

ОТЗЫВ официального оппонента на диссертацию
Промыслова Валентина Валерьевича на соискание ученой степени
кандидата физико-математических наук
на тему: «Графы и алгебраические конструкции»
по специальности 1.1.5 «Математическая логика,
алгебра, теория чисел и дискретная математика»

Диссертационная работа В.В.Промыслова посвящена исследованию тотального и регулярного графов кольца матриц над полем. Впервые понятия тотального и регулярного графов ввели Андерсон и Бадави – вершинами тотального графа были произвольные элементы коммутативного кольца с единицей, вершинами регулярного графа, соответственно, регулярные элементы, а ребрами были соединены в точности те элементы, сумма которых была не регулярна. В 2014 году Акбари рассмотрел аналогичные графы и над некоммутативными кольцами. В работе В.В.Промыслова в качестве вершин рассматривается кольцо матриц над полем, а тотальный и регулярный графы такого станут одними из основных объектов исследования.

Тотальный и регулярный графы кольца матриц обладают рядом замечательных свойств. Например, как показал Акбари, кликовое число регулярного графа конечно вне зависимости от поля, за исключением полей характеристики два. Хроматическое число, напротив, может быть бесконечно – этот результат получен в работе Томона. Еще недавно была актуальна гипотеза, о том, что автоморфизмы $T: M_n \rightarrow M_n$ тотального графа имеют вид $T(A) = PA^fQ$ или $T(A) = P(A^f)^TQ$, где P, Q – невырожденные матрицы, а A^f – результат поэлементного применения автоморфизма поля f к элементам матрицы A . Справедливость этой гипотезы для 2×2 матриц над конечным полем показали Джоу, Вонг и Ма. В работе В.В.Промыслова гипотеза будет доказана для матриц произвольного размера и любого поля, в котором есть хотя бы три элемента.

Поскольку задача описания автоморфизмов по сути является задачей описания отображений, сохраняющих вырожденность суммы матриц, часть диссертации посвящена описанию отображений такого вида. История описания отображений, сохраняющих различные матричные отношения и инварианты, восходит еще к результатам Фробениуса о виде сохраняющих определитель линейных отображений кольца матриц над полем комплексных чисел в себя. Этот результат вызвал высокий интерес у исследователей и был несколько раз усилен такими математиками, как Дьедонне, Долинар, Шемрл, Тан, Ванг и Костара. Одним из результатов В.В.Промыслова, заслуживающих отдельного внимания, является описание пар отображений, сохраняющих вырожденность пучка матриц. Эта теорема обобщает некоторые полученные ранее в этой области результаты.

Помимо озвученных выше вопросов В.В.Промыслов отдельно исследует такие свойства параметры тотального и регулярного графа, как связность, радиус, диаметр, кликовое и хроматическое число. В главе 4 доказывается связность регулярного графа кольца матриц, а также формулируется критерий связности тотального и регулярного графов многочлена; исследуется вопрос о конечности кликового числа тотального графа многочлена от двух переменных; показывается связь хроматического числа регулярного графа кольца матриц и хроматического числа регулярных

графов кривых второго порядка. Исходя из этой связи, исследуются свойства регулярных графов кривых второго порядка.

Отдельная глава посвящена исследованию тотального и регулярного графов многочлена и множества. Особую часть здесь занимает описание структуры тотального и регулярного графа с точностью до автоморфизма для наименьшего нетривиального случая – графа трёхточечного множества. В разделе 5.1 классифицируются графы множества, лежащего в одномерном пространстве, или, что то же, на аффинной прямой. В разделе 5.2 фокус переносится на пространство произвольной размерности.

Все результаты диссертации являются новыми, актуальными и снабжены строгими доказательствами. Текст диссертации тщательно оформлен, грамотен и выдержан в научном стиле. Доказательства многочисленных предложений, лемм и теорем используют различные алгебраические и комбинаторные методы и, зачастую, нетривиальны и представляют самостоятельный интерес.

Достоверность положений, выносимых на защиту, дополнительно обосновывается тем, что все полученные автором результаты были подвергнуты рецензированию при публикации в журналах, а также прошли апробацию на 4 международных конференциях и 2 научных семинарах.

Диссертация В.В.Промыслова представляет собой законченную и цельную научно-исследовательскую работу в актуальном направлении современной алгебры. Все основные результаты диссертации опубликованы в 4 работах в журналах, включенных в перечень ведущих рецензируемых научных журналов и изданий ВАК и индексируемых в реферативных базах данных Scopus и/или Web of Science, что подтверждает их высокий уровень и достоверность. Они также прошли апробацию на 4 международных научных конференциях. Автореферат верно и полно отражает основные результаты диссертационной работы. Работа может быть интересна специалистам в области алгебры, теории графов и комбинаторики.

Отмечу некоторые недостатки работы:

1. Некоторые термины и обозначения отличаются от общепринятых или разнятся от раздела к разделу. Так транспонирование матрицы A иногда обозначается как A^T , а иногда как A^t . Местами единичная матрица обозначается I вместо E .

2. Доказательства некоторых вспомогательных утверждений, в частности леммы 5.1.7 и 5.1.8, можно было бы упростить.

3. В подразделах 2.2, 5.1 и 5.2 большинство утверждений являются достаточно техническими, однако не вполне ясно, есть ли у них более идейные доказательства.

4. В тексте встречаются повторы, которых можно было бы избежать. Например, определение автоморфизма тотального графа на стр. 28 частично повторяется также на странице 66. Присутствует небольшое количество опечаток незначительного характера, а также некоторые стилистические погрешности.

Вместе с тем, указанные замечания не умаляют значимости диссертационного исследования. Диссертация отвечает требованиям, установленным Московским государственным университетом имени М.В.Ломоносова к работам подобного рода. Содержание диссертации соответствует специальности 1.1.5 «Математическая логика, алгебра, теория чисел и дискретная математика» (по физико-математическим наукам), а также критериям, определенным пп. 2.1-2.5 Положения о присуждении ученых степеней в Московском государственном университете имени М.В.Ломоносова, а также оформлена согласно требованиям Положения о совете по защите диссертаций на соискание ученой степени кандидата наук, на соискание ученой степени доктора наук Московского государственного университета имени М.В.Ломоносова.

Таким образом, соискатель Промыслов Валентин Валерьевич заслуживает присуждения ученой степени кандидата физико-математических наук по специальности 1.1.5 «Математическая логика, алгебра, теория чисел и дискретная математика».

Официальный оппонент:

Доктор физико-математических наук, профессор, профессор кафедры высшей математики ФГБОУ ВО «Национальный исследовательский университет «МЭИ»

ТУГАНБАЕВ Аскар Аканович

Контактные данные тел.: 7(495)3627874, e-mail: tuganbaev@mpei.ru

Специальность, по которой официальным оппонентом защищена диссертация: 01.01.06 — «Математическая логика, алгебра и теория чисел»

Адрес места работы:

111250, Москва, ул. Красноказарменная, д. 14, ФГБОУ ВО «Национальный исследовательский университет «МЭИ», кафедра высшей математики.

Тел.: 7(495)3627874, e-mail: tuganbaev@mpei.ru

Подпись сотрудника ФГБОУ ВО «Национальный исследовательский университет «МЭИ»»

А.А. Туганбаева удостоверяю: