Московский государственный университет
имени М.В. Ломоносова

На правах рукописи

Хрыстик Михаил Андреевич

Длины групповых алгебр

1.1.5. Математическая логика, алгебра, теория чисел
и дискретная математика

АВТОРЕФЕРАТ

диссертации на соискание учёной степени
кандидата физико-математических наук

Москва – 2024

Работа подготовлена на кафедре высшей алгебры Механико-математического факультета ФГБОУ ВО «Московский государственный университет имени М. В. Ломоносова».

Научный руководитель: **Маркова Ольга Викторовна,**
кандидат физико-математических наук, доцент.

Официальные оппоненты: **Киселёв Денис Дмитриевич,**
доктор физико-математических наук, доцент, ФГБОУ ВО «Всероссийская академия внешней торговли Министерства экономического развития Российской Федерации», кафедра информатики и математики, профессор.

Кожухов Игорь Борисович,
доктор физико-математических наук, профессор, «Национальный исследовательский университет «Московский институт электронной техники»», кафедра высшей математики № 1, профессор.

Туганбаев Аскар Аканович,
доктор физико-математических наук, профессор, ФГБОУ ВО «Национальный исследовательский университет «МЭИ»», кафедра высшей математики, профессор.

Защита диссертации состоится 17 мая 2024 г. в 16 часов 45 минут на заседании диссертационного совета МГУ.011.4 Московского государственного университета имени М.В. Ломоносова по адресу: 119234, Москва, ГСП-1, Ленинские горы, д. 1, МГУ имени М. В. Ломоносова, Механико-математический факультет, аудитория 14-08.

E-mail: *vladimir.manuilov@gmail.com*

С диссертацией можно ознакомиться в отделе диссертаций научной библиотеки МГУ имени М. В. Ломоносова (Ломоносовский просп., д. 27) и на портале:

`https://dissovet.msu.ru/dissertation/011.4/2958`

Автореферат разослан 17 апреля 2024 года.

Ученый секретарь диссертационного совета **В. М. Мануйлов**
доктор физико-математических наук

Общая характеристика работы

Актуальность темы исследования и степень её разработанности

Диссертация является исследованием в области групповых алгебр. В работе изучаются системы порождающих групповых алгебр, вычисляются длины и другие числовые характеристики различных групповых и матричных алгебр.

Введём центральное понятие темы исследования — понятие длины конечномерной ассоциативной алгебры. Если $\mathcal{S}$ — система порождающих алгебры $\mathcal{A}$, то есть $\mathcal{A}$ совпадает с минимальной своей подалгеброй, содержащей $\mathcal{S}$, то любой элемент алгебры $\mathcal{A}$ может быть представлен в виде линейной комбинации слов над $\mathcal{S}$. Минимальное k такое, что мы можем выразить все элементы $\mathcal{A}$, используя слова длины не более k, назовем длиной системы порождающих $\mathcal{S}$. Длиной алгебры $\mathcal{A}$, назовем максимальную длину среди её систем порождающих, будем обозначать её $l(\mathcal{A})$. В определении длины алгебры $\mathcal{A}$ мы рассматриваем множество всех порождающих систем для $\mathcal{A}$. Этим объясняется сложность вычисления длины даже для классических алгебр.

Важным примером конечномерных ассоциативных алгебр являются групповые алгебры конечных групп, которые и являются объектом исследования.

Изучение строения групповых алгебр является классическим направлением исследований, имеющих важное значение в теории представлений. Здесь можно отметить такие классические результаты, как теорема Машке и теорема Веддербёрна-Артина. Строение групповых алгебр конечных абелевых групп было подробно рассмотрено в работе С. Перлиса и Г. Волкера [1] в 1950 г.

При исследовании вопросов, связанных с образующими групповых алгебр, есте-

[1]S. Perlis, G. L. Walker, Abelian group algebras of finite order, Trans. Amer. Math. Soc., **68**:3 (1950), 420–426.

ственным образом возникает потребность в качестве порождающей системы групповой алгебры $\mathbb{F}G$ рассмотреть систему образующих группы G. Отметим, что для группы G и её системы порождающих S широко изучается соответствующая задача нахождения кратчайшего слова от образующих, представляющего элемент $g \in G$. Подробное рассмотрение этой темы можно найти в обзоре [2] и его библиографии. Одним из ключевых понятий при изучении соответсвующего вопроса для групп является диаметр группы. *Диаметром* группы G относительно системы образующих S называется максимум по $g \in G$ длин кратчайших слов от $S \cup S^{-1}$, представляющих g. В работе [3] Л. Бабаи получил асимптотические оценки диаметра групп. Эти исследования были продолжены Х. Хельфготтом в работе [4] в 2019 г.

Отметим, что изучение порождающих систем групповой алгебры $\mathbb{F}G$ не сводится к изучению систем образующих группы G, что иллюстрирует, в частности, доказанная в ходе исследования теорема о том, что над полем характеристики ноль групповая алгебра любой (в том числе не являющейся циклической) конечной абелевой группы имеет максимальную длину, что равносильно однопорождённости.

Системы порождающих групповых алгебр на данный момент изучены гораздо меньше. Поскольку порождающие множества групповой алгебры, вообще говоря, не исчерпываются порождающими множествами соответствующей группы, имеющиеся вычисления диаметра групп могут обеспечить лишь нижние оценки длины групповых алгебр. Вопрос получения верхних оценок, и, тем более, точного вычисления длин конкретных групповых алгебр остаётся открытым и актуальным.

[2] М.М. Глухов, А.Ю. Зубов, О длинах симметрических и знакопеременных групп подстановок в различных системах образующих (обзор), Математические вопросы кибернетики. Вып. 8. – М.: Наука, 1999. – С. 5–32.

[3] L. Babai, Á. Seress, On the diameter of permutation groups. European J. Combin. **13**:4 (1992), 231–243.

[4] H.A. Helfgott, Growth and expansion in algebraic groups over finite fields, Contemporary Mathematics, **740** (2019), 71–111.

Ввиду наличия матричных представлений изучение числовых характеристик групповых алгебр неразрывно связано с изучением чиловых характеристик матричных алгебр. Для функции размерности эти исследования восходят к работе Шура 1905 г. [5], в которой получена верхняя оценка размерности $\left[\frac{n^2}{4}\right]+1$ коммутативных подалгебр алгебры матриц порядка n над полем комплексных чисел, где $[x]$ обозначает наибольшее целое число, не превосходящее x. Эта область активно развивается в течение XX века, достаточно упомянуть работы Джекобсона 1944 г. [6], в которой оценка Шура была перенесена на случай произвольного поля, Герштенхабера 1961 г. [7], в которой получена оценка размерности коммутативной алгебры, порожденной двумя матрицами, Паза 1984 г. [8], результаты которого описаны ниже, монографию Супруненко и Тышкевич 1966 г. [9], а также работы [10] и [11].

Задача вычисления длины впервые возникла в работах Спенсера и Ривлина 1959–60гг. [12], [13] для полной алгебры матриц порядка 3 в связи с возможным применением в механике сплошных сред. В общей формулировке проблема вычисления длины полной алгебры матриц $M_n(\mathbb{F})$ как функции порядка матриц была поставлена Пазом в работе 1984 года и до сих пор является открытой. Существует

[5] I. Schur, Zur theorie der vertauschbären matrizen, J. Reine Angew. Math., **130**(1905), 66–76.

[6] N. Jacobson, Schur's theorems on commutative matrices, Bull. Am. Math. Soc., **50**(1944), 431-436.

[7] M. Gerstenhaber, On dominance and varieties of commuting matrices, Ann. Math., **73** (1961), Issue 2, 324–348.

[8] A. Paz, An Application of the Cayley–Hamilton theorem to matrix polynomials in several variables, Linear and Multilinear Algebra, **15**(1984), 161–170.

[9] Д. А. Супруненко, Р. И. Тышкевич, Перестановочные матрицы. 2-е изд. М.: УРСС, 2003.

[10] A. Wadsworth, The algebra generated by two commuting matrices, Linear and Multilinear Algebra, **27**(1990), 159–162.

[11] W. C. Brown, F. W. Call, Maximal commutative subalgebras of $n \times n$ Matrices, Communications in Algebra, **21(12)**(1993), 4439–4460.

[12] A. J. M. Spencer, R. S. Rivlin, The theory of matrix polynomials and its applications to the mechanics of isotropic continua, Arch. Ration. Mech. Anal., **2**(1959), 309–336.

[13] A. J. M. Spencer, R. S. Rivlin, Further results in the theory of matrix polynomials, Arch. Ration. Mech. Anal., **4**(1960), 214–230.

гипотеза, состоящая в том, длина полной матричной алгебры равна $2n-2$, где n — порядок матриц. Известно, что эта гипотеза верна при $n = 2, 3, 4, 5$. Однако все существующие верхние оценки длины алгебры матриц не являются линейными.

В работе Паза также было доказано, что верхняя оценка длины коммутативной матричной подалгебры над полем комплексных чисел $\mathbb{C}$ равна $n-1$, т.е. для коммутативных подалгебр получена линейная относительно порядка матриц точная верхняя оценка длины.

Основные алгебраические свойства функции длины, такие как поведение длины при взятии прямых сумм алгебр, тензорных произведений алгебр, присоединении к алгебре единицы и многие другие, были изучены О.В. Марковой в работе 2012 года [14].

Поскольку групповые алгебры имеют матричные представления, изучение длин групповых алгебр не только имеет теоретический интерес, но и тесно связано с изучением длин матричных алгебр. Длинам групповых алгебр посвящена серия работ 2018-23гг. [15], [16], [17], [18], [19], [20], [21], [22], которая будет подробно рассмотрена в

[14] О. В. Маркова, Функция длины и матричные алгебры, Фундамент. и прикл. матем. 17:6 (2012), 65–173.

[15] А.Э. Гутерман, О.В. Маркова, Длина групповых алгебр групп небольшого размера, Зап. научн. сем. ПОМИ, **472**(2018), 76–87; English transl. in J. Math. Sci. (N. Y.), **240**:6 (2019), 754–761.

[16] A. E. Guterman, O. V. Markova, The length of the group algebra of the group $\mathbf{Q}_8$, New Trends in Algebra and Combinatorics. Proceedings of the 3rd International Congress in Algebra and Combinatorics (Ed. by K.P. Shum, E. Zelmanov, P. Kolesnikov, A. Wong), World Sci., Singapore, (2019), 106–134.

[17] A. E. Guterman, O. V. Markova, M. A. Khrystik, On the lengths of group algebras of finite abelian groups in the semi-simple case, Journal of Algebra and its Applications, **21**:7 (2022), 2250140–2250153.

[18] A. E. Guterman, M. A. Khrystik, O. V. Markova, On the lengths of group algebras of finite abelian groups in the modular case, Journal of Algebra and its Applications, **21**:6 (2022), 2250117–2250130.

[19] M.A. Khrystik, O.V. Markova, On the length of the group algebra of the dihedral group in the semi-simple case, Communications in Algebra, **50**:5 (2022), 2223–2232.

[20] О.В. Маркова , М.А. Хрыстик, Длина групповой алгебры группы диэдра порядка 2^k, Зап. научн. сем. ПОМИ, **496**(2020), 169–181; English transl. in J. Math. Sci. (N. Y.), **255**:3 (2021), 324–331.

[21] О.В. Маркова, Пример вычисления длины групповой алгебры нециклической абелевой группы в модулярном случае, Фунд. прикл. матем., **23**:2 (2020), 217–229.

[22] М.А. Хрыстик , Длина групповой алгебры прямого произведения циклической группы и циклической р-группы в модулярном случае, Зап. научн. сем. ПОМИ, **524**(2023), 166–176.

диссертации.

Таким образом, тема исследований, рассмотренных в работе представляет интерес и активно развивается.

Цели и задачи работы

В работе решаются следующие задачи:

- исследуются длины групповых алгебр абелевых групп;
- вычисляются длины некоторых матричных алгебр, являющихся представлениями групповых алгебр;
- исследуются длины групповых алгебр диэдральных групп;
- вычисляются длины групповых алгебр групп малых порядков.

Положения, выносимые на защиту

- Вычисление длины групповой алгебры прямого произведения циклической группы и циклической p-группы над полем характеристики p.
- Вычисление длины групповых алгебр диэдральных групп в полупростом случае.
- Описание длин групповых алгебр групп малых порядков.

Объект и предмет исследования

Объект исследования — групповые и матричные алгебры.

Предмет исследования — функция длины конечномерной ассоциативной алгебры.

Научная новизна

Полученные в диссертации результаты являются новыми и получены автором самостоятельно. Среди них:

1. Теорема о значении длины групповой алгебры прямого произведения циклической группы и циклической p-группы над полем характеристики p.

2. Теорема о значении длины групповых алгебр диэдральных групп в полупростом случае.

3. Полное описание длин групповых алгебр для групп, порядок которых не превышает 9, над произвольными полями.

Методы исследования

В работе применяются как классические методы линейной и общей алгебры, так и некоторые новые методы доказательства, использующие связи между длиной алгебры и другими её числовыми характеристиками, такими как размерность алгебры и максимальная степень минимального многочлена элемента алгебры. При переходе от групповых алгебр к матричным используется теорема Машке и теорема Веддербёрна-Артина.

Теоретическая и практическая значимость

Работа имеет теоретический характер. Приложения разрабатываемой теории возникают в следующем классе задач вычислительных методов теории матриц (см., например, [23], [24], [25]): пусть дана подалгебра в полной алгебре матриц $M_n(\mathbb{F})$ порядка n над полем $\mathbb{F}$ (обычно полем комплексных или действительных чисел), заданная порождающим множеством $A_1, \ldots, A_k$, и требуется проверить, обладает ли данная алгебра, некоторым заданным свойством. При этом процедура проверки должна быть *рациональной*, т.е. использующей конечное число арифметических операций с элементами матриц. Такие процедуры как правило включают в себя рациональную процедуру вычисления базиса алгебры; длина порождающего множества $A_1, \ldots, A_k$ ограничивает сверху число матриц, участвующих в рассматриваемых произведениях матриц, т.е. является мерой сложности этой процедуры. Также длина определяет сложность рациональной процедуры проверки, является ли некоторое множество системой порождающих для заданной алгебры.

Отметим, что в ряде вычислительных задач требуется оценить длину произвольного подмножества $\mathcal{S}'$ в алгебре $\mathcal{A}$, которое может порождать не всю алгебру, а ее собственную подалгебру $\mathcal{A}' \subset \mathcal{A}$. Или, найти такое число $M \in \mathbb{N}$, что для любой подалгебры $\mathcal{A}' \subseteq \mathcal{A}$ будет справедлива оценка $l(\mathcal{A}') \leq M$. В силу тривиальной оценки длины $l(\mathcal{A}') \leq \dim \mathcal{A}' - 1$, всегда можно положить $M = \dim \mathcal{A} - 1$. Однако, как показывает, например, оценка в теореме 1.2.4, тривиальная оценка может не быть точной.

Таким образом, вопросы, связанные с вычислением и оцениванием длин различных матричных подалгебр мотивированы приложениями и активно разрабатываются. Поэтому построение общей теории функции длины представляет не только самостоятельный теоретический интерес, но и является эффективным ин-

[23] Ю.А. Альпин, Х.Д. Икрамов, Об унитарном подобии матричных семейств, Матем. заметки, **74**:6 (2003), 815–826.

[24] Yu.A. Al'pin, Kh.D. Ikramov, Reducibility theorems for pairs of matrices as rational criteria, Linear Algebra Appl., **313**(2000), 155–161.

[25] О. В. Маркова, Функция длины и одновременная триангулизуемость пар матриц, Зап. научн. сем. ПОМИ, **514**(2022), 126–137

струментом работы с различными классами вычислительных задач в прикладной и теоретической алгебре.

Степень достоверности

Все результаты диссертации являются оригинальными, обоснованы с помощью строгих математических доказательств и опубликованы в открытой печати.

Результаты других авторов, используемые в диссертации, отмечены соответствующими ссылками.

Апробация результатов

Автор выступал с докладами по результатам работы на следующих спецсеминарах:

- Научный семинар «Кольца, модули и матрицы», механико-математический факультет МГУ имени М. В. Ломоносова, 2020, 2021 (устные доклады);
- Научно-исследовательский семинар по алгебре, механико-математический факультет МГУ имени М. В. Ломоносова, 2023 (устный доклад);
- Научный семинар «Теория групп», механико-математический факультет МГУ имени М. В. Ломоносова, 2023 (устный доклад).

Кроме того, автором были сделаны доклады по теме диссертации на следующих международных конференциях:

- XXVI Международная конференция студентов, аспирантов и молодых ученых «Ломоносов-2019», Москва, Россия, с 8 по 12 апреля 2019 года (устная презентация на русском);

- Международная конференция, посвящённая 90-летию кафедры высшей алгебры механико-математического факультета МГУ «Кафедре высшей алгебры — 90 лет», Москва, Россия, с 28 по 31 мая 2019 года (устная презентация на русском);

- XXVII Международная научная конференция студентов, аспирантов и молодых ученых «Ломоносов-2020», Москва, Россия, с 10 по 27 ноября 2020 года (устный доклад в формате онлайн).

Публикации

Результаты диссертации обоснованы в виде строгих математических доказательств и опубликованы в пяти статьях [1, 2, 3, 4, 5]. Из них 4 статьи в изданиях, рекомендованных для защиты в диссертационном совете МГУ и входящих в базы цитирования Scopus, Web of Science и RSCI.

Работы [1, 2, 3, 4] опубликованы в журналах, входящих в реферативные базы данных Scopus.

Работы [1,2] написаны в соавторстве с А.Э. Гутерманом и О.В. Марковой. Работы [3,4] написаны в соавторстве с О.В. Марковой. Работа [5] написана автором самостоятельно.

Все вышеперечисленные работы соответствуют теме научно-квалификационной работы и отражают её содержание. Работа подготовлена по специальности 1.1.5 «Математическая логика, алгебра, теория чисел и дискретная математика».

Структура и объём диссертации

Диссертация состоит из введения, четырех глав, разбитых на параграфы, заключения, списка литературы и списка публикаций автора. Общий объем работы:

66 страниц. Список литературы включает 41 наименование.

Содержание диссертации

Введение содержит информацию об актуальности рассматриваемой темы, краткую историю вопроса, изложение цели работы, методов и основных результатов.

Глава 1. В этой главе более подробно описываются история задачи исследования длин конечномерных ассоциативных алгебр, вводятся необходимые обозначения и определения, формулируются некоторые известные на момент написания работы результаты.

В разделе 1.1 вводятся основные определения и обозначения, используемые на протяжении всего текста.

Кольцо $\mathcal{A}$, являющееся также векторным пространством над полем $\mathbb{F}$, называется *алгеброй* над $\mathbb{F}$ или $\mathbb{F}$-*алгеброй*, если для любого $\lambda \in \mathbb{F}$ и любых $a, b \in \mathcal{A}$ выполняется равенство $\lambda(ab) = (\lambda a)b = a(\lambda b)$. Алгебра называется *конечномерной*, если соответствующее векторное пространство имеет конечную размерность над $\mathbb{F}$. Алгебра называется *конечно порожденной*, если в ней существует такое конечное подмножество $\mathcal{S} = \{a_1, \ldots, a_k\}$, называемое *системой порождающих*, что каждый элемент алгебры является линейной комбинацией конечного числа произведений элементов из $\mathcal{S}$, включая пустое произведение, равное единичному элементу (если он есть). Легко видеть, что любая конечномерная алгебра порождается своим базисом, т.е. является конечно порожденной.

Обозначение (1.1.7)**.** Обозначим через $\mathcal{L}_i(\mathcal{S})$ линейную оболочку слов из $\mathcal{S}^i$. Заметим, что $\mathcal{L}_0(\mathcal{S}) = \langle 1_{\mathcal{A}} \rangle = \mathbb{F}$ для алгебр с единицей, и $\mathcal{L}_0(\mathcal{S}) = 0$, иначе. Пусть также $\mathcal{L}(\mathcal{S}) = \bigcup\limits_{i=0}^{\infty} \mathcal{L}_i(\mathcal{S})$ обозначает линейную оболочку всех слов в алфавите $\{a_1, \ldots, a_k\}$.

Определение (1.1.9)**.** *Длиной системы порождающих* $\mathcal{S}$ алгебры $\mathcal{A}$ называется $l(\mathcal{S}) = \min\{k \in \mathbb{Z}_+ : \mathcal{L}_k(\mathcal{S}) = \mathcal{A}\}$.

Определение (1.1.11)**.** *Длиной алгебры* $\mathcal{A}$ называется $l(\mathcal{A}) = \max\{l(\mathcal{S}) : \mathcal{L}(\mathcal{S}) = \mathcal{A}\}$.

Обозначение (1.1.12)**.** Пусть $m(a)$ — степень минимального многочлена элемента a алгебры $\mathcal{A}$. Тогда $m(\mathcal{A}) = \max\{m(a) : a \in \mathcal{A}\}$.

Обозначение (1.1.13)**.** Введём обозначения. $\mathbb{F}G$ или $\mathbb{F}[G]$ — групповая алгебра группы G над полем $\mathbb{F}$, $M_n(\mathbb{F})$ — полная матричная алгебра над полем $\mathbb{F}$, $A_n(\mathbb{F}) = \bigoplus\limits_{i=1}^{n} M_2(\mathbb{F})$, $D_n(\mathbb{F})$ — алгебра диагональных матриц над полем $\mathbb{F}$, $E_{i,j}$ — матричная единица, G_n — циклическая группа порядка n, $\mathcal{D}_n$ — диэдральная группа порядка $2n$, S_n — симметрическая группа, Q_8 — группа кватернионов.

В разделе 1.2 рассматривается возникновение понятия функции длины алгебры, формулировка гипотезы Паза. Приводится обзор продвижений в направлении доказательства гипотезы, в том числе оценки Паза, Паппачены, Шитова.

Гипотеза (1.2.1)**.** Пусть $\mathbb{F}$ — произвольное поле. Тогда $l(M_n(\mathbb{F})) = 2n - 2$.

В разделе 1.3 фокус внимания смещается на групповые алгебры. Приводится краткий обзор на серию работ о длинах групповых алгебр.

Глава 2. В этой главе рассматриваются результаты изучения длин групповых алгебр абелевых групп. Для полноты повествования в тексте указаны основные результаты работ по теме длин групповых алгебр, в том числе те, которые не принадлежат автору. Такие результаты сопровождаются соответствующим комментарием, а их доказательства, как правило, опущены.

В разделе 2.1 рассматривается связь между длиной алгебры и её однопорождённостью. Формулируется утверждение о длине групповой алгебры для циклических групп.

Утверждение (2.1.1)**.** Пусть $\mathcal{A}$ — ассоциативная алгебра с единицей размерности d над произвольным полем. Тогда $l(\mathcal{A}) \leq d-1$, причём оценка превращается в равенство тогда и только тогда, когда алгебра $\mathcal{A}$ является однопорождённой, из чего автоматически следует, что она коммутативна.

Утверждение (2.1.2)**.** Пусть G — циклическая группа порядка $n < \infty$. Тогда $l(\mathbb{F}G) = n-1$.

В разделе 2.2 рассматривается случай групповых алгебр абелевых групп, когда характеристика поля не делит порядок группы (полупростой случай). Результаты данного раздела получены в совместной работе и не принадлежат автору, поэтому доказательства будут опущены. Однако техника работы с представлением групповой алгебры в виде прямой суммы конечных расширений поля, лёгшая в основу результатов в полупростом случае, будет рассмотрена на примерах групп малых порядков в главе 4.

Теорема (2.2.1)**.** Пусть G — конечная абелева группа, $\mathrm{char}\,(\mathbb{F}) \nmid |G|$, $|\mathbb{F}| \geq |G|$. Тогда групповая алгебра $\mathbb{F}G$ является однопорождённой и, как следствие, $l(\mathbb{F}G) = |G|-1$.

Теорема (2.2.2)**.** Пусть G — конечная абелева группа, $q \leq |G|-1$, $\exp(G)|(q-1)$. Тогда $l(\mathbb{F}_q G) = (q-1)[\log_q |G|] + [q^{\{\log_q |G|\}}] - 1$.

В разделе 2.3 рассматривается случай групповых алгебр абелевых групп, когда характеристика поля делит порядок группы (модулярный случай). В частности, вычисляется длины групповых алгебр для p-групп над полями характеристики $p > 0$. Результаты данного раздела получены в совместной работе и не принадлежат автору, поэтому доказательства будут опущены.

Теорема (2.3.1)**.** Пусть $\mathbb{F}$ — поле характеристики $p > 0$. Пусть $m \in \mathbb{N}$ и пусть G — конечная абелева p-группа, которая содержит a_i копий G_{p^i} в своём разложении на примарные циклические, $a_1, \dots, a_{m-1} \in \mathbb{Z}_+, a_m \in \mathbb{N}$, то есть,

$$G \cong \underbrace{G_p \times \dots \times G_p}_{a_1 \text{ копий}} \times \dots \times \underbrace{G_{p^m} \times \dots \times G_{p^m}}_{a_m \text{ копий}}.$$

Тогда

$$l(\mathbb{F}G) = \sum_{i=1}^{m} a_i(p^i - 1).$$

Для остальных групп получены верхняя и нижняя оценки.

Теорема (2.3.2)**.** Пусть $\mathbb{F}$ — поле характеристики $p > 0$. Пусть G — абелева группа порядка $|G| = p^t \cdot m$, $(m, p) = 1$ разлагается в прямое произведение $G \cong H \times P$, где P — это p-группа, $|H| = m$. Тогда

$$l(\mathbb{F}P) + l(\mathbb{F}H) \leq l(\mathbb{F}G) \leq |H| \cdot (l(\mathbb{F}P) + 1) - 1.$$

Над достаточно большими совершенными полями удаётся точно вычислить значение длины групповой алгебры в случае, когда p-компонента в разложении группы — циклическая.

Теорема (2.3.4)**.** Пусть $m \in \mathbb{N}$, $\mathbb{F}$ — совершенное поле характеристики $p > 0$, $|\mathbb{F}| \geq m$ и $(m, p) = 1$. Рассмотрим конечную абелеву группу $G \cong H \times P$, где P — циклическая p-группа и $|H| = m$. Тогда алгебра $\mathbb{F}G$ является однопорождённой и $l(\mathbb{F}G) = |G| - 1$.

В разделе 2.4 продолжается исследование групповых алгебр, для которых значение длины может быть точно вычислено. Основным результатом данного раздела является вычисление длины групповой алгебры прямого произведения циклической группы и циклической p-группы над полем характеристики p.

Теорема (2.4.3)**.** Пусть $\mathbb{F}$ — поле характеристики $p > 0$, $p \nmid q$, $k \geq l$. Тогда

$$l(\mathbb{F}[G_{p^l} \times G_{p^k} \times G_q]) = p^k q + p^l - 2.$$

В разделе 2.5 теоремы 2.3.4 и 2.4.3 получают своё обобщение в виде следующей теоремы.

Теорема (2.5.1)**.** Пусть $\mathbb{F}$ — совершенное поле характеристики $p > 0$, H — абелева группа порядка q, $|\mathbb{F}| \geq q$, $p \nmid q$, $k \geq l$. Тогда

$$l(\mathbb{F}[G_{p^l} \times G_{p^k} \times H]) = p^k q + p^l - 2.$$

Глава 3. В этой главе рассматриваются результаты изучения длин групповых алгебр диэдральных групп. Для изучения групповых алгебр диэдральных групп используются матричные представления, поэтому в главе также присутствуют результаты о длине матричных алгебр. Основным результатом главы является следующая теорема.

Теорема (3.0.1)**.** Пусть $\mathbb{F}$ — поле, такое что $\operatorname{char} \mathbb{F}$ не делит $2n$, $n \geq 3$. Тогда $l(\mathbb{F}\mathcal{D}_n) = n$.

В разделе 3.1 доказывается нижняя оценка длины в случае диэдральных групп.

Лемма (3.1.1)**.** Пусть $\mathcal{D}_n$ — группа диэдра порядка $2n$, $n \geq 3$, $\mathbb{F}$ — произвольное поле. Тогда $l(\mathbb{F}\mathcal{D}_n) \geq n$.

В разделе 3.2 доказываются результаты о длине матричных алгебр, интересные и сами по себе, которые будут использованы для доказательства основной теоремы главы.

Лемма (3.2.8)**.** Пусть $\mathcal{A}$ — конечномерная ассоциативная $\mathbb{F}$-алгебра, $\dim \mathcal{A} < 2l(\mathcal{A}) + 2$. Тогда

$$l(\mathcal{A} \oplus M_2(\mathbb{F})) \leq l(\mathcal{A}) + 2.$$

Напомним, что в этой главе $A_n(\mathbb{F}) = \bigoplus\limits_{i=1}^{n} M_2(\mathbb{F})$, $D_n(\mathbb{F}) = \bigoplus\limits_{i=1}^{n} \mathbb{F}$.

Лемма (3.2.9)**.** Пусть $|\mathbb{F}| > n$. Тогда $l(A_n(\mathbb{F})) = 2n$.

Лемма (3.2.11)**.** Пусть $\mathcal{A}$ — коммутативная алгебра. Пусть $|\mathbb{F}| > n$. Тогда

$$l(A_n(\mathbb{F}) \oplus \mathcal{A}) \leq \max\{2n+2, l(\mathcal{A})\}.$$

В разделе 3.3 результат леммы 3.2.11 обобщается на случай произвольных полей в случае $n = 2$, а также доказывается верхняя оценка длины алгебры, которая будет использована при рассмотрении групп малых порядков в главе 4.

Лемма (3.3.1)**.** Пусть $\mathcal{A}$ — конечномерная ассоциативная алгебра, $\dim \mathcal{A} \leq m(\mathcal{A}) + 4$, $m(\mathcal{A}) \geq 3$. Тогда $l(\mathcal{A}) \leq m(\mathcal{A})$.

Теорема (3.3.2)**.** $l(M_2(\mathbb{F}) \oplus M_2(\mathbb{F})) = 4$.

Раздел 3.4 посвящён доказательству основной теоремы главы. Для этого рассматривается матричное представление групповых алгебр диэдральных групп.

Утверждение (3.4.1)**.** Пусть $\mathbb{F}$ — алгебраически замкнутое поле и $\operatorname{char} \mathbb{F}$ не делит порядок группы. Тогда

$$\mathbb{F}\mathcal{D}_{2n+1} \cong A_n(\mathbb{F}) \oplus D_2(\mathbb{F}),$$

$$\mathbb{F}\mathcal{D}_{2n+2} \cong A_n(\mathbb{F}) \oplus D_4(\mathbb{F}).$$

Далее с помощью лемм, доказанных в разделе 3.2, доказываются следующие результаты о длинах матричных алгебр.

Лемма (3.4.2)**.** Пусть $\mathbb{F}$ — алгебраически замкнутое поле, такое что $\operatorname{char} \mathbb{F}$ не делит $4n + 2$. Тогда

$$l(A_n(\mathbb{F}) \oplus D_2(\mathbb{F})) = 2n + 1.$$

Лемма (3.4.3)**.** Пусть $\mathbb{F}$ — алгебраически замкнутое поле, такое что $\operatorname{char} \mathbb{F}$ не делит $4n + 4$. Тогда

$$l(A_n(\mathbb{F}) \oplus D_4(\mathbb{F})) = 2n + 2.$$

Из доказанных в этом разделе утверждений и того факта, что длина не уменьшается при переходе к расширению поля следует основной результат главы.

В разделе 3.5 основной результат главы обобщается на модулярный случай для диэдральных 2-групп.

Теорема (3.5.1)**.** Пусть $\operatorname{char} \mathbb{F} = 2$, $k \geq 2$. Тогда $l(\mathbb{F}\mathcal{D}_{2^k}) = 2^k$.

Доказательство этого результата не принадлежит автору, поэтому опущено, однако в главе 4 подробно рассмотрен частный случай этой теоремы при $k = 2$.

Глава 4. В этой главе рассматриваются результаты изучения длин групповых алгебр групп, порядок которых не превышает 9. Для этих групп длины соответствующих групповых алгебр вычислены над произвольными полями.

В разделе 4.1, посвящённом абелевым группам, рассматриваются группы $G_2 \times G_2$, $G_2 \times G_2 \times G_2$, $G_2 \times G_4$ и $G_3 \times G_3$, так как случай циклических групп тривиален. Также в этом разделе представлен сюжет о коммутативных групповых алгебрах над полями нулевой характеристики, где рассматривается ещё один подход к изучению длин групповых алгебр с помощью матричных представлений.

Теорема (4.1.8)**.** Коммутативные групповые алгебры над полями нулевой характеристики имеют длину $n - 1$, где n – порядок группы.

Для краткости и наглядности представим полученные в разделе результаты в виде таблицы, где на пересечении строки с группой и столбца с полем будет стоять длина соответствующей групповой алгебры.

Группа\Поле	$\mathbb{F}_2$	$\mathbb{F}_3$	$\mathbb{F}_4$	$\mathbb{F}_5$	$\mathbb{F}_7$	$\mathbb{F}_8$	$\lvert\mathbb{F}\rvert \geq 9$, $\operatorname{char}\mathbb{F} \nmid \lvert G\rvert$	$\lvert\mathbb{F}\rvert \geq 9$, $\operatorname{char}\mathbb{F} \mid \lvert G\rvert$
G_1	0	0	0	0	0	0	0	-
G_2	1	1	1	1	1	1	1	1
G_3	2	2	2	2	2	2	2	2
G_4	3	3	3	3	3	3	3	3
$G_2 \times G_2$	2	2	2	3	3	2	3	2
G_5	4	4	4	4	4	4	4	4
G_6	5	5	5	5	5	5	5	5
G_7	6	6	6	6	6	6	6	6
G_8	7	7	7	7	7	7	7	7
$G_2 \times G_2 \times G_2$	3	3	3	4	6	3	7	3
$G_2 \times G_4$	4	6	4	4	7	4	7	4
G_9	8	8	8	8	8	8	8	8
$G_3 \times G_3$	4	4	4	8	6	8	8	4

В частности, на этой таблице можно наглядно увидеть отсутствие монотонности функции длины, как по порядку группы, так и по порядку поля, даже если говорить только о нециклических группах в полупростом случае.

В разделе 4.2 приведены результаты совместных статей А.Э. Гутермана и О.В. Марковой о случаях групп S_3 и Q_8.

Теорема (4.2.1)**.** Пусть $\mathbb{F}$ — произвольное поле. Тогда $l(\mathbb{F}S_3) = 3$.

Теорема (4.2.2)**.** Пусть $\mathbb{F}$ — произвольное поле. Тогда

1. $l(\mathbb{F}Q_8) = 4$, если $\operatorname{char}\mathbb{F} \neq 2$ и в поле $\mathbb{F}$ существуют элементы α, β, такие, что $\alpha^2 + \beta^2 = -1$;

2. $l(\mathbb{F}Q_8) = 3$, в остальных случаях.

Завершается раздел рассмотрением диэдральной группы порядка 8. Из теоремы 3.0.1 следует, что в полупростом случае $l(\mathbb{F}\mathcal{D}_4) = 4$. Для вычисления длины в случае диэдральной группы $\mathcal{D}_4$ над полем характеристики 2 вычисляется максимальная степень минимального многочлена элемента алгебры и применяется лемма 3.3.1.

Лемма (4.2.7)**.** Пусть $\operatorname{char}\mathbb{F} = 2$. Тогда $m(\mathbb{F}\mathcal{D}_4) = 4$.

Теорема (4.2.8)**.** Пусть $\operatorname{char}\mathbb{F} = 2$. Тогда $l(\mathbb{F}\mathcal{D}_4) = 4$.

Заключение

В ходе работы проведёно большое исследование длин групповых алгебр. Получены значения длин для довольно широких классов групп. В ходе изучения длин групповых алгебр доказаны верхние оценки функции длины, применение которых может выходить за рамки случая групповых алгебр, как, например, в разделе 3.3. Разработаны различные техники работы с алгебрами как групповыми, так и матричными. Тем не менее существует большой простор для дальнейших исследований.

Как уже было отмечено, в полупростом случае для коммутативных групповых алгебр задача нахождения длины не решена полностью только для маленьких полей. Несмотря на то, что в главе 4 показан пример рассмотрения алгебр, не покрываемых теоремами главы 2, нахождение ответа на вопрос о длине над произвольными малыми полями в этом случае представляется автору весьма трудной задачей.

В модулярном случае для коммутативных групповых алгебр задача нахождения длины решена в общем виде для p-групп и групп, являющихся прямым произведением циклической группы и циклической p-группы. Для остальных групп доказаны верхние и нижние оценки.

В случае некоммутативных алгебр длина вычислена для диэдральных групп произвольного порядка в полупростом случае. Следующее, над чем стоит подумать с точки зрения данной работы — длина $\mathbb{F}\mathcal{D}_n$ в модулярном случае. Но и в полупростом случае задача оказывается весьма непростой, ведь разложение групповой алгебры в прямую сумму полных матричных алгебр эффективно, если известна длины матричных алгебр. Однако в общем случае гипотеза Паза о длине $M_n(\mathbb{F})$ не доказана. А следовательно и получать какие-либо общие утверждения о длине некоммутативных групповых алгебр с помощью данного подхода пока не представляется возможным (но это, конечно, не единственная сложность). Вообще говоря, вполне возможно, что именно рассмотрение групповых алгебр поможет доказать гипотезу Паза, а не наоборот, чем отчасти и вызван интерес к ним.

Благодарность

Автор выражает глубокую благодарность своему научному руководителю кандидату физико-математических наук, доценту Марковой Ольге Викторовне за постановку задач и постоянное внимание к работе, заведующему кафедры высшей алгебры и всем сотрудникам кафедры высшей алгебры за тёплую доброжелательную атмосферу.

Список публикаций автора по теме диссертации

Статьи в рецензируемых научных изданиях, рекомендованных для защиты в диссертационном совете МГУ по специальности 1.1.5 «Математическая логика, алгебра, теория чисел и дискретная математика» и входящих в базы цитирования Scopus, Web of Science и RSCI

[1] Guterman A., Khrystik M., Markova O., On the lengths of group algebras of finite abelian groups in the modular case, Journal of Algebra and its Applications, **21**:6 (2022), 2250117–2250130.

М.А. Хрыстиком доказано следствие 3.10.

DOI: 10.1142/S0219498822501171

Журнал индексируется в **Scopus**. IF: SJR 0.538.

[2] Guterman A., Markova O., Khrystik M., On the lengths of group algebras of finite abelian groups in the semi-simple case, Journal of Algebra and its Applications, **21**:7 (2022), 2250140–2250153.

М.А. Хрыстиком доказаны следствия 3.8, 3.11 и теорема 3.16.

DOI: 10.1142/S0219498822501407

Журнал индексируется в **Scopus**. IF: SJR 0.538.

[3] Khrystik M.A., Markova O.V., On the length of the group algebra of the dihedral group in the semi-simple case, Communications in Algebra, **50**:5 (2022), 2223–2232.

М.А. Хрыстиком доказаны теорема 1.15, леммы 3.5, 3.7, 3.9, 4.2 и 4.3.

DOI: 10.1080/00927872.2021.2003810

Журнал индексируется в **Scopus**. IF: SJR 0.642.

[4] О.В. Маркова, М.А. Хрыстик, Длина групповой алгебры группы диэдра поряд-

ка 2^k, Записки научных семинаров ПОМИ, **496**(2020), 169–181;

English transl.:

Markova O.V., Khrystik M.A., Length of the group algebra of the dihedral group of order 2^k, Journal of Mathematical Sciences. (N. Y.), **255**:3 (2021), 324–331.

М.А. Хрыстиком доказаны леммы 2.10, 3.5 и теорема 3.7.

DOI: 10.1007/s10958-021-05375-6

Журнал индексируется в **Scopus**. IF: SJR 0.314.

Другие публикации

[5] М.А. Хрыстик, Длина групповой алгебры прямого произведения циклической группы и циклической p-группы в модулярном случае, Записки научных семинаров ПОМИ, **524**(2023), 166–176.

http://ftp.pdmi.ras.ru/pub/publicat/znsl/v524/p166.pdf

Журнал индексируется в **РИНЦ**.