > n\}$ для $n \in M'$. Рассмотрим три случая.

Первый случай. Множество A_n бесконечно для некоторого $n \in M'$. Положим $M = A_n$, $U'_m = U''_m$, $V'_m = V''_m \cap U_n$ для $m \in M$.

Второй случай. Множество B_n бесконечно для некоторого $n \in M'$. Положим $M = B_n$, $U'_m = U''_m \cap V_n$, $V'_m = V''_m$ для $m \in M$.

Третий случай. Множества A_n и B_n конечны для всех $n \in M'$. Существут последовательность $(m_k)_{k\in\omega} \subset M'$, так что $m_{k+1} > m_k$, $m_{k+1} > \max A_{m_k}$, $m_{k+1} > \max B_{m_k}$ для всех k. Положим $M = \{m_k : k \in \omega\}$, $U'_m = U''_m$, $V'_m = V''_m \cap U_n$ для $m \in M$. □

Экстремально несвязные пространства и ультрафильтры

Утверждение 5.1.5. *[69; 116; 136] Следующие условия эквивалентны для тихоновского пространства X:*

(1) X экстремально несвязно;

(2) каждое плотное подмножество X экстремально несвязно;

(3) каждое открытое подмножество X экстремально несвязно;

(4) каждое плотное подмножество X C^*-вложенно;

(5) каждое открытое подмножество X C^*-вложенно.

Из определений вытекает

Утверждение 5.1.6. *Пространство X $\beta\omega$ пространство если и только если $|u_x(\zeta)| \le 1$ для $x \in X$ и $\zeta \in \mathfrak{s}_{dk}(X)$.*

Предложение 5.1.7. *Пусть X пространство.*

(1) если X содержит бесконечный компакт, то $\mathrm{sp}_k(X) = \omega^*$;

(2) если X однородное пространство, то $\mathrm{sp}(X) = \mathrm{sp}(x, X)$ и $\mathrm{sp}_k(X) = \mathrm{sp}_k(x, X)$ для любого $x \in X$.

Доказательство. (1) Так как X содержит бесконечный компакт, то $\mathfrak{s}_{dk}(X) \neq \varnothing$. Если $\zeta \in \mathfrak{s}_{dk}(X)$, то $u_X(\zeta) = \omega^*$. (2) Из однородности X вытекает что $\mathrm{sp}(x, X) = \mathrm{sp}(y, X)$ и $\mathrm{sp}_k(x, X) = \mathrm{sp}_k(y, X)$ для $x, y \in X$. □

Предложение 5.1.8. *(Фролик, [128]) Пусть X ED пространство, $x \in X$. Множество* $\operatorname{sp}(x, X)$ *линейно упорядоченно относительно порядка Кейслера-Рудин.*

Предложение 5.1.9. *Пусть X $\beta\omega$ пространство, $x \in X$. Множество* $\operatorname{sp}_k(x, X)$ *линейно упорядоченно относительно порядка Кейслера-Рудин.*

Доказательство. Пусть $p, q \in \operatorname{sp}_k(x, X)$. Тогда для некоторых $\zeta, \xi \in \mathfrak{s}_{dk}(X)$ выполняется $\{p\} = u_x(\zeta)$ и $\{q\} = u_x(\zeta)$. Пусть M есть множество изолированных точек $\zeta \cup \xi$, $K = \overline{M}$. Тогда $\zeta, \xi \subset K$ и $p, q \in \operatorname{sp}(x, K)$. Так как K гомеоморфно $\beta\omega$ и экстремально несвязно то из предложения 5.1.8 вытекает что p и q сравнимы. □

Предложение 5.1.10. *(Kunen, Lemma 4, [73]) Пусть $p, q \in \omega^*$ есть слабые P-точки и несравнимы относительно порядка Кейслера-Рудин. Пусть X есть компактное F-пространство и $\zeta = (x_n)_{n\in\omega} \in \mathfrak{s}_d(X)$, $\xi = (y_n)_{n\in\omega} \in \mathfrak{s}(X)$. Предположим что $x = \lim_p \zeta = \lim_q \xi$. Тогда $\{n : y_n = x\} \in q$. .*

Из предложения 5.1.10 вытекает

Предложение 5.1.11. *Пусть $p, q \in \omega^*$ есть слабые P-точки и несравнимы относительно порядка Кейслера-Рудин. Пусть X есть F-пространство и $\zeta = (x_n)_{n\in\omega} \in \mathfrak{s}_{dk}(X)$, $\xi = (y_n)_{n\in\omega} \in \mathfrak{s}_k(X)$. Предположим что $x = \lim_p \zeta = \lim_q \xi$. Тогда $\{n : y_n = x\} \in q$. .*

Предложение 5.1.12. *(Simon, [83], см. также [108; 109]) Существует $C \subset \omega^*$, $|C| = 2^{2^\omega}$, состоящее из попарно несравнимых относительно порядка Кейслера-Рудин слабо P ультрафильтров.*

Предложение 5.1.13. *[144] (CH) Существует $C \subset \omega^*$, $|C| = 2^{2^\omega}$, состоящее из попарно несравнимых относительно порядка Кейслера-Рудин селективных ультрафильтров.*

Утверждение 5.1.14. *Пусть X $\beta\omega$ пространство, A множество, K компактное подпространство X^A. Предположим выполняется одно из условий:*

(1) A конечно и K бесконечно;

(2) A бесконечно и $w(K) > |A|$.

Тогда в K вкладывается $\beta\omega$.

Доказательство. Для $\alpha \in A$ пусть $\pi_\alpha : X^A \to X$ есть проекция на α-ый сомножитель. Существует $\alpha \in A$, для которого $\pi_\alpha(K)$ бесконечно. Пусть M есть счетное дискретное подпространство K, для которого $\pi_\alpha \restriction_M$ иньективно и $\pi_\alpha(M)$ есть дискретное подпространство X. Тогда $\overline{M}$ гомеоморфно $\beta\omega$. □

Утверждение 5.1.15. *Пусть X $\beta\omega$ пространство, $p \in \omega^*$ селективный ультрафильтр, $\zeta = (z_n)_{n\in\omega} \in \mathfrak{s}(X^\omega)$, $z = \lim_p \zeta \in X^\omega$. Предположим что $\{z\} \cup \{z_n : n \in M\}$ неметризуемо для любого $M \in p$. Пусть $\pi_k : X^\omega \to X$ есть проекция X^ω на k-ый сомножитель. Тогда существует $m \in \omega$ и $N \in p$ так что последовательность $(\pi_m(z_n))_{n\in N}$ является дискретной и точной, то есть множество $\{\pi_m(z_n) : n \in N\}$ дискретно и $\pi_m(x_j) \neq \pi_m(x_i)$ для различных $i, j \in N$.*

Доказательство. Сначала найдем такое $m \in \omega$, что $\pi_m(M)$ бесконечно для для любого $M \in p$. Предположим что такого m не существует. Для каждого $m \in \omega$ зафиксируем $M_m \in p$ так что $|\pi_m(M_m)| = 1$. Так как p селективный ультрафильтр, то существует $M \in p$ так что $M_m \setminus M$ конечно для любого $m \in \omega$. Тогда $\{z\} \cup \{z_n : n \in M\}$ метризуемо. Противоречие.

Пусть $(U_n)_{n\in\omega}$ есть такая последовательность окрестностей точки $\pi_m(z)$ так что $\pi_m(\zeta)\cap\bigcap_{n\in\omega} U_n$ состоит не более чем из одной точки и $U_{i+1} \subset \overline{U_{i+1}} \subset U_i$ для $i \in \omega$. Обозначим $N_n = \{i \in \omega : \pi_m(x)i) \in U_n\}$. Тогда $N_n \in p$. Так как p селективный ультрафильтр, то существует $N \in p$ так что $|N \cap N_i \setminus N_{i+1}| \leq 1$ для $i \in \omega$. Тогда $\{\pi_m(z_n) : n \in N\}$ дискретно и $\pi_m(x_j) \neq \pi_m(x_i)$ для различных $i, j \in N$. □

Счетно компактные и псевдокомпактные произведение пространств

Несложно проверяется

Утверждение 5.1.16. *Пусть $\{X_\alpha : \alpha \in A\}$ семейство пространвнсть, $\zeta_\alpha = (R_{\alpha,n})_{n\in\omega}$ последовательность непустых подмножеств X_α, $R_n = \prod_{\alpha\in\omega} R_{\alpha,n}$. Последовательность $(R_n))_{n\in\omega}$ локально конечна (иными словами, не имеет точек накопления) в $\prod_{\alpha\in A} X_\alpha$ если и только если $\bigcap_{\alpha\in A} u_{X_\alpha}(\zeta_\alpha) = \varnothing$.*

Предложение 5.1.17. *Пусть X пространство и τ кардинал.*

(a) Следущие условия эквивалентны:

(1) X счетно компактно;

(2) $u(\zeta) \neq \varnothing$ для всех $\zeta \in \mathfrak{s}(X)$;

(3) $u(\zeta) \neq \varnothing$ для всех $\zeta \in \mathfrak{s}_d(X)$.

(b) Следущие условия эквивалентны:

(1) X^ω счетно компактно;

(2) $\bigcap_{\zeta\in\gamma} u(\zeta) \neq \varnothing$ для всех $\gamma \subset \mathfrak{s}(X)$, $|\gamma| \leq \omega$;

(3) $\bigcap_{\zeta\in\gamma} u(\zeta) \neq \varnothing$ для всех $\gamma \subset \mathfrak{s}_d(X)$, $|\gamma| \leq \omega$.

(c) *Следущие условия эквивалентны:*

(1) *X^τ счетно компактно;*

(2) *$\bigcap_{\zeta\in\gamma} u(\zeta) \neq \varnothing$ для всех $\gamma \subset \mathfrak{s}(X)$, $|\gamma| \leq \tau$.*

Доказательство. Из утверждения 5.1.16 вытекает эквивалентность пунктов (1) и (2) в (a), (b) и (c). В разделах (a) и (b), импликация (2) $\Longrightarrow$ (3) очевидно. В (a), (3) $\Longrightarrow$ (2) вытекает из того что каждое счетное множество содержит дискретное счетное подпространство.

Докажем (3) $\Longrightarrow$ (2) для (b). Обозначим через π_n проекцию X^ω на n-ый сомножитель. Пусть $M \subset X$ бесконечное подмножество. Из утверждения 5.1.1 вытекает, что существует точная последовательность $(x_k)_{k\in\omega} \subset M$, так что $(\pi_n(x_k)_{k\in\omega}$ либо почти стационарная, либо почти точная дискретная последовательность в X. Из (3) вытекает, что $P = \bigcap_{\zeta\in\gamma} u(\zeta) \neq \varnothing$, где $\gamma = \{(\pi_n(x_k)_{k\in\omega} \,:\, n \in \omega\}$. Возмем $p \in P$. Пусть y_n есть p-предел последовательности $(\pi_n(x_k)_{k\in\omega}$, $y = (y_n)_{n\in\omega}$. Тогда точка y является p-пределом $(x_k)_{k\in\omega}$. Следовательно, y есть точка накопления множества M. □

Предложение 5.1.18. *Пусть X пространство и τ бесконечный кардинал.*

(a) *Следущие условия эквивалентны:*

(1) *X псевдокомпактно;*

(2) *$u(\zeta) \neq \varnothing$ для всех $\zeta \in \mathfrak{O}(X)$;*

(3) *$u(\zeta) \neq \varnothing$ для всех $\zeta \in \mathfrak{O}_d(X)$.*

(b) *Следущие условия эквивалентны:*

(1) *X^ω псевдокомпактно;*

(2) *$\bigcap_{\zeta\in\gamma} u(\zeta) \neq \varnothing$ для всех $\gamma \subset \mathfrak{O}(X)$, $|\gamma| \leq \omega$;*

(3) *$\bigcap_{\zeta\in\gamma} u(\zeta) \neq \varnothing$ для всех $\gamma \subset \mathfrak{O}_d(X)$, $|\gamma| \leq \omega$;*

(4) *X^τ псевдокомпактно.*

Доказательство. Пункт (a) вытекает из утверждения 5.1.2. Докажем (b).

(1) $\Longrightarrow$ (2) Пусть $\gamma = \{(U_{n,k})_{k\in\omega} \,:\, n \in \omega\} \subset \mathfrak{O}(X)$. Положим

$$V_{n,k} = \begin{cases} X & k < n \\ U_{n,k} & k \geq n \end{cases}$$

Отметим, $u((U_{n,k})_{k\in\omega}) = u((V_{n,k})_{k\in\omega})$. Множество $V_k = \prod_{n\in\omega} V_{n,k}$ открыто, в X^ω. Из псевдокомпактности X^ω вытекает, что $(V_k)_{k\in\omega}$ не локально конечное семейство. Из утверждения 5.1.16 вытекает, что $\bigcap_{\zeta\in\gamma} u(\zeta) = \bigcap_{n\in\omega} u((V_{n,k})_{k\in\omega}) \neq \varnothing$.

(2) $\Longrightarrow$ (1). Пусть $(W_k)_{k\in\omega} \in \mathfrak{O}(X^\omega)$. Существуют такие $(V_{n,k})_{k\in\omega} \in \mathfrak{O}(X)$ так что $\prod_{n\in\omega} V_{n,k} \subset V_k$. Из утверждения 5.1.16 вытекает, что $(V_k)_{k\in\omega}$ не локально конечно.

(2) $\Longrightarrow$ (3) очевидно.

(3) $\Longrightarrow$ (1). Пусть $(W_k)_{k\in\omega} \in \mathfrak{O}(X^\omega)$. В силу утверждения 5.1.3, существует возрастающая последовательность $(n_k)_{k\in\omega} \subset \omega$, $(U_{n,k})_{k\in\omega} \in \mathfrak{O}(X)$ для $n \in \omega$ так что $\prod_{n\in\omega} U_{n,k} \subset W_{n_k}$ и для $\zeta_n = \{U_{n,k} \,:\, k > n\}$ выполняется одно из условий

(1) ζ_n дизьюнктное семейство;

(2) ζ_n состоит из совпадающих одноточечных элементов

для каждого $n \in \omega$. Из (3) вытекает, что $\bigcap_{n\in\omega} u((U_{n,k})_{k\in\omega}) \neq \varnothing$. Из утверждения 5.1.16 вытекает, что $(W_k)_{k\in\omega}$ не локально конечно.

(3) $\Longleftrightarrow$ (4) доказано в [137]. $\square$

Определение 5.2. Пусть $p \in \omega^*$ ультрафильтр. Пространство X назовем *дискретно p-компактным* если для любой дискретной точной последовательности $(x_n)_{n\in\omega} \subset X$ существует p-предел.

Определение 5.3. Пусть $p \in \omega^*$ ультрафильтр. Пространство X назовем *секвенциально p-компактным* если для каждого бесконечного $M \subset X$ существует бесконечное $L \subset M$ так что для любой точной последовательности $(x_n)_{n\in\omega} \subset L$ существует p-предел.

Так как в каждом бесконечном множестве можно выбрать бесконечное дискретное подпространство, то верно

Предложение 5.1.19. *Пусть $p \in \omega^*$ ультрафильтр. Любое дискретно p-компактное пространство является секвенциально p-компактным пространством.*

Предложение 5.1.20. *Пусть X секвенциально p-компактное пространство. Тогда X^ω секвенциально p-компактное пространство.*

Доказательство. Пусть $M \subset X^\omega$ бесконечно. В силу утверждения 5.1.1, существует точная последовательность $(x_k)_{k\in\omega} \subset M$, так что $(\pi_n(x_k)_{k\in\omega}$ либо почти стационарная, либо почти точная дискретная последовательность в X для всех n, где $\pi_n : X \to X$ проекция на n-ый сомножитель. Существует убывающая последовательность $(S_n)_{n\in\omega}$ бесконечных подмножеств ω, так что для каждого $n \in \omega$ выполняется одно из условий

(1) $\pi_n(x_i) = \pi_n(x_j)$ для $i, j \in S_n$;

(2) $\pi_n(x_i) \neq \pi_n(x_j)$ для различных $i, j \in S_n$ и для каждой точной последовательности $(y_l)_{l\in\omega} \subset \{\pi_n(x_k) : k \in S_n\}$ существует p-предел.

Возьмем такую точную последовательность $(s_n)_{n\in\omega}$ что $s_n \in S_n$ для всех n. Положим $L = \{x_{s_k} : k \in \omega\}$. Тогда для любой точной последовательности $(y_n)_{n\in\omega} \subset L$ существует p-предел. $\square$

Предложение 5.1.21. *Пусть X компактное $\beta\omega$ пространство, $M \subset X$, $|M| < 2^{2^\omega}$, $Y = X \setminus M$. Тогда Y дискретно p-компактное пространство для некоторого $p \in \omega^*$.*

Доказательство. Предположим противное, то есть для любого $p \in \omega^*$ существует $\zeta_p \in \mathfrak{s}_d(Y)$, для которогой $\lim_p \zeta_p \notin Y$. В силу утверждения 5.1.12, существует $C \subset \omega^*$, $|C| = 2^{2^\omega}$, состоящее из попарно несравнимых относительно порядка Кейслера-Рудин ультрафильтров. Так как $|C| > |M|$ то $x = \lim_p \zeta_p = \lim_q \zeta_q \in M$ для некоторых различных $p, q \in C$. Тогда $p, q \in \operatorname{sp}_k(x, X)$. Противоречие с предложением 5.1.9. $\square$

5.2 Однородные пространства

Однородные произведения пространств

Пусть A, B и X множества, $\varphi : B \to A$ биекция, $p, q \in X^A$ и τ бесконечный кардинал. Обозначим

$$\begin{aligned} H(X^A) &\coloneqq \{f \in X^A : |f^{-1}(x)| = |A| \text{ для всех } x \in X\}, \\ \operatorname{supp}(p, q) &\coloneqq \{\alpha \in A : p(\alpha) \neq q(\alpha)\}, \\ \sigma_\tau(X^A, p) &\coloneqq \{q \in X^A : |\operatorname{supp}(p, q)| < \tau\}, \\ \Sigma_\tau(X^A, p) &\coloneqq \sigma_{\tau^+}(X^A, p), \\ \varphi^\# &: X^A \to X^B,\ r \mapsto r \circ \varphi. \end{aligned}$$

Группа $S(A)$, множество всех биекций множества A, естественным образом действует на A и на X^A, $\theta\alpha = \theta(\alpha)$ и $\theta f = f \circ \theta^{-1}$, $\theta f(\alpha) = f(\theta^{-1}(\alpha))$ для $\theta \in S(A)$, $\alpha \in A$ и $f \in X^A$. Для $\theta \in S(A)$ обозначим

$$\tilde{\theta} : X^A \to X^A,\ f \mapsto \theta f.$$

Отметим, что $\tilde{\theta} = (\theta^{-1})^\#$.

Из определений вытекает следующее утверждение.

Утверждение 5.2.1.

(1) $\varphi^\#$ является биекцией X^A на X^B.

(2) $\varphi^{\#}(H(X^A)) = H(X^B)$.

(3) $\varphi^{\#}(\sigma_\tau(X^A, p)) = \sigma_\tau(X^B, \varphi^{\#}(p))$.

Утверждение 5.2.2. *Пусть* $p, q, r \in X^A$ *и* $\theta \in S(A)$. *Тогда*

(1) $\operatorname{supp}(p, q) = \operatorname{supp}(q, p)$*;*

(2) $\operatorname{supp}(p, r) \subset \operatorname{supp}(p, q) \cup \operatorname{supp}(p, q)$*;*

(3) Следующие условия эквивалентны:

(a) $\sigma_\tau(X^A, p) = \sigma_\tau(X^A, q)$*;*

(b) $|\operatorname{supp}(p, q)| < \tau$*;*

(c) $q \in \sigma_\tau(X^A, p)$*;*

(d) $p \in \sigma_\tau(X^A, q)$*;*

(4) $\theta \operatorname{supp}(p, q) = \operatorname{supp}(\theta p, \theta q)$*;*

(5) $\theta\sigma_\tau(X^A, p) = \sigma_\tau(X^A, \theta p)$.

Доказательство. Пункты (1) и (2) очевидны.

(3) Эквивалентность $(b) \Leftrightarrow (c) \Leftrightarrow (c)$ вытекает из определений. Для доказательства $(b) \Rightarrow (c)$ достаточно показать, что $\sigma_\tau(X^A, p) \supset \sigma_\tau(X^A, q)$. Пусть $r \in \sigma_\tau(X^A, q)$. Тогда, в силу (2), $\operatorname{supp}(p, r) \subset \operatorname{supp}(p, q) \cup \operatorname{supp}(p, q)$ и

$$|\operatorname{supp}(p, r)| \le |\operatorname{supp}(p, q)| + |\operatorname{supp}(p, q)| < \tau.$$

Следовательно, $r \in \sigma_\tau(X^A, p)$.

(4) Пусть $\alpha \in A$. Тогда $\alpha \in \theta \operatorname{supp}(p, q) \Leftrightarrow \theta^{-1}(\alpha) \in \operatorname{supp}(p, q) \Leftrightarrow p(\theta^{-1}(\alpha)) \ne q(\theta^{-1}(\alpha)) \Leftrightarrow \theta p(\alpha) \ne \theta q(\alpha) \Leftrightarrow \alpha \in \operatorname{supp}(\theta p, \theta q)$.

$\theta\sigma_\tau(X^A, p) = \sigma_\tau(X^A, \theta p)$. (5) Пусть $r \in X^A$. Тогда $r \in \theta\sigma_\tau(X^A, p) \Leftrightarrow \theta^{-1} r \in \sigma_\tau(X^A, p) \Leftrightarrow |\operatorname{supp}(\theta^{-1} r, p)| < \tau$. Из (4) вытекает, что $\theta \operatorname{supp}(\theta^{-1} r, p) = \operatorname{supp}(r, \theta p)$, следовательно, $|\operatorname{supp}(\theta^{-1} r, p)| < \tau \Leftrightarrow |\operatorname{supp}(r, \theta p)| < \tau \Leftrightarrow r \in \sigma_\tau(X^A, \theta p)$. □

Утверждение 5.2.3.

(1) $H(X^A) \ne \varnothing$ *если и только если* $|X| \le |A|$.

(2) Множество $H(X^A)$ *является орбитой действия группы* $S(A)$ *на множество* X^A.

(3) Если $p \in H(X^A)$ *и* $\tau \le |A|$, *то* $\sigma_\tau(X^A, p) \subset H(X^A)$.

Доказательство. (1) Если $\theta \in H(X^A)$, то $\theta(X) = A$. Если $|X| \leq |A|$, то $|X \times A| = |A|$ и $\theta = \pi \circ i \in H(X^A)$, где $i : A \to X \times A$ биекция и $\pi : X \times A \to X,\ (x, \alpha) \mapsto x$ проекция.

(2) Пусть $p \in H(X^A)$. Покажем, что $\theta p \in H(X^A)$ для $\theta \in S(A)$. Так как $(\theta p)^{-1}(x) = \theta(p^{-1}(x))$ и $|(\theta p)^{-1}(x)| = |p^{-1}(x)| = |A|$ для любого $x \in X$, то есть $\theta p \in H(X^A)$.

Пусть $q \in H(X^A)$. Покажем, что $q = \theta p$ для некоторого $\theta \in S(A)$. Так как $|A| \geq |X|$ и $|p^{-1}(x)| = |q^{-1}(x)| = |A|$ для $x \in X$, то существуют биекции $f, g : X \times A \to A$, так что $\pi = p \circ f = q \circ g$, где $\pi : X \times A \to X,\ (x, \alpha) \mapsto x$ есть проекция. Положим $\theta = g \circ f^{-1}$. Тогда $\theta \in S(A)$ и

$$\theta p = p \circ \theta^{-1} = p \circ f \circ g^{-1} = \pi \circ g^{-1} = q.$$

(3) Пусть $q \in \sigma_\tau(X^A, p)$ и $x \in X$. Тогда $\operatorname{supp}(q, p)| < \tau$ и $p^{-1}(x) \subset q^{-1}(x) \cup \operatorname{supp}(q, p)$. Так как $|p^{-1}(x)| = |A|$ и $\operatorname{supp}(q, p)| < \tau \leq |A|$, то $|q^{-1}(x)| = |A|$. $\square$

Утверждение 5.2.4. *Пусть $|X| \leq |A|$, $\tau \leq |A|$, $p \in H(X^A)$, $Y = \sigma_\tau(X^A, p)$.*

(1) Пусть $q, r \in Y$. Тогда $\tilde{\theta}(q) = r$ для некоторого $\theta \in S(A)$ и $\tilde{\theta}(Y) = Y$.

(2) Пусть $\alpha^* \notin A$, $A^* = A \cup \{\alpha^*\}$ и $x^* \in X$. Обозначим

$$p^* : A^* \to X,\ \alpha \mapsto \begin{cases} p(\alpha), & \text{если } \alpha \neq \alpha^*, \\ x^*, & \text{если } \alpha = \alpha^*, \end{cases}$$

$Y^* = \sigma_\tau(X^{A^*}, p^*)$. Тогда $p^* \in H(X^{A^*})$ и существует биекция $\psi : A \to A^*$ так что $\psi(p) = p^*$ и $Y = \psi^\#(Y^*)$.

Доказательство. Докажем (1). Отображение $\tilde{\theta}$ биекция X^A на себя, так как $(\mu, s) \mapsto \theta p$ для $\mu \in S(A)$ и $s \in X^A$ является действием. Из утверждения 5.2.3 (3) вытекает, что $Y \subset H(X^A)$. Из утверждения 5.2.3 (2) вытекает, что $\theta q = r$ для некоторого $\theta \in S(A)$. Из утверждения 5.2.2 (5) вытекает, что $\theta\sigma_\tau(X^A, q) = \sigma_\tau(X^A, r)$. Из утверждения 5.2.2 (3) вытекает, что

$$Y = \sigma_\tau(X^A, p) = \sigma_\tau(X^A, q) = \sigma_\tau(X^A, r).$$

Следовательно, $\theta Y = Y$ и $\tilde{\theta}(Y) = Y$.

Докажем (2). Так как $|A| = |A^*|$ и $p^{-1}(x) \subset p^{*-1}(x)$ для $x \in X$, то $p^* \in H(X^{A^*})$. Так как множество $p^{-1}(x^*)$ бесконечно, то существует биекция $\psi : A \to A^*$ так что $\psi(\alpha) = \alpha$ если $p(\alpha) \neq x^*$ и $\psi(\alpha) \in p^{-1}(x^*) \cup \{\alpha^*\}$ если $p(\alpha) = x^*$. По построению, $\psi^\#(p^*) = p$. Из утверждения 5.2.1 вытекает, что $\psi^\#(Y^*) = Y$ $\square$

Далее, X есть топологическое пространство с топологией $\mathcal{T}$. Пусть λ ест кардинал. Обозначим через $\mathcal{B}_\lambda(X^A)$ топологию на X^A, базу которой образуют множества вида $\prod_{\alpha\in A} U_\alpha$, где $U_\alpha \in \mathcal{T}$ для $\alpha \in A$ и $|\{\alpha \in A \,:\, U_\alpha \neq X\}| < \lambda$. Назовем топологию $\mathcal{B}_\lambda(X^A)$ λ-*ящечной топологией* на X^A. ω-ящечная топология это тихоновская топология на X^A. Если $\lambda > \tau$, то λ-ящечная топология это ящичная топология на X^A.

Пусть d есть ограниченная метрика на X. Положим

$$\rho_{[X^A,d]}(p,q) \coloneqq \sup\{d(p(\alpha),q(\alpha)) \,:\, \alpha \in A\}$$

для $p,q \in X^A$. Функция $\rho_{[X^A,d]}$ это sup-метрика на X^A.

Утверждение 5.2.5.

(1) Отображение $\varphi^\# : X^A \to X^B$ является гомеоморфизмом относительно λ-ящечных топологий и изометрией относительно sup*-метрик.*

(2) Для $\theta \in S(A)$, отображение $\tilde\theta$ является автогомеоморфизмом пространства X^A с λ-ящечной топологией и изометрией пространства X^A на себя с sup*-метрикой.*

Доказательство. Пункт (1) очевиден. Так как $\tilde\theta = (\theta^{-1})^\#$, то из (1) вытекает (2). □

Определение 5.4. Пусть X множество, $\mathcal{T}$ топология на X, τ и λ есть бесконечные кардиналы, d метрика на X. Положим

$$\begin{aligned}
H_\tau(X) &\coloneqq \sigma_\tau(X^A,p),\\
H_\tau^\lambda(X) &\coloneqq (H_\tau(X),\mathcal{T}'),\\
HB_\tau(X) &\coloneqq H_\tau^\lambda(X) \qquad \text{если } \lambda > \tau|X|,\\
HM_\tau^d(X) &\coloneqq (H_\tau(X),d'),
\end{aligned}$$

где $A = X\times X\times\tau$; $p : A \to X,\ (x,y,\alpha)\mapsto x$; $\mathcal{T}'$ есть топология на $H_\tau(X)$, индуцированная с X^A с λ-ящечной топологии $\mathcal{B}_\lambda(X^A)$; d' есть sup-метрика $\rho_{[X^A,d]}$, ограниченная на $H_\tau(X)$.

Если $\tau = \omega$, то $|A| = |X| + \omega$ и $|H_\omega(X)| = |X| + \omega$. Получаем следующее утверждение.

Предложение 5.2.6. $|H_\omega(X)| = |X| + \omega$.

Теорема 5.5. *Пусть X пространство, τ и λ бесконечные кардиналы и $Y = H_\tau^\lambda(X)$. Тогда*

(1) $X\times Y$ гомеоморфно Y;

(2) Y однородное пространство.

Доказательство. Пусть $A = X\times X\times\tau$ и $p : A \to X,\ (x, y, \alpha) \mapsto x$. Очевидно, $p \in H(X^A)$. Тогда $Y = \sigma_\tau(X^A, p)$ в λ-ящечной топологией.

Докажем (1). Пусть $\alpha^* \notin A$, $A^* = A\cup\{\alpha^*\}$ и $x^* \in X$. Обозначим

$$p^* : A^* \to X,\ \alpha \mapsto \begin{cases} p(\alpha), & \text{если } \alpha \neq \alpha^*, \\ x^*, & \text{если } \alpha = \alpha^*, \end{cases}$$

$Y^* = \sigma_\tau(X^{A^*}, p^*)$ в λ-ящечной топологией. Из построения вытекает, что Y^* гомеоморфно $X \times Y$: $q \mapsto (q(\alpha^*), q|_A)$. Из утверждения 5.2.4(2) вытекает, что существует биекция $\psi : A \to A^*$ так что $Y = \psi^\#(Y^*)$. Из утверждения 5.2.5(1) вытекает, что $\psi^\#$ есть гомеоморфизм. Следовотельно, Y гомеоморфно Y^*.

Докажем (2). Пусть $q, r \in Y$. Тогда, в силу утверждения 5.2.4(1), $\tilde\theta(q) = r$ для некоторого $\theta \in S(A)$ и $\tilde\theta(Y) = Y$. Из утверждения 5.2.5(2) вытекает, что $\tilde\theta$ есть гомеоморфизм. Следовательно, $\nu = \tilde\theta\Big|_Y \in \mathrm{Aut}(Y)$ и $nu(q) = r$. □

Так как $HB_\tau(X) = H^\lambda_\tau(X)$ для $\lambda > \tau|A|$, то из теоремы 5.5 вытекает следующее утверждение.

Теорема 5.6. *Пусть X пространство, τ бесконечный кардинал и $Y = HB_\tau(X)$. Тогда*

(1) $X \times Y$ гомеоморфно Y;

(2) Y однородное пространство.

Теорема 5.7. *Пусть X метрическое пространство, τ бесконечный и $Y = HM_\tau(X)$. Тогда*

(1) $X \times Y$ изометрично Y;

(2) Y метрически однородное пространство.

Доказательство. Пусть $A = X\times X\times\tau$ и $p : A \to X,\ (x, y, \alpha) \mapsto x$. Очевидно, $p \in H(X^A)$. Тогда $Y = \sigma_\tau(X^A, p)$ с sup-метрикой.

Докажем (1). Пусть $\alpha^* \notin A$, $A^* = A\cup\{\alpha^*\}$ и $x^* \in X$. Обозначим

$$p^* : A^* \to X,\ \alpha \mapsto \begin{cases} p(\alpha), & \text{если } \alpha \neq \alpha^*, \\ x^*, & \text{если } \alpha = \alpha^*, \end{cases}$$

$Y^* = \sigma_\tau(X^{A^*}, p^*)$ с sup-метрикой. Из построения вытекает, что Y^* изометрично $X \times Y$: $q \mapsto (q(\alpha^*), q|_A)$. Из утверждения 5.2.4(2) вытекает, что существует биекция $\psi : A \to A^*$ так что $Y = \psi^\#(Y^*)$. Из утверждения 5.2.5(1) вытекает, что $\psi^\#$ есть изометрия. Следовотельно, Y изометрично Y^*.

Докажем (2). Пусть $q, r \in Y$. Тогда, в силу утверждения 5.2.4(1), $\tilde\theta(q) = r$ для некоторого $\theta \in S(A)$ и $\tilde\theta(Y) = Y$. Из утверждения 5.2.5(2) вытекает, что $\tilde\theta$ есть изометрия. Следовательно, $\nu = \tilde\theta\big|_Y \in \mathrm{Aut}_{\mathrm{M}}(Y)$ и $nu(q) = r$. $\square$

Множество $H_\omega(X)$ это σ-произведение и $H_{\omega_1}(X)$ это Σ-произведение. Для применения теорем сформулируем факты о σ и Σ произведениях.

Предложение 5.2.7. *Пусть $\mathcal{P}$ есть один из ниже перечисленных классов пространств:*

(1) σ-компактные пространства;

(2) линделефовы Σ-пространства;

(3) $\mathcal{K}$-аналитические пространства;

(4) пространства, линделефовые в конечных степенях;

(5) пространства, паракомпактные в конечных степенях;

(6) пространства, имеющие в конечных степенях счетную тесноту;

(7) счетные пространства.

Если $X \in \mathcal{P}$, то $H^\omega_\omega(X) \in \mathcal{P}$.

Доказательство. Пространство $H^\omega_\omega(X)$ это σ-произведение в X^A с топологией тихоновского произведения. Достаточно показать, что для $X \in \mathcal{P}$ любое σ-произведение в X^A принадлежит классу $\mathcal{P}$. Утверждения, соответствующие пунктам (1), (2) и (3), доказаны в [95], (4) — в [111], (5) — в [120] и (6) — в [121]. Пункт (7) вытекает из $|H^\omega_\omega(X)| = |X| + \omega$. $\square$

Утверждение 5.2.8. *Пусть $\mathcal{P}$ класс пространств, для которого выполняются условия:*

(1) если $X \in \mathcal{P}$, то $X^\omega \in \mathcal{P}$;

(2) если $X \in \mathcal{P}$ и $F \subset X$ замкнуто, то $F \in \mathcal{P}$;

(3) если X пространство и $\overline{M} \in \mathcal{P}$ для всех счетных $M \subset X$, то $X \in \mathcal{P}$.

Тогда если $X \in \mathcal{P}$, то $Y \in \mathcal{P}$ для Σ-произведение $Y = \Sigma_\tau(X^A, p)$ в X^A с топологией тихоновского произведения.

Доказательство. Любое счетное $M \subset Y$ лежит в замкнутом подпространстве, гомеоморфном X^ω. Из (1) и (2) вытекает, что $\overline{M} \in \mathcal{P}$. Из (3) вытекает $Y \in \mathcal{P}$. $\square$

Предложение 5.2.9. *Пусть $\mathcal{P}$ есть один из ниже перечисленных классов пространств:*

(1) ω-ограниченные пространства;

(2) секвенциально компактные пространства;

(3) тотально счетно компактные пространства;

(4) $\mathcal{P} = \{X : X$ p-компактное пространство$\}$, где $p \in \omega^*$;

(5) $\mathcal{P} = \{X : X$ секвенциально p-компактное пространство$\}$, где $p \in \omega^*$;

(6) пространства, счетно компактные в счетной степени;

(7) пространства, псевдокомпактные в счетной степени.

Если $X \in \mathcal{P}$, то $H^{\omega}_{\omega_1}(X) \in \mathcal{P}$.

Доказательство. Пространство $H^{\omega}_{\omega_1}(X)$ это Σ-произведение в X^A с топологией тихоновского произведения. Достаточно показать, что для $X \in \mathcal{P}$ любое Σ-произведение в X^A принадлежит классу $\mathcal{P}$. Утверждения, соответствующие пунктам (1)–(6) вытекают из утверждения 5.2.8. Условие (1) утверждения 5.2.8 (сохранения счетной степенью класса пространств) несложно проверяются и широко известны для классов пространств из (1)–(6), для пространств из (5) сохранения счетной степенью вытекает из предложения 5.1.20.

Докажем (7). Пусть $Y = \sigma_{\omega_1}(X^A, p) \subset X^A$ Σ-произведение и $(U_n)_{n\in\omega}$ есть счетная последовательность элементов стандартной базы в X^A, $U_n = \prod_{\alpha\in A} U_{n,\alpha}$, $S_n = \{\alpha \in A : U_{n,\alpha} \neq X\}$, $|S_n| < \omega$ для $n \in \omega$. Пусть $S = \bigcap_{n\in\omega} S_n$. Тогда $|S| \leq \omega$ и, так как X^S псевдокампактно, последовательность $U'_n = \prod_{\alpha\in S} U_{n,\alpha}$ имеет предельную точку q' в X^S. Определим $q \in X^A$:

$$q(\alpha) = \begin{cases} q'(\alpha), & \alpha \in S, \\ p(\alpha), & \alpha \notin S, \end{cases}$$

для $\alpha \in A$. Тогда $q \in Y$ и q есть предельная точка для последовательности $(U_n \cap Y_n)_{n\in\omega}$. □

Предложение 5.2.10 (Теорема 6.2 [98]). *Пространство X является паракомпактным σ-пространством, если и только если на X существует непрерывная метрика d и в X существует сеть, которая является σ-дискретным семейством в метрическом пространстве (X, d).*

Предложение 5.2.11. *Пусть X есть паракомпактное σ-пространство, $Y = \sigma_\omega(X^A, p)$ σ-произведение в X^A с ящечной топологией. Тогда Y есть паракомпактное σ-пространство.*

Доказательство. Воспользуемся предложением 5.2.10 и возьмем непрерывную метрику d на X и σ-дискретную сеть $\mathcal{N}$ пространства X, которая является сетью для метрического пространства (X,d). Можно считать, что d ограниченная метрика. Положим

$$\begin{aligned} Y_n &= \{q \in X^A : |\operatorname{supp}(q,p)| = n\}, \\ Y_n^* &= \bigcup_{i=0}^{n} Y_n = \{q \in X^A : |\operatorname{supp}(q,p)| \le n\}, \\ \mathcal{L}_n &= \{\prod_{\alpha\in A} M_\alpha : \ B = \{\alpha \in A : M_\alpha \neq \{p(\alpha)\}\},\ |B| = n, \\ &\qquad\qquad M_\alpha \in \mathcal{N} \text{ и } p(\alpha) \notin M_\alpha \text{ для } \alpha \in B\}. \end{aligned}$$

для $n \in \omega$. Положим

$$\rho = \rho_{[X^A,d]}, \qquad \mathcal{L} = \bigcup_{n\in\omega} \mathcal{L}_n.$$

Ясно, $\mathcal{L}_n$ является σ-дискретной сетью в Y_n. Метрика ρ непрерывна в ящечной топологии, $Y = \bigcup_{n\in\omega} Y_n = \bigcup_{n\in\omega} Y_n^*$, множество Y_n^* замкнуто в (Y,ρ), поэтому множество Y_n типа F_σ в Y. Следовательно, $\mathcal{L}$ есть σ-дискретная сеть в Y и $\mathcal{L}$ является сетью в (Y,ρ). □

Предложение 5.2.12. *Пусть $\mathcal{P}$ есть один из ниже перечисленных классов пространств:*

(1) кружевные пространства;

(2) паракомпактные σ-пространства.

Если $X \in \mathcal{P}$, то $HB_\omega(X) \in \mathcal{P}$.

Доказательство. Пространство $HB_\omega(X)$ это σ-произведение в X^A с топологией ящечного произведения. Достаточно показать, что для $X \in \mathcal{P}$ любое σ-произведение в X^A с топологией ящечного произведения принадлежит классу $\mathcal{P}$. Утверждение, соответствующие пункту (1), доказаны в [107]. Пункт (2) вытекает из предложения 5.2.11. □

Из теорем 5.5, 5.6 и 5.7 и предложений 5.2.7, 5.2.9 и 5.2.12 вытекает следующее утверждение.

Теорема 5.8. *Пусть $\mathcal{P}$ есть один из ниже перечисленных классов пространств:*

(1) σ-компактные пространства;

(2) линделефовы Σ-пространства;

(3) $\mathcal{K}$-аналитические пространства;

(4) пространства, линделефовые в конечных степенях;

(5) пространства, паракомпактные в конечных степенях;

(6) пространства, имеющие в конечных степенях счетную тесноту;

(7) счетные пространства;

(8) ω-ограниченные пространства;

(9) секвенциально компактные пространства;

(10) тотально счетно компактные пространства;

(11) $\mathcal{P} = \{X : X$ p-компактное пространство$\}$, где $p \in \omega^*$;

(12) $\mathcal{P} = \{X : X$ секвенциально p-компактное пространство$\}$, где $p \in \omega^*$;

(13) пространства, счетно компактные в счетной степени;

(14) пространства, псевдокомпактные в счетной степени;

(15) метризуемые пространства;

(16) кружевные пространства;

(17) паракомпактные σ-пространства.

Если $X \in \mathcal{P}$, то существует такое однородное пространство $Y \in \mathcal{P}$, так что $X \times Y$ гомеоморфно Y.

Следствие 5.9. *Пусть X компактное пространство и $\mathcal{P}$ есть один из ниже перечисленных классов пространств:*

(1) σ-компактные пространства;

(2) счетно компактное пространства.

Существует пространство $Y \in \mathcal{P}$, так что $X \times Y$ однородно.

Моторов [80] построил метризуемый компакт X, так что $X \times Y$ не однородно для любого компакта Y. Этот пример показывает, что условия (1) и (2) в следствии 5.9 нельзя объединить.

Следствие 5.10. *Пусть X сепарабельное метризуемое пространство и $\mathcal{P}$ есть один из ниже перечисленных классов пространств:*

(1) линделефовы Σ-пространства;

(2) метризуемые пространства.

Существует пространство $Y \in \mathcal{P}$, так что $X \times Y$ однородно.

Предложение 5.2.13. *Пусть X сильно жесткое пространство, $X \subset Y$, пространство Y однородно и X является ретрактом Y. Тогда $s(Y) \geq |X|$.*

Доказательство. Пусть $r : Y \to Y$ есть непрерывная ретракция такая что $r(Y) = X$. Пусть $y^* \in Y$. Для каждого $x \in X$ зафиксируем автогомеоморфизм $f_x : Y \to Y$, так что $f_x(x) = y_*$. Пусть $\theta : X \to X$ есть такое иньективное отображение, что $\theta(x) \neq x$ для $x \in X$. Положим $\xi(x) = f_x(\theta(x))$ для $x \in X$.

Лемма. (1) $\xi(x) \neq \xi(y)$ *для различных $x, y \in X$;* (2) *множество $\{\xi(x) : x \in X\}$ дискретно.*

Доказательство. (1) От противного, предположим $\xi(x) = \xi(y)$ для некоторых различных $x, y \in X$. Положим

$$h = r \circ f_x^{-1} \circ f_y\big|_X : X \to X.$$

Тогда $h(y) = x \neq y$. Так как X сильно жесткое пространство и $h \neq \mathrm{id}_X$, то $h(X) = \{x\}$. Так как

$$f_x(\theta(x)) = \xi(x) = \xi(y) = f_y(\theta(y)),$$

то

$$x = h(\theta(y)) = r(f_x^{-1}(f_y(\theta(y)))) = r(f_x^{-1}(f_x(\theta(x)))) = r(\theta(x)) = \theta(x).$$

Противоречие с $\theta(x) \neq x$.

(2) От противного. Тогда существует такое $y \in X$, так что $\xi(y) \in \overline{M}$, где $M = \{\xi(x) : x \in X, x \neq y\}$. Положим $q = r \circ f_y^{-1}$. Тогда $q(y_*) = y$ и $q(\xi(y)) = \theta(y) \neq y$. Так как отображение q непрерывно и $\xi(y) \in \overline{M}$, то $q(\xi(x)) \neq y$ для некоторого $x \in X$, $x \neq y$. Положим

$$h = q \circ f_x|_X : X \to X.$$

Тогда $h(x) = q(f_x(x)) = q(y_*) = y$ и $h(\theta(x)) = q(\xi(x)) \neq y$. Так как пространство X сильно жесткое и $h(x) = y \neq x$, то $h \neq \mathrm{id}_X$ и, следовательно, $h(X) = \{y\}$. Противоречие с тем, что $h(\theta(x)) \neq y$. □

Из пункта (2) леммы вытекает, что $s(Y) \geq |X|$. □

Следствие 5.11. *Пусть X и Y сепарабельные метризуемые пространства и X сильно жесткое пространство. Тогда пространство $X \times Y$ не однородно.*

Пример 5.12. В [138] построено сепарабельное метризуемое сильно жесткое пространство X.

Из следствия 5.11 вытекает, что если Y сепарабельное метрической пространство, то $X \times Y$ не однородное пространство.

Этот пример показывает, что условия (1) и (2) в следствии 5.10 нельзя объединить.

Предложение 5.2.14. *Для любого $p \in \omega^*$ существуют экстремально несвязные пространства X и Y так что X p-компактно, Y секвенциально q-компактно для некоторого $q \in \omega^*$ и $X \times Y$ не псевдокомпактно.*

Доказательство. Пусть X есть наименьшее p-компактное подпространство $\beta\omega$, содержащие ω. Тогда $|X| \leq 2^\omega$. Положим $Y = \omega \cup (\beta\omega \setminus X)$. Так как $X \cap Y = \omega$ то $X \times Y$ не псевдокомпатно. Так как $|\beta\omega \setminus Y| \leq |X| \leq 2^\omega$ то из предложения 5.1.21 вытекает что Y секвенциально q-компактно для некоторого $q \in \omega^*$. $\square$

Теорема 5.13. *Для любого $p \in \omega^*$ существуют однородные пространства X и Y так что X p-компактно, Y секвенциально q-компактно для некоторого $q \in \omega^*$ и $X \times Y$ не псевдокомпактно. Пространство X^τ счетно компактно для любого τ и Y^ω счетно компактно.*

Доказательство. В силу предложения 5.2.14, существуют экстремально несвязные пространства X' и Y' так что X' p-компактно, Y' секвенциально q-компактно для некоторого $q \in \omega^*$ и $X' \times Y'$ не псевдокомпактно. Положим $X = H^\omega_{\omega_1}(X')$, $Y = H^\omega_{\omega_1}(Y')$. Из теоремы 5.5 вытекает что X, Y однородные пространства и $X \times Y$ непрерывно отображается на $X' \times Y'$. Следовательно, $X \times Y$ не псевдокомпактно. Из предложения 5.2.9 вытекает что X p-компактно и Y секвенциально q-компактно. Из предложения 5.1.20 вытекает что Y^ω счетно компактно. $\square$

Однородные подпространства произведений пространств

Теорема 5.14. *Пусть X однородное $\beta\omega$ пространство. Тогда любое компактное подпространство X конечно.*

Доказательство. Предположим противное, то есть что X содержит некоторое бесконечное компактное подпространство. Из предложения 5.1.7 вытекает что $\mathrm{sp}_k(x, X) = \omega^*$ для каждого $x \in X$. Противоречие с предложениями 5.1.9 и 5.1.12. $\square$

Следствие 5.15. *Пусть X однородное экстемально несвязное пространство. Тогда любое компактное подпространство X конечно.*

Следствие 5.15 также вытекает из Теоремы 2(c) из [103].

Теорема 5.16. *(CH) Пусть Y $\beta\omega$ пространство, $X \subset Y^\omega$ однородное пространство. Тогда любое компактное подпространство X метризуемо.*

Доказательство. Предположим противное, то есть что X содержит некоторое не метризуемое компактное подпространство K. Из утверждения 5.1.14 вытекает что существует $\zeta = (z_m)_{m\in\omega} \in \mathfrak{s}_{dk}(X)$ так что $\overline{\zeta}$ гомеоморфно $\beta\omega$. Пусть $z \in X$. Для каждого $p \in \omega^*$ зафиксируем $f_p \in \mathrm{Aut}(X)$, для которого $f_p(\lim_p \zeta) = z$.

В силу предложения 5.1.13 существует $C \subset \omega^*$, $|C| = 2^{2^\omega}$, состоящее из попарно несравнимых относительно порядка Кейслера-Рудин селективных ультрафильтров.

В силу утверждения 5.1.15, для каждого $p \in C$ существует $m_p \in \omega$ и $N_p \in p$ так что множество $\{\pi_{m_p}(z_n) : n \in N_p\}$ дискретно и $\pi_{m_p}(x_j) \neq \pi_{m_p}(x_i)$ для различных $i, j \in N_p$. Так как $|C| > \omega$ то существуют различные $p, q \in C$ так что $m = m_p = m_q$. Тогда $p, q \in \mathrm{sp}_k(\pi_m(z), X)$. Противоречие с предложением 5.1.9. $\square$

Следствие 5.17. *(CH) Пусть Y $\beta\omega$ пространство, $X \subset Y^\omega$ однородное компактное пространство. Тогда X метризуемо.*

Теорема 5.18. *(CH) Пусть Y $\beta\omega$ пространство, $n \in \omega$, $X \subset Y^n$ однородное пространство. Тогда любое компактное подпространство X конечно.*

Доказательство. Пусть $K \subset X$ компакт. Из теоремы 5.16 вытекает что K метризукемо. Так как метризуемые компакты в $\beta\omega$ пространствах конечны, то проекция K на любой сомножитель в Y^n конечна. Следовательно, K конечно. $\square$

Вопрос 5.19. Можно ли доказать теоремы 5.16 и 5.18 наивно. Что если дополнительно предположить, что Y F-пространство (ED пространство)?

Ниже мы будем считать, что натуральное число есть совокупность чисел, которые меньше него.

Пусть $X \subset Y^n$, где X, Y множества и $k, n \in \omega$. Будем писать $\dim_p(X) \geq k$ если существует $M \subset n$, $|M| = k$, $(x_i)_{i\in\omega} \subset X$ так что $\pi_m(x_i) \neq \pi_m(x_j)$ для $m \in M$ и различных $i, j \in \omega$. Положим

$$\dim_p(X) = \max\{m : \dim_p(X) \geq m\}$$

Обозначим через $\mathcal{S}(Y, n, k)$ семейство множеств вида $\{p\} \times Y^M$, где $M \subset n$, $|M| = k$ и $p \in Y^{n\setminus M}$. Обозначим

$$\mathcal{S}^*(Y, n, k) = \{\bigcup \gamma : \gamma \subset \mathcal{S}(Y, n, k), |\gamma| < \omega\}$$

Пусть $q \in Y^n$. Обозначим

$$\mathcal{S}_q(Y,n,k) = \{\{q \restriction_{n\setminus M}\} \times Y^M \,:\, M \subset n, |M| = k\}$$
$$\mathcal{S}^*_q(Y,n,k) = \bigcup \mathcal{S}_q(Y,n,k)$$

Утверждение 5.2.15. *Пусть Y бесконечное множества, $n \in \omega$, $k \leq n$ и $X \subset Y^n$.*

(1) Если $Z \subset X$, то $\dim_p(Z) \leq \dim_p(X)$.

(2) Если $X_1, X_2 \subset Y^n$ и $X = X_1 \cap X_2$, то $\dim_p(X) = \max(\dim_p(X_1), \dim_p(X_2))$.

(3) $\dim_p(Z) = k$ для всех $Z \in \mathcal{S}^*(Y,n,k)$.

(4) Пусть $q, r \in Y^n$. $q \in \mathcal{S}_r(Y,n,k)$ если и только если $|\{i < n \,:\, \pi_i(q) \neq \pi_i(r)\}| \leq k$.

(5) $\dim_p(X) \leq k$ если и только если $X \subset M$ для некоторого $M \in \mathcal{S}^*(Y,n,k)$.

(6) Пусть Y пространство. Если $q \in X$, $\dim_p(X) \leq k$, то $q \in \operatorname{int}_X(X \cap \mathcal{S}^*_q(Y,n,k))$.

Доказательство. (1) Очевидно. (2) Если $\dim_p(X) \geq k$ то из определения вытекает, что либо $\dim_p(X_1) \geq k$ либо $\dim_p(X_2) \geq k$. (3) Очевидно, $\dim_p(Q) = k$ для $Q \in \mathcal{S}(Y,n,k)$. Далее применяем (2). (4) Вытекает из определений.

Докажем (5). Из (1) и (3) вытекает, что если $X \subset M$ для некоторого $M \in \mathcal{S}^*(Y,n,k)$ то $\dim_p(X) \leq k$. Докажем, что если $\dim_p(X) \leq k$ то $X \subset M$ для некоторого $M \in \mathcal{S}^*(Y,n,k)$. Предположим противное. Построим индукцией по n последовательность $(q_n)_{n\in\omega} \subset X$. Возмем $q_0 \in X$. Предположим, построены $q_0, ..., q_{n-1} \in X$. Возмем $q_n \in X \setminus \bigcup_{i=0}^{n-1} \mathcal{S}^*_{q_i}(Y,n,k)$. Тогда для $m, n \in \omega$ выполняется $q_m \notin \mathcal{S}^*_{q_n}(Y,n,k)$. Из (4) вытекает $|M_{n,m}| > k$ где $M_{n,m} = \{i < n \,:\, \pi_i(q_n) \neq \pi_m\}$. Пусть $\mathcal{M}$ семейство конечных подмножеств n. Раскрасим полный граф над ω элементами $\mathcal{M}$. Поставим в соответствие ребру $\{n,m\}$ множество $M_{n,m}$. Из теоремы Рамсея вытекает, что существует бесконечное $M \subset \omega$ так что $M = M_{n,m} = M_{n',m'}$ для $n, m, n'm' \in \omega$, $n \neq m$ и $n' \neq m'$. Из определения вытекает $\dim_p(X) \leq |M| > k$.

Докажем (6). Из (5) вытекает что существует конечное $\gamma \subset \mathcal{S}(Y,n,k)$ так что $X \subset \bigcap \gamma$. Так как γ состоит из замкнутые множеств, то $x \in \operatorname{int}_X(X \cap \bigcap \gamma_1)$ и $x \notin \overline{X \cap \bigcap \gamma_1}$ где $\gamma_1 = \{F \in \gamma \,:\, q \in F\}$ и $\gamma_1 = \{F \in \gamma \,:\, q \notin F\}$. Так как $\gamma_1 \subset \mathcal{S}_q(Y,n,k)$ то $q \in \operatorname{int}_X(X \cap \mathcal{S}^*_q(Y,n,k))$. $\square$

Предложение 5.2.16. *Пусть Y F-пространство, $n \in \omega$, $n > 1$, $X \subset Y^n$ однородное пространство. Тогда $\dim_p(K) < n - 1$ для любое компактного подпространства $K \subset X$.*

Доказательство. Предположим противное. Тогда $\dim_p(K) \geq n-1$. Существует $M \subset n$, $|M| = n-1$, $\zeta = (x_i)_{i\in\omega} \subset K$ так что $\pi_m(x_i) \neq \pi_m(x_j)$ для $m \in M$. Без ограничение общности будем считать, что $M = \{1, 2, ..., n-1\}$. Если необходимо, переходя к подпоследовательностям, можно считать, что $\zeta_i = (\pi_i(x_j))_{j\in\omega}$ дискретна и $\zeta_i \in \mathfrak{s}_{dk}(X)$ для $i > 0$. Из предложения 5.1.12 вытекает, что существуют три weak P ультрафильтра p, q, r, попарно несравнимых в порядке Рудин-Кейслер. Пусть $x = \lim_p \zeta = (x_0, ..., x_{n-1})$. Из предложения 5.1.7 вытекает, что $\mathrm{sp}_k(x, X) = \omega^*$. Существуют $\xi = (u_n)_{n\in\omega}, \rho = (v_n)_{n\in\omega} \in \mathfrak{s}_{dk}(X)$ так что $x = \lim_q \xi = \lim_r \rho$. Из предложения 5.1.11 вытекает, что для $i = 1, 2, ..., n-1$ выполнятся $M_i = \{n \in \omega : \pi_i(u_n) = x_i\} \in q$ и $N_i = \{n \in \omega : \pi_i(v_n) = x_i\} \in r$. Положим $M = \bigcap_{i=1}^{n-1} M_i$ и $N = \bigcap_{i=1}^{n-1} N_i$. Тогда $M \in q, N \in r$ и $\{u_n :\in M\} \subset F$ и $\{v_n :\in N\} \subset F$, где $F = \{(w, x_1, ..., x_{n-1} : w \in Y\}$. Пространство F гомеоморфно Y и $q, r \in \mathrm{sp}_k(x, F)$. Противоречие с предложением 5.1.9. □

Предложение 5.2.17. *Пусть Y $\beta\omega$ пространство, $n \in \omega$, $X \subset Y^n$ однородное пространство. Тогда $\dim_p(K) > 1$ для любого бесконечного компактного подпространства $K \subset X$.*

Доказательство. Предположим противное, то есть X содержит бесконечный компакт и $\dim_p(K) \leq 1$ для любого компактного подпространства $K \subset X$. Пусть $q \in X$. Из предложения 5.1.7 вытекает что $\mathrm{sp}_k(q, X) = \omega^*$. Из предложения 5.1.12 вытекает, что существует $n+1$ попарно несравнимых ультрафильтров $r_0, r_1, ..., r_n \in \omega^*$. Для $i < n+1$ возмем $\zeta_i = (x_{i,k})_{k\in\in\omega} \in \mathfrak{s}_{dk}(X)$ так что $q = \lim_{r_i} \zeta_i$. Пусть $K = \bigcup_{i=0}^{n} \overline{\zeta_i}$. Тогда $\dim_p K = 1$. Пусть $\mathcal{S}_q(X.n, 1) = \{F_0, F_1, ..., F_{n-1}\}$. Из утверждения 5.2.15(6) вытекает, что если $i \leq n$ то $\{k \in \omega : x_{i,k} \in F_{m_i}\} \in \zeta_i$ для некоторого $m_i < n$. Тогда $m = m_i = m_j$ для некоторых $i < j < n$. Получаем $r_i, r_j \in \mathrm{sp}_k(q, F_m)$. Так как F_m гомеоморфно Y и является $\beta\omega$ пространством, то получаем противоречие с предложением 5.1.9. □

Теорема 5.20. *Пусть Y F-пространство, $X \subset Y^3$ однородное пространство. Тогда любое компактное подпространство X конечно.*

Доказательство. Предположим противное, то есть X содержит некоторый бесконечный компакт K. Из предложения 5.2.16 вытекает что $\dim_p K < 3-1 = 2$. Из предложения 5.2.17 вытекает что $\dim_p K > 1$. □

Вопрос 5.21. Пусть Y F-пространство, $X \subset Y^4$ однородное пространство. Верно ли что любое компактное подпространство X конечно?

Предложение 5.2.18. *Пусть Y пространство, $n \in \omega$, $X \subset Y^n$ нульмерное однородное компактное подпространство, $k = \dim_p X$. Тогда существует конечное пространство Z, так что X вкладывается в $Z \times Y^k$ и $(Z \times Y)^k$.*

Доказательство. Из утверждения 5.2.15(5) вытекает, что $X \subset \bigcup \gamma$ для некоторого конечного $\gamma \subset \mathcal{S}(Y,n,k)$. Так как $\mathcal{S}(Y,n,k)$ состоит из замкнутых подмножеств, то $\mathrm{int}_X(X \cap F) \neq \varnothing$ для некоторого $F \in \gamma$. Так как X однородный нульмерный компакт, то существует конечное разбиение λ пространства X на открыто замкнутые подмножество, так что каждое $U \in \lambda$ вкладывается в $\mathrm{int}_X(X \cap F) \subset F$. Так как F гомеоморфно Y^k то X вкладывается в $Z \times Y^k$, где Z дискретное конечное пространство, $|Z| = |\gamma|$. □

Теорема 5.22. *Пусть Y нульмерное F-пространство, $n \in \omega$, $X \subset Y^n$ однородное компактное пространство. Тогда X конечно.*

Доказательство. Предположим противное, X бесконечно. Можно считать что n это наименьшее из натуральных чисел m, для которых X вкладывается в Q^m для некоторого F-пространства Q. Так как X нульмерно, то из предложения 5.2.18 вытекает, что $\dim_p X = n$. Противоречие с предложением 5.2.16. □

Максимально однородные пространства

Для пространства X будем обозначать через $\mathrm{Aut}(X)$ группу автогомеоморфизмов пространства X. Обозначим

$$H(X) = \{g(x) \,:\, x \in X, g \in \mathrm{Aut}(\beta X)\}$$

Из определений непосредственно вытекает

Утверждение 5.2.19. *Если X пространство, то $H(H(X)) = H(X)$. Если X однородное пространство, то $H(X)$ однородное пространство.*

Определение 5.23. Пространство X назовем *максимально однородным* если X однородное пространство и $H(X) = X$.

Из определений непосредственно вытекает

Утверждение 5.2.20. *Если X однородное пространство, то $H(X)$ максимально однородное пространство.*

Утверждение 5.2.21. *Пусть X экстремально несвязное пространство, $U, V \subset X$ непустые открытые не пересекающие подмножества X, $f : U \to V$ гомеоморфизм. Тогда существует $\tilde{f} \in \mathrm{Aut}(\beta X)$, для которого $\tilde{f} \restriction_U = f$, $\tilde{f} \restriction_V = f^{-1}$ и $\tilde{f} \restriction_S = \mathrm{id}_S$ где $S = \beta X \setminus (\overline{U} \cap \overline{V})$.*

Доказательство. Положим $W = U \cup V$. Определим гомеоморфизм $g : W \to W$,

$$g(x) = \begin{cases} f(x) & \text{если } x \in U \\ f^{-1}(x) & \text{если } x \in V \end{cases}$$

Пусть $\tilde{g} : \beta W \to \beta W$ есть продолжение g. Определим гомеоморфизм $\tilde{f} : \beta X \to \beta X$,

$$\tilde{f}(x) = \begin{cases} \tilde{g}(x) & \text{если } x \in \beta W \\ x & \text{если } x \in \beta X \setminus \beta W \end{cases}$$

□

Из утверждения 5.2.21 вытекает

Следствие 5.24. *Пусть X максимально однородное экстремально несвязное пространство, $U, V \subset X$ непустые открытые не пересекающие подмножества X, $f : U \to V$ гомеоморфизм. Тогда существует $\tilde{f} \in \mathrm{Aut}(X)$, для которого $\tilde{f} \restriction_U = f$, $\tilde{f} \restriction_V = f^{-1}$ и $\tilde{f} \restriction_S = \mathrm{id}_S$ где $S = X \setminus (\overline{U} \cap \overline{V})$.*

Утверждение 5.2.22. *Пусть X максимально однородное не дискретное экстремально несвязное пространство. Пусть $(x_n)_{n\in\omega}, (y_n)_{n\in\omega} \in \mathfrak{s}_d(X)$. Тогда существует $f \in \mathrm{Aut}(X)$ так что $f(x_n) = y_n$ для всех $n \in \omega$.*

Доказательство. Существует открыто замкнутое непустое $O \subset X$ так что

$$O \cap \overline{(x_n)_{n\in\omega}} = O \cap \overline{(y_n)_{n\in\omega}} = \varnothing$$

Возьмем $(z_n)_{n\in\omega} \in \mathfrak{s}_d(X)$ так что $(z_n)_{n\in\omega} \subset O$.

Покажем что существует $g \in \mathrm{Aut}(X)$ так что $g(x_n) = z_n$ для всех $n \in \omega$. Для каждого $n \in \omega$ возьмем $g_n \in \mathrm{Aut}(X)$ так что $g_n(x_n) = z_n$. Существуют $(U_n)_{n\in\omega}, (V_n)_{n\in\omega} \in \mathfrak{O}_d(X)$ так что $g_n(U_n) = V_n$, $x_n \in U_n \subset X \setminus W$, $z_n \in V_n \subset W$ для каждого $n \in \omega$. Положим $U = \bigcup_{n\in\omega} U_n$, $V = \bigcup_{V_n\in\omega} U_n$. Определим гомеоморфизм $g' : U \to V$, $g'(x) = g_n(x)$ если $x \in U_n$ для некоторого $n \in \omega$. Из следствия 5.24 вытекает, что существует $g \in \mathrm{Aut}(X)$, для которого $g \restriction_U = g'$, $g \restriction_V = g'^{-1}$ и $g \restriction_S = \mathrm{id}_S$ где $S = X \setminus (\overline{U} \cap \overline{V})$.

Аналогично доказывается, что существует $h \in \mathrm{Aut}(X)$ так что $h(y_n) = z_n$ для всех $n \in \omega$. Положим $f = h^{-1} \circ g$. □

Следствие 5.25. *Пусть X максимально однородное экстремально несвязное пространство. Тогда $u(\zeta) = u(\rho)$ для всех $\zeta, \rho \in \mathfrak{s}_d(X)$.*

Предложение 5.2.23. *Пусть X максимально однородное экстремально несвязное пространство и содержит некоторое счетное дискретное не замкнутое подпространство. Тогда X дискретно p-компактно для некоторого свободного ультрафильтра $p \in \omega^*$.*

Доказательство. Пусть $\zeta \in \mathfrak{s}_d(X)$ дискретная не замкнутая последовательность. Тогда $u(\zeta) \neq \varnothing$. Возьмем $p \in u(\zeta)$. Покажем что X дискретно p-компактно. Если $\rho \in \mathfrak{s}_d(X)$ то из следствия 5.25 вытекает что $u(\rho) = u(\zeta) \ni p$. Следовательно в X есть p-предел ρ. □

Из предложений 5.2.23 и 5.1.20 вытекает

Следствие 5.26. *Пусть X счетно компактное максимально однородное экстремально несвязное пространство. Тогда X^ω счетно компактно.*

Лемма 5.2.24. *Пусть X экстремально несвязное пространство и X не является P-пространством. Тогда существут точка $x_* \in X$ и $(O_n)_{n\in\omega} \in \mathfrak{O}(X)$, так что O_n открыто замкнуто, $x_* \in O_{n+1} \subset O_n$ для $n \in \omega$ и множество $\bigcap_{n\in\omega} O_n$ нигде не плотно в X.*

Доказательство. Существут точка $x_* \in X$ и $(U_n)_{n\in\omega}\mathfrak{O}(X)$, так что $x_* \in U_{n+1} \subset\subset O_n$, U_n открыто замкнуто для $n \in \omega$ и $x_* \notin \operatorname{int}(F)$ где $F = \bigcap_{n\in\omega} O_n$. Множество F замкнуто и так как X экстремально несвязное пространство то $\operatorname{int}(F)$ открыто замкнутое множество. Положим $O_n = U_n \setminus \operatorname{int}(F)$. □

Предложение 5.2.25. *Пусть X максимально однородное экстремально несвязное пространство и X не является P-пространством. Тогда X^ω псевдокомпактное пространство.*

Доказательство. Воспользуемся леммой 5.2.24 и возьмем $x_* \in X$ и $(O_n)_{n\in\omega}\mathfrak{O}(X)$, так что O_n открыто замкнуто, $x_* \in O_{n+1} \subset O_n$, для $n \in \omega$ и множество $\bigcap_{n\in\omega} O_n$ нигде не плотно в X.

Пусть $\zeta_n = (U_{n,k})_{k\in\omega} \in \mathfrak{O}_n(X)$. В силу предложения 5.1.18 для доказательства предложения достаточно показать что $\bigcap_{n\in\omega} u(\zeta_n) \neq \varnothing$.

Так как X нульмерное и однородное пространство, то для каждого $k \in \omega$ существуют открыто замкнутые гомеоморфные подмножества $V_k, V_{0,k}, V_{1,k}, ..., V_{k,k}$ так что $x_* \in V_k \subset O_k$, $S_k = V_k \setminus V_{k+1} \neq \varnothing$, $V_{n,k} \subset U_{n,k}$ для $n = 0, 1, ..., k$. Пусть $h_{n,k} : V_k \to V_{n,k}$ гомеоморфизм и $S_{n,k} = h_{n,k}(S_k)$ для $n = 0, 1, ..., k$. Положим

$$W_{n,k} = \begin{cases} U_{n,k} & k < n \\ S_{n,k} & k \geq n \end{cases}$$

для $n, k \in \omega$.

Лемма 5.2.26. *(1) $u((S_k)_{k\in\omega}) \neq \varnothing$;*

(2) $u((S_k)_{k\in\omega}) = u((W_{n,k})_{k\in\omega})$ для любого $n \in \omega$.

Доказательство. Обозначим $F = \bigcap_{k\in\omega} V_k$, $Q_k = \bigcup_{j\geq k} S_j$. По построению $Q_k = V_k \setminus F$.

(1) Так как $P = \bigcap_{n\in\omega} O_n$ нигде не плотно в X и $F \subset P$, то F нигде не плотно в X. Следовательно, $\overline{Q_0} = \overline{V_0 \setminus F} = V_0$. Так как $x_* \in F$, то $x_* \in \overline{Q_0} \setminus Q_0$. Поэтому x_* есть точка накопления для последовательности $(S_k)_{k\in\omega}$ и $u((S_k)_{k\in\omega}) \neq \varnothing$.

(2) Положим $P_n = \bigcup_{k\geq n} S_{n,k}$. Определим гомеоморфизм $f_n : Q_n \to P_n$, если $x \in S_k$, то $f_n(x) = h_{n,k}(x)$. Из следствия 5.24 вытекает что существует

$\tilde{f}_n \in \mathrm{Aut}(X)$, так что $\tilde{f}_n \restriction_{Q_n} = f_n$. Так как $\tilde{f}_n(S_k) = S_{n,k} = W_{n,k}$ для $k \geq n$, то $u((S_k)_{k\in\omega}) = u((W_{n,k})_{k\in\omega})$ □

Так как $W_{n,k} \subset U_{n,k}$ для $n, k \in \omega$, то из леммы вытекает

$$\bigcap_{n\in\omega} u(\zeta_n) \supset \bigcap_{n\in\omega} u((W_{n,k})_{k\in\omega}) = u((S_k)_{k\in\omega}) \neq \varnothing$$

□

5.3 Группы с топологией

Группы со счетным π-характером

Предложение 5.3.1 (А.В. Архангельский [36, Proposition 5.2.6]). *Если G есть топологическая группа, то $\chi(G) = \pi\chi(G)$.*

Предложение 5.3.2 (Теорема Биркоффа-Какутани [36, Theorem 3.3.12]). *Если G есть топологическая группа, то G метризуема если и только если G с первой аксиомой счетности.*

Из теорем Архангельского и Биркоффа-Какутани вытекает, что топологическая группа со счетным π-характером метризуема.

Теорема 5.27. *Пусть G есть право полутопологическая группа и $\Lambda(G)^{-1}$ плотно в G. Тогда $\Delta(G) \leq \pi\chi(G)$.*

Доказательство. Пусть $\tau = \pi\chi(G)$ и $\{U_\alpha : \alpha < \tau\}$ есть π-база в точке e. Положим $C = \Lambda(G)$ и

$$W_\alpha = \bigcup_{g\in C} gU_\alpha \times gU_\alpha$$

для $\alpha < \tau$. Покажем, что $\bigcap_{\alpha<\tau} W_\alpha = \Delta_X$.

Покажем, что $\Delta_X \subset \bigcap_{\alpha<\tau} W_\alpha$. Пусть $x \in G$ и $\alpha < \tau$. Так как C^{-1} плотно в G, то $g^{-1} \in U_\alpha x^{-1}$ для некоторого $g \in C$. Тогда

$$(x, x) \in gU_\alpha \times gU_\alpha \subset W_\alpha.$$

Покажем, что $\bigcap_{\alpha<\tau} W_\alpha \subset \Delta_X$. Предположим противное, то есть существует

$$(x, y) \in \bigcap_{\alpha<\tau} W_\alpha \setminus \Delta_X.$$

Так как $x \neq y$ группа G Хаусдорфово и право полутопологическая, то существует окрестность единицы U, для которой $Ux^{-1} \cap Uy^{-1} = \varnothing$. Так как $\{U_\alpha : \alpha < \tau\}$ есть π-база в e, то $U_\alpha \subset U$ для некоторого $\alpha < \tau$. Существует $g \in C$ так что $(x, y) \in gU_\alpha \times gU_\alpha$. Тогда $x, y \in gU_\alpha$ и $g \in U_\alpha x^{-1} \cap U_\alpha y^{-1}$. Следовательно, $g \in Ux^{-1} \cap Uy^{-1}$, противоречие. □

Следствие 5.28 (Corollary 2.5 [9]). *Если G есть полутопологическая группа, то $\Delta(G) \le \pi\chi(G)$.*

Предложение 5.3.3. *Если G есть CHART группа, то $\Lambda(G) = \Lambda(G)^{-1}$.*

Доказательство. Пусть $g \in \Lambda(G)$. Так как λ_g непрерывная биекция компакта, то λ_g есть гомеоморфизм и отображение $\lambda_g^{-1} = \lambda_{g^{-1}}$ непрерывно. □

Теорема 5.29. *Пусть G есть CHART группа. Тогда $w(G) = \pi\chi(G)$.*

Доказательство. Всегда $w(G) \le \pi\chi(G)$. Из предложения 5.3.3 и теоремы 5.27 вытекает $\Delta(X) \le \pi\chi(X)$. Для компактных хаусдорфовых пространств $w(G) = \Delta(G)$ [88, Corollary 7.6]. Следовательно, $w(G) = \pi\chi(G)$. □

Следствие 5.30. *Пусть G есть CHART группа. Тогда следующие условия эквивалентны.*

(1) *G метризуемо;*

(2) *G с первой аксиомой счетности;*

(3) *G Фреше–Урысона;*

(4) *G со счетной теснотой;*

(5) *G со счетным π-характером.*

Доказательство. Всегда (1) $\Rightarrow$ (2) $\Rightarrow$ (3) $\Rightarrow$ (4). Так как для компактных пространств $\pi\chi(G) \le t(G)$ [88, Theorem 7.13], то верно (4) $\Rightarrow$ (5). Из теоремы 5.29 вытекает (5) $\Rightarrow$ (1). □

Секвенциально компактные компактные группы

Обозначим $I = [0, 1]$,

$$\mathfrak{s} = \min\{\tau \,:\, I^\tau \text{ не секвенциально компактно}\}.$$

Кардинал $\mathfrak{s}$ называется *числом расщепления* (splitting number), $\omega < \mathfrak{s} \le 2^\omega$ [89; 90].

Предложение 5.3.4. *Пусть X есть секвенциально компактное компактное пространство. Тогда $\pi\chi(x, X) < \mathfrak{s}$ для некоторого $x \in X$.*

Доказательство. Предположим противное. Тогда $\pi\chi(x, X) \ge \mathfrak{s}$ для всех $x \in X$. Из [102, Theorem 1] вытекает, что X непрерывно отображается на $I^{\mathfrak{s}}$. Так как секвенциальная компактность сохраняется непрерывными отображениями, то $I^{\mathfrak{s}}$ является секвенциально компактным пространством. Противоречие. □

В однородном пространстве G, если в какой либо точке π-характер равен τ, то π-характер всего пространства равен τ. Поэтому из предложения 5.3.4 и теоремы 5.29 вытекает следующее предложение.

Теорема 5.31. *Пусть G есть секвенциально компактная CHART группа. Тогда $w(G) < \mathfrak{s}$.*

В предположении континуум гипотезы (CH), $\omega < \mathfrak{s} \leq 2^\omega = \omega_1$, то есть $\mathfrak{s} = \omega_1$. Из теоремы 5.31 вытекает следующее предложение.

Следствие 5.32. (CH) *Пусть G есть секвенциально компактная CHART группа. Тогда G метризуема.*

5.4 Ретральные пространства

Пространство X называется *ретральным*, если X является ретрактом некоторой топологической группы.

Ко-неархимедовы пространства

Пусть X нульмерное пространство. Обозначим через $B(X)$ множество всех конечных подмножеств X. Мы рассматриваем $B(X)$ как аддитивную булеву группу с нулем $\varnothing$ и групповая операция сложения есть симметрическая разность. Обозначим через $\Gamma(X)$ семейство всех открытых разбиений X. Для $\gamma \in \Gamma(X)$ положим

$$H(\gamma) = \{g \in B(X) \,:\, |g \cap U| \text{ четно для } U \in \gamma\}.$$

Множество $H(\gamma)$ является подгруппой в $B(X)$. Пусть $\mathcal{G} \subset \Gamma(X)$. Обозначим через $B_z(X, \mathcal{G})$ группу $B(X)$ с групповой топологией, предбазу в единице которой образуют множества вида $H(\gamma)$ для $\gamma \in \mathcal{G}$. Множество X естественным образом вкладывается в $B(X)$: $i : X \to B(X),\ x \mapsto \{x\}$. Это вложение будет топологическим и $i(X)$ замкнуто в $B(X)$ если и только если $\bigcup\bigcup\mathcal{G}$ является предбазой X. В дальнейшем мы будем отождествлять X и $i(X)$.

Обозначим через $B_z(X) = B_z(X, \Gamma(X))$. Пространство X замкнуто вложено в $B_z(X)$. Пусть $Y \subset X$. Обозначим

$$B_z^0(X) = \{g \in B_z(X) \,:\, |g| \text{ четно}\}, \qquad B_z^1(X) = \{g \in B_z(X) \,:\, |g| \text{ нечетно}\},$$
$$B_z(X|Y) = \{g \in B_z(X) \,:\, g \subset Y\},$$
$$B_z^0(X|Y) = B_z(X|Y) \cap B_z^0(X), \qquad B_z^1(X|Y) = B_z(X|Y) \cap B_z^1(X).$$

Множество $B_z^0(X) = H(\{X\})$ является открыто замкнутой подгруппой индекса два. Множество $B_z^1(X) = B_z(X) \setminus B_z^0(X)$ открыто замкнуто в $B_z(X)$ и является смежным классом группы $B_z^0(X)$.

Подмножество M линейно упорядоченного множества X называется выпуклым, если для $a, c \in M$ и $b \in X$ выполняется $a \leq b \leq c$, то $b \in M$.

Пусть X есть неархимедово пространство с неархимедовой базой $\mathcal{B}$. Линейный порядок $\leq$ на пространстве X назовем *согласованным с неархимедовой базой* $\mathcal{B}$, если любой элемент $U \in \mathcal{B}$ является выпуклым относительно порядка $\leq$.

На семействе множеств $\mathcal{B} \subset \operatorname{Exp}(X)$ рассматривается порядок $\leqslant_{\mathcal{B}}$ *обратного включению*: $A \leqslant_{\mathcal{B}} B$ если $B \subset A$.

Каждое неархимедово пространство имеет базу, являющуюся деревом относительно обратного включению (Theorem 2.9 [54]), то есть для $U \in \mathcal{B}$ семейство множеств $\operatorname{prev}_{\mathcal{B}} U = \{V \in \mathcal{B} : V <_{\mathcal{B}} U\}$ относительно порядка $\leqslant_{\mathcal{B}}$ обратного включения является вполне упорядоченным множеством. Каждая база, являющаяся деревом относительно обратного включения, является неархимедовой базой.

На дереве $\mathcal{B}$ рассматривается отношение эквивалентности: $U \sim V$ если $\operatorname{prev}_{\mathcal{B}} U = \operatorname{prev}_{\mathcal{B}} V$. Классы эквивалентности этого отношения эквивалентности называется *узлами*. Обозначим

$$\operatorname{node}_{\mathcal{B}}(U, V) = \{W \in \mathcal{B} : \operatorname{prev}_{\mathcal{B}} W = \operatorname{prev}_{\mathcal{B}} U \cap \operatorname{prev}_{\mathcal{B}} V\}$$

для различных $U, V \in \mathcal{B}$. Множество $\operatorname{node}_{\mathcal{B}}(U, V)$ является единственным узлом, который пересекает $\operatorname{prev}_{\mathcal{B}} U$ и $\operatorname{prev}_{\mathcal{B}} V$ по различным элементам.

Если на каждом узле $\mathcal{N} \subset \mathcal{B}$ задан некоторый линейный порядок $<_{\mathcal{N}}$, то на $\mathcal{B}$ определяется *естественный порядок* $<$: $V < U$ если $V <_{\mathcal{B}} U$ или если $V' <_{\mathcal{N}} U'$, где $\mathcal{N} = \operatorname{node}_{\mathcal{B}}(U, V)$, $\{U'\} = \mathcal{N} \cap \operatorname{prev}_{\mathcal{B}} U$ и $\{V'\} = \mathcal{N} \cap \operatorname{prev}_{\mathcal{B}} V$. Естественный порядок является линейным порядком и на каждом узле $\mathcal{N}$ совпадает с $<_{\mathcal{N}}$.

Утверждение 5.4.1. *На X есть линейный порядок, согласованным с неархимедовой базой $\mathcal{B}$.*

Доказательство. Пусть $<$ есть какой нибудь естественный порядок на X. Для различных $x, y \in X$ положим $x < y$ если $U < V$ для некоторых $U, V \in \mathcal{B}$ таких что $U \cap V = \varnothing$, $x \in U$ и $y \in V$. Это отношение является линейным порядком, согласованным с $\mathcal{B}$. $\square$

Для $\gamma \subset \mathcal{B}$ положим

$$\begin{aligned}\min \gamma := \{U \in \gamma : U & \text{ минимальный элемент } \gamma,\\ & \text{то есть } V \not<_{\mathcal{B}} U \text{ для } V \in \gamma\}.\end{aligned}$$

Множество $\mu \subset \mathcal{B}$ называется *антицепью*, если элементы μ попарно несравнимы.

Утверждение 5.4.2.

(1) $\min\gamma = \gamma \Leftrightarrow \gamma$ *есть антицепь* $\Leftrightarrow$ *семейство* γ *дизъюнктно;*

(2) $\min\min\gamma = \min\gamma$*;*

(3) $\min\gamma$ *антицепь и для* $U \in \gamma$ *существует* $V \in \min\gamma$ *так что* $V \leqslant_{\mathcal{B}} U$*;*

(4) семейство $\min\gamma$ *дизюнктно,* γ *вписано в* $\min\gamma$ *и* $\bigcup\gamma = \bigcup\min\gamma$.

Доказательство. (1) и (2) очевидно.

(3) То что $\min\gamma$ антицепь вытекает из (1) и (2). Возьмем V как минимальный элемент $\{W \in \gamma : W \leqslant_{\mathcal{B}} U\}$.

(4) вытекает из (1) и (3). □

Определение 5.33. Пространство $(X, \mathcal{T})$ назовем *ко-неархимедовым*, если существует более слабая отделимая неархимедова топология $\mathcal{T}_{na} \subset \mathcal{T}$ на X и база $\mathcal{C}$ пространства X, состоящая из замкнутых в $(X, \mathcal{T}_{na})$ множеств.

Теорема 5.34. *Пусть X ко-неархимедово пространство. Тогда пространство X является ретральным: существует непрерывная ретракция $r : B_z(X) \to X$, так что $r(M) \in M$ для $M \in B^1_z(X)$.*

Доказательство. Пусть $\mathcal{T}$ топология X, $\mathcal{T}_{na} \subset \mathcal{T}$ более слабая отделимая неархимедова топология на X и база $\mathcal{C}$ пространства X, состоящая из замкнутых в $(X, \mathcal{T}_{na})$ множеств.

Пусть $\mathcal{B}$ есть база $(X, \mathcal{T}_{na})$, являющаяся деревом относительно обратного включения. В силу утверждения 5.4.1, на X есть линейный порядок $<$, согласованный с неархимедовой базой $\mathcal{B}$. Определим отображение $R : B^1_z(X) \to B^1_z(X)$. Пусть $g \in B^1_z(X)$. Положим

$$\Theta(g) = \{U \in \mathcal{B} : |U \cap g| \text{ четно}\}, \qquad \theta(g) = \min\Theta(g),$$
$$R(g) = g \setminus \bigcup\theta(g).$$

Из утверждения 5.4.2 вытекает, что $\theta(g) \subset \Theta(g)$ дизьюнктно, $\Theta(g)$ вписано в $\theta(g)$ и $\bigcup\theta(g) = \bigcup\Theta(g) = X \setminus R(g)$. Так как $|g \cap U|$ четно для $U \in \theta(g)$ и семейство $\theta(g)$ дизьюнктно, то $|g \cap \bigcup\theta(g)|$ четно. Следовательно, $|R(g)|$ нечетно, то есть $R(g) \in B^1_z(X)$. Зафиксируем $x_* \in X$. Определим ретракцию $r : B_z(X) \to X$, для $g \in B_z(X)$ положим

$$r(g) = \begin{cases} x_*, & g \in B^0_x(X), \\ \min R(g) & g \in B^1_x(X). \end{cases}$$

Здесь минимум множества $R(g)$ берется относительно линейног порядка $<$, согласованного с неархимедовой базой $\mathcal{B}$. По построению, $r(g) \in R(g) \subset g$ для

$g \in B^1_x(X)$. Следовательно, $r(\{x\}) = x$ для $x \in X$ и r является ретракцией. Проверим, что отображение r непрерывно. Так как $B^1_x(X)$ открыто замкнуто, то непрерывность r достаточно проверить в точках $g \in B^1_x(X)$. Пусть W есть окрестность точки $r(g)$. Существует $\widetilde{W} \in \mathcal{B}$ и $C \in \mathcal{C}$, так что $r(g) \subset C \subset W \cap \widetilde{W}$ и $\{r(g)\} = g \cap \widetilde{W} = g \cap C$. Положим

$$\gamma'' = \{U \in \mathcal{B} : U \cap C = \varnothing \text{ и } |U \cap g| \leq 1\}, \quad \gamma' = \min \gamma'',$$
$$\gamma_0 = \{U \in \gamma' : |U \cap g| = 0\}, \quad \gamma_1 = \{U \in \gamma' : |U \cap g| = 1\},$$
$$\gamma = \{C\} \cup \gamma'.$$

Ясно, $\gamma' = \gamma_0 \cup \gamma_1$. Тогда $\gamma \in \Gamma(X)$ и $g + H(\gamma)$ есть окрестность точки g. Нам достаточно доказать, что $r(g + H(\gamma)) \subset C$. Пусть $h \in g + H(\gamma)$. Тогда $|C \cap h|$ нечетно, $|U \cap h|$ нечетно для $U \in \gamma_1$ и $|U \cap h|$ четно для $U \in \gamma_0$. Следовательно, $\gamma_0 \subset \Theta(h)$.

Определим $U_x \in \mathcal{B}$ для $x \in g$. Положим $U_x = \widetilde{W}$ если $x = r(g)$. Для $x \in g^* = g \setminus \{r(g)\}$ пусть $U_x \in \gamma_1$ есть тот единственный элемент γ', для которого $x \in U_x$.

Лемма.

(1) $x \in U_x \in \mathcal{B}$ *и* $\{x\} = U_x \cap g$ *для* $x \in g$;

(2) $U_x \cap U_y = \varnothing$ *для различных* $x, y \in g$;

(3) $R(h) \subset \bigcup\limits_{x \in R(g)} U_x$;

(4) $R(h) \cap U_x \neq \varnothing$ *для* $x \in R(g)$;

(5) $R(h) \cap U_{r(g)} \subset C$.

Доказательство. (1) вытекает из построения.

(2) Если $U_x \cap U_y \neq \varnothing$, то либо $U_x \subset U_y$ либо $U_y \subset U_x$. Тогда либо $\{x, y\} \subset U_x$ либо $\{x, y\} \subset U_y$. Противоречие с (1).

(3) Обозначим $\mu = \{U \in \Theta(g) : U \cap g \neq \varnothing\}$. Пусть $U \in \mu$. Тогда $|U \cap g|$ четно, $|U \cap g| > 1$ и $U \cap R(g) = \varnothing$. Так как $r(g) \notin U$ и $\widetilde{W} \cap g = \{r(g)\}$, то $\widetilde{W} \cap U = \varnothing$ и $C \cap U = \varnothing$. Тогда $U \subset \bigcup \gamma'$. Так как $|g \cap U| > 1$ и $|g \cap V| \leq 1$ для $V \in \gamma'$, то $U = \bigcup \zeta$, где $\zeta = \{V \in \gamma' : V \subset U\}$. Положим $\zeta_0 = \zeta \cap \gamma_0$ и $\zeta_1 = \zeta \cap \gamma_1$. Тогда $|\zeta_1| = |g \cap U|$ четно. Так как $|h \cap V|$ четно для $V \in \zeta_0$, $|h \cap V|$ нечетно для $V \in \zeta_1$, $|\zeta_1|$ четно, $\zeta = \zeta_0 \cup \zeta_1$ и $U = \bigcup \zeta$, то $|U \cap h|$ четно. Следовательно, $U \in \Theta(h)$. Получаем, $\mu \subset \Theta(h)$.

Так как $\gamma_0 \subset \Theta(h)$ и $R(h) \cap \bigcup \Theta(h) = \varnothing$, то $R(h) \cap \bigcup \gamma_0 = \varnothing$ и

$$R(h) \subset X \setminus \bigcup \gamma_0 = C \cup \bigcup \gamma_1 \subset \bigcup_{x \in g} U_x.$$

Если $x \in g \setminus R(g)$, то $U_x \subset U$ для некоторого $U \in \mu \subset \Theta(h)$. Следовательно, $R(h) \cap U_x = \varnothing$. Получаем $R(h) \subset \bigcup_{x \in R(g)} U_x$.

(4) Предположим, что $R(h) \cap U_x = \varnothing$. Тогда для каждого $y \in h \cap U_x$ существует $V_y \in \theta(h)$ так что $y \in V_y$ и $|h \cap V_y|$ четно. Семейство $\theta(h)$ дизьюнктно и $|U_x \cap h|$ нечетно, поэтому $S = V_z$ пересекается с $h \setminus U_x$ для некоторого $z \in h \cap U_x$. Так как $z \in U_x \cap S \neq \varnothing$, $S \not\subset U_x$ и семейство $\mathcal{B}$ неархимедово, то $U_x \subset S$. Из (1), (2) и $U_x \subset S$ вытекает, что $U_y \subset S$ для $y \in M = S \cap g$. Положим

$$\mu' = \{U \in \gamma' : U \subset S \setminus M\}, \qquad \mu = \mu' \cup \{U_y : y \in M\}.$$

Семейство μ дизьюнктно, $S = \bigcup \mu$ и $\mu' \subset \gamma_0$. Тогда $|U \cap h|$ и $U \cap g$ четно для $U \in \mu'$, $|U_y \cap h|$ и $|U_y \cap g|$ нечетно для $y \in M$. Следовательно, четность $|S \cap h|$ и $|S \cap g|$ одинакова. Так как $|S \cap h|$ четно, то $|S \cap g|$ четно. Следовательно, $S \in \Theta(g)$, $R(g) \cap g = \varnothing$ и $R(g) \cap U_x = \varnothing$. Противоречие с $x \in R(g)$.

(5) По построению, $U_{r(g)} = \widetilde{W}$. Положим $\mu' = \{U \in \gamma' : U \subset \widetilde{W}\}$ и $\mu = \mu' \cup \{C\}$. Тогда $\widetilde{W} = \bigcup \mu$ и $\mu' \subset \gamma_0$. Получаем $|U \cap R(h)|$ и $|U \cap R(g)|$ четно для $U \in \mu'$. Следовательно, $\mu' \subset \Theta(h)$ и $R(h) \cap \bigcup \mu' = \varnothing$. Так как $\bigcup \mu' = \widetilde{W} \setminus C$, то $R(h) \cap \widetilde{W} \subset C$. □

Пусть $n = |R(g)|$. Монотонно занумеруем $R(g)$ в соответствие с натуральным порядком $<$ на X: $R(g) = \{x_1, x_2, ..., x_n\}$ и $x_i < x_j$ для $1 \leq i < j \leq n$. Так как $r(g) = \min R(g)$, то $r(g) = x_1$. Из условий (1) и (2) леммы и выпуклости U_{x_i} вытекает, что если $x \in U_{x_i}$, $y \in U_{x_j}$ и $i < j$, то $x < y$. Положим $M_i = R(h) \cap U_{x_i}$ для $i = 1, ..., n$. Из леммы вытекают следующие условия:

(1) $R(h) = \bigcup\limits_{i=1}^{k} M_i$;

(2) если $1 \leq i < j \leq n$, $x \in M_i$ и $y \in M_j$, то $x < y$;

(3) $M_i \neq \varnothing$ для $i = 1, ..., n$;

(4) $M_1 \subset C$.

Так как $r(h) = \min R(h)$ то из условий (1), (2), (3) и (4) вытекает, что $r(h) \in M_1 \subset C \subset W$. □

Для пространства $(X, \mathcal{T})$ и $\mathcal{M} \subset \operatorname{Exp}(X)$ обозначим через $\mathcal{T}_{\mathcal{M}}$ топологию на X, предбазу которой образуют семейство $\mathcal{T} \cup \mathcal{M}$. Топологическое пространство $(X, \mathcal{T}_{\mathcal{M}})$ обозначим как $X_{\mathcal{M}}$. Если $M \subset X$ и $\mathcal{M} = \{\{x\} : x \in M\}$, то обозначим $\mathcal{T}_{\mathcal{M}}$ как $\mathcal{T}_M$ и $X_{\mathcal{M}}$ как X_M.

Пространство X является ко-неархимедовым, если на X есть отделимая неархимедова топология $\mathcal{T}$ и семейство $\mathcal{M}$ замкнутых в $(X, \mathcal{T})$ множеств, так что X совпадает с $(X, \mathcal{T}_{\mathcal{M}})$.

Нульмерные сепарабельные метризуемые пространства являются неархимедовами как подпространства неархимедового пространства, канторового множества.

Предложение 5.4.3. *Следующие пространства являются ко-неархимедовыми:*

(1) неархимедовы пространства;

(2) нульмерные сепарабельные метризуемые пространства;

(3) прямая Зоргенфрея;

(4) прямая Майкла;

(5) пространства вида X_M, где X неархимедовы пространство и $M \subset X$;

(6) счетные пространства с одной неизолированной точкой.

Доказательство. (1) очевидно.

(2) Нульмерные сепарабельные метризуемые пространства неархимиедовы.

(3) Пусть $\mathcal{S}$ семейство замкнутых правых лучей $[a, +\infty)$ на $\mathbb{R}$. Прямая Зоргенфрея $\mathbb{S}$ это $\mathbb{R}_{\mathcal{S}}$. Пусть $\mathcal{S}' = \{[a, +\infty) \,:\, a \in \mathbb{Q}\}$. Пространство $Y = \mathbb{R}_{\mathcal{S}'}$ является нульмерным сепарабельным метризуемым пространством и $\mathbb{S} = Y_{\mathcal{S}}$.

(4) Прямая Майкла это $\mathbb{R}_{\mathbb{P}}$. Пространство $Y = \mathbb{R}_{\mathbb{Q}}$ является нульмерным сепарабельным метризуемым пространством и $\mathbb{R}_{\mathbb{P}} = Y_{\mathbb{P}}$.

(5) Если $X = Y_{\mathcal{M}}$, где Y неархимедово пространство и $\mathcal{M}$ семейство замкнутых подмножеств Y, то $X = Y_{\mathcal{M}'}$, где $\mathcal{M}' = \mathcal{M} \cup \{\{x\} \,:\, x \in M\}$.

(6) Пусть $(X, \mathcal{T})$ есть счетное пространство с одной неизолированной точкой x_*. Пусть $\mathcal{T}_s$ есть топология сходящейся последовательности к точке x_* последовательности и $Y = (X, \mathcal{T}_s)$. Положим $\mathcal{M} = \{U \in \mathcal{T} \,:\, x_* \in U\}$. Пространство Y неархимедово, элементы семейства $\mathcal{M}$ замкнуты в Y и $X = Y_{\mathcal{M}}$. Следовательно, X ко-неархимедово. □

Примеры групп

Пример 5.35. Построим линделефову топологическую группу G, так что $c(G) = 2^\omega$ [14].

Существует $M \subset \mathbb{P}$, $|M| = 2^\omega$, так что $X = \mathbb{P}_M$ в конечных степенях линделефово [59]. Пространство X ко-неархимедово, поэтому X является ретрактом $G = B_z(X)$. Так как X в конечных степенях линделефово, то G линделефово. Так как X ретракт G, то $c(G) \geq c(X) = 2^\omega$.

Пусть X пространство. Назовем функцию $f : X^2 \to \mathbb{R}$ *2-$\mathbb{R}$-факторизуемой*, если существует сепарабельное метрическое пространство Y и непрерывные отображения $g : X \to Y$ и $h : Y^2 \to \mathbb{R}$, так что $f = h \circ g \times g$, то есть следующая диаграмма коммутативна:

$$\begin{tikzcd} X^2 \arrow[rr, "f"] \arrow[dr, "g\times g"'] & & \mathbb{R} \\ & Y^2 \arrow[ur, "h"'] & \end{tikzcd}$$

Назовем пространство X *2-$\mathbb{R}$-факторизуемым*, если для любая непрерывная функция $f : X^2 \to \mathbb{R}$ 2-$\mathbb{R}$-факторизуема.

Предложение 5.4.4. *Пусть Y есть 2-$\mathbb{R}$-факторизуемое пространство и $X \subset Y$ есть ретракт Y. Тогда X есть 2-$\mathbb{R}$-факторизуемое пространство.*

Доказательство. Пусть $r : Y \to X$ есть непрерывная ретракция. Пусть $f : X^2 \to \mathbb{R}$ есть непрерывная функция. Положим $f' = f \circ r \times r : Y^2 \to \mathbb{R}$. Так как Y есть 2-$\mathbb{R}$-факторизуемое пространство, то существует сепарабельное метрическое пространство S и непрерывные отображения $g' : Y \to S$ и $h : S^2 \to \mathbb{R}$, так что $f' = h \circ g' \times g'$. Положим $g = g'|_X$. Тогда $f = h \circ g \times g$. $\square$

Предложение 5.4.5. *Пусть G есть топологическая группа и G^2 есть $\mathbb{R}$-факторизумая группа. Тогда G является 2-$\mathbb{R}$-факторизуемым пространством.*

Доказательство. Пусть $f : G^2 \to \mathbb{R}$ есть непрерывная функция. Так как G^2 $\mathbb{R}$-факторизуемая группа, то существует сепарабельная метризуемая группа H, непрерывный гомоморфизм $g : G^2 \to H$, непрерывная функция $h : H \to \mathbb{R}$, так что $f = h \circ g$. Положим $H' = H \times H$ и

$$\begin{aligned} g_1 &: G \to H,\ x \mapsto g(x,e), \\ g_2 &: G \to H,\ x \mapsto g(e,x), \\ g' = g_1 \triangle g_2 &: G \to H',\ x \mapsto (g_1(x), g_2(x)) = (g(x,e), g(e,x)), \\ h' &: H' \times H' \to \mathbb{R},\ ((x_1,y_1),(x_2,y_2)) \mapsto h(x_1 y_2). \end{aligned}$$

Тогда H' есть сепарабельное метрическое пространство и $f = h' \circ g' \times g'$. $\square$

Из предложений 5.4.4 и 5.4.5 вытекает следующее утверждение.

Следствие 5.36. *Пусть G есть топологическая группа, G^2 есть $\mathbb{R}$-факторизумая группа и $X \subset G$ ретракт G. Тогда X является 2-$\mathbb{R}$-факторизуемым пространством.*

Лемма 5.4.6. *Пусть X пространство, $f : X^2 \to \mathbb{R}$ непрерывная функция,*

$$\varphi : X \to C_p(X), \varphi(x)(y) = f(x,y).$$

Если функция $f : X^2 \to \mathbb{R}$ 2-$\mathbb{R}$-факторизуема, то $nw(\varphi(X)) \leq \omega$.

Доказательство. Существует сепарабельное метрическое пространство Y и непрерывные отображения $g : X \to Y$ и $h : Y^2 \to \mathbb{R}$, так что $f = h \circ g \times g$. Тогда $\varphi(X)$ вкладывается в $C_p(Y)$, $\varphi(x) \mapsto \psi(g(x))$, где $\psi(u)(v) = h(u, v)$. Так как $nw(C_p(Y)) \leq \omega$, то $nw(\varphi(X)) \leq \omega$. □

Предложение 5.4.7. *Прямая Зоргенфрея* $\mathbb{S}$ *не 2-*$\mathbb{R}$*-факторизуемое пространство.*

Доказательство. Положим

$$f : \mathbb{S} \times \mathbb{S} \to \mathbb{R}, (x, y) \mapsto \begin{cases} 0, & x + y < 0; \\ 1, & x + y \geq 0. \end{cases}$$

Функция f непрерывно и отображение $\varphi : \mathbb{S} \to C_p(\mathbb{S}), \varphi(x)(y) = f(x, y)$ гомеоморфно вкладывает $\mathbb{S}$ в $C_p(\mathbb{S})$. Из леммы 5.4.6 вытекает, что f не 2-$\mathbb{R}$-факторизуема и, следовательно, X не 2-$\mathbb{R}$-факторизуемое пространство. □

Пример 5.37. Построим сепарабельную не $\mathbb{R}$-факторизуемую топологическую группу G [8].

Пусть $G = B_z(\mathbb{S})$. Из предложения 5.4.3 вытекает, что прямая Зоргенфрея $\mathbb{S}$ ко-неархимедово пространство. Из теоремы 5.34 вытекает, что $\mathbb{S}$ есть ретракт G. В силу предложения 5.4.7, $\mathbb{S}$ не 2-$\mathbb{R}$-факторизуемое пространство. Из следствие 5.36 вытекает, что G^2 не $\mathbb{R}$-факторизуемая группа. Так как $\mathbb{S} \times \{0, 1\}$ гомеоморфно $\mathbb{S}$, то G^2 изоморфно G. Так как $\mathbb{S}$ сепарабельно, то G тоже сепарабельно.

Ретральные пространства со счетным числом Суслина

Пусть X — подпространство Y. Обозначим через $c(X, Y)$ супремум τ — мощности семейств попарно непересекающихся открытых подмножеств Y, каждое из которых пересекает X. Таким образом, $c(X, Y)$ означает относительное число Суслина X в Y.

Пусть $F(X)$ — свободная группа над пространством X. Обозначим

$$M_G(X) = \{xy^{-1}z \in F(X) \,:\, x, y, z \in X\},$$
$$M : X^3 \to M_G(X),\ (x, y, z) \mapsto xy^{-1}z.$$

Опишем топологию $M_G(X)$ в точках $x \in X$. Обозначим

$$W(A, B) := M((A \times B) \cup (B \times A)),$$

где $A \subset X$ и $B \subset X^2$. Через $\mathcal{U}_X$ обозначается универсальная равномерность пространства X.

Лемма 5.4.8. *Пусть G топологическая группа, $X \subset G$, V окрестность единицы, $U = \{(x, y) \in X^2 : xy^{-1}, x^{-1}y \in V\}$. Тогда $U \in \mathcal{U}_X$.*

Доказательство. Существует непрерывная преднорма N на G, так что $\{g \in G : N(g) < 1\} \subset V$ [36, Theorem 3.3.9]. Положим $d_r(x, y) = N(xy^{-1})$ и $d_l(x, y) = N(x^{-1}y)$ для $x, y \in X$. Тогда d_l и d_r есть непрерывные псевдометрики на X. Положим

$$U_l = \{(x, y) \in X^2 : d_l(x, y) < 1\}, \qquad U_r = \{(x, y) \in X^2 : d_r(x, y) < 1\}.$$

Тогда $U_l, U_r, U_l \cap U_r \in \mathcal{U}_X$ и $U_l \cap U_r \subset U$. Следовательно, $U \in \mathcal{U}_X$. □

Утверждение 5.4.9. *Локальную базу x в $M_G(X)$ образуют множества вида $W(O, U)$, где $x \in O$ и $U \in \mathcal{U}_X$.*

Доказательство. Пусть W есть окрестность x в $F(X)$. Существует окрестность единицы V, так что $V = V^{-1}$, $xV^3 \subset W$ и $V^3x \subset W$. Положим $O = X \cap xV \cap Vx$, $U = \{(u, v) \in X^2 : uv^{-1}, u^{-1}v \in V\}$. Тогда O окрестность x и $W(O, U) \subset W$. Из леммы 5.4.8 вытекает, что $U \in \mathcal{U}_X$.

Пусть $O \ni x$ открыто и $U \in \mathcal{U}_X$. Существует псевдометрика d на X, так что $\{y \in X : d(x, y) < 1\} \subset O$ и $\{(u, v) \in X^2 : d(u, v) < 1\} \subset U$. Пусть $\hat{d}$ есть граевское продолжение метрики d до инвариантной метрики на $F(X)$. Инвариантная метрика $\hat{d}$ непрерывна на X [36, Theorem 7.2.2]. Положим $V = \{g \in F(X) : \hat{d}(g, e) < \frac{1}{3}\}$. Тогда V окрестность единицы и $xV \cap M_G(X) \subset W(O, U)$. □

Предложение 5.4.10. *Для пространства $(X, \mathcal{T})$ следующие условия эквивалентны:*

(RCCC) *$c(X, M_G(X)) \leq \omega$;*

(TG_u) *если $(O_\alpha)_{\alpha<\omega_1} \subset \mathcal{T}$ семейство открытых непустых множеств и $(U_\alpha)_{\alpha<\omega_1} \subset \mathcal{U}_X$ семейство окружений диагонали, то существуют различные $\alpha, \beta < \omega_1$, такие что*

$$W(O_\alpha, U_\alpha) \cap W(O_\beta, U_\beta) \neq \varnothing;$$

(TG) *если $(O_\alpha)_{\alpha<\omega_1} \subset \mathcal{T}$ семейство открытых непустых множеств и $(\gamma_\alpha)_{\alpha<\omega_1}$ семейство нормальных открытых покрытий пространства X, то существуют различные $\alpha, \beta < \omega_1$, такие что*

$$\mathrm{st}(O_\alpha, \gamma_\beta) \cap \mathrm{st}(O_\beta, \gamma_\alpha) \neq \varnothing.$$

Доказательство. Эквивалентность (RCCC)⇔(TG_u) вытекает из утверждения 5.4.9. Докажем (TG_u)⇔(TG). Между нормальными открытыми покрытиями пространства X и окружениями диагонали из универсальной равномерности $\mathcal{U}_X$ пространства X существует соответствие:

- $\bigcup_{V\in\gamma} V^2 \in \mathcal{U}_X$ для нормального открытого покрытия γ;
- для каждого $U \in \mathcal{U}_X$ существует открытое нормальное покрытие γ пространства X, так что $\bigcup_{V\in\gamma} V^2 \subset U$.

Поэтому для доказательства импликации (TG$_u$)$\Leftrightarrow$(TG) достаточно доказать, что если O_1 и O_2 открытые непустые множества, γ_1 и γ_2 открытые нормальные покрытия X, $U_1 = \bigcup_{V\in\gamma_1} V^2$ и $U_2 = \bigcup_{V\in\gamma_2} V^2$, то тогда следующие условия эквивалентны:

(1) $W(O_1, U_1) \cap W(O_2, U_2) \neq \varnothing$;

(2) $\mathrm{st}(O_1, \gamma_2) \cap \mathrm{st}(O_1, \gamma_2) \neq \varnothing$.

Если $O_1 \cap O_2 \neq \varnothing$, то выполняется (1) и (2). Далее будем считать, что $O_1 \cap O_2 = \varnothing$.

Докажем (1)$\Rightarrow$(2). Пусть $xy^{-1}z \in W(O_1, U_1) \cap W(O_2, U_2)$. Если $xy^{-1}z \in W(O_1, U_1)$, то либо $x \in O_1$ и $(y, z) \in U_1$ либо $(x, y) \in U_1$ и $z \in O_1$. Для определенности, далее будем считать, что $x \in O_1$ и $(y, z) \in U_1$. Так как $x \notin O_2$ и $xy^{-1}z \in W(O_2, U_2)$, то $(x, y) \in U_2$ и $z \in O_2$. Существуют $V_1 \in \gamma_1$ и $V_2 \in \gamma_2$, так что $y, z \in V_1$ и $x, y \in V_2$. Тогда $x \in O_1 \cap V_2$, $y \in V_1 \cap V_2$ и $z \in O_2 \cap V_1$. Следовательно, $y \in \mathrm{st}(O_1, \gamma_2) \cap \mathrm{st}(O_1, \gamma_2)$.

Доказательство (2)$\Rightarrow$(1) проводятся так же как и (1)$\Rightarrow$(2), только в обратную сторону. Пусть $y \in \mathrm{st}(O_1, \gamma_2) \cap \mathrm{st}(O_1, \gamma_2)$. Существуют такие $V_1 \in \gamma_1$ и $V_2 \in \gamma_2$, такие что $O_1 \cap V_2 \neq \varnothing$, $y \in V_1 \cap V_2$ и $O_2 \cap V_1 \neq \varnothing$. Пусть $x \in O_1 \cap V_2$ и $z \in O_2 \cap V_1$. Тогда $x \in O_1$, $(y, z) \in U_1$, $(x, y) \in U_2$ и $z \in O_2$. Следовательно, $xy^{-1}z \in W(O_1, U_1) \cap W(O_2, U_2)$. $\square$

Теорема 5.38. *Пусть X ретральное пространство. Тогда у X счетное число Суслина если и только если для X выполняется условие* (TG) *из предложения 5.4.10.*

Доказательство. Пространство X является ретральным если и только если X является ретрактом $F(X)$. Следовательно, X есть ретракт $M_G(X)$. Тогда $c(X) = c(X, M_G(X))$. Осталось применить предложение 5.4.10. $\square$

Предложение 5.4.11. *Предположим, что пространства X выполняется следующее условие:*

(A) *Пусть $(O_\alpha)_{\alpha<\omega_1}$ семейство непустых открытых множеств X. Тогда существует несчетное $A \subset \omega_1$ и $x \in X$, так что*

$$|\{\alpha \in A \,:\, O_\alpha \cap V\}| < \omega$$

для любой окрестности V точки x.

Тогда для X выполняется (TG).

Доказательство. Пусть $(O_\alpha)_{\alpha<\omega_1}$ семейство открытых непустых множеств и $(\gamma_\alpha)_{\alpha<\omega_1}$ семейство нормальных открытых покрытий пространства X. Из (A) вытекает, что существует несчетное $A \subset \omega_1$ и $x \in X$, так что $|\{\alpha \in A : O_\alpha \cap V\}| < \omega$ для любой окрестности V точки x. Положим $M_\alpha = \{\beta \in A : \operatorname{st}(x, \gamma_\alpha) \cap O_\beta = \varnothing\}$ для $\alpha \in A$. Тогда каждое множество M_α конечно. Применяя лемму о Δ системе, находим несчетное $B \subset A$, так что у семейства $\{M_\alpha : \alpha \in B\}$ есть некоторый корень $M \subset A$, то есть $M_\alpha \cap M_\beta = M$ для различных $\alpha, \beta \in B$. Возьмем различные $\alpha, \beta \in B \setminus M$. Тогда $\alpha \notin M_\beta$ и $\beta \notin M_\alpha$, то есть $O_\alpha \cap \operatorname{st}(x, \gamma_\beta) \neq \varnothing$ и $O_\beta \cap \operatorname{st}(x, \gamma_\alpha) \neq \varnothing$. Следовательно,

$$x \in \operatorname{st}(O_\alpha, \gamma_\beta) \cap \operatorname{st}(O_\beta, \gamma_\alpha).$$

□

Предложение 5.4.12. *Пусть M есть сепарабельное метрическое пространство, $A(\omega_1)$ есть одноточечная компактификация дискретно пространства пространства мощности ω_1. Пусть $X \subset M \times A(\omega_1)$ и $\{m \in M : (m, y) \in X\}$ плотно в M для всех $y \in A(\omega_1)$. Тогда для X выполняется* (TG) *и X не является ретральным пространством.*

Доказательство. В силу предложения 5.4.11, достаточно проверить условие (A). Пусть $(O_\alpha)_{\alpha<\omega_1}$ есть семейство непустых открытых множеств X. Пусть y_* есть единственная неизолированная точка $A(\omega_1)$, $Y = A(\omega_1) \setminus \{y_*\}$ и $\mathcal{B}$ есть счетная база M. Для каждого $\alpha < \omega_1$ существует $y_\alpha \in Y$ и $U_\alpha \in \mathcal{B}$, так что $U_\alpha \times \{y_\alpha\} \subset O_\alpha$. Так как множество $\mathcal{B}$ счетно, то существует $U \in \mathcal{B}$ и несчетное $A \subset \omega_1$, так что $U = U_\alpha$ для некоторого $\alpha \in A$. Пусть $m_* \in \{m \in U : (x, y) \in X\} \neq \varnothing$ и $x = (m_*, y_*)$. Тогда для x и A выполняется условие (A).

Так как X плотно в $M \times A(\omega_1)$, то $c(X) = \omega_1$. Так как $c(X) > \omega$ и для X выполняется (TG), то из теоремы 5.38 вытекает, что X не ретральное пространство. □

5.5 Пространства с операцией Мальцева

Отображение $M : X^3 \to X$ называется *операцией Мальцева*, если выполняется тождество

$$M(x, y, y) = M(y, y, x) = x$$

для всех $x, y \in X$. На группах есть естественная операция Мальцева: $M(x, y, z) = xy^{-1}z$. На ретрактах множеств с операцией Мальцева есть операция Мальцева: если $r : X \to X$ ретракция, то положим $M'(x, y, z) = r(M(x, y, z))$ для $x, y, z \in r(X)$.

Мы рассматриваем непрерывные и раздельно непрерывные операции Мальцева на топологических пространствах. Топологическое пространство с непрерывной операцией Мальцева называются *мальцевскими пространствами*.

ω-Клеточность и число Суслина пространств с операцией Мальцева

В этом разделе у пространств не предполагаются какие либо дополнительные аксиомы отделимости.

Для пространства X определим следующее свойство:

($\mathrm{U_s}$) Пусть $\{x_\alpha : \alpha < \omega_1\} \subset X$ и для $\alpha < \omega_1$ пусть $\mathcal{F}_\alpha$ есть не более чем счетное семейство замкнутых подмножеств X. Тогда существует $\beta < \omega_1$, для которого выполняется условие:

  ($*$) существует $y \in \overline{\{x_\alpha : \alpha < \beta\}}$, такое что если $\gamma < \beta$, $F \in \mathcal{F}_\gamma$ и $x_\beta \in F$, то $y \in F$.

Свойство ($\mathrm{U_s}$) является усилением свойства (U) из [13; 77] в классе тихоновских пространств. Свойство ($\mathrm{U_s}$) можно использовать для регулярных пространств.

Утверждение 5.5.1. *Пространство X является Σ-пространством со счетным экстендом если и только если существует счетное семейство $\mathcal{S}$ и покрытие $\mathcal{C}$ замкнутыми счетно компактными множествами, так что если $C \in \mathcal{C}$ и $U \supset C$ открыто, то $C \subset S \subset U$ для некоторого $S \in \mathcal{S}$.*

Доказательство. Пусть $\mathcal{S}$ есть σ-дискретное семейство и $\mathcal{C}$ есть покрытие замкнутыми счетно компактными множествами, так что если $C \in \mathcal{C}$ и $U \supset C$ открыто, то $C \subset S \subset U$ для некоторого $S \in \mathcal{S}$. Так как X со счетным экстендом, то $\mathcal{S}$ счетно.

В обратную сторону, достаточно отметить, что счетное семейство является σ-дискретным семейством. $\square$

Предложение 5.5.2. *Пусть X есть регулярное Σ-пространство со счетным экстендом. Тогда для X выполняется* ($\mathrm{U_s}$).

Доказательство. Пусть $\mathcal{S}$ и $\mathcal{C}$ есть как в утверждении 5.5.1. Можно считать, что семейство $\mathcal{S}$ замкнуто относительно конечных пересечений. Пусть $\{x_\alpha : \alpha < \omega_1\} \subset X$ и для $\alpha < \omega_1$ пусть $\mathcal{F}_\alpha$ есть не более чем счетное семейство замкнутых подмножеств X. Обозначим

$$
\begin{aligned}
F^*_\gamma &= \{\bigcap \mathcal{F} : \mathcal{F} \subset \bigcup_{\alpha<\gamma} \mathcal{F}_\alpha,\ |\mathcal{F}| < \omega, \bigcap \mathcal{F} \neq \varnothing\},\\
X_\gamma &= \{x_\alpha : \alpha < \gamma\}
\end{aligned}
$$

для $\gamma \le \omega_1$. Индукцией по $n \in \omega$ построим возрастающую последовательность счетных ординалов $(\beta_n)_{n\in\omega}$ так что для $n > 0$ выполняется условие:

(P_n) если $x_\gamma \in S \cap F$ для $\gamma < \omega_1$, $S \in \mathcal{S}$ и $F \in \mathcal{F}^*_{\beta_{n-1}}$, то существует $y \in \overline{X_{\beta_n}}$, такое что $y \in S \cap F$.

Положим $\beta_0 = \omega$. Предположим, что $n > 0$ и построены $\beta_0 < \beta_1 < ... < \beta_{n-1} < \omega_1$. Для $S \in \mathcal{S}$ и $F \in \mathcal{F}^*_{\beta_{n-1}}$ обозначим

$$A_{S,F} = \{\alpha < \omega_1 \,:\, x_\alpha \in S \cap F\}.$$

Если $A_{S,F} \ne \varnothing$, то обозначим $\alpha_{S,F} = \min A_{S,F}$. Положим

$$\beta_n = \sup\{\alpha_{S,F} \,:\, S \in \mathcal{S}, F \in \mathcal{F}^*_{\beta_{n-1}} \text{ и } A_{S,F} \ne \varnothing\} + 1.$$

Последовательность $(\beta_n)_{n\in\omega}$ построена. Положим $\beta = \sup\{\beta_n \,:\, n \in \omega\}$. Проверим $(*)$ в определении $(\mathrm{U_s})$. Существует $C \in \mathcal{C}$, для которого $x_\beta \in C$. Положим

$$\mathcal{S}' = \{S \in \mathcal{S} \,:\, C \subset S\} = \{S'_n \,:\, n \in \omega\},$$
$$\mathcal{F}' = \{F \in \mathcal{F}^*_\beta \,:\, x_\beta \in F\} = \{F'_n \,:\, n \in \omega\}.$$

Пусть $n \in \omega$. Положим

$$S_n = \bigcap_{i=0}^{n} S'_i, \qquad F_n = \bigcap_{i=0}^{n} F'_i,$$
$$\alpha_n = \alpha_{S_n,F_n}, \qquad y_n = x_{\alpha_n}.$$

Так как $\mathcal{F}^*_\beta = \bigcap_{m\in\omega} \mathcal{F}^*_{\beta_m}$, то $F_n \in \mathcal{F}^*_{\beta_m}$ для некоторого $m \in \omega$. Так как $\beta \in A_{S_n,F_n} \ne \varnothing$, то $\alpha_n = \alpha_{S_n,F_n} \le \beta_{m+1} < \beta$. Следовательно, $y_n \in X_\beta$.

Из определения семейств $\mathcal{S}$ и $\mathcal{C}$ вытекает, что последовательность $(y_n)_{n\in\omega}$ накапливается к некоторой точке $y \in C \cap \bigcap_{n\in\omega} F_n$. Так как $(y_n)_{n\in\omega} \subset X_\beta$, то $y \in \overline{X_\beta}$.

Пусть $F \in \mathcal{F}_\gamma$ для $\gamma < \beta$ и $x_\beta \in F$. Тогда $F \in \mathcal{F}'$ и $F = F'_m \subset F_m$ для некоторого $m \in \omega$. Следовательно,

$$y \in \bigcap_{n\in\omega} F_n \subset F_m \subset F.$$

□

Предложение 5.5.3. *Пусть X есть регулярное пространство с раздельно непрерывной операцией Мальцева и для X выполняется* $(\mathrm{U_s})$*. Тогда X является ω-клеточным пространством.*

Доказательство. Предположим противное. Тогда существует семейство $\{K'_\alpha : \alpha < \omega_1\}$ непустых множеств типа G_δ, так что

$$K'_\beta \not\subset \overline{\bigcap_{\alpha<\beta} K'_\alpha}$$

для $\beta < \omega_1$. Выберем

$$x_\beta \in K'_\beta \setminus \overline{\bigcap_{\alpha<\beta} K'_\alpha}$$

и последовательность $(U_{\beta,n})_{n\in\omega}$ открытых множеств X, так что

$$x_\beta \in U_{n+1} \subset \overline{U_{n+1}} \subset U_n$$

для $n \in \omega$. Тогда

$$x_\beta \in K_\beta = \bigcap_{n\in\omega} U_{\beta,n} \subset K'_\beta$$

и

$$x_\beta \notin \overline{\bigcup_{\alpha<\beta} K_\alpha}. \tag{5.1}$$

Для $\alpha, \gamma < \omega_1$ положим

$$h_{\alpha,\gamma} : X \to X,\ x \mapsto M(x, x_\alpha, x_\gamma).$$

Отметим, что

$$h_{\alpha,\gamma}(x_\alpha) = x_\gamma, \qquad\qquad h_{\alpha,\alpha} = \mathrm{id}_X\,.$$

Положим

$$\begin{aligned}&\mathcal{P}_\beta = \{h^{-1}_{\alpha,\gamma}(X \setminus U_{\gamma,n}) \,:\, \alpha, \gamma < \beta \text{ и } n < \omega\},\\ &\mathcal{F}_\beta = \mathcal{P}_{\beta+1}.\end{aligned}$$

Так как для X выполняется условие ($\mathrm{U_s}$), то существует $\beta < \omega_1$ и

$$y \in \overline{\{x_\alpha \,:\, \alpha < \beta\}},$$

такое что если $\gamma < \beta$, $F \in \mathcal{F}_\gamma$ и $x_\beta \in F$, то $y \in F$. Тогда

$$\text{если } x_\beta \in F \in \mathcal{P}_\beta, \text{ то } y \in F. \tag{5.2}$$

Положим

$$y_\gamma = M(x_\beta, y, x_\gamma)$$

для $\gamma < \beta$.

Лемма. $y_\gamma \in K_\gamma$.

Доказательство. Предположим, что $y_\gamma \notin K_\gamma$. Тогда $y_\gamma \notin U_{\gamma,n}$ для некоторого $n \in \omega$. Положим

$$U_1 = \{x \in X \,:\, M(y, x, x_\gamma) \in U_{\gamma,n+1}\},$$
$$U_2 = \{x \in X \,:\, M(x_\beta, x, x_\gamma) \in X \setminus \overline{U_{\gamma,n+1}}\}.$$

Множества U_1 и U_2 открыты. Так как

$$x_\gamma = M(y, y, x_\gamma) \in U_{\gamma,n+1},$$
$$y_\gamma = M(x_\beta, y, x_\gamma) \notin U_{\gamma,n} \supset \overline{U_{\gamma,n+1}},$$

то $y \in U_1 \cap U_2$. Множество $U_1 \cap U_2$ является открытой окрестностью y. Так как $y \in \overline{\{x_\alpha \,:\, \alpha < \beta\}}$, то $x_\alpha \in U_1 \cap U_2$ для некоторого $\alpha < \beta$. Тогда

$$h_{\alpha,\gamma}(y) = M(y, x_\alpha, x_\gamma) \in U_{\gamma,n+1},$$
$$h_{\alpha,\gamma}(x_\beta) = M(x_\beta, x_\alpha, x_\gamma) \in X \setminus \overline{U_{\gamma,n+1}} \subset X \setminus U_{\gamma,n+1}.$$

Следовательно

$$x_\beta \in h^{-1}_{\alpha,\gamma}(X \setminus U_{\gamma,n+1}) = F \in \mathcal{P}_\beta,$$
$$y \in h^{-1}_{\alpha,\gamma}(U_{\gamma,n+1}) = X \setminus F.$$

Противоречие с (5.2). □

Положим

$$h : X \to X,\ x \mapsto M(x_\beta, y, x).$$

Так как отображение h непрерывно, $y_\gamma = h(x_\gamma)$ для $\gamma < \beta$ и $y \in \overline{\{x_\gamma \,:\, \gamma < \beta\}}$, то

$$x_\beta = M(x_\beta, y, y) = h(y) \in \overline{h(\{x_\gamma \,:\, \gamma < \beta\})} = \overline{\{y_\gamma \,:\, \gamma < \beta\}}.$$

Из леммы вытекает, что

$$x_\beta \in \overline{\bigcup_{\gamma<\beta} K_\gamma}.$$

Противоречие с (5.1). □

Из предложений 5.5.2 и 5.5.3 вытекает следующее предложение.

Теорема 5.39. *Пусть X есть регулярное Σ-пространство со счетным экстендом и с раздельно непрерывной операцией Мальцева. Тогда X является ω-клеточным пространством.*

Следствие 5.40. *Пусть X есть регулярное счетно компактное пространство с раздельно непрерывной операцией Мальцева. Тогда X является ω-клеточным пространством.*

Компактные и псевдокомпактные пространства с раздельно непрерывной операцией Мальцева и компакты Дугунджи

Предложение 5.5.4 (Э.Б.Шапировский, см. [13, Theorem 4.10]). *Пусть X есть компактное ω-клеточное пространство. Тогда ω_1 является калибром X.*

Если $\{X_\alpha : \alpha \in A\}$ есть семейство пространств, то будем обозначать через π_α проекцию произведения $\Pi = \prod_{\alpha\in A} X_\alpha$ на X_α и будем обозначать для $B \subset A$ через π_B проекцию произведения Π на грань $\prod_{\alpha\in B} X_\alpha$.

Предложение 5.5.5 (Е.В. Щепин, [99, Теорема 26]). *Компакт X является компактом Дугунджи если и только если X можно вложить в произведение $\prod_{\alpha\in A} X_\alpha$ метризуемых компактов таким образом, что отображение*

$$p_B = \pi_B|_X : X \to \pi_B(X)$$

открыто для всех $B \subset A$.

Предложение 5.5.6 (А.Мальцев [145], см. также [13, Theorem 4.11]). *Пусть X есть пространство с раздельно непрерывной операцией Мальцева M, Y есть пространство с раздельно непрерывной операцией Мальцева L, $f : X \to Y$ есть непрерывное сюрьективное факторное отображением, которое является гомоморфизмом алгебры (X, M) на алгебру (Y, L) (то есть $L \circ f^3 = f \circ M$). Тогда f есть открытое отображение.*

Теорема 5.41. *Пусть X есть компактное пространство с раздельно непрерывной операцией Мальцева. Тогда X является компактом Дугунджи.*

Доказательство. Из следствия 5.40 и предложения 5.5.4 вытекает что ω_1 является калибром пространства X. Пусть M есть раздельно непрерывная операция Мальцева на X. Из теоремы 2.39 вытекает, что существует семейство метризуемых компактов с раздельно непрерывной операцией Мальцева $\{(X_\alpha, M_\alpha) : \alpha \in A\}$, такое что X вкладывается в $\Pi = \prod_{\alpha\in A} X_\alpha$ таким образом, что алгебра (X, M) вложена в алгебру (Π, L) как подалгебра, где

$$L(\bar x, \bar y, \bar z) = (M_\alpha(x_\alpha, y_\alpha, z_\alpha))_{\alpha\in A}, \text{ где } \bar x, \bar y, \bar z \in \Pi \text{ и}$$
$$\bar x = (x_\alpha)_{\alpha\in A}, \bar y = (y_\alpha)_{\alpha\in A}, \bar z = (z_\alpha)_{\alpha\in A}.$$

Пусть

$$p_B = \pi_B|_X : X \to \pi_B(X)$$

для $B \subset A$. Отображение p_B является непрерывным гомоморфизмом мальцевских пространств с раздельно непрерывными операциями Мальцева. Отображение p_B сюрьективно. Так как X компактно, то отображение p_B замкнуто и, следовательно, факторно. Из предложения 5.5.6 вытекает что отображение p_B открыто.

Итак, p_B открыто для каждого $B \subset A$. Из предложения 5.5.5 вытекает, что X компакт Дугунджи. □

Из теорем 4.5 и 5.41 вытекает следующее утверждение.

Теорема 5.42. *Пусть X есть псевдокомпактное пространство с раздельно непрерывной 2-квазинепрерывной операцией Мальцева. Тогда βX является компактом Дугунджи.*

Теорема 5.43. *Пусть X есть псевдокомпактное пространство с непрерывной операцией Мальцева M. Тогда βX является компактом Дугунджи и операция M продолжается до непрерывной операции Мальцева $\widehat{M} : (\beta X)^3 \to \beta X$ на βX.*

Доказательство. Из теоремы 5.42 вытекает, что βX является компактом Дугунджи. Компакты Дугунджи являются $\varkappa$-метризуемыми компактами [106]. Плотные подпространства $\varkappa$-метризуемых пространств $\varkappa$-метризуемы, следовательно, X $\varkappa$-метризуемое пространство. Так как произведение псевдокомпактных $\varkappa$-метризуемых пространств псевдокомпактно [94], то X в любой степени псевдокомпактно. Следовательно, X^3 псевдокомпактно. Из теоремы Гликсберга [137] вытекает, что отображение M продолжается до непрерывного отображения $\widehat{M} : (\beta X)^3 \to \beta X$ на βX. Так как X плотно в βX, то $\widehat{M}$ является операцией Мальцева. □

Из теорем 4.6 и 5.41 вытекает следующее утверждение.

Теорема 5.44. *Пусть X есть псевдокомпактное пространство с раздельно непрерывной операцией Мальцева и (X, X) является парой Гротендика. Тогда βX является компактом Дугунджи.*

Из следствия 4.7, предложения 2.1.2 и теоремы 4.6 вытекает следующее утверждение.

Следствие 5.45. *Пусть X есть псевдокомпактное пространство с раздельно непрерывной операцией Мальцева и X принадлежит какому либо из перечисленных ниже классов пространств:*

(1) счетно компактные пространства;

(2) пространства счетной тесноты;

(3) сепарабельные пространства;

(4) k-пространства;

(5) пространства с плотным σ-компактным подпространством.

Тогда βX является компактом Дугунджи.

Пример 5.46. Из следствия 3.33 вытекает, что существует псевдокомпактная булева квазитопологическая группа G с несчетным числом Суслина, такая что G^ω псевдокомпактно. На G есть раздельно непрерывная операция Мальцева $M(x, y, z) = xy^{-1}z$. В компактах Дугунджи счетное число Суслина. Следовательно, βG не компакт Дугунджи.

Для псевдокомпактного пространства G с раздельно непрерывной операцией Мальцева M стоун-чеховское расширение βG не является компактом Дугунджи.

2-Мальцевские пространства

Пусть X множество. Операцию Мальцева $M : X^3 \to X$ назовем *2-мальцевской*, если $M(x, y, z) \in \{x, z\}$ для $x, y, z \in X$. Операцию Мальцева M назовем *3-мальцевской*, если $M(x, y, z) \in \{x, y, z\}$ для $x, y, z \in X$. 3-Мальцевская операция характеризуется тем, что каждое подмножество $Y \subset X$ является подалгеброй алгебры (X, M),

Пространство X назовем *2-мальцевским* пространством, если на X существует непрерывная 2-мальцевская операция.

Если M (раздельно) непрерывная 3-мальцевская операция, то операция

$$\widetilde{M}(x, y, z) = \begin{cases} M(x, y, z), & \text{если } M(x, y, z) \in \{x, z\} \\ x, & \text{если } M(x, y, z) \notin \{x, z\} \end{cases}$$

будет (раздельно) непрерывной 2-мальцевской операцией.

Теорема 5.47. *Пусть X есть счетно компактное пространство с раздельно непрерывной 2-мальцевской операцией.*

(1) Если X регулярное пространство, то спред $s(X)$ пространства X счетен.

(2) Если X тихоновское пространство, то X метризуемый компакт.

Доказательство. (1) Пусть D дискретное подпространство X. Положим $Y = \overline{D}$. Пространство Y является счетно компактным мальцевским регулярным пространством. Из следствия 5.40 вытекает, что пространство Y ω-клеточно. Так как D открытое

(2) Пусть M есть раздельно непрерывная операция на X. Из следствия 4.7 и предложения 2.1.2 вытекает, что M продолжается до раздельно непрерывной операцией Мальцева $\widehat{M} : (\beta X)^3 \to \beta X$. Из теоремы 5.41 вытекает, что βX является компактом Дугунджи.

Покажем, что $\widehat{M}$ есть 2-мальцевская операция. Предположим противное. Тогда существуют $x, y, z \in \beta X$, для которых $\widehat{M}(x, y, z) \notin \{x, z\}$. Пусть U и V есть такие непересекающиеся открытые подмножества βX, что $M(x, y, z) \in U$ и $x, z \in V$. Из раздельной непрерывности $\widehat{M}$ вытекает, что существует $y' \in X$ так что $\widehat{M}(x, y', z) \in U$; существует $x' \in V \cap X$ так что $\widehat{M}(x', y', z) \in U$; существует $z' \in V \cap X$ так что $\widehat{M}(x', y', z') \in U$. Получаем $M(x', y', z') = \widehat{M}(x', y', z') \in U$ и $x', z' \in V$. Следовательно, $M(x', y', z') \notin \{x', z'\}$. Противоречие с тем, что операция M 2-мальцевская.

Из (1) вытекает, что спред компакта βX счетен. Для компактов счетный спред влечет счетную тесноту [88, 7.15. Theorem]. Компакты Дугунджи являются диадическими компактами и диадические компакты счетной тесноты метризуемы [78, Теорема 33]. Следовательно, X метризуемый компакт. $\square$

Обозначим

$$
\begin{aligned}
&\Delta = \{(x, x, x) \,:\, x \in X\}, && \Pi_1 = \{(x, y, y) \,:\, x, y \in X\},\\
&\Pi_2 = \{(y, x, y) \,:\, x, y \in X\}, && \Pi_3 = \{(y, y, x) \,:\, x, y \in X\},\\
&\widetilde{X} = X^3 \setminus \Delta, && \Phi_1 = \{(x, y, z) \in X^3 \,:\, x = M(x, y, z)\},\\
&\Phi_2 = \{(x, y, z) \in X^3 \,:\, y = M(x, y, z)\}, && \Phi_3 = \{(x, y, z) \in X^3 \,:\, z = M(x, y, z)\}.
\end{aligned}
$$

Положим

$$
\widetilde{\Pi}_i = \Pi_i \cap \widetilde{X}, \qquad \widetilde{\Phi}_i = \Phi_i \cap \widetilde{X}
$$

для $i = 1, 2, 3$.

Из определений несложно вытекает следующее утверждение.

Предложение 5.5.7. *Пусть M есть 3-арная операция на пространстве X.*

(1) Если M непрерывная операция Мальцева на X, то тогда множества Φ_i замкнуты в X^3 для $i = 1, 2, 3$ и

$$
\Pi_1 \subset \Phi_1, \qquad \Pi_3 \subset \Phi_3.
$$

(2) Операция M является непрерывной 3-мальцевской операцией если и только если

(a) $\Delta \subset \Phi_i$ для $i = 1, 2, 3$;

(b) $\widetilde{\Pi}_1 \subset \widetilde{\Phi}_1$ и $\widetilde{\Pi}_3 \subset \widetilde{\Phi}_3$;

(c) $\widetilde{\Phi}_1$, $\widetilde{\Phi}_2$ и $\widetilde{\Phi}_3$ есть открыто замкнутое разбиение $\widetilde{X}$.

(3) Операция M является непрерывной 2-мальцевской операцией если и только если

(a) $\Delta \subset \Phi_i$ *для* $i = 1, 3$*;*

(b) $\widetilde{\Pi}_1 \subset \widetilde{\Phi}_1$ *и* $\widetilde{\Pi}_3 \subset \widetilde{\Phi}_3$*;*

(c) $\widetilde{\Phi}_1$ *и* $\widetilde{\Phi}_3$ *есть открыто замкнутое разбиение* $\widetilde{X}$*.*

Из предложения 5.5.7 вытекает следующее утверждение.

Предложение 5.5.8. *Пространство* X *является* 2*-мальцевским если и только если у* $\widetilde{\Pi}_1$ *и* $\widetilde{\Pi}_3$ *существуют открыто замкнутые непересекающиеся окрестности в* $\widetilde{X}$*.*

Из предложения 5.5.8 вытекает следующее утверждение.

Предложение 5.5.9. *Если пространство* X *уплотняется на* 2*-мальцевское пространство, то* X *является* 2*-мальцевским пространством.*

Теорема 5.48. *Если пространство* X *уплотняется на неархимедово пространство (например, на сепарабельное метризуемое нульмерное пространство), то* X *является* 2*-мальцевским пространством.*

Доказательство. В силу предложения 5.5.9, достаточно показать, что если X неархимедово пространство, то X является 2-мальцевским пространством. Это утверждение несложно вытекает из теоремы 5.34, но мы докажем этот факт непосредственно, используя предложение 5.5.8.

Пусть $\mathcal{B}$ есть неархимедова база пространства X. Положим

$$W_1 = \bigcup\{U \times V \times V \,:\, U, V \in \mathcal{B} \text{ и } U \cap V = \varnothing\},$$
$$W_3 = \bigcup\{V \times V \times U \,:\, U, V \in \mathcal{B} \text{ и } U \cap V = \varnothing\}.$$

Ясно,

$$\widetilde{\Pi}_1 \subset W_1 \subset \widetilde{X}, \qquad \widetilde{\Pi}_3 \subset W_3 \subset \widetilde{X},$$

W_1 и W_3 открыты в $\widetilde{X}$.

Докажем, что $W_1 \cap W_3 = \varnothing$. Предположим противное, то есть существует $(x, y, z) \in U_1 \cap U_3$. Тогда

$$(x, y, z) \in U_1 \times V_1 \times V_1 \cap V_2 \times V_2 \times U_2$$

для некоторых $U_1, V_1, U_2, V_2 \in \mathcal{B}$, для которых $U_1 \cap V_1 = U_2 \cap V_2 = \varnothing$. Тогда

$$x \in U_1 \cap V_2, \qquad y \in V_1 \cap V_2, \qquad z \in V_1 \cap U_2.$$

Так как семейство $\mathcal{B}$ неархимедово, $U_1 \cap V_1 = \varnothing$, $U_1 \cap V_2 \neq \varnothing$ и $V_1 \cap V_2 \neq \varnothing$, то $U_1, V_1 \subset V_2$. Так как семейство $\mathcal{B}$ неархимедово, $U_2 \cap V_2 = \varnothing$, $V_1 \cap V_2 \neq \varnothing$ и $V_1 \cap U_2 \neq \varnothing$, то $U_2, V_2 \subset V_1$. Следовательно,

$$U_1 \subset V_2 = V_1 \supset U_2.$$

Противоречие с $U_1 \cap V_1 = \varnothing$. Мы доказали, что $W_1 \cap W_3 = \varnothing$.

Докажем что W_1 и W_3 замкнуты в $\widetilde{X}$. Пусть $(x, y, z) \in \overline{W_1} \cap \widetilde{X}$. Если $y = z$, то $(x, y, z) \in \widetilde{\Pi}_1 \subset W_1$. Рассмотрим случай $y \neq z$. Пусть $x \in A \in \mathcal{B}$, $y \in B \in \mathcal{B}$, $z \in C \in \mathcal{B}$, $B \cap C = \varnothing$, $A \cap B = \varnothing$ если $x \neq y$ и $A \cap C = \varnothing$ если $x \neq z$. Тогда $B \cup C \not\subset A$. Так как $A \times B \times C \cap W_1 \neq \varnothing$, то

$$A \times B \times C \cap U \times V \times V \neq \varnothing$$

для некоторых непересекающихся $U, V \in \mathcal{B}$. Так как $B \cap V \neq \varnothing$, $C \cap V \neq \varnothing$ и $B \cap C = \varnothing$, то $B, C \subset V$. Так как $B \cup C \not\subset A$, $B \cup C \subset V$, $A \cap U \neq \varnothing$ и $U \cap V = \varnothing$, то $A \cap V = \varnothing$. Тогда

$$(x, y, z) \in A \times V \times V \subset W_1.$$

Следовательно, W_1 замкнуто в $\widetilde{X}$. Аналогично, W_3 замкнуто в $\widetilde{X}$.

Итак, мы нашли непересекающиеся открыто замкнутые окрестности W_1 и W_3 множеств $\widetilde{\Pi}_1$ и $\widetilde{\Pi}_3$, соответственно, в пространстве $\widetilde{X}$. Из предложения 5.5.8 вытекает, что X 2-мальцевское пространство. $\square$

Счетное пространство уплотняется на метризуемое нульмерное пространство, поэтому из теоремы 5.48 вытекает следующее утверждение.

Следствие 5.49. *Счетное пространство является* 2*-мальцевским пространством.*

Мальцевские и ретральные пространства

Для пространства X обозначим через $F(X)$ свободную топологическую группу над пространством X. Для $S \subset F(X)$ обозначим алгебраическую оболочку S как $\langle S \rangle$.

Предложение 5.5.10 (О.В. Сипачева [72]). *Мальцевское компактное пространство является ретральным пространством. Более того, если M есть непрерывная операция Мальцева на компакте X и $Y \subset X$ является подалгеброй мальцевского пространства (X, M) (т.е. $M(Y^3) = Y$), то существует непрерывная ретракция $r : F(X) \to X$, для которой $r(\langle Y \rangle) = Y$.*

Теорема 5.50. *Пусть X псевдокомпактное мальцевское пространство. Тогда X является ретральным пространством.*

Доказательство. Пусть M есть непрерывная операция Мальцева на X. Из теоремы 5.43 вытекает, что M продолжается до непрерывной операции Мальцева $\widehat{M} : (\beta\, X)^3 \to \beta\, X$ на $\beta\, X$. Из предложения 5.5.10 вытекает, что существует непрерывная ретракция $r : F(\beta\, X) \to \beta\, X$, таким образом что $r(\langle X \rangle) = X$. Следовательно, пространство X является ретрактом группы $\langle X \rangle$. $\square$

Пример 5.51. Пусть C канторово множество, $\{C_\alpha : \alpha \leq \omega_1\}$ разбиение C на всюду плотные подмножества, $A(\omega_1) = Y \cup \{y_*\}$ одноточечная компактификация дискретного пространства $Y = \{y_\alpha : \alpha < \omega_1\}$. Положим

$$X = C_{\omega_1} \times \{y_*\} \cup \bigcup_{\alpha<\omega_1} C_\alpha \times \{y_\alpha\} \subset C \times A(\omega_1).$$

Из предложения 5.4.12 вытекает, что X не ретральное пространство. По построению, проекция X на C является уплотнением. Из теоремы 5.48 вытекает, что X является 2-мальцевским и, тем более, мальцевским пространством.

Пространство X является мальцевским не ретральным пространством.

5.6 Топологические свойства однородных пространств и пространств с алгебраической структурой

В этом разделе сравниваются топологические свойства однородных пространств, групп с топологией, мальцевских и ретральных пространств.

Счетные пространства

Предложение 5.6.1 (Е.Зеленюк [45, Theorem 1]). *Если X есть счетное однородное пространство, то X гомеоморфно некоторой квазитопологической булевой группы.*

Широко известны примеры счетных однородных пространств, на которых нельзя ввести структуру топологической группы. Однако, неизвестно, можно ли на таких пространствах ввести структуру паратопологической группы. Неизвестно также, существуют ли счетные паратопологические группы, которые не изоморфны топологическим группам.

Для счетного пространства X обозначим $B_q(X) = H^\omega_\omega(X)$. Из предложения 5.2.6 вытекает, что $|B_q(X)| = \omega$. Из теоремы 5.5 вытекает, что $B_q(X)$ однородное пространство и $B_q(X) \times X$ гомеоморфно $B_q(X)$. По построению, $B_q(X)$ есть некоторое σ-произведение в X^ω. Из предложения 5.6.1 вытекает, что на $B_q(X)$ есть структура булевой квазитопологической группы, далее будем рассматривать $B_q(X)$ как такую группу.

Предложение 5.6.2. *Если X сепарабельное ко-неархимедово пространство, то X^ω ко-неархимедово пространство.*

Доказательство. Пусть $\mathcal{T}$ есть неархимедова топология на X и $\mathcal{F}$ есть база X, состоящая из замкнутых в $Y = (X, \mathcal{T})$ множеств, при этом $\mathcal{F}$ содержит все открыто замкнутые подмножества $(X, \mathcal{T})$. Так как Y сепарабельно, то топология Y метризуемое сепарабельное нульмерное пространство и Y^ω неархимедово пространство. Множества вида $\prod_{i\in\omega} F_i$, где $F_i \in \mathcal{F}$ и $F_i = X$ для $i > n$, замкнуты в Y^ω и образуют базу X^ω. □

Теорема 5.52. *Пусть X есть счетное пространство.*

(1) X 2-мальцевское пространство;

(2) Если X ко-неархимедово пространство, то X ретракт топологической булевой группы $B_z(X)$.

(3) Счетная квазитопологическая булева группа $B_q(X)$ есть плотное σ-произведение в X^ω, $B_q(X) \times X$ гомеоморфно $B_q(X)$ и если $\mathcal{P}$ есть один из классов перечисленных ниже, то из $X \in \mathcal{P}$ вытекает $B_q(X) \in \mathcal{P}$.

(a) ко-неархимедовы пространства;

(b) кружевные пространства;

(c) пространства со счетным π-характером;

(d) бисеквенциальные пространства.

Доказательство. (1) Вытекает из следствия 5.49.

(2) Вытекает из теоремы 5.34.

(3) Достаточно показать, что если $X \in \mathcal{P}$, то $X^\omega \in \mathcal{P}$ и если Y плотно в X, то $Y \in \mathcal{P}$. Нетривиальная часть, что если X ко-неархимедово, то X^ω ко-неархимедово, что вытекает из предложения 5.6.2. □

Пусть $\mathcal{F}$ есть фильтр на ω. На множестве $S = \omega \cup \{x_\infty\}$ рассмотрим топологию, в которой точки ω изолированны, а базу в x_∞ образуют множества вида $F \cup \{x_\infty\}$, где $F \in \mathcal{F}$. Это пространство обозначим $S_\mathcal{F}$. Любое счетное пространство с одной неизолированной точкой гомеоморфно пространству вида $S_\mathcal{F}$.

На множестве $\omega^{<\omega}$ конечных подмножеств ω есть структура булевой группы с операцией симметрической разницы. На $\omega^{<\omega}$ задается топология топологической группы, базу в единице (пустом множестве) образуют подгруппы $F^\omega = \{M \subset F : |M| < \omega\}$ для $F \in \mathcal{F}$. Обозначим $\omega^{<\omega}$ с этой топологией как $B_f(\mathcal{F})$. Топологическая группа $B^0_z(S_\mathcal{F})$ топологически изоморфна группе $B_f(\mathcal{F})$, $M \mapsto M \cap \omega$ для $M \in B^0_z(S_\mathcal{F})$.

Точка x в пространстве X называется *FU_f-точкой*, если для любого семейства $\mathcal{N}$ конечных подмножеств X существует последовательность $(M_n)_{n\in\omega} \subset \mathcal{N}$, сходящаяся к точке x. Пространство X называется *FU_f пространством*, если каждая точка в X является FU_f точкой [12].

Предложение 5.6.3. *Пусть X пространство, $x_* \in X$, $p = (x_n)_{n\in\omega} \in X^\omega$, $x_n = x_*$ для $n \in \omega$, $Y = \sigma_\omega(X^\omega, p)$. Если x_* FU_f-точка в X, то p FU_f-точка в Y.*

Доказательство. Пусть $(x_n)_{n\in\omega}$ есть последовательность в X, сходящаяся к x_* и состоящая из попарно различных элементов. Пусть $\pi_n : X^\omega \to X$ есть проекция на n-ю координату,

$$p_n(L) = \{x_n\} \cup \{\pi_i(q) : i \leq n,\ q \in L\},$$

для $L \subset X^\omega$ и $n \in \omega$. Пусть $(L_\alpha)_{\alpha\in A} \subset Y^{<\omega}$ есть π-сеть в точке p. Тогда $\{p_n(L_\alpha) : n \in \omega, \alpha \in A\} \subset X$ есть π-сеть в x_*. Так X FU_f в x_*, то некоторая последовательность $(p_{n_k}(L_{\alpha_k}))_{k\in\omega}$ сходится к x_*. Тогда $(L_{\alpha_k})_{k\in\omega}$ сходится к p. □

Теорема 5.53. *Пусть X есть счетное пространство с единственной не изолированной точкой.*

(1) Пространство X является ретрактом кружевной топологической булевой группы $B_z(X)$, при этом

  (a) если $X = S_\mathcal{F}$ и $\mathcal{F}$ селективный ультрафильтр, то $B_z(X)$ экстремально несвязная группа;

  (b) если X FU_f-пространство, то $B_z(X)$ FU_f-пространство.

(2) Квазитопологическая булевой группа $B_q(X)$ является кружевным ко-неархимедовым со счетным π-характером пространством, $X \times B_q(X)$ гомеоморфно $X \times B_q(X)$ и если $X \in \mathcal{P}$ для некоторого из перечисленного ниже класса пространств $\mathcal{P}$, то $B_q(X) \in \mathcal{P}$.

  (a) бисеквенциальные пространства;

  (b) FU_f-пространства.

Доказательство. Пространство X гомеоморфно $S_\mathcal{F}$ для некоторого фильтра $\mathcal{F}$ и $B^0_z(X)$ гомеоморфно $B_f(\mathcal{F})$. Счетное пространство с единственной неизолированной точкой ко-неархимедово, кружевное и со счетным π-характером.

(1) Из теоремы 5.52(2) вытекает, что X ретракт $B_z(X)$. Покажем, что $B_f(\mathcal{F})$ кружевное. Для непустых $M \in \omega^{<\omega}$ положим $V_M = M + (\omega \setminus M)^{<\omega}$. Тогда V_M отрытая окрестность M, $V_M \cap F^{<\omega} = \varnothing$ если $M \notin F^{<\omega}$. Из леммы 23 и теоремы 24 из [11] вытекает, что $B_f(\mathcal{F})$ кружевная группа.

(a) Это теорема Тюммель (см. [25][Теорема 19]).

(b) Пусть $\{\mathcal{L}_\alpha : \alpha \in A\}$ есть семейство конечных подмножеств $\omega^{<\omega}$, которое образует π-сеть в единице $\varnothing$ группы. Тогда $\{\bigcup \mathcal{L}_\alpha : \alpha \in A\}$ образует π-сеть в x_∞. Так как $S_\mathcal{F}$ FU_f-пространство, то $(\bigcup \mathcal{L}_{\alpha_n})_{n\in\omega}$ сходится к x_∞ для некоторых $\alpha_n \in A$, $n \in \omega$. Тогда $(\mathcal{L}_{\alpha_n})_{n\in\omega}$ сходится к $\varnothing$.

(2) Вытекает из теоремы 5.52(3), кроме (b). Проверим (b). По построению, $B_q(X) = \sigma_\omega(X^\omega, p)$ для некоторого $p = (x_n)_{n\in\omega} \in X^\omega$. Положим $A = \{n \in \omega : x_n = x_*\}$ и $B = \omega \setminus A$. Тогда

$$B_q(X) = \sigma_\omega(X^A, p_A) \times \sigma_\omega(X^B, p_B),$$

где $p_A = (x_n)_{n\in A}$ и $p_B = (x_n)_{n\in B}$. Из предложения 5.6.3 вытекает, что p_A есть FU_f точка в p_A. Точка p_B есть точка счетного характера в $\sigma_\omega(X^B, p_B)$. Из [12][Предложение 5] вытекает, что p FU_f точка в $B_q(X)$. Так как $B_q(X)$ однородно, то $B_q(X)$ FU_f-пространство. □

Неизвестно, будет ли каждое счетное пространство ретральным.

Счетное число Суслина

Широко известна проблема Эрика ван Дауна: существует ли однородный компакт с числом Суслина больше 2^ω? Примеры компактных однородных пространств известны, это, например, счетная степень удвоения Александрова канторовского множества. σ-компактные однородные пространства имеют неограниченное число Суслина, из теоремы 5.8(1) вытекает, что существует однородное σ-компактное пространство X, которое непрерывно отображается на одноточечную компактификацию дискретного пространства мощности τ. У этого пространства число Суслина не меньше τ.

Несколько аргументов влекут счетное число Суслина у компактной группы, это и существование меры Хаара и диадичность такой группы [139; 140].

Теорема 5.54. *Пусть X есть линделефово Σ-пространство. Если X принадлежит одному из перечисленных ниже классов пространств, то X ω-клеточно:*

(1) топологические группы (М.Г. Ткаченко [92]);

(2) мальцевские пространства (В.В. Успенский [85]);

(3) пространства с раздельно непрерывной операцией Мальцева (Е.А. Резниченко, В.В. Успенский [13]);

(4) паратопологические группы ([36]);

(5) квазитопологические группы;

(6) полутопологические группы, которые вкладываются в произведение паратопологических и квазитопологических групп.

Доказательство. У квазитопологической группы есть раздельно непрерывная операция Мальцева: $M(x, y, z) = xy^{-1}z$. Поэтому

$$(1) \Leftarrow (2) \Leftarrow (3) \Rightarrow (5).$$

(3) вытекает из следствия 5.40. Ясно, (6) $\Rightarrow$ (4). Докажем (6). Из следствий 4.9 и 4.11 вытекает, что $\operatorname{Sym} X$ является квазитопологической группой и замкнуто вкладывается в X^2. Следовательно, $\operatorname{Sym} X$ линделефово Σ квазитопологическая группа. Из (5) вытекает, что $\operatorname{Sym} X$ ω-клеточно. Осталось заметить, что $\operatorname{Sym} X$ непрерывно отображается на X. $\square$

Число Суслина σ-компактной полутопологической группы неизвестно.

Свойства типа Фреше-Урысона

Свойства типа Фреше-Урысона рассматриваются в разделе 4.7 монографии [36]. Свойство Фреше-Урысона имеет в топологических группах некоторую специфику, не каждое пространство Фреше-Урысона вкладывается в группу Фреше-Урысона, топологическая группа Фреше-Урысона является сильно Фреше-Урысона [36, Theorem 4.7.9].

В 1978 г. В.И. Малыхин поставил следующий вопрос [68, problem 6.11]. существует ли в ZFC неметризуемая сепарабельная топологическая группа Фреше-Урысона? В разных моделях ZFC построено много примеров неметризуемых сепарабельных топологических групп Фреше-Урысона, в том числе с сильными дополнительными свойствами: существует сепарабельное полное локально выпуклое пространство Фреше-Урысона [12]. В 2014 году Хрушак и Рамос-Гарсия построили модель ZFC, в которой каждая сепарабельная топологическая группа Фреше-Урысона метризуема [28].

Проблема Малыхина эквивалентна следующему вопросу: существует ли в ZFC неметризуемая счетная топологическая группа Фреше-Урысона? Существование счетных и сепарабельных неметризуемых Фреше-Урысона групп с топологией в классах полутопологических, квазитопологических и паратопологических группы не эквивалентны. Прямая Зонгенфрея сепарабельная не метризуемая паратопологическая группа, однако неизвестно, существует ли ‘наивно’ счетная паратопологическая группа Фреше–Урысона.

Пример 5.55. Пусть X счетное бисеквенциальное неметризуемое пространство. В силу теоремы 5.52(3)(d), существует счетная бисеквенциальная квазитопологическая группа G, для которой G гомеоморфно $X \times G$.

Группа G является счетной неметризуемой бисеквенциальной не метризумой квазитопологической булевой группой.

Получаем, существует счетная неметризуемая квазитопологическая группа Фреше–Урысона.

Теорема Биркоффа-Какутани (Предложение 5.3.2) гласит, что топологическая группа с первой аксиомой счетности метризуема. Прямая Зонгенфрея пример неметризуемой паратопологической группы со счетным характером.

Из теорем Архангельского (Предложение 5.3.1) вытекает, что топологическая группа со счетным π-характером будет со счетным характером и, следовательно, метризуемая.

Неизвестно, существует ли (счетная) (бисеквенциальная) паратопологическая группа со счетным π-характером и без первой аксиомы счетности. Пример 5.55 показывает, что такие квазитопологические группы существуют.

Экстремальная несвязность

В 1967 году А.В. Архангельский [127] поставил следующий вопрос: существует ли в ZFC недискретная экстремально несвязная топологическая группа? В разных моделях ZFC, например в CH, существуют недискретные экстремально несвязные топологические группы [53; 60; 115; 123; 126]. Большинство из этих примеров счетно, хотя Малыхин построил в различных моделях ZFC локально несчетную сепарабельную экстремально несвязную несвязную группу и недискретную экстремально несвязную группу, в которой все счетные подмножества замкнуты и дискретны [105]. Существует модель ZFC, в которой каждая счетная экстремально несвязную группа дискретна [8].

Неизвестно, существует ли в ZFC экстремально несвязные не дискретные группы.

Пример 5.56. Пусть B есть счетная булева метризуемая недискретная группа. Обозначим через $a(B)$ абсолют пространства B. Группа B действует естественным образом на $a(B)$, $gx = (\lambda_g)_a(x)$ для $g \in B$ и $x \in a(B)$, где $(\lambda_g)_a : a(B) \to a(B)$ есть продолжения сдвига $\lambda_g : B \to V,\ h \mapsto g + h$. Пусть G есть какая либо орбита в $a(B)$ при действии группы G. При естественной проекции $p : a(B) \to B$ множество G уплотняется на B, на G введем такую групповую структуру, так что p есть изоморфизм групп.

Группа G является квазитопологической булевой группой и является экстремально несвязным недискретным пространством со счетным π-весом.

Заключение

Основные результаты работы заключаются в следующем.

- Получены достаточных условий, когда в группах с топологиях происходит усиление непрерывности операций, в частности, когда CHART, паратопологические и полутопологические группы являются топологическими группами.

- Характеризованы раздельно непрерывные отображения произведений псевдокомпактных пространств, которые допускают раздельно непрерывное продолжение на произведение стоун–чеховских расширений пространств.

- Найдены условия, когда компактные универсальная алгебра с раздельно непрерывными операциями вкладывается в произведение метризуемых универсальных алгебр.

- Псевдокомпактные пространства с операцией Мальцева характеризованы как ретракты топологической группы. Исследованы псевдокомпактные пространства с раздельно непрерывной операцией Мальцева. Построены мальцевские пространство не ретракты групп.

- Исследованы подклассы класса бэровских пространств, влекущие непрерывность в группах с топологией.

- Для нескольких классов пространств, найдены однородные произведения, в которых в качестве сомножителя реализуется любое пространство из этого класса, исследованы однородные подпространства произведений экстремально несвязных пространств.

- Найдены условия для групп с топологией, мальцевских пространств, их ретрактов, влекущие счетное число Суслина, диагональ типа G_δ, метризуемость.

Публикации автора по теме диссертации

Статьи в рецензируемых научных изданиях, рекомендованных для защиты в диссертационном совете МГУ по специальности 1.1.3 «Геометрия и топология» и входящих в базы цитирования Scopus, Web of Science и RSCI

1. *Reznichenko E.* Almost paratopological groups // Topology and its Applications. — 2023. — Т. 338. — С. 108673. — DOI: `10.1016/j.topol.2023.108673`. —
Журнал индексируется в *Scopus, WoS*. Импакт фактор: *SJR 0.387, JCR 0.583*.
2. *Reznichenko E.* Classes of Baire spaces defined by topological games // Topology and its Applications. — 2023. — Т. 329. — С. 108377. — DOI: `10.1016/j.topol.2022.108377`. —
Журнал индексируется в *Scopus, WoS*. Импакт фактор: *SJR 0.387, JCR 0.583*.
3. *Reznichenko E.* Metrizability of CHART groups // Topology and its Applications. — 2023. — Т. 326. — С. 108408. — DOI: `10.1016/j.topol.2023.108408`. —
Журнал индексируется в *Scopus, WoS*. Импакт фактор: *SJR 0.387, JCR 0.583*.
4. *Reznichenko E.* Extension of mappings from the product of pseudocompact spaces // Topology and its Applications. — 2022. — Т. 322. — С. 108329. — ISSN 0166-8641. — DOI: `10.1016/j.topol.2022.108329`. —
Журнал индексируется в *Scopus, WoS*. Импакт фактор: *SJR 0.387, JCR 0.583*.
5. *Reznichenko E.* Functions on products of pseudocompact spaces // Topology and its Applications. — 2022. — Февр. — Т. 307. — С. 107935. — DOI: `10.1016/j.topol.2021.107935`. —
Журнал индексируется в *Scopus, WoS*. Импакт фактор: *SJR 0.387, JCR 0.583*.
6. *Резниченко Е.* Непрерывность обратного в группах // Вестн. Моск. ун-та. Сер. 1. Матем., мех. — 2022. — № 4. — С. 63—67. —
Журнал индексируется в *RSCI*. Импакт фактор: *IM 0.467*. [Перевод на английский язык: *E. A. Reznichenko* The Continuity of Inverse in Groups // Moscow University Mathematics Bulletin. – 2022. – Т. 77. – Н. 4. – С. 199–203. – DOI: 10.3103/S0027132222040076. Журнал индексируется в *Scopus*. Импакт фактор: *SJR 0.417*.]

7. *Reznichenko E.* Homogeneous subspaces of products of extremally disconnected spaces // Topology and its Applications. — 2020. — Окт. — Т. 284. — С. 107403. — DOI: `10.1016/j.topol.2020.107403`. —
Журнал индексируется в *Scopus, WoS*. Импакт фактор: *SJR 0.387, JCR 0.583.*

8. *Reznichenko E.*, *Sipacheva O.* The free topological group on the Sorgenfrey line is not $\mathbb{R}$-factorizable // Topology and its Applications. — 2013. — Т. 160, № 11. — С. 1184—1187. —
Журнал индексируется в *Scopus, WoS*. Импакт фактор: *SJR 0.387, JCR 0.583.*
Е. А. Резниченко доказаны леммы 8, 9.

9. *Arhangel'skii A.*, *Reznichenko E.* Paratopological and semitopological groups versus topological groups // Topology and its Applications. — 2005. — Т. 151, № 1—3. — С. 107—119. —
Журнал индексируется в *Scopus, WoS*. Импакт фактор: *SJR 0.387, JCR 0.583.*
Е. А. Резниченко доказаны леммы 1.2, 1.2, 2.10, теоремы 1.8, 2.11.

10. *Gartside P.*, *Reznichenko E.* Katetov revisited // Topology and its Applications. — 2000. — Т. 108, № 1. — С. 67—74. —
Журнал индексируется в *Scopus, WoS*. Импакт фактор: *SJR 0.387, JCR 0.583.*
Е. А. Резниченко доказаны леммы 1, 3, предложение 2, теорема 4.

11. *Gartside P.*, *Reznichenko E.* Near metric properties of function spaces // Fundamenta Mathematicae. — 2000. — Т. 164, № 2. — С. 97—114. —
Журнал индексируется в *Scopus, WoS*. Импакт фактор: *SJR 0.482, JCR 0.589.*
Е. А. Резниченко доказаны пример 2, леммы 6, 8, 13, предложение 15, теорема 34.

12. *Резниченко Е.*, *Сипачева О.* Свойства типа Фреше–Урысона в топологических пространствах, группах и локально выпуклых пространствах // Вестн. Моск. ун-та. Сер. 1. Матем., мех. — 1999. — № 3. — С. 32—38. —
Журнал индексируется в *RSCI*. Импакт фактор: *IM 0.467.*
Е. А. Резниченко доказаны предложения 2, 3, 13, теорема 1(2).

13. *Reznichenko E.*, *Uspenskij V.* Pseudocompact Mal'tsev spaces // Topology and its Applications. — 1998. — Т. 86, № 1. — С. 83—104. —
Журнал индексируется в *Scopus, WoS*. Импакт фактор: *SJR 0.387, JCR 0.583.*
Е. А. Резниченко доказаны теоремы 1.7, 1.8, 1.10, все результаты из 3-го раздела.

14. *Gartside P.*, *Reznichenko E.*, *Sipacheva O.* Mal'tsev and retral spaces // Topology and its Applications. — 1997. — Т. 80, № 1/2. — С. 115—129. — Журнал индексируется в *Scopus, WoS*. Импакт фактор: *SJR 0.387, JCR 0.583*.
Е. А. Резниченко доказаны теорема 3, теорема 7 (версия 2), следствие 12, пример 14.

15. *Резниченко Е.* Однородные произведения пространств // Вестн. Моск. ун-та. Сер. 1. Матем., мех. — 1996. — Т. 51, № 3. — С. 10—13. — Журнал индексируется в *RSCI*. Импакт фактор: *IM 0.467*.

16. *Reznichenko E.* Extension of functions defined on products of pseudocompact spaces and continuity of the inverse in pseudocompact groups // Topology and its Applications. — 1994. — Т. 59, № 3. — С. 233—244. — Журнал индексируется в *Scopus, WoS*. Импакт фактор: *SJR 0.387, JCR 0.583*.

17. *Резниченко Е.* Псевдокомпактное пространство, в котором только множества неполной мощности не замкнуты и не дискретны // Вестн. Моск. ун-та. Сер. 1. Матем., мех. — 1989. — Т. 44, № 6. — С. 69—70. — Журнал индексируется в *RSCI*. Импакт фактор: *IM 0.467*.

Список литературы

18. *Ameen Z. A.* Almost Somewhat Near Continuity and Near Regularity // Moroccan Journal of Pure and Applied Analysis. — 2021. — Т. 7, № 1. — С. 88—99. — DOI: `10.2478/mjpaa-2021-0009`.

19. *Reznichenko E.*, *Sipacheva O.* Discrete subsets in topological groups and countable extremally disconnected groups // Proceedings of the American Mathematical Society. — 2021. — Т. 149, № 6. — С. 2655—2668.

20. *Батуров Д.*, *Резниченко Е.* О числе Линделёфа пространств функций над монолитными компактами // Вестн. Моск. ун-та. Сер. 1. Матем., мех. — 2018. — Т. 73, № 3. — С. 57—60. — DOI: `10.3103/s0027132218030063`.

21. *Doležal M.*, *Moors W. B.* On a certain generalization of W-spaces // Topology and its Applications. — 2017. — Т. 231. — С. 1—9. — ISSN 0166-8641. — DOI: `10.1016/j.topol.2017.09.001`.

22. *Moors W. B.* Some Baire semitopological groups that are topological groups // Topology and its Applications. — 2017. — Т. 230. — С. 381—392. — ISSN 0166-8641. — DOI: `10.1016/j.topol.2017.08.042`.

23. *Moors W. B.* Fragmentable mappings and CHART groups // Fundamenta Mathematicae. — 2016. — Т. 234. — С. 191—200.

24. *Moors W. B.* Invariant means on CHART groups // Khayyam Journal of Mathematics. — 2015. — Т. 1, № 1. — С. 36—44.
25. *Sipacheva O.* Free Boolean topological groups // Axioms. — 2015. — Т. 4, № 4. — С. 492—517.
26. *Патракеев М.*, *Резниченко Е.* Пример ненормального субметризуемого пространства малой мощности // Вестн. Удмуртск. ун-та. Матем. Мех. Компьют. науки. — 2015. — Т. 25, № 2. — С. 180—183.
27. *Arhangel'skii A.*, *Mill J. v.* Topological homogeneity // Recent Progress in General Topology III. — Springer, 2014. — С. 1—68.
28. *Hrusa'k M.*, *Ramos-Garcia U.* Malykhin's problem // Advances in Mathematics. — 2014. — Т. 262. — С. 193—212. — ISSN 0001-8708. — DOI: `10.1016/j.aim.2014.05.009`.
29. *Tkachenko M.* Paratopological and semitopological groups vs topological groups // Recent Progress in General Topology. — 2014. — Янв. — Т. 3. — С. 825—872.
30. *Glasner E.*, *Megrelishvili M.* Banach representations and affine compactifications of dynamical systems // Asymptotic geometric analysis. — Springer, 2013. — С. 75—144.
31. *Moors W. B.* Any semitopological group that is homeomorphic to a product of Cech-complete spaces is a topological group // Set-Valued and Variational Analysis. — 2013. — Т. 21, № 4. — С. 627—633.
32. *Moors W. B.*, *Namioka I.* Furstenberg's structure theorem via CHART groups // Ergodic Theory and Dynamical Systems. — 2013. — Т. 33, № 3. — С. 954—968.
33. *Arhangel'skii A. V.*, *Choban M. M.* Completeness type properties of semitopological groups, and the theorems of Montgomery and Ellis // Topology Proc. — 2011. — Т. 37. — С. 33—60.
34. *Arhangel'skii A. V.*, *Choban M. M.*, *Kenderov P. S.* Topological games and continuity of group operations // Topology and its Applications. — 2010. — Т. 157, № 16. — С. 2542—2552. — ISSN 0166-8641. — DOI: `10.1016/j.topol.2010.08.001`.
35. *Cao J.*, *Drozdowski R.*, *Piotrowski Z.* Weak continuity properties of topologized groups // Czechoslovak Mathematical Journal. — 2010. — Т. 60, № 1. — С. 133—148.
36. *Arhangel'skii A.*, *Tkachenko M.* Topological Groups and Related Structures. — Atlantis Press, 2008. — DOI: `10.2991/978-94-91216-35-0`.

37. *Bingham N.*, *Ostaszewski A.* Normed versus topological groups: Dichotomy and duality // Dissertationes Mathematicae. — 2008. — Янв. — Т. 472. — С. 151. — DOI: 10.4064/dm472-0-1.

38. *Moors W.*, *Reznichenko E.* Separable subspaces of affine function spaces on convex compact sets // Topology and its Applications. — 2008. — Т. 155, № 12. — С. 1306—1322.

39. *Reznichenko E.* Stratifiability of $C_k(X)$ for a class of separable metrizable X // Topology and its Applications. — 2008. — Т. 155, № 17/18. — С. 2060—2062.

40. *Reznichenko E.* Continuity of the inverse. — 2008. — arXiv: 2106.01803 [math.GN]. — in russian.

41. *Kozlov K.*, *Reznichenko E.*, *Sipacheva V.* Moscow Questions on Topological Algebra // Open Problems in Topology II. — 2007. — С. 711—726.

42. *Okunev O.*, *Reznichenko E.* A note on surlindelöf spaces // Topology Proceedings. — 2007. — Т. 31. — С. 667—675.

43. *van Mill J.*, *Tkachuk V.*, *Wilson R.* Classes defined by stars and neighbourhood assignments // Topology and its Applications. — 2007. — Т. 154, № 10. — С. 2127—2134. — ISSN 0166-8641. — DOI: 10.1016/j.topol.2006.03.029. — Special Issue: The 6th Iberoamerican Conference on Topology and its Applications (VI-CITA).

44. *Ferri S.*, *Hernández S.*, *Wu T.* Continuity in topological groups // Topology and its Applications. — 2006. — Т. 153, № 9. — С. 1451—1457. — ISSN 0166-8641. — DOI: 10.1016/j.topol.2005.04.007.

45. *Zelenyuk Y.* On group operations on homogeneous spaces // Proceedings of the American Mathematical Society. — 2004. — Т. 132, № 4. — С. 1219—1222.

46. *Ravsky O.*, *Reznichenko E.* The continuity of inverse in groups // Zagorodnuyk AV, Hryniv RO Book of Abstracts of International Conference on Functional Analysis and its Applications Dedicated to the 110th anniversary of Stefan Banach, Lviv, Ukraine. — 2002. — С. 170—172.

47. *Ravsky O.* Paratopological groups II // Mat. Stud. — 2002. — Т. 17, № 1. — С. 93—101.

48. *Reznichenko E.*, *Shkarin S.* On linear extension operators // Russian Journal of Mathematical Physics. — 2002. — Т. 9, № 2. — С. 188—197.

49. *Kenderov P. S.*, *Kortezov I. S.*, *Moors W. B.* Topological games and topological groups // Topology Appl. — 2001. — Т. 109, № 2. — С. 157—165. — ISSN 0166-8641. — DOI: 10.1016/S0166-8641(99)00152-2.

50. *Ravsky O.* Paratopological groups I // Mat. Stud. — 2001. — T. 16, № 1. — C. 37—48.

51. Sharp bases and weakly uniform bases versus point-countable bases / A. Arhangel'skii [и др.] // Topology and its Applications. — 2000. — Янв. — T. 100, № 1. — C. 39—46. — DOI: 10.1016/s0166-8641(98)00136-9.

52. *Gul'ko S. P.*, *Sokolov G. A.* Compact spaces of separately continuous functions in two variables // Topology and its Applications. — 2000. — T. 107, № 1/2. — C. 89—96.

53. *Zelenyuk E.* Extremal ultrafilters and topologies on groups // Mat. Stud. — 2000. — T. 14, № 2. — C. 121—140.

54. *Nyikos P. J.* On some non-Archimedean spaces of Alexandroff and Urysohn // Topology and its Applications. — 1999. — T. 91, № 1. — C. 1—23. — ISSN 0166-8641. — DOI: 10.1016/S0166-8641(97)00239-3. — in Memory of P.S. Alexandroff, Part 2.

55. *Arhangel'skii A.* On a theorem of Grothendieck in Cp-theory // Topology and its Applications. — 1997. — T. 80, № 1. — C. 21—41. — ISSN 0166-8641. — DOI: 10.1016/S0166-8641(96)00167-8. — Memory of P.S. Alexandroff.

56. *Solecki S.*, *Srivastava S.* Automatic continuity of group operations // Topology and its Applications. — 1997. — T. 77, № 1. — C. 65—75. — ISSN 0166-8641. — DOI: 10.1016/S0166-8641(96)00119-8.

57. *Bouziad A.* Continuity of separately continuous group actions in p-spaces // Topology Appl. — 1996. — T. 71, № 2. — C. 119—124. — ISSN 0166-8641. — DOI: 10.1016/0166-8641(95)00039-9.

58. *Bouziad A.* Every Cech-analytic Baire semitopological group is a topological group // Proceedings of the American Mathematical Society. — 1996. — C. 953—959.

59. *Okunev O.*, *Tamano K.* Lindelof powers and products of function spaces // Proceedings of the American Mathematical Society. — 1996. — T. 124, № 9. — C. 2905—2916.

60. *Zelenyuk Y.* Topological groups with finite semigroups of ultrafilters // Mat. Stud. — 1996. — T. 6. — C. 41—52.

61. *Reznichenko E.*, *Sipacheva O.* Factor mappings on words of a finite length in a free topological group // Vestnik Moskovskogo Universiteta. Ser. 1 Matematika Mekhanika. — 1994. — № 6. — C. 80.

62. *Bouziad A.* The Ellis theorem and continuity in groups // Topology and its Applications. — 1993. — T. 50, № 1. — C. 73—80.

63. *Milnes P.* Representations of Compact Right Topological Groups // Canadian Mathematical Bulletin. — 1993. — Т. 36, № 3. — С. 314—323. — DOI: 10.4153/CMB-1993-044-1.

64. *Arhangel'skii A.* C_p-theory // Recent Progress in General Topology. — North-Holland, Amsterdam, 1992. — С. 1—56.

65. *Arkhangel'skij A. V.* Topological function spaces. Т. 78. — Dordrecht etc.: Kluwer Academic Publishers, 1992. — (Math. Appl., Sov. Ser.) — ISBN 0-7923-1531-6. — Transl. from the Russian by R. A. M. Hoksbergen.

66. *Korovin A. V.* Continuous actions of pseudocompact groups and axioms of topological group // Commentationes Mathematicae Universitatis Carolinae. — 1992. — Т. 33, № 2. — С. 335—343.

67. *Milnes P.*, *Pym J.* Haar measure for compact right topological groups // Proceedings of the American Mathematical Society. — 1992. — Т. 114, № 2. — С. 387—393. — DOI: 10.1090/S0002-9939-1992-1065088-1. — Cited by: 15; All Open Access, Bronze Open Access, Green Open Access.

68. *Nyikos P.* Convergence in topology // Recent Progress in General Topology. — Springer, 1992. — С. 537—570.

69. *Balcar B.*, *Dow A.* Dynamical systems on compact extremally disconnected spaces // Topology and its Applications. — 1991. — Т. 41, № 1. — С. 41—56. — ISSN 0166-8641. — DOI: 10.1016/0166-8641(91)90099-8.

70. *Grant D. L.* The Wallace problem and continuity of the inverse in pseudocompact groups // General Topology and Applications. — CRC Press, 1991. — С. 93—114.

71. *В. А. Артамонов.* Универсальные алгебры // Общая алгебра, Т.2. — Наука, Москва, 1991. — С. 295—367. — (Справочная математическая библиотека).

72. *Сипачёва О. В.* Компакты с непрерывной операцией Мальцева и ретракты топологических групп // Вестник Московского университета. Серия 1: Математика. Механика. — 1991. — № 1. — С. 33—36.

73. *Kunen K.* Large homogeneous compact spaces // Open Problems in Topology / под ред. J. van Mill, G. Reed. — North-Holland : Elsevier Science Publishers B.V., 1990. — С. 261—270.

74. *Reznichenko E. A.* Normality and collective normality of function spaces // Mosc. Univ. Math. Bull. — 1990. — Т. 45, № 6. — С. 25—26. — ISSN 0027-1322.

75. *Reznichenko E.* Convex compact spaces and their maps // Topology and its Applications. — 1990. — Т. 36, № 2. — С. 117—141.

76. *Reznichenko E.* The paracompactness is not preserved by the relation of l-equivalence // Obshaia Topologia. Prostranstva i Otobrajenia, Moscow University Press, Moscow. — 1990. — C. 155—156.

77. *Uspenskij V. V.* The Mal'tsev operation on countably compact spaces // Commentationes Mathematicae Universitatis Carolinae. — 1989. — T. 30, № 2. — C. 395—402.

78. *А. В. Архангельский.* Компактность // Общая топология — 2. Т. 50. — ВИНИТИ, 1989. — С. 5—128. — (Итоги науки и техн. Сер. Соврем. пробл. мат. Фундам. направления).

79. *Архангельский А. В.* Топологические пространства функций. — МГУ, 1989.

80. *Архангельский А. В.* Топологическая однородность. Топологические группы и их непрерывные образы // Успехи математических наук. — 1987. — Т. 42, 2 (254). — С. 69—105.

81. *Galvin F.*, *Telgársky R.* Stationary strategies in topological games // Topology and its Applications. — 1986. — T. 22, № 1. — C. 51—69. — ISSN 0166-8641. — DOI: 10.1016/0166-8641(86)90077-5.

82. *Shakhmatov D.* A pseudocompact Tychonoff space all countable subsets of which are closed and C^*-embedded // Topology and its Applications. — 1986. — T. 22, № 2. — C. 139—144. — ISSN 0166-8641. — DOI: 10.1016/0166-8641(86)90004-0.

83. *P. Simon.* Applications of independent linked families // Colloq. Math. Soc. Janos Bolyai. — 1985. — T. 41. — C. 561—580.

84. *Pfister H.* Continuity of the inverse // Proceedings of the American Mathematical Society. — 1985. — T. 95, № 2. — C. 312—314.

85. *Успенский В. В.* О непрерывных образах линделёфовых топологических групп // Доклады Академии наук. Т. 285. — Российская академия наук. 1985. — С. 824—827.

86. *Arkhangel'skij A. V.* Function spaces in the topology of pointwise convergence, and compact sets // Russ. Math. Surv. — 1984. — T. 39, № 5. — C. 9—56. — ISSN 0036-0279. — DOI: 10.1070/RM1984v039n05ABEH004089.

87. *Gruenhage G.* Generalized Metric Spaces // Handbook of set-theoretic topology. — Elsevier Science Publishers B. V., 1984. — C. 423—502. — DOI: 10.1016/B978-0-444-86580-9.50013-6.

88. *Hodel R.* Cardinal functions I // Handbook of set-theoretic topology. — Elsevier, 1984. — C. 1—61.

89. *Van Douwen E. K.* The integers and topology // Handbook of set-theoretic topology. — Elsevier, 1984. — C. 111—167.

90. *Vaughan J. E.* Countably compact and sequentially compact spaces // Handbook of set-theoretic topology. — Elsevier, 1984. — С. 569—602.

91. *Uspenskii V. V.* For any X, the product $X \times Y$ is homogeneous for some Y // Proceedings of the American Mathematical Society. — 1983. — Т. 87, № 1. — С. 187—188.

92. *Ткаченко М.* О свойстве Суслина в свободных топологических группах над бикомпактами // Математические заметки. — 1983. — Т. 34, № 4. — С. 601—607.

93. *Brand N.* Another note on the continuity of the inverse // Archiv der Mathematik. — 1982. — Т. 39, № 3. — С. 241—245.

94. *А. Ч. Чигогидзе.* О $\varkappa$-метризуемых пространствах // УМН. — 1982. — Т. 37. — С. 241—242.

95. *Архангельский А. В.*, *Ранчин Д. В.* О всюду плотных подпространствах топологических произведений и о свойствах, связанных с финальной компактностью // Вестник Московского университета. Серия 1: Математика. Механика. — 1982. — № 6. — С. 21—28.

96. *Asanov M.*, *Velichko N.* Compact sets in Cp (X) // Comment. Math. Univ. Carolin. — 1981. — Т. 22, № 2. — С. 255—266.

97. *Douwen E. K. van.* Prime mappings, number of factors and binary operations. — Warszawa : Instytut Matematyczny Polskiej Akademi Nauk, 1981.

98. *Архангельский А. В.* Классы топологических групп // Успехи математических наук. — 1981. — Т. 36, 3 (219). — С. 127—146.

99. *Щепин Е. В.* Функторы и несчетные степени компактов // Успехи математических наук. — 1981. — Т. 36, 3 (219. — С. 3—62.

100. *Juhasz I.* Cardinal Functions in Topology, Ten Years Later. — Mathematisch Centrum, 1980. — (Mathematical Centre tracts). — ISBN 9789061961963.

101. *Piotrowski Z.* Quasi-continuity and product spaces. — 1980. — Geometric topology, Proc. int. Conf., Warszawa 1978, 349-352 (1980).

102. *Shapirovskii B.* Maps onto Tikhonov cubes // Russian Mathematical Surveys. — 1980. — Т. 35, № 3. — С. 145.

103. *Eric K. van Douwen.* Homogeneity of βG if G is a topological group // Colloq. Math. — 1979. — Т. 41. — С. 193—199.

104. *Milnes P.* Continuity properties of compact right topological groups // Mathematical Proceedings of the Cambridge Philosophical Society. Т. 86. — Cambridge University Press. 1979. — С. 427—435.

105. *Малыхин В. И.* Об экстремально несвязных топологических группах // Успехи математических наук. — 1979. — Т. 34, 6 (210. — С. 59—66.

106. *Щепин Е. В.* О $\varkappa$-метризуемых пространствах // Изв. АН СССР. Сер. матем. — 1979. — Т. 43. — С. 442—478.

107. *Borges C.* Direct sums of stratifiable spaces // Fundamenta Mathematicae. — 1978. — Т. 2, № 100. — С. 97—99.

108. *K. Kunen.* Weak P-points in N^* // Coll. Math. Soc. Janos Bolyai. — 1978. — Т. 23. — С. 741—749.

109. *Shelah S.*, *Rudin M.* Unordered types of ultrafilters // Topology Proc. — 1978. — Т. 3, № 1. — С. 199—204.

110. *Engelking R.* General topology. Т. 60. — PWN - Panstwowe Wydawnictwo Naukowe, Warszawa, 1977. — (Monogr. Mat., Warszawa).

111. *Комбаров А. П.* Нормальные σ-произведения // Доклады Академии наук. Т. 232. — Российская академия наук. 1977. — С. 1004—1007.

112. *Gruenhage G.* Infinite games and generalizations of first-countable spaces // General Topology and its Applications. — 1976. — Т. 6, № 3. — С. 339—352. — ISSN 0016-660X. — DOI: `10.1016/0016-660X(76)90024-6`.

113. *Šapirovskii, BE.* On the tightness, π-weight and related notions // Uch. Zap. Latv. Univ. — 1976. — Т. 257. — С. 88—99.

114. *Ruppert W.* Uber kompakte rechtstopologische Gruppen mit gleichgradig stetigen Linkstranslationen // Sitz. ber. d. Osterr. Akad. d. Wiss. Math.-naturw. Kl. — 1975. — Т. 184. — С. 159—169.

115. *Малыхин В. И.* Экстремально-несвязные и близкие к ним группы // Доклады Академии наук. Т. 220. — Российская академия наук. 1975. — С. 27—30.

116. *Comfort W. W.*, *Negrepontis S.* The Theory of Ultrafilters. — Springer Berlin Heidelberg, 1974. — DOI: `10.1007/978-3-642-65780-1`.

117. *Namioka I.* Separate continuity and joint continuity // Pacific Journal of Mathematics. — 1974. — Т. 51, № 2. — С. 515—531.

118. *Preiss D.*, *Simon P.* A weakly pseudocompact subspace of Banach space is weakly compact // Commentationes Mathematicae Universitatis Carolinae. — 1974. — Т. 015, № 4. — С. 603—609.

119. *Tall F. D.* The countable chain condition versus separability - applications of Martin's Axiom // General Topology and its Applications. — 1974. — Т. 4, № 4. — С. 315—339. — ISSN 0016-660X. — DOI: `10.1016/0016-660X(74)90010-5`.

120. *Комбаров А. П.* О нормальности Σ_m-произведений // Доклады Академии наук. Т. 211. — Российская академия наук. 1973. — С. 524—527.

121. *Комбаров А. П.*, *Малыхин В. И.* О Σ-произведениях // Доклады Академии наук. Т. 213. — Российская академия наук. 1973. — С. 774—776.

122. *Haydon R.* Compactness in $C_s(T)$ and Applications // Publications du Departement de mathematiques (Lyon). — 1972. — Т. 9, № 1. — С. 105—113.

123. *Louveau A.* Sur un article de S. Sirota // Bulletin des Sciences Mathematiques. — 1972. — Т. 96, № 1. — С. 3.

124. *Namioka I.* Right topological groups, distal flows, and a fixed-point theorem // Mathematical systems theory. — 1972. — Т. 6, № 1. — С. 193—209.

125. *Rosenthal H. P.* On injective Banach spaces and the spaces $L_\infty(\mu)$ for finite measures μ // Acta Mathematica. — 1970. — Т. 124. — С. 205—248.

126. *Сирота С.* Произведение топологических групп и экстремальная несвязность // Математический сборник. — 1969. — Т. 79, 2 (6. — С. 179—192.

127. *Arhangel'skii A.* Groupes topologiques extremalement discontinus // CR Acad. Sci. Paris. — 1967. — Т. 265, № 25. — A822—A825.

128. *Frolik Z.* Homogeneity problems for extremally disconnected spaces // Commentati Mathematicae Universitatis Carolinae. — 1967. — Т. 008, № 4. — С. 757—763.

129. *Comfort W.*, *Ross K.* Pseudocompactness and uniform continuity in topological groups // Pacific Journal of Mathematics. — 1966. — Т. 16, № 3. — С. 483—496.

130. *Dugundji J.* Topology. — 1966. — Series in Advanced Mathematics. Boston: Allyn and Bacon, Inc. XVI, 447 p.

131. *Zelazko W.* Metric generalizations of Banach algebras. — Warszawa : Instytut Matematyczny Polskiej Akademi Nauk, 1965.

132. *Michael E.* A note on closed maps and compact sets // Israel Journal of Mathematics. — 1964. — Т. 2. — С. 173—176.

133. *Arhangel'skii A.* Ranks of families of sets and dimension of spaces // Fund Math. — 1963. — Т. 52. — С. 257—275.

134. *Arhangel'skii A.* The ranks of systems of sets and the dimension of spaces // Dokl. Akad. Nauk SSSR. Т. 143. — 1962. — С. 755—758.

135. *Ellis R.* A semigroup associated with a transformation group // Transactions of the American Mathematical Society. — 1960. — Т. 94, № 2. — С. 272—281.

136. *Gillman L.*, *Jerison M.* Rings of Continuous Functions. — Springer New York, 1960. — DOI: `10.1007/978-1-4615-7819-2`.

137. *Glicksberg I.* Stone-Cech Compactifications of Products // Transactions of the American Mathematical Society. — 1959. — Т. 90, № 3. — С. 369—382. — DOI: doi:10.2307/1993177.

138. *Groot J. de.* Groups represented by homeomorphism groups I // Mathematische Annalen. — 1959. — Т. 138, № 1. — С. 80—102.

139. *Кузьминов В.* О гипотезе П.С. Александрова в теории топологических групп // Докл. АН СССР. Т. 125. — 1959. — С. 727—729.

140. *Ивановский Л.* Об одной гипотезе ПС Александрова // Доклады Академии наук. Т. 123. — Российская академия наук. 1958. — С. 785—786.

141. *Ellis R.* A note on the continuity of the inverse // Proc. Am. Math. Soc. — 1957. — Т. 8. — С. 372—373. — ISSN 0002-9939. — DOI: 10.2307/2033747.

142. *Ellis R.* Locally compact transformation groups // Duke Mathematical Journal. — 1957. — Т. 24, № 2. — С. 119—125.

143. *Oxtoby J. C.* The Banach-Mazur game and Banach category theorem // Contributions to the Theory of Games, Volume III. — Princeton University Press, Princeton, NJ, 1957. — С. 159—163.

144. *W. Rudin.* Homogeneity problems in the theory of Cech compactifications // Duke Math. J. — 1956. — Т. 23. — С. 409—420.

145. *Мальцев А. И.* К общей теории алгебраических систем // Математический сборник. — 1954. — Т. 35, № 1. — С. 3—20.

146. *Grothendieck A.* Criteres de Compacite dans les Espaces Fonctionnels Generaux // American Journal of Mathematics. — 1952. — Т. 74. — С. 168.

147. *Arens R.* Topologies for Homeomorphism Groups // American Journal of Mathematics. — 1946. — Т. 68, № 4. — С. 593—610. — ISSN 00029327, 10806377.

148. *Montgomery D.* Continuity in topological groups // Bull. Am. Math. Soc. — 1936. — Т. 42. — С. 879—882. — ISSN 0002-9904. — DOI: 10.1090/S0002-9904-1936-06456-6.

149. *Baire R.* Sur les fonctions de variables reelles // Annali di Matematica Pura ed Applicata (1898-1922). — 1899. — Т. 3, № 1. — С. 1—123.