МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
имени М. В. ЛОМОНОСОВА
МЕХАНИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТЕТ

На правах рукописи

Оноприенко Анастасия Александровна

СОВМЕСТНАЯ ЛОГИКА ЗАДАЧ И ВЫСКАЗЫВАНИЙ

Специальность 1.1.5 — «Математическая логика, алгебра, теория чисел и дискретная математика» (01.01.06 — «Математическая логика, алгебра и теория чисел»)

ДИССЕРТАЦИЯ
на соискание учёной степени
кандидата физико-математических наук

Научный руководитель:
академик РАН
доктор физико–математических наук
Беклемишев Лев Дмитриевич

Москва 2022

Оглавление

Введение **4**

1 Основные определения и известные результаты **21**

1.1 Логика HC . . . 21

1.2 Логика QHC . . . 23

1.3 Логики S4 и H4 . . . 25

2 Семантика логики HC **27**

2.1 Алгебраическая семантика логики HC . . . 28

2.2 Семантика Крипке с двумя множествами миров логики HC . . . 30

2.3 Полнота логики HC относительно семантики Крипке с двумя множествами миров . . . 35

2.4 Следствия из теоремы о полноте . . . 40

2.4.1 Некоторые принципы . . . 41

2.4.2 Дизъюнктивное свойство . . . 42

2.4.3 ED-принцип и PC-правило . . . 43

3 Модели с отмеченными мирами **47**

3.1 Логики HC, H4 и S4 . . . 47

3.2 Модели логики HC с отмеченными мирами . . . 49

3.3 Топологические модели логик HC и H4 . . . 55

3.3.1 Топологические модели логики HC . . . 55

3.3.2 Топологические модели логики H4 . . . 59

4 Семантика логик QHC и QH4 **61**

4.1 Выводимость из гипотез в логике QHC . . . 61

4.2 Модели Крипке с отмеченными мирами логики QHC 66
4.3 Полнота логики QHC относительно моделей Крипке с отмеченными мирами 69
4.4 Модели логики QH4 с отмеченными мирами 76
4.5 Дизъюнктивное и экзистенциальное свойства 81

Заключение **84**

Список литературы **85**

Введение

Общая характеристика работы

Актуальность темы

Работа относится к одному из основных направлений математической логики и теории алгоритмов — исследованию неклассических логик.

Интуиционистское направление в математике (одно из первых среди многообразия неклассических логик) начало складываться в начале XX века и было связано с кризисом в основаниях математики на рубеже XIX–XX веков. Оно возникло в работах Л. Э. Я. Брауэра [44, 45]. Исследования по интуиционистской логике были продолжены А. Гейтингом [4, 5, 60], А. Н. Колмогоровым [9, 10], В. И. Гливенко [55], С. К. Клини [8], Г. Генценом [49, 50], А. А. Марковым [17, 18, 19, 20, 74] и другими.

Ограничение сферы действия закона исключённого третьего, предложенного Л. Э. Я. Брауэром, значительно сокращало спектр способов рассуждения, традиционно используемых в математике, и потому вызвало резкую оппозицию со стороны Д. Гильберта. По его словам, никто «не удержит людей от того, чтобы отрицать любые утверждения, образовывать частичные суждения и применять закон исключённого третьего» [6]. А. Н. Колмогоров поставил перед собой цель примирить взгляды Д. Гильберта и Л. Э. Я. Брауэра и объяснить интуиционистское направление с точки зрения классической математики. А. Н. Колмогоров предложил истолкование интуиционистского исчисления в рамках стандартных математических понятий. По его замыслу, интуиционистская математика укладывается в рамки классической, если интерпретировать высказывания интуиционистской логики как задачи [10]. При этом законы интуиционистской логики принимают наглядный смысл, достаточно согласованный с нашей интуицией. В комментарии к своему собранию сочинений [10]

А. Н. Колмогоров заметил, что «исчисление задач по форме совпадает с брауэровской интуиционистской логикой, недавно формализованной Гейтингом». Следуя А. Н. Колмогорову, в математике «решение задач должно рассматриваться как её самостоятельная цель». В комментарии к этому же собранию сочинений [10] А. Н. Колмогоров отмечает, что его работа «писалась в надежде на то, что логика решения задач сделается со временем постоянным разделом курса логики. Предполагалось создание единого логического аппарата, имеющего дело с объектами двух типов — высказываниями и задачами».

Однако А. Н. Колмогоров не дал точного объяснения понятий «задача» и «решение задачи». Позже были предложены различные уточнения этих понятий. Одно из них — семантика реализуемости Клини, в которой «задача» представляет собой арифметическую формулу, а «решениями задач» (или «реализациями») являются натуральные числа, кодирующие алгоритмы решения соответствующих задач [70, 8]. При этом все теоремы интуиционистского исчисления предикатов являются реализуемыми [80], однако уже на уровне логики высказываний существуют примеры реализуемых, но интуиционистски не доказуемых формул [83]. Реализуемость стала мощным методом исследования интуиционистских и конструктивных теорий. После С. К. Клини были предложены другие виды реализуемости, в частности, примитивно рекурсивная реализуемость [47], минимальная реализуемость [48], абсолютная реализуемость [28], арифметическая реализуемость [12, 13], гиперарифметическая реализуемость [11], общерекурсивная реализуемость [14] и т.д. Н. К. Верещагин, Д. П. Скворцов, Е. З. Скворцова и А. В. Чернов предложили несколько вариантов слабой реализуемости и показали, что все эти ослабления приводят к одной и той же конечно аксиоматизируемой логике — а именно, интуиционистской логике, расширенной слабым законом исключённого третьего $(\neg p \vee \neg\neg p)$ [2].

Г. Джапаридзе рассматривал иной подход, связывающий интуиционистское исчисление и алгоритмическую разрешимость — игровую семантику [63], [68]. По его замыслу, понятие статической игры представляет собой формализацию интерактивной компьютерной задачи, а понятие выигрышной стратегии в такой игре — формализацию алгоритмической разрешимости этой задачи. Как было показано Г. Джапаридзе, интуиционистская логика предикатов полна относительно игровой семантики [65], [66], [67]. Кроме того, получающаяся при этом логика вычислений является консервативным расширением классической логики предикатов [68].

Другие уточнения понятия задачи были предложены Ю. Т. Медведевым, который в частности ввёл в рассмотрение логику финитных задач [22, 23, 24, 25]. Исследование логики финитных задач и её связи с реализуемостью и интуиционистской выводимостью было продолжено в том числе Д. П. Скворцовым [31, 32], В. Е. Плиско [27] и другими. Вопросы об аксиоматизации логики финитных задач и её алгоритмической разрешимости на сегодняшний день остаются открытыми. Однако Л. Л. Максимова, Д. П. Скворцов и В. Б. Шехтман установили, что эта логика не является аксиоматизируемой множеством формул, содержащих в совокупности конечное число переменных (и, следовательно, не является конечно аксиоматизируемой) [16].

Ю. Т. Медведев предложил также иной подход к уточнению понятия «задача»: так называемые «массовые проблемы» [21]. Идея понятия «массовой проблемы» заключалась в том, что каждая задача представляет собой задачу «поиска» или «вычисления» некоторой функции, определённой на натуральных числах и принимающей натуральные значения. При таком подходе каждой массовой проблеме соответствует некоторая степень трудности, а над степенями трудности естественным образом определяются логические связки. Ю. Т. Медведев установил, что исчисление массовых проблем является интерпретацией интуиционистского исчисления высказываний. Исследование массовых проблем было продолжено А. А. Мучником, который ввёл в рассмотрение понятие слабой сводимости (сводимости Мучника) и установил, что получающееся при этом исчисление слабых степеней также является интерпретацией интуиционистского исчисления высказываний [26]. С. С. Басу и С. Г. Симпсон путём рассмотрения понятия топоса Мучника распространили интерпретацию А. А. Мучника интуиционистского исчисления высказываний на интуиционистскую логику в целом [41].

К. Гёдель предложил понимать интуиционистские высказывания как задачи на доказуемость. Он рассматривал логику S4, являющуюся расширением классической логики дополнительной модальностью $\Box$, и построил перевод интуиционистской логики в логику S4 [56]. Однако К. Гёдель не предложил интерпретации понятия "доказуемости" — в частности, в логике S4 отсутствуют объекты, понимаемые как “доказательства”. С. Н. Артёмов развил идею К. Гёделя, рассматривая логику доказуемости LP, в которой имеются явные термы доказуемости [35], [36]. В некотором смысле, логика LP содержит все теоремы логики S4, но вместе с тем логика LP обладает гораздо более широкими выразительными возможностями. С другой стороны, логика LP допускает интерпретацию оператора доказуемости в смысле доказуемости в арифметике Пеано [36].

Логика QHC, изучаемая в настоящей работе, была введена в рассмотрение С. А. Мелиховым [77], [78]. В этой логике каждая формула имеет один из двух сортов: высказывание либо задача. Формулы сорта высказывание представляют собой «классическую часть» логики QHC — а именно, для них выполнены все законы классической логики. Формулы сорта задача представляют собой «интуиционистскую часть» логики QHC — для них выполнены все законы интуиционистской логики. Как было показано С. А. Мелиховым [77], логика QHC является консервативным расширением и классической логики предикатов, и интуиционистской логики предикатов. Логика С. А. Мелихова не даёт новых интерпретаций понятия “задачи”, но выявляет некоторые ранее не исследованные механизмы, связанные с одновременным рассмотрением задач и высказываний. Таким образом, естественно возникает более богатый язык (со связками типа модальностей).

Формулы сорта высказывание и сорта задача в логике QHC связаны между собой двумя модальностями ? и !. Применив модальность ! к формуле сорта высказывание p, мы получим формулу сорта задача $!p$, которую можно неформально понимать как «доказать высказывание p». Таким образом, истинность формулы p означает истинность высказывания p, понимаемого классическим образом, в то время как истинность формулы $!p$ означает разрешимость задачи построения доказательства высказывания p (при этом мы не рассматриваем отдельно и не уточняем смысл понятия «доказательство»). Применив модальность ? к формуле сорта задача α, мы получим формулу сорта высказывание $?\alpha$, которую можно понимать как «задача α имеет решение». Таким образом, истинность формулы α означает разрешимость задачи α, а истинность формулы $?\alpha$ понимается как утверждение о существовании решения задачи α, в котором квантор существования понимается классическим образом. Если определить предпорядок на формулах логики QHC стандартным образом, то окажется, что модальности ? и ! образуют на этом множестве связь Галуа [77].

Комбинируя модальности ! и ? логики QHC, можно получить производные модальности. Модальность ?!, обозначаемую как $\Box$, применённую к формуле высказывание p, можно понимать как высказывание «существует доказательство высказывания p», или же «p доказуемо». Модальность !?, обозначаемую как ∇, применённую к формуле сорта задача α, можно понимать как задачу «доказать, что задача α имеет решение». Дальнейшее итерирование базовых модальностей ! и ? не даёт ничего нового, поскольку в логике QHC доказуемы формулы $!p \leftrightarrow !?!p$ и $?\alpha \leftrightarrow ?!?\alpha$ [77].

Формула $\Box p$ имеет сорт высказывание. Модальность $\Box$ соответствует следующей интерпретации понятия знания об истинности высказывания: существует решение конструктивной задачи — построения доказательства этого высказывания, причём "существование" понимается не в конструктивном, а в классическом смысле. Как будет показано ниже, для этой модальности $\Box$ имеет место аксиома рефлексии, в то время как оператор доказуемости, рассматриваемый, например, в арифметике Пеано, не удовлетворяет этой аксиоме. Подобный подход к понимаю оператора доказуемости утверждений, удовлетворяющий аксиоме рефлексии, прослеживается в работах К. Гёделя [56], С. Н. Артёмова [35, 36] и Г. Джапаридзе и Д. Де Йонга [61].

Формула $\nabla\alpha$ имеет сорт задача. Модальность ∇ соответствует следующей интерпретации: $\nabla\alpha$ — это задача, для решения которой требуется привести классическое доказательство существования решения задачи α. Модальность ∇ удовлетворяет аксиоме не рефлексии, а корефлексии, в отличие от модальности $\Box$. Различные системы интуиционистской логики с модальностью знания, удовлетворяющей аксиоме корефлексии, исследовали С. Н. Артёмов и Т. Протопопеску [38], [39]. Они отмечали, что возможным пониманием интуиционистской модальности знания в ВНК-интерпретации может быть "A имеет доказательство, не обязательно явно выписанное в процессе этой проверки".

Основываясь на аксиомах и правилах вывода логики QHC, несложно доказать (см., например, [77]), что модальность $\Box$ удовлетворяет следующим принципам:

($1^{\Box}$) $\Box p \to p$;

($2^\Box$) $\Box p \to \Box\Box p$;

($3^\Box$) $\dfrac{p}{\Box p}$;

($4^\Box$) $\Box(p \to q) \to (\Box p \to \Box q)$.

Модальность ∇ удовлетворяет следующим принципам:

(1^∇) $\alpha \to \nabla\alpha$;

(2^∇) $\nabla\nabla\alpha \to \nabla\alpha$;

(3^∇) $\nabla\bot \to \bot$;

(4^∇) $\nabla(\alpha \to \beta) \to (\nabla\alpha \to \nabla\beta)$.

Аксиомы и правила вывода ($1^\Box$) – ($4^\Box$) в классической логике предикатов с модальностью $\Box$ образуют логику QS4 (это предикатный вариант логики S4). В [77] было показано, что логика QHC — консервативное расширение логики QS4. Аксиомы (1^∇) – (4^∇) в интуиционистской логике предикатов с модальностью ∇ образуют логику, названную С. А. Мелиховым в [77] логикой QH4.

Интуиционистская модальная логика, содержащая аксиомы (1^∇), (2^∇) и (4^∇), впервые возникла в работе Р. Голдблатта [58], который исследовал логику оператора локализации на топосе. Оператор на гейтинговой алгебре с аналогичными свойствами также возник в работе А. Г. Драгалина [7], который называл его «оператором пополнения» (для таких операторов в англоязычной литературе закрепился термин «nucleus»). Впоследствии эта логика была переоткрыта М. Фэтлоу и М. Мендлером и получила название «lax logic». В статье [51] был изучен пропозициональный вариант PLL, [52] — предикатный вариант QLL этой логики. При добавлении аксиомы (3^∇) рассматриваемая логика называется, соответственно, PLL^+ или QLL^+. В работе [52] построены модели типа Крипке для логик QLL и QLL^+. Эти модели имеют достаточно сложную структуру: они содержат непустое множество возможных миров, два отношения достижимости, отображение, сопоставляющему миру некоторое подмножество миров, а также множество «миров, подверженных ошибкам» (только для логики QLL).

Изучением логики QLL занимался также П. Акцель [33], ещё один тип семантики QLL был построен Р. Голдблаттом [59], Д. Рогозин исследовал лямбда-исчисление, связанное с этой логикой и некоторыми другими близкими к ней логиками [82].

С. Артёмов и Т. Протопопеску провели глубокий анализ интуиционистской логики с модальностью знания **K** и построили три формальные системы IEL^-, IEL и IEL^+ [38], [39]. Системы IEL и IEL^+ оказались совпадающими, соответственно, с логиками PLL и PLL^+. В работе [38] построены различные типы семантик типа Крипке для систем IEL^-, IEL и IEL^+, для которых имеет место теорема о полноте. Один из типов семантик логики IEL^+ — модели Крипке с отмеченными мирами — лежит в основе семантики логики QHC, изучаемой в настоящей работе. В. Н. Крупским рассмотрена топологическая семантика логик IEL и IEL^+ [15].

В работе Й. Су и К. Сано [85] изучена семантика типа Крипке предикатных вариантов логик IEL^- и IEL — логик QIEL^- и QIEL. В этой работе была доказана теорема о полноте обеих логик QIEL^- и QIEL относительно семантики типа Крипке. Метод работы [85] основывался на построении исчисления секвенций для этих логик и рассмотрения множества насыщенных секвенций в качестве модели Крипке. В настоящей работе теорема о полноте логики QIEL^+ (эту логику С. А. Мелихов обозначал как QH4) доказывается иным способом: а именно, рассмотрением интуиционистских насыщенных теорий. Это доказательство близко к доказательству теоремы о полноте пропозициональной логики IEL^+ относительно семантики Крипке [38].

Было сделано множество попыток связать классическую и интуиционистскую логику, т.е. исчисление высказываний и исчисление задач. Это, в частности, линейная логика Ж.-И. Жирара [53], [54], логика вычислений Г. Джапаридзе [62, 64, 66, 69], логика Лианга–Миллера [72], [73]. Они сочетают в себе и классические, и интуиционистские черты, но, в отличие от логики QHC, рассматриваемой в настоящей работе, не содержат явного разделения на задачи и высказывания и поэтому довольно далеки от нее. В работе [43] изучалась логика LRC, “логика ресурсов и возможностей”. В этой логике имеется два сорта переменных, формулы тех же двух сортов и связки, часть из которых переводит формулы одного сорта в формулы того же сорта, а остальные связывают между собой формулы разных сортов. Логика LRC так же, как и логика QHC, двухсортна, но эти две логики значительно отличаются друг от друга. Для доказательства алгебраической полноты логики LRC строятся “двухсортные” алгебры, и для них используется стандартная техника Линденбаума–Тарского. Ниже в настоящей работе применен тот же прием для доказательства полноты логики HC относительно HC-алгебр.

Степень разработанности темы

Логика QHC была введена в 2013 году С. А. Мелиховым [77] и в дальнейшем изучалась в ряде работ (см. [77], [78], [79]). Система QHC вдохновлена неформальным исчислением задач А. Н. Колмогорова и лежит в русле исследований конструктивной семантики Брауэра-Гейтинга-Колмогорова [10], [9], [5], [88], [71], [75], [8], [37], [1], [56], [57], [70], [22], [23], [24], [25] [90], [92], [39].

С. А. Мелихов построил [77] несколько синтаксических интерпретаций логики QHC: $\square$–интерпретация логики QHC в логику QS4, ∇–интерпретация логики QHC в себя, $\neg\neg$–интерпретация логики QHC в интуиционистскую логику, $\Diamond$–интерпретация логики QHC в себя. Используя эти интерпретации, С. А. Мелихов получил следующий результат: логика QHC является консервативным расширением классической логики предикатов, интуиционистской логики предикатов и логики QS4 (предикатного варианта логики S4).

В работе [78] С. А. Мелихов предложил несколько типов топологических моделей логики QHC. Модели одного из типов, названные С. А. Мелиховым моделями Эйлера–Тарского, интерпретируют формулы сорта высказывание как произвольные подмножества некоторого топологического пространства X, а формулы сорта задача — как открытые подмножества X. Модальность ! соответствует оператору взятия внутренности, а модальность ? интерпретируется тождественным образом. Модели второго типа, названные С. А. Мелиховым моделями Тарского–Колмогорова, интерпретируют формулы сорта высказывание как регулярные открытые подмножества топологического пространства X, формулы сорта задача — как открытые подмножества X. Модальность ! интерпретируется тождественным образом, а модальность ? соответствует оператору взятия внутренности замыкания. Несложно доказать, что логика QHC неполна относительно моделей таких двух типов (см. [78]). Модели третьего типа строятся на основе понятия пучка (см. [79]) и уже нетождественно интерпретируют обе модальности. Однако эта семантика также оказалась неполной, причем даже для пропозиционального фрагмента логики QHC.

Кроме того, в [78] С. А. Мелихов приводит аксиоматизацию элементарной геометрии Тарского, формализованную в рамках QHC, и аргументирует это тем, что сам Евклид рассматривал постулаты и аксиомы (то есть явно разделял высказывания и задачи). На основе логики QHC становится возможным более ясно описать логическую структуру теории Евклида и избавиться от скрытых гипотез и возникающих из них парадоксов. Показано, что построенная С. А. Мелиховым теория содержит (в некотором точном смысле) элементарную геометрию Тарского [87] как классическую часть и конструктивную версию геометрии Тарского, предложенную М. Бисоном [42] как интуиционистскую часть.

В настоящей работе исследования, касающиеся логики QHC, продолжены.

Цели и задачи исследования

Основным объектом исследования является логика QHC. Мотивацией для изучения этой логики послужила её отличительная особенность, не встречавшаяся ранее в других логиках: комбинирование классического и интуиционистского исчислений при помощи двух модальностей. Таким образом, целями работы были исследование свойств логики QHC (в частности, алгоритмической разрешимости её пропозиционального фрагмента) и построение полной семантики этой логики.

Научная новизна

Научная новизна диссертационной работы характеризуется следующими результатами.

1. Построена алгебраическая семантика логики HC.

2. Установлена теорема о полноте и свойство конечных моделей для семантики типа Крипке с двумя множествами миров логики HC, введённой в работе.

3. На основе шкал Крипке с отмеченными мирами интуиционистской эпистемической логики IEL^+ построены более удобные модели логики HC. Поль-

зуясь такими моделями, удалось определить топологическую семантику логики HC, для которой имеет место теорема о полноте.

4. Доказана теорема о сильной полноте логики QHC для семантики Крипке с отмеченными мирами. Показано, что логика QHC является консервативным расширением логики QH4. Установлены дизъюнктивное и экзистенциальное свойства логики QHC для формул сорта задача.

Все полученные результаты являются новыми и вносят вклад в исследования в изучаемой области.

Теоретическая и практическая значимость

Диссертация носит теоретический характер. Полученные в работе результаты представляют интерес для специалистов в таких областях, как математическая логика и теоретическая информатика.

Методология и методы исследования

В диссертации использовались методы математической логики, неклассических логик, топологии.

Положения, выносимые на защиту

На защиту выносятся: обоснование актуальности, научная значимость работы, а также следующие положения.

1. Алгебраическая семантика логики HC — пропозиционального фрагмента логики QHC. Теорема о полноте логики HC относительно этой семантики.

2. Определение семантики Крипке с двумя множествами миров логики HC. Для этой семантики имеет место теорема о полноте и свойство конечных моделей. Проблема выводимости в логике HC алгоритмически разрешима. Получен ответ на вопрос, поставленный С. А. Мелиховым, о соотношении ED-принципа и PC-правила.

3. Теорема о полноте логики HC относительно семантики Крипке с отмеченными мирами. Определение топологической семантики логики HC на

основании семантики Крипке с отмеченными мирами. Теорема о полноте логики HC относительно топологической семантики.

4. Определение семантики типа Крипке логики QHC. Теорема о полноте логики QHC относительно этой семантики. Логика QHC является консервативным расширением логики QH4. Выполнены дизъюнктивное и экзистенциальное свойства логики QHC.

Апробация работы

Результаты и положения диссертации докладывались и обсуждались на следующих конференциях и семинарах:

1. Научно-исследовательский семинар «Современные проблемы математической логики»(Москва, НИУ ВШЭ, 9 ноября 2018 года).

2. Семинар «Теория доказательств» (Москва, МИАН имени В. А. Стеклова РАН, 16 марта 2020 года и 21 февраля 2022 года).

3. Международная научная конференция студентов, аспирантов и молодых ученых «Ломоносов» (Москва, МГУ, 2019, 2020).

4. Международная конференция «Смирновские чтения по логике» (Москва, МГУ, 2019, 2021).

5. Международная конференция «Мальцевские чтения» (Новосибирск, ИМ им. С. Л. Соболева СО РАН и НГУ, 2019).

6. Конференция «Logical Perspectives 2021: Summer School and Workshop» (Москва, МИАН имени В. А. Стеклова РАН, 2021).

7. Семинар «Вычислимость и неклассические логики» под руководством В. Н. Крупского, В. Е. Плиско и А. Ю. Коновалова (Москва, МГУ, 25 октября 2021 года).

8. XII Международная научная конференция «Интеллектуальные системы и компьютерные науки» (Москва, МГУ, 2021).

9. Всероссийская научная конференция «Математические основы информатики и информационно-коммуникационных систем» (Тверь, 2021).

Публикации

Соискатель имеет 8 опубликованных работ, в том числе 8 статей по теме диссертации [93, 94, 95, 96, 97, 98, 99, 100]. Основные результаты диссертации содержатся в 3 работах [93, 94, 95], опубликованных в рецензируемых научных изданиях, индексируемых в базах данных Web of Science, Scopus, RSCI, рекомендованных для защиты в диссертационном совете МГУ по специальности 1.1.5 — «математическая логика, алгебра, теория чисел и дискретная математика» (01.01.06 — «математическая логика, алгебра и теория чисел»).

Структура и объём диссертационной работы

Диссертация состоит из введения, четырёх глав, заключения и списка использованной литературы. Полный объём диссертации — 94 страницы, список литературы содержит 100 наименований. Используется двойная нумерация определений, теорем, лемм, утверждений и замечаний. Первое число означает название главы, а второе — номер внутри главы.

Содержание работы

Во введении даётся общая характеристика работы, постановки задач, цели работы и обосновывается её актуальность. Кроме того, приводится обзор результатов, полученных ранее другими авторами по теме диссертации и смежным направлениям исследований, а также кратко излагается содержание её глав.

В главе 1 сначала вводится определение формулы логики HC и приводится список аксиом и правил вывода этой логики. Указаны некоторые формулы, являющиеся теоремами логики HC. Далее приведено определение формулы логики QHC в языке без функциональных символов и указаны аксиомы и правила вывода этой логики. Затем продемонстрирована связь логики QHC с известной логикой S4, а также с интуиционистской эпистемической логикой H4. Наконец, рассмотрены модели Крипке с отмеченными мирами логики H4 и сформулирован результат С. Н. Артёмова и Т. Протопопеску [38] о полноте логики H4 относительно этих моделей.

В главе 2 исследуется семантика логики HC. В начале главы приведена алгебраическая семантика логики HC. При помощи стандартной техники рассмотрения алгебры Линденбаума доказана следующая теорема.

Теорема 2.1 ([93])**.** Любая теорема логики HC истинна в любой HC-алгебре; любая формула, невыводимая в логике HC, опровергается на некоторой HC-алгебре.

Далее рассматривается семантика Крипке с двумя множествами миров логики HC. В мирах одного из этих множеств X могут быть истинны или ложны формулы сорта высказывание логики HC, а в мирах другого множества W могут быть истинны или ложны формулы сорта задача логики HC. Кроме того, на множестве W определён частичный порядок, а также имеются два отношения $R_? \subseteq X \times W$ и $R_! \subseteq W \times X$, удовлетворяющие определённым свойствам. Путём индукции по выводу формулы доказана следующая теорема.

Теорема 2.2 ([93])**.** Все теоремы логики HC (т.е. формулы, выводимые в HC) истинны в любом классическом (интуиционистском) мире любой модели Крипке логики HC.

Затем в этой главе проводится доказательство теоремы о полноте логики HC относительно семантики Крипке с двумя множествами миров. В леммах 2.3–2.6 установлены вспомогательные утверждения, описывающие метод построения контрмодели Крипке с двумя множествами миров для конкретной формулы, невыводимой в логике HC, на основе которых доказана следующая теорема.

Теорема 2.3 ([93])**.** Для любой формулы φ, не выводимой в логике HC, существуют конечная HC-шкала и ее мир, в котором будет ложна формула φ.

В конце главы доказано дизъюнктивное свойство интуиционистской части логики HC, а также получен ответ на вопрос, поставленный С. А. Мелиховым [78]: верно ли, что PC-правило влечёт ED-принцип?

Теорема 2.4 ([93])**.** Если $\mathrm{HC} \vdash \alpha \vee \beta$, то $\mathrm{HC} \vdash \alpha$ или $\mathrm{HC} \vdash \beta$.

Теорема 2.5 ([93]). В логике HC + PC невыводим ED-принцип

$$\neg(\alpha \wedge \beta) \to (!?(\alpha \vee \beta) \to !?\alpha \vee !?\beta).$$

В главе 3 изучается семантика логики HC, построенная на основе шкал Крипке с отмеченными мирами, возникшими в работе [38] для интуиционистской эпистемической логики H4. Опираясь на теорему о полноте логики H4 относительно моделей Крипке с отмеченными мирами, доказанную в работе [38], а также на теорему о полноте логики HC относительно моделей Крипке с двумя множествами миров, доказанную в главе 2, была доказана следующая теорема.

Теорема 3.1 ([93]). Логика HC — консервативное расширение логики H4.

Далее вводится определение моделей Крипке с отмеченными мирами логики HC. Используя теоремы о корректности и полноте логики HC относительно моделей Крипке с двумя множествами миров, доказанные в главе 2, были установлены две следующие теоремы.

Теорема 3.2 ([93]). Все формулы, выводимые в логике HC, истинны в любом мире любой модели Крипке с отмеченными мирами.

Теорема 3.3 ([93]). Для любой формулы, не выводимой в логике HC, существует конечная модель Крипке с отмеченными мирами, в некотором мире которой эта формула ложна.

В конце главы рассматриваются модели логик HC и H4, основанные на понятии топологического пространства с выделенным в нём всюду плотным подмножеством. При помощи техники рассмотрения александровской топологии для данного предпорядка, а также установленных ранее в этой главе результатов доказаны следующие теоремы.

Теорема 3.4 ([95]). Если формула выводима в логике HC, то она истинна в любой топологической модели логики HC.

Теорема 3.5 ([95]). Если формула φ невыводима в логике HC, то существует топологическая модель логики HC, в которой формула φ не является истинной.

Теорема 3.6 ([95]). Если формула выводима в логике H4, то она истинна в любой топологической модели логики H4.

Теорема 3.7 ([95]). Если формула φ невыводима в логике H4, то существует топологическая модель логики H4, в которой формула φ не является истинной.

В главе 4 исследуется семантика логик QHC и QH4 — предикатных вариантов логик HC и H4. Приводится определение вывода и слабого вывода из гипотез в логике QHC. Для слабого вывода установлена следующая теорема о дедукции.

Теорема 4.1 ([94]). Пусть Γ — некоторое множество формул, Φ, Ψ — формулы одного сорта. Пусть $\Gamma \cup \{\Phi\} \vdash \Psi$. Тогда $\Gamma \vdash \Phi \to \Psi$.

В леммах 4.1–4.6 отмечены вспомогательные утверждения, отражающие связь между выводимостью и слабой выводимостью из гипотез в логике QHC.

Далее в главе определяются модели Крипке с отмеченными мирами логики QHC, для которых индукцией по выводу доказывается следующая теорема о корректности.

Теорема 4.2 ([94]). Если замкнутая формула языка Ω выводима в логике QHC, то она истинна в любой модели Крипке для языка Ω.

В леммах 4.8–4.11 установлены промежуточные шаги построения модели Крипке с отмеченными мирами непротиворечивой теории логики QHC. На основе этих лемм были доказаны следующие теоремы, утверждающие полноту логики QHC относительно описываемой семантики.

Теорема 4.3 ([94]). Если M–насыщенная теория Γ языка L_M является рефлексивной, то существует модель Крипке $\mathscr{K} = (W, \preccurlyeq, \mathrm{Aud}, D, \models)$ с отмеченными мирами и её отмеченный мир x такие, что для любой формулы α сорта задача языка L_M выполнено $x \models \alpha \Leftrightarrow \alpha \in \Gamma$, а для любой формулы p сорта высказывание языка L_M выполнено $x \models p \Leftrightarrow p \in \Gamma$.

Теорема 4.4 ([94]). Для любой непротиворечивой теории Γ логики QHC существует модель Крипке $\mathscr{K}$ и её отмеченный мир x такие, что в этом мире данной модели $\mathscr{K}$ истинны все формулы из Γ.

Теорема 4.5 ([94]). Если формула A сорта задача (сорта высказывание) языка Ω истинна в любом мире (отмеченном мире) любой модели Крипке с отмеченными мирами для языка Ω, то A выводима в логике QHC.

Использованием подобной техники были установлены следующие теоремы о корректности и полноте логики QH4 относительно семантики Крипке с отмеченными мирами.

Теорема 4.6 ([94]). Если замкнутая формула языка Ω выводима в логике QH4, то она истинна в любой модели Крипке логики QH4 для языка Ω.

Теорема 4.7 ([94]). Если множество формул Γ языка L_M является M–насыщенной теорией, то существует модель Крипке $\mathscr{K} = (W, \preccurlyeq, \mathrm{Aud}, D, \models)$ с отмеченными мирами логики QH4 такая, что для любой формулы A языка L_M выполнено $\forall x \in W \; x \models A \Leftrightarrow A \in \Gamma$.

Теорема 4.8 ([94]). Для любого непротиворечивого множества формул Γ логики QH4 существует модель Крипке $\mathscr{K}$ логики QH4 такая, что в любом мире модели $\mathscr{K}$ истинны все формулы из Γ.

Путём использования семантики Крипке с отмеченными мирами логик QHC и QH4 были доказаны следующие теоремы.

Теорема 4.9 ([94]). Логика QHC — консервативное расширение логики QH4.

Теорема 4.10 ([94]). Если сигнатура Ω содержит хотя бы одну константу, то логика QHC (в этой сигнатуре) обладает дизъюнктивным и экзистенциональным свойствами.

Теорема 4.11 ([94]). Логика QHC в любой сигнатуре Ω обладает дизъюнктивным свойством.

В заключении систематизируются полученные результаты, касающиеся объединённой логики задач и высказываний, и характеризуются возможные направления дальнейших исследований.

Благодарности

Автор выражает благодарность своему научному руководителю, академику РАН, доктору физико-математических наук Беклемишеву Льву Дмитриевичу за постановки задач, а также помощь и поддержку при работе над диссертацией.

Глава 1

Основные определения и известные результаты

1.1 Логика HC

Пропозициональная логика HC — двухсортная логика, каждая пропозициональная переменная которой имеет один из двух сортов — сорт высказывание или сорт задача. Множество переменных сорта высказывание будем обозначать VarProp, а множество переменных сорта задача – VarProb. Каждая формула логики HC также имеет один из этих двух сортов. Будем обозначать формулы сорта высказывание (классические формулы) строчными латинскими буквами $p, q, \dots$, а формулы сорта задача (интуиционистские формулы) – строчными греческими буквами $\alpha, \beta, \dots$.

Формулы логики HC строятся из переменных с помощью стандартных классических и интуиционистских связок $\wedge$, $\vee$, $\to$, $\leftrightarrow$, $\neg$ и модальностей ? и !. Булевы связки применяются к формулам одного сорта и не меняют сорт формул: например, $p \wedge q$ – формула сорта высказывание, $\neg\alpha$ – формула сорта задача, а $p \vee \alpha$ – бессмысленная запись, не являющаяся формулой. Мы будем одинаково записывать классические и интуиционистские связки, хотя, вообще говоря, это разные операторы, применяемые к разным формулам и подчиняющиеся разным аксиомам. Тем не менее такая вольность допустима, поскольку из контекста всегда понятно, какая связка применяется (классические связки могут быть применены только к классическим формулам, а интуиционистские –

только к интуиционистским). Мы будем по-разному обозначать классические и интуиционистские константы: 0 и 1 – это классические ложь и истина, а $\bot$ и $\top$ – интуиционистские. Можно считать, что среди перечисленных связок и констант некоторые являются сокращениями других: $\alpha \leftrightarrow \beta$ – сокращение записи $(\alpha \to \beta) \wedge (\beta \to \alpha)$; $\neg\alpha$ – сокращение $\alpha \to \bot$ (то же самое для классических $\leftrightarrow$ и $\neg$); $\top$ и 1 – сокращение $\neg\bot$ и $\neg 0$ соответственно.

Модальности ? и ! меняют сорт формулы. Модальность ! применяется к формулам сорта высказывание, на выходе мы получаем формулу сорта задача. Неформально говоря, задача $!p$ – это “найди доказательство высказывания p”. Модальность ? применяется, наоборот, к формулам сорта задача, на выходе мы получаем формулу сорта высказывание. Неформально говоря, высказывание $?\alpha$ – это “существует решение задачи α”.

Аксиомы и правила вывода логики HC делятся на следующие три группы.

Группа I. Все аксиомы и правила вывода классической пропозициональной логики. В схемы аксиом вместо переменных VarProp можно подставлять любые формулы сорта высказывание (возможно, содержащие модальности ? и !).

Группа II. Все аксиомы и правила вывода интуиционистской пропозициональной логики. В схемы аксиом вместо переменных VarProb можно подставлять любые формулы сорта задача (возможно, содержащие модальности ? и !).

Группа III. Дополнительные аксиомы (точнее, схемы аксиом) и правила вывода, перечисленные ниже:

1) $!(p \to q) \to (!p \to !q)$;
2) $?(\alpha \to \beta) \to (?\alpha \to ?\beta)$;
3) $\dfrac{p}{!p}$;
4) $\dfrac{\alpha}{?\alpha}$;
5) $?!p \to p$;
6) $\alpha \to !?\alpha$;
7) $\neg\, !0$.

Правила вывода под номерами 3 и 4 называются *правилами усиления.*

Введение этих аксиом мотивировано BHK-интерпретацией интуиционистской логики (см. [88], [89], [71], [75], [8],[77], [78], [79]), а также гёделевым переводом интуиционистской логики в классическую модальную логику S4 (см.

[57]).

Следующее утверждение доказано в [77].

Утверждение 1.1. *В* HC *выводимо:*

1) $?(\alpha \wedge \beta) \leftrightarrow (?\alpha \wedge ?\beta)$*;*

2) $?(\alpha \vee \beta) \leftrightarrow (?\alpha \vee ?\beta)$*;*

3) $\neg ?\bot$ *(задача* $\bot$ *не имеет решения);*

4) $(!p \wedge !q) \leftrightarrow !(p \wedge q)$*;*

5) $(!p \vee !q) \to !(p \vee q)$*;*

6) $!?!p \leftrightarrow !p$*;*

7) $?!?\alpha \leftrightarrow ?\alpha$*.*

Замечание 1.1. В изначальной формулировке логики HC формулы 1)–3) присутствовали как аксиомы, но позже С. А. Мелихов заметил их выводимость из остальных аксиом и правил вывода логики HC. Поэтому мы приводим аксиоматику HC без этих аксиом.

1.2 Логика QHC

Сигнатура Ω логики QHC состоит из множества константных символов $\mathcal{C}$ и двух множеств предикатных символов: PredProp — множество предикатных символов сорта высказывание и PredProb — множество предикатных символов сорта задача; язык логики QHC с сигнатурой Ω будем называть языком Ω. Каждому предикатному символу приписывается натуральное число, которое обозначает его валентность. Будем обозначать предикатные символы сорта высказывание строчными латинскими буквами $(p(x, y, z), q(x), \ldots)$, а предикатные символы сорта задача — строчными греческими буквами $(\alpha(x), \beta(x, y), \ldots)$. Так же будем обозначать формулы логики QHC соответствующих сортов. Формулы неизвестного сорта будем обозначать заглавными греческими буквами: $A, B, \Phi, \Psi, \ldots$. Для простоты рассматриваем логику QHC в языке без функциональных символов, а лишь с предикатными и константными.

Термами QHC являются индивидные переменные $x_1, x_2, \ldots$ и константы $c_1, c_2, \ldots$ (они ни к какому сорту не принадлежат — интуитивно можно считать, что это «объекты», которые могут встречаться в формулировках высказываний и задач).

Приведём определение формулы логики QHC.

1. Если p (φ) — предикатный символ сорта высказывание (задача) валентности n, $t_1, \ldots, t_n$ — термы, то $p(t_1, \ldots, t_n)$ ($\varphi(t_1, \ldots, t_n)$) — формула сорта высказывание (задача). Такие формулы называются атомарными.

2. 0 — формула сорта высказывание, $\perp$ — формула сорта задача.

3. Если p, q — формулы сорта высказывание, то $p \wedge q, p \vee q, p \to q, \exists x p, \forall x p$ — формулы сорта высказывание.

4. Если α, β — формулы сорта задача, то $\alpha \wedge \beta, \alpha \vee \beta, \alpha \to \beta, \exists x \alpha, \forall x \alpha$ — формулы сорта задача.

5. Если p — формула сорта высказывание, то $!p$ — формула сорта задача.

6. Если α — формула сорта задача, то $?\alpha$ — формула сорта высказывание.

(Как уже упоминалось, связки $1, \top, \neg, \leftrightarrow$ можно не рассматривать отдельно и считать сокращениями других.)

Логика QHC является расширением логики HC. Таким образом, в схемы аксиом и правила вывода логики HC можно подставлять любые формулы сорта высказывание (задача), возможно, содержащие кванторы. Кроме того, к аксиомам и правилам вывода логики HC добавляются следующие аксиомы и правила вывода:

8. $\forall v A(v) \to A(t)$

9. $A(t) \to \exists v A(v)$

Предполагается, что в этих двух схемах аксиом подстановки t вместо v корректны. Отметим, что, поскольку A – формула сорта высказывание или сорта задача, то, фактически, мы имеем 4 схемы аксиом.

Правила Бернайса:

10. $\dfrac{A \to B}{A \to \forall x B}$

11. $\dfrac{B \to A}{\exists x B \to A}$

Предполагается, что в этих двух правилах вывода x не является параметром формулы A. Аналогично предыдущему, поскольку A, B – формулы одного сорта, сорта высказывание или сорта задача, мы имеем 4 правила вывода.

1.3 Логики S4 и H4

Комбинируя модальности ! и ? логики QHC, можно получить производные модальности. Модальность ?!, обозначаемую как $\Box$, применённую к высказыванию p, можно понимать как высказывание «существует доказательство высказывания p», или же «p доказуемо». Модальность !?, обозначаемую как ∇, применённую к задаче α, можно понимать как задачу «доказать, что задача α имеет решение». Дальнейшее итерирование базовых модальностей ! и ? не даёт ничего нового, поскольку в логике QHC доказуемы формулы $!p \leftrightarrow !?!p$ и $?\alpha \leftrightarrow ?!?\alpha$ (см. предложение 1.1). В некотором смысле, модальность $\Box$ соответствует классическому пониманию понятия знания об истинности высказывания, а модальность ∇ — интуиционистскому пониманию. Основываясь на аксиомах и правилах вывода логики QHC, несложно доказать (см., например, [77]), что модальность $\Box$ удовлетворяет следующим принципам:

($1^{\Box}$) $\Box p \to p$;

($2^{\Box}$) $\Box p \to \Box\Box p$;

($3^{\Box}$) $\dfrac{p}{\Box p}$;

($4^{\Box}$) $\Box(p \to q) \to (\Box p \to \Box q)$.

Модальность ∇ удовлетворяет следующим принципам:

(1^{∇}) $\alpha \to \nabla\alpha$;

(2^{∇}) $\nabla\nabla\alpha \to \nabla\alpha$;

(3^{∇}) $\nabla\bot \to \bot$;

(4^{∇}) $\nabla(\alpha \to \beta) \to (\nabla\alpha \to \nabla\beta)$.

(Все вышеперечисленные принципы доказуемы и в логике HC).

Аксиомы и правила вывода $(1^{\Box}) - (4^{\Box})$ в классической логике предикатов с модальностью $\Box$ образуют логику QS4 (это предикатный вариант логики S4). В [77] был доказан следующий результат.

Утверждение 1.2. *Логика* QHC — *консервативное расширение классической логики предикатов, интуиционистской логики предикатов, а также логики* QS4.

Аксиомы $(1^{\nabla}) - (4^{\nabla})$ в интуиционистской логике предикатов с модальностью ∇ образуют логику, названную С. А. Мелиховым в [77] логикой QH4.

Логика H4 рассматривалась в работах [38] и [81] (модальность ∇ обозначалась С. Н. Артёмовым и Т. Протопопеску как $\mathbf{K}$, а сама логика была названа *логикой* IEL^{+}). Мотивировка этой системы состояла в интерпретации модальности $\mathbf{K}$ как знания в интуиционистской логике. В работе [38] была построена следующая модель логики H4 (назовем ее *моделью Крипке с отмеченными мирами*).

Рассматриваем четвёрку $(W, \preccurlyeq, \mathrm{Aud}, \models)$, где $(W, \preccurlyeq)$ – стандартная модель Крипке интуиционистской логики высказываний (W – непустое множество, $\preccurlyeq$ – частичный порядок на нём, отношение истинности переменных $\models$ монотонно, истинность формул без ∇ определяется, как обычно), $\mathrm{Aud} \subseteq W$ – множество "отмеченных миров". Кроме того, выполнено следующее свойство:

$$\forall\, a \in W \quad \exists\, b \in W \quad (a \preccurlyeq b \wedge b \in \mathrm{Aud}).$$

Далее, для $a \in W$ определим $a \models \nabla\varphi \Leftrightarrow \forall\, b \in W \ \ (a \preccurlyeq b \wedge b \in \mathrm{Aud} \Rightarrow b \models \varphi)$.

Соответственно, *шкалой Крипке с отмеченными мирами* называется тройка $(W, \preccurlyeq, \mathrm{Aud})$, удовлетворяющая вышеперечисленным свойствам.

Формула называется *истинной в модели Крипке с отмеченными мирами*, если она истинна в каждом мире этой модели.

В [38] был установлен следующий результат.

Утверждение 1.3. *1) Любая теорема логики* H4 *истинна в любой модели Крипке с отмеченными мирами.*

2) Если формула φ истинна во всех моделях Крипке с отмеченными мирами, то H4 $\vdash \varphi$.

Глава 2

Семантика логики HC

Как хорошо известно, алгебраическими моделями классической логики высказываний являются булевы алгебры, а моделями интуиционистской логики — гейтинговы алгебры, причем в обоих случаях имеет место теорема о полноте (см. [30]). В качестве моделей логики HC мы вводим в рассмотрение пары $(\mathscr{B}, \mathscr{H})$: булева алгебра $\mathscr{B}$ и гейтингова алгебра $\mathscr{H}$, причем булева алгебра соответствует классической части логики HC, а гейтингова — интуиционистской. Элементы этих алгебр связаны между собой отображениями, отвечающими обеим модальностям логики HC.

Алгебраическая семантика, несмотря на возможность её рассмотрения для широкого класса логик и простоты доказательства теоремы и полноте, мало что проясняет для конкретно взятой логики и является в некотором смысле «замаскированным синтаксисом». Поэтому возникает необходимость в изучении семантики, основанной на моделях, специфичных для конкретной логики. Для интуиционистской логики одними из самых часто используемых и наглядных типов моделей являются модели Крипке. В частности, моделями классической логики являются шкалы Крипке, в которых никакие два мира не сравнимы (т.е. это просто множества точек). Моделями логики HC являются пары: один элемент пары — шкала Крипке, а второй — некоторое множество. Шкала Крипке и множество связаны двумя отношениями, которые соответствуют модальностям ? и ! логики HC. На эти отношения накладываются ограничения, обеспечивающие корректность HC относительно рассматриваемой семантики.

2.1 Алгебраическая семантика логики HC

Рассмотрим классы эквивалентности задач (высказываний) по отношению эквивалентности $\mathrm{HC} \vdash \alpha \leftrightarrow \beta$ (соответственно $\mathrm{HC} \vdash p \leftrightarrow q$). Эти классы эквивалентности образуют частично упорядоченное множество с порядком $[\alpha] \leqslant [\beta]$, если $\mathrm{HC} \vdash \alpha \to \beta$ (соответственно $[p] \leqslant [q]$, если $\mathrm{HC} \vdash p \to q$). Следующая лемма показывает, что порядок сохраняется при применении обеих модальностей к формулам.

Лемма 2.1. (a) *Если* $\vdash \alpha \to \beta$, *то* $\vdash ?\alpha \to ?\beta$;

(b) *если* $\vdash p \to q$, *то* $\vdash !p \to !q$.

Доказательство. (a) Пусть $\vdash \alpha \to \beta$. Применяя правило вывода 4), получим $\vdash ?(\alpha \to \beta)$. Применяя аксиому 2), получим $\vdash ?\alpha \to ?\beta$.

(b) Применяем последовательно правило вывода 3) и аксиому 1). □

Пусть $\mathscr{B}$ – некоторая булева алгебра, 0 и 1 – ее наименьший и наибольший элементы; $\mathscr{H}$ – гейтингова алгебра, $\bot$ и $\top$ – ее наименьший и наибольший элементы (наибольшие и наименьшие элементы алгебр обозначены точно так же, как истина и ложь в логике HC).

Определение 2.1. HC-*алгеброй* называется четверка $(\mathscr{B}, \mathscr{H}, ?, !)$, где отображения $?\colon \mathscr{H} \to \mathscr{B}$ и $!\colon \mathscr{B} \to \mathscr{H}$ удовлетворяют следующим свойствам:

1) $\forall\, x, y \in \mathscr{B} \quad !(x \to y) \leqslant (!x \to !y)$;

2) $\forall\, a, b \in \mathscr{H} \quad ?(a \to b) \leqslant (?a \to ?b)$;

3) $!1 = \top$;

4) $?\top = 1$;

5) $\forall\, x \in \mathscr{B} \quad ?!x \leqslant x$;

6) $\forall\, a \in \mathscr{H} \quad a \leqslant !?a$;

7) $!0 \to \bot = \top$.

Эти свойства в точности соответствуют дополнительным аксиомам логики HC, касающимся модальностей ? и !. Докажем теорему о корректности и полноте логики HC относительно HC-алгебр.

Теорема 2.1 (о корректности и полноте)**.** *Любая теорема логики* HC *истинна в любой* HC*-алгебре; любая формула, невыводимая в логике* HC*, опровергается на некоторой* HC*-алгебре.*

Доказательство. Корректность очевидна: в булевых (соответственно гейтинговых) алгебрах выполнены все аксиомы и правила вывода классической (соответственно интуиционистской) логики. Дополнительные аксиомы и правила вывода логики HC также выполняются, поскольку условия, налагаемые на HC-алгебры, являются их дословным переписыванием.

Полнота: рассматриваем алгебру Линденбаума логики HC (см. [30]). Носитель булевой алгебры $\mathscr{B}$ – множество формул HC сорта высказывание, факторизованное по отношению эквивалентности $p \sim q \Leftrightarrow \mathrm{HC} \vdash p \leftrightarrow q$ (считаем, что зафиксировано некоторое множество классических и интуиционистских переменных, поэтому класс рассматриваемых формул однозначно определен). Аналогично, носитель гейтинговой алгебры $\mathscr{H}$ – множество формул HC сорта задача, факторизованное по отношению эквивалентности $\alpha \sim \beta \Leftrightarrow \mathrm{HC} \vdash \alpha \leftrightarrow \beta$. Классические и интуиционистские связки определяются, как обычно, при этом получаются булева и гейтингова алгебры (например, $[p] \wedge [q] = [p \wedge q]$, при этом все такие определения будут корректными; см. [30] для подробностей). Модальности определяются естественным образом: $?[\alpha] = [?\alpha]$, $![p] = [!p]$. Данное определение будет корректно, так как по предложению 2.1 из $\alpha \sim \beta$ следует $?\alpha \sim ?\beta$ и из $p \sim q$ следует $!p \sim !q$. Построенная алгебра Линденбаума L, безусловно, является HC-алгеброй. Чтобы доказать полноту логики HC относительно HC-алгебр, рассмотрим некоторую формулу φ, не выводимую в HC, при этом мы полагаем, что все переменные, входящие в φ, лежат в заранее зафиксированном множестве классических и интуиционистских переменных. В силу своей невыводимости φ не будет лежать в классе эквивалентности элемента 1 (если φ – формула сорта высказывание) или $\top$ (если φ – формула сорта задача). Докажем, что тогда φ опровергается на построенной HC-алгебре.

Назовем, следуя [29], *канонической оценкой в алгебре* L такую оценку, при которой каждой переменной p (или α) сопоставляется класс эквивалентности $[p]$ (или $[\alpha]$); обозначим эту оценку f_0. Индукцией по построению формулы несложно доказать, что для любой формулы ψ при такой оценке будет выполнено $f_0(\psi) = [\psi]$. Далее, для любой выводимой в логике HC формулы ψ имеет место $f_0(\psi) = [\text{И}]$ (мы обозначили как И классическую истину 1 или интуиционистскую истину $\top$, в зависимости от того, какой сорт имеет формула ψ), поскольку любая выводимая формула истинна в любой HC-алгебре. Так как $f_0(\varphi) = [\varphi] \neq [\text{И}]$, заключаем, что φ опровергается на построенной HC-алгебре L.

Теорема 2.1 доказана. $\square$

2.2 Семантика Крипке с двумя множествами миров логики HC

Определение 2.2. *Шкалой Крипке с двумя множествами миров логики* HC (HC-*шкалой*) называется пятерка

$$\mathscr{K} = (X, W, \preccurlyeq, R_?, R_!),$$

где X и W — непустые множества, $\preccurlyeq$ — частичный порядок на W, $R_?$ и $R_!$ — два отношения, $R_? \subseteq X \times W$ и $R_! \subseteq W \times X$, удовлетворяющие следующим свойствам:

1) композиция $R_? \circ R_!$ рефлексивна: $\forall\, x \in X \;\; \exists\, a \in W \;\; (xR_?a \wedge aR_!x)$;

2) композиция $R_! \circ R_?$ содержится в $\preccurlyeq$:
$\forall\, x \in X \;\; \forall\, a, b \in W \;\; (aR_!x \wedge xR_?b \Rightarrow a \preccurlyeq b)$;

3) композиция $\preccurlyeq\; \circ R_!$ содержится в $R_!$:
$\forall\, x \in X \;\; \forall\, a, b \in W \; (bR_!x \wedge a \preccurlyeq b \Rightarrow aR_!x)$;

4) $\forall\, a \in W \;\; \exists\, x \in X \;\; aR_!x$.

Напомним, что VarProp – множество переменных сорта высказывание, а VarProb – множество переменных сорта задача.

Определение 2.3. *Моделью Крипке с двумя множествами миров логики* HC называется HC-шкала с оценками переменных $v_X \colon X \times \mathrm{VarProp} \to \{0,1\}$ и $v_W \colon W \times \mathrm{VarProb} \to \{\bot, \top\}$. Для функции v_W предполагается монотонность, т.е. если $v_W(a,\alpha) = \top$ и $a \preccurlyeq b$, то $v_W(b,\alpha) = \top$.

Когда задана HC-шкала и оценки переменных, можно определить истинность любой формулы в данном мире индукцией по построению формулы. При этом формулы сорта высказывание могут быть истинными или ложными только в классической части шкалы $\mathscr{K}$, т.е. в мирах множества X (мы вообще не говорим о том, истинна или ложна формула сорта высказывание в мире из множества W: если $a \in W$, а формула p имеет сорт высказывание, то, например, утверждение $\mathscr{K}, a \models p$ не имеет смысла). Будем называть миры из множества X *классическими.* Соответственно формулы сорта задача могут быть истинными или ложными только в интуиционистской части шкалы $\mathscr{K}$, т.е. в мирах множества W. Будем называть миры из множества W *интуиционистскими.*

Определение 2.4. *Отношение* $\mathscr{K}, t \models A$ *истинности формулы* A в мире t модели $\mathscr{K}$ определим индукцией по построению формулы.

Классические связки. Пусть $x \in X$, p, q – формулы сорта высказывание; тогда:

$\mathscr{K}, x \models p \Leftrightarrow v_X(x,p) = 1$, если $p \in \mathrm{VarProp}$;

$\mathscr{K}, x \models (p \wedge q) \Leftrightarrow (\mathscr{K}, x \models p$ и $\mathscr{K}, x \models q)$;

$\mathscr{K}, x \models (p \vee q) \Leftrightarrow (\mathscr{K}, x \models p$ или $\mathscr{K}, x \models q)$;

$\mathscr{K}, x \models (p \to q) \Leftrightarrow (\mathscr{K}, x \models p \Rightarrow \mathscr{K}, x \models q)$;

$\mathscr{K}, x \models \neg p \Leftrightarrow \mathscr{K}, x \not\models p$.

Интуиционистские связки. Пусть $a \in W$, α, β – формулы сорта задача; тогда:

$\mathscr{K}, a \models \alpha \Leftrightarrow v_W(a,\alpha) = \top$, если $\alpha \in \mathrm{VarProb}$;

$\mathscr{K}, a \models (\alpha \wedge \beta) \Leftrightarrow (\mathscr{K}, a \models \alpha$ и $\mathscr{K}, a \models \beta)$;

$\mathscr{K}, a \models (\alpha \vee \beta) \Leftrightarrow (\mathscr{K}, a \models \alpha$ или $\mathscr{K}, a \models \beta)$;

$\mathscr{K}, a \models (\alpha \to \beta) \Leftrightarrow \forall\, b \succcurlyeq a \;\; (\mathscr{K}, b \models \alpha \Rightarrow \mathscr{K}, b \models \beta)$;

$\mathscr{K}, a \models \neg\alpha \Leftrightarrow \forall\, b \succcurlyeq a \;\; (\mathscr{K}, b \not\models \alpha)$.

Модальности. Пусть $x \in X$, $a \in W$, p – формула сорта высказывание, α – формула сорта задача; тогда:

$$\mathscr{K}, x \models ?\alpha \Leftrightarrow \forall b \in W \quad (xR_?b \Rightarrow b \models \alpha);$$
$$\mathscr{K}, a \models !p \Leftrightarrow \forall y \in X \quad (aR_!y \Rightarrow y \models p).$$

Формула, не являющаяся истинной в данном мире, называется *ложной* в нем. Классическая (интуиционистская) формула, истинная во всех точках множества X (множества W), называется *истинной* в модели $\mathscr{K}$.

Далее вместо $\mathscr{K}, t \models A$ будем писать $t \models A$ там, где это не вызывает разночтений (где шкала фиксирована).

Проверим, что если формула сорта задача истинна в каком-то мире, то она истинна во всех бóльших мирах.

Лемма 2.2. *Если* $a \models \alpha$ *и* $b \succcurlyeq a$, *то* $b \models \alpha$.

Доказательство. Рассуждения проводятся индукцией по построению формулы α. Если α – переменная, то это верно по определению оценки v_W. Если $\alpha = \beta \wedge \gamma$ или $\alpha = \beta \vee \gamma$, то достаточно сослаться на предположение индукции. Если $\alpha = \beta \to \gamma$ или $\alpha = \neg\gamma$, то лемма верна по определению истинности импликации и отрицания. Пусть $\alpha = !p$. Для того чтобы выполнялось $b \models !p$, необходимо проверить, что если $bR_!x$, то $x \models p$. Из свойства 3) HC-шкал следует, что $aR_!x$. Так как $a \models !p$, имеем $x \models p$. Следовательно, $b \models !p$. □

Докажем теорему о корректности логики HC относительно построенного класса моделей Крипке с двумя множествами миров.

Теорема 2.2 (о корректности)**.** *Все теоремы логики* HC *(т.е. формулы, выводимые в* HC*) истинны в любом классическом (интуиционистском) мире любой модели Крипке логики* HC.

Доказательство. Надо проверить, что все аксиомы истинны во всех соответствующих мирах, и правила вывода сохраняют это свойство. Истинность чисто классических аксиом и сохранение этого свойства при применении классического modus ponens следует из определения истинности классических формул. Истинность чисто интуиционистских аксиом и сохранение этого свойства при применении интуиционистского modus ponens следует из корректности интуиционистского исчисления высказываний относительно шкал Крипке (см., например, [3]). Осталось проверить остальные аксиомы и правила вывода HC.

1. Проверим аксиому $!(p \to q) \to (!p \to !q)$. Предположим, что для некоторого $a \in W$ выполнено $a \models !(p \to q)$. Это означает, что $\forall x \in X \ \ (aR_! x \Rightarrow x \models p \to q)$. Требуется доказать, что $a \models !p \to !q$, т.е. $\forall b \succcurlyeq a \ \ (b \models !p \Rightarrow b \models !q)$. Пусть $b \succcurlyeq a$ и $b \models !p$, т.е. $\forall y \in X \ \ (bR_! y \Rightarrow y \models p)$. По свойству 3) $\forall x \in X$ $\forall a, b \in W$ $(bR_! x \wedge a \preccurlyeq b \Rightarrow aR_! x)$ имеем $\forall y \in X \ \ (bR_! y \Rightarrow aR_! y)$. Так как для $y \in X$, удовлетворяющих $aR_! y$, выполнено $y \models p \to q$ и выполнено $\forall y \in X$ $(bR_! y \Rightarrow y \models p)$, то получаем $\forall y \in X \ \ (bR_! y \Rightarrow y \models q)$. Это равносильно $b \models !q$.

2. Проверим аксиому $?(\alpha \to \beta) \to (?\alpha \to ?\beta)$. Предположим, что для некоторого $x \in X$ выполнено $x \models ?(\alpha \to \beta)$. Это означает, что $\forall a \in W \ \ (xR_? a \Rightarrow a \models \alpha \to \beta)$. Следовательно, как минимум, для $a \in W$ при условии $xR_? a$ выполнено $a \models \alpha \Rightarrow a \models \beta$. Отсюда получаем $\forall a \in W \ \ (xR_? a \Rightarrow a \models \alpha) \Rightarrow$ $\forall a \in W \ \ (xR_? a \Rightarrow a \models \beta)$. Это означает, что $x \models ?\alpha \Rightarrow x \models ?\beta$. Следовательно, $x \models ?\alpha \to ?\beta$.

3. Проверим сохранение истинности формул при применении правила вывода $\dfrac{p}{!p}$. Пусть p истинно во всех мирах, т.е. $\forall x \in X \ \ x \models p$. Истинность $!p$ в мире $a \in W$ означает, что $\forall x \in X \ \ (aR_! x \Rightarrow x \models p)$. Это выполнено, так как p истинно вообще во всех мирах множества X.

4. Проверим сохранение истинности формул при применении правила вывода $\dfrac{\alpha}{?\alpha}$. Это проверяется аналогично предыдущему правилу вывода.

5. Проверим аксиому $?!p \to p$. Предположим, что для некоторого $x \in X$ выполнено $x \models ?!p$. Это означает, что $\forall a \in W \ \ (xR_? a \Rightarrow a \models !p)$, т.е. $\forall a \in W$ $(xR_? a \Rightarrow \forall y \in X \ (aR_! y \Rightarrow y \models p))$. Воспользуемся свойством 1): $\forall x \in X$ $\exists a \in W \ \ (xR_? a \wedge aR_! x)$. Рассмотрев такое a в предыдущем соотношении и взяв $y = x$, мы получим, что $x \models p$.

6. Проверим аксиому $\alpha \to !?\alpha$. Предположим, что для некоторого $a \in W$ выполнено $a \models \alpha$. Согласно свойству 2) $\forall x \in X \ \ \forall a, b \in W \ (xR_? b \wedge aR_! x \Rightarrow a \preccurlyeq b)$ имеем $\forall x \in X \ \ \forall b \in W \ \ (xR_? b \wedge aR_! x \Rightarrow b \models \alpha)$. Это можно переписать так: $\forall x \in X \ \ (aR_! x \Rightarrow \forall b \in W \ (xR_? b \Rightarrow b \models \alpha))$. Последнее равносильно $a \models !?\alpha$.

7. Проверим аксиому $\neg !0$. Требуется доказать, что $\forall a \in W \ \ a \models \neg !0$, т.е. $\forall b \succcurlyeq a \ \ b \not\models !0$. Напомним, что $b \not\models !0$ означает, что $\exists x \in X \ \ (bR_! x \wedge x \not\models 0)$. Последнее соотношение следует из свойства 4) $\forall a \in W \ \ \exists x \in X \ \ aR_! x$, ведь

для любого $x \in X$ выполнено $x \not\models 0$.

Теорема 2.2 доказана. $\square$

Отметим, что, имея модель Крипке с двумя множествами миров, можно построить алгебраическую модель логики HC. Действительно, булевой алгеброй $\mathscr{B}$ будет являться множество всех подмножеств X, а гейтинговой алгеброй $\mathscr{H}$ – множество всех замкнутых вверх подмножеств W, при этом отображения $?\colon \mathscr{H} \to \mathscr{B}$ и $!\colon \mathscr{B} \to \mathscr{H}$ будут определены естественным образом:

$$?a = \{y \in X \mid \forall\, b \in W\, (yR_?b \Rightarrow b \in a)\}, !x = \{b \in W \mid \forall\, y \in X\, (bR_!y \Rightarrow y \in x)\}$$

(отображение ! корректно определено, так как в HC-шкалах выполнено свойство 3) из определения 2.2). В частности, из этого построения следует, что если свойство конечных моделей имеет место для моделей Крипке, то оно имеет место и для алгебраической семантики логики HC. Наоборот, имея алгебраическую модель логики HC, можно построить шкалу Крипке: в качестве множества X (соответственно W) берется множество всех собственных простых фильтров алгебры $\mathscr{B}$ (соответственно $\mathscr{H}$). Порядок $\preccurlyeq$ на W и отношения $R_? \subseteq X \times W$ и $R_! \subseteq W \times X$ определяются так:

$$\begin{aligned} a \preccurlyeq b &\Leftrightarrow a \subseteq b; \\ xR_?a \Leftrightarrow \forall\, \alpha \in \mathscr{H} &\quad (?\alpha \in x \Rightarrow \alpha \in a); \\ aR_!x \Leftrightarrow \forall\, p \in \mathscr{B} &\quad (!p \in a \Rightarrow p \in x). \end{aligned}$$

Таким образом, можно доказать теорему о полноте логики HC относительно семантики Крипке, рассмотрев в качестве исходной алгебры алгебру Линденбаума логики HC и определив оценки переменных в производной шкале Крипке:

$$v_X(x, p) = 1 \Leftrightarrow p \in x, \qquad v_W(a, \alpha) = \top \Leftrightarrow \alpha \in a$$

(здесь $x \in X$, $a \in W$, p, α – переменные). Фактически

$$x \models p \Leftrightarrow p \in x, \qquad a \models \alpha \Leftrightarrow \alpha \in a.$$

Далее индукцией по построению формулы можно доказать, что подобные эквивалентности выполнены не только для переменных, но и для всех формул логики HC. Однако шкала Крипке, получившаяся в результате этого построения, может не быть конечной. Чтобы доказать более сильную теорему о полноте логики НС относительно класса конечных моделей Крипке, мы пойдем другим путем: по произвольной невыводимой в логике НС формуле, рассмотрев множество ее подформул, построим шкалу Крипке и укажем ее мир, в котором данная формула опровергается. Более того, построенная шкала будет иметь конечное число миров, т.е. для данной семантики логики НС выполнено свойство конечных моделей.

2.3 Полнота логики НС относительно семантики Крипке с двумя множествами миров

В этом разделе мы покажем, что имеет место полнота логики НС относительно НС-шкал. Кроме того, как нетрудно будет заключить из построения, получаемая НС-шкала всегда оказывается конечной. Таким образом, будет доказана следующая теорема (свойство конечных моделей для семантики типа Крипке с двумя множествами миров логики НС):

Теорема 2.3. *Для любой формулы φ, не выводимой в логике* НС*, существуют конечная* НС*-шкала и ее мир, в котором будет ложна формула φ.*

Укажем стандартное следствие из свойства конечных моделей и рекурсивной перечислимости (эффективной аксиоматизируемости) логики НС.

Следствие 2.1. *Множество выводимых в* НС *формул разрешимо.*

При доказательстве теоремы о полноте мы будем во многом следовать доказательству полноты интуиционистского исчисления высказываний относительно конечных шкал Крипке (см. [3]), но с некоторыми корректировками, относящимися к специфике логики НС.

Рассматриваются множества представителей классов эквивалентности формул, которые будем обозначать I, J и т.д. Такое рассмотрение допустимо, поскольку если что-то выполнено для каких-то конкретных представителей этих классов, тогда то же самое будет выполнено и для других представителей. Тем не менее мы должны рассматривать множества именно представителей классов эквивалентности, а не просто множества формул, если хотим добиться конечности шкалы Крипке.

Определение 2.5. Пара (I, J) называется *совместной*, если все формулы, входящие в множества I и J, одного сорта (т.е. или все эти формулы имеют сорт высказывание, или все эти формулы имеют сорт задача) и существуют НС-шкала и ее мир, в котором все формулы из множества I истинны, а все формулы из множества J ложны.

Определение 2.6. Пара конечных множеств формул (I, J) называется *противоречивой*, если все формулы, входящие в множества I и J, одного сорта и в НС выводимо

$$I_1 \wedge I_2 \wedge \cdots \wedge I_n \to J_1 \vee J_2 \vee \cdots \vee J_m,$$

где $I_1, I_2, \ldots, I_n$ – формулы множества I, а $J_1, J_2, \ldots, J_m$ – формулы множества J (без ограничения общности можно считать, что в этих списках перечислены все формулы множеств I и J, так как недостающие формулы всегда можно добавить, не нарушив выводимость).

Ясно, что противоречивая пара не может быть совместной (в противном случае существовали бы шкала Крипке и ее мир, в котором истинны формулы φ и $\varphi \to \psi$ и при этом ложна формула ψ, чего не бывает; здесь $\varphi = I_1 \wedge I_2 \wedge \cdots \wedge I_n$, $\psi = J_1 \vee J_2 \vee \cdots \vee J_m$). Далее, если φ – некоторая формула, не выводимая в НС, то пара $(\varnothing, \{\varphi\})$ является непротиворечивой и, как мы покажем ниже, совместной (на самом деле совместна любая непротиворечивая пара – доказательство существенным образом не изменится).

Лемма 2.3. *Пусть (I, J) – непротиворечивая пара множеств формул одного сорта, τ – произвольная формула того же сорта. Тогда хотя бы одна из пар $(I \cup \{\tau\}, J)$ и $(I, J \cup \{\tau\})$ непротиворечива.*

Доказательство. Отождествим множество I с конъюнкцией его элементов, а множество J – с дизъюнкцией. Предположим, что обе полученные пары противоречивы, т.е. в НС выводимо $I \wedge \tau \to J$, $I \to J \vee \tau$. Покажем, что тогда пара (I, J) противоречива, т.е. в логике НС выводима формула $I \to J$.

Так как $I \wedge \tau \to J$, имеем $I \to (\tau \to J)$. Отсюда получаем $(I \to \tau) \to (I \to J)$. Так как $(I \to J) \to (I \to J)$, получаем $((I \to \tau) \vee (I \to J)) \to (I \to J)$. Заметим, что $((I \to \tau) \vee (I \to J)) \leftrightarrow (I \to (J \vee \tau))$. Отсюда следует $(I \to (J \vee \tau)) \to (I \to J)$. Так как $I \to J \vee \tau$, получаем $I \to J$, значит, пара (I, J) противоречива. $\square$

Итак, пусть имеется формула φ, не выводимая в логике HC. Рассмотрим следующее множество F: положим в него все подформулы формулы φ, а также для каждой формулы сорта задача $\alpha \in F$ положим в F формулы $?\alpha$ и $!?\alpha$, и для каждой формулы сорта высказывание $p \in F$ положим в F формулы $!p$ и $?!p$. При этом множество F останется конечным, так как в HC имеются теоремы $!p \leftrightarrow !?!p$ и $?\alpha \leftrightarrow ?!?\alpha$ (предложение 1.1), и указанные пополнения можно производить не более двух раз для каждой подформулы φ.

Определение 2.7. Пара (I, J) называется *полной относительно* F, если она непротиворечива и $I \cup J$ содержит все формулы сорта высказывание либо все формулы сорта задача, которые содержатся в F.

Понятно, что из непротиворечивости следует $I \cap J = \varnothing$, так что получаем разбиение высказываний или задач из F на две части.

Лемма 2.4. *Для любой непротиворечивой пары* (I, J)*, составленной из формул множества* F*, существует полная относительно* F *пара* (R, S) *такая, что* $I \subset R$ *и* $J \subset S$*.*

Доказательство очевидно: применяем лемму 2.3, последовательно присоединяя все формулы множества F соответствующего сорта. Указанный процесс обязательно оборвётся на некоторой полной паре, поскольку множество F конечно.

Определение 2.8. *Строим* HC-*шкалу* следующим образом. Миры – все полные относительно множества F пары. При этом пары, составленные из формул сорта высказывание, будем обозначать (Y, Z) (они образуют множество, которое мы ранее обозначали X), а пары, составленные из формул сорта задача, будем обозначать (A, B) (они образуют множество, которое мы ранее обозначали W). Далее, $(A_1, B_1) \preccurlyeq (A_2, B_2)$, если $A_1 \subseteq A_2$; $(Y, Z)R_?(A, B)$, если $?\alpha \in Y \Rightarrow \alpha \in A$; $(A, B)R_!(Y, Z)$, если $!p \in A \Rightarrow p \in Y$. Определяем оценки переменных естественным образом: $(Y, Z) \models p$ в случае $p \in Y$ и $(A, B) \models \alpha$ в случае $\alpha \in A$, где p и α – переменные.

Лемма 2.5. *Получившаяся конструкция является* HC-*шкалой.*

Доказательство. Нужно проверить все требуемые свойства. Очевидно, что определенное отношение $\preccurlyeq$ действительно является частичным порядком на множестве всех полных пар множеств формул сорта задача. Докажем все остальные свойства (все используемые ниже кванторы пробегают исключительно полные относительно множества F пары).

1. Проверим $\forall (Y, Z) \;\; \exists (A, B) \;\; (Y, Z)R_?(A, B) \wedge (A, B)R_!(Y, Z)$.

Составим такую пару (A, B). Так как $(Y, Z)R_?(A, B)$ означает $?\alpha \in Y \Rightarrow \alpha \in A$, то для каждого $?\alpha \in Y$ помещаем α в A. Далее, $(A, B)R_!(Y, Z)$ означает, что $!p \in A \Rightarrow p \in Y$. Так как пары у нас полные, это условие переписывается так: $p \in Z \Rightarrow !p \in B$. Значит, для каждого $p \in Z$ помещаем $!p$ в B. Если эта пара непротиворечива, то, расширив ее до полной, получим требуемое.

Докажем непротиворечивость от противного: предположим, что в НС выводимо $\bigwedge_i \alpha_i \to \bigvee_j !p_j$. Пользуясь правилом вывода 4) и свойствами 1) и 2) из предложения 1.1, имеем $\bigwedge_i ?\alpha_i \to \bigvee_j ?!p_j$. Так как $?!p_j \to p_j$, мы получаем $\bigwedge_i ?\alpha_i \to \bigvee_j p_j$, что означает противоречивость пары (Y, Z).

2. Проверим $\forall (Y, Z) \;\; \forall (A_1, B_1), (A_2, B_2)$
$(A_1, B_1)R_!(Y, Z) \wedge (Y, Z)R_?(A_2, B_2) \Rightarrow (A_1, B_1) \preccurlyeq (A_2, B_2)$.

Нужно доказать, что $A_1 \subseteq A_2$. Возьмем $\alpha \in A_1$. Так как есть аксиома $\alpha \to !?\alpha$, имеем $!?\alpha \in A_1$ (иначе пара (A_1, B_1) оказалась бы противоречивой). Из $(A_1, B_1)R_!(Y, Z)$ получаем $?\alpha \in Y$. Из $(Y, Z)R_?(A_2, B_2)$ получаем $\alpha \in A_2$. Поскольку мы взяли произвольный элемент $\alpha \in A_1$, то требуемое свойство доказано.

3. Проверим $\forall (Y, Z) \;\; \forall (A_1, B_1), (A_2, B_2)$
$(A_2, B_2)R_!(Y, Z) \wedge (A_1, B_1) \preccurlyeq (A_2, B_2) \Rightarrow (A_1, B_1)R_!(Y, Z)$.

Пусть $!p \in A_1$. Так как $(A_1, B_1) \preccurlyeq (A_2, B_2)$, то $!p \in A_2$. Из $(A_2, B_2)R_!(Y, Z)$ получаем $p \in Y$. Таким образом, показано, что $(A_1, B_1)R_!(Y, Z)$.

4. Проверим $\forall (A, B) \;\; \exists (Y, Z) \;\; (A, B)R_!(Y, Z)$.

Запись $(A, B)R_!(Y, Z)$ означает, что если $!p \in A$, то $p \in Y$. Так и определим пару (Y, Z): для всякого $!p \in A$ положим p в Y. Если эта пара окажется непротиворечивой, то, расширив ее до полной, получим требуемое.

Докажем непротиворечивость от противного: предположим, что в НС выводимо $\bigwedge_i p_i \to 0$ (пустая классическая дизъюнкция равна 0). Применив правило вывода 3), аксиомы 1) и 7) и свойство 4) из предложения 1.1, получаем

$\bigwedge_i !p_i \to \bot$, что означает противоречивость пары (A, B). $\square$

Следующая лемма завершает доказательство полноты логики НС относительно класса конечных НС-шкал.

Лемма 2.6. *В построенной шкале в мире (R, S) истинны все формулы из R и ложны все формулы из S.*

Доказательство. Рассуждения проводятся совместной индукцией по построению классических и интуиционистских формул. Для переменных лемма верна по определению истинности. Далее, пусть формула получена применением интуиционистских связок из других формул. Доказательство в этом случае очень близко к доказательству леммы 3 из [3, п. 2.4]. Разберем наиболее интересный случай – импликацию.

Пусть формула $\alpha \to \beta$ входит в R. Проверим, что она истинна в R. Это значит, что в любом мире (R_1, S_1), состоящем из интуиционистских формул, таком, что $(R_1, S_1) \succcurlyeq (R, S)$ (т.е. $R_1 \supseteq R$), в котором истинна формула α, должна быть истинна и формула β. Действительно, если α истинна в (R_1, S_1), то она входит в R_1 (по предположению индукции). С другой стороны, $\alpha \to \beta$ входит в R_1, поскольку $R_1 \supseteq R$. Ясно, что формула β не может входить в S_1, так как в этом случае пара (R_1, S_1) была бы противоречивой (поскольку из α и $\alpha \to \beta$ выводится β). Значит, β входит в R_1 и потому истинна в (R_1, S_1) по предположению индукции.

Пусть формула $\alpha \to \beta$ входит в S. Необходимо доказать, что она ложна в мире (R, S). Согласно определению это означает, что существует мир (R_1, S_1), для которого $R_1 \supseteq R$ и в котором формула α истинна, а формула β ложна (т.е. $\alpha \in R_1$ и $\beta \in S_1$ согласно предположению индукции). Рассмотрим пару $(R \cup \{\alpha\}, \{\beta\})$. Покажем, что эта пара непротиворечива. В самом деле, если бы формула $R \wedge \alpha \to \beta$ была выводима, то и формула $R \to (\alpha \to \beta)$ была бы выводима, и потому пара (R, S) была бы противоречива. Затем расширим непротиворечивую пару $(R \cup \{\alpha\}, \{\beta\})$ до полной пары (R_1, S_1), которая и будет искомым миром.

Доказательство индуктивного перехода для классических связок еще проще (или можно определить "порядок" на классических мирах следующим образом: $(Y_1, Z_1) \preccurlyeq_{\text{клас.}} (Y_2, Z_2)$, если $Y_1 = Y_2$, и затем просто повторить доказательство в интуиционистском случае). Осталось разобрать только случай индуктивного перехода с применением модальностей. Докажем индуктивно шаг для модальности !; для модальности ? доказательство совершенно аналогично.

Пусть имеется пара (A, B) и $!p \in A$. Рассмотрим пару (Y, Z) такую, что $(A, B)R_!(Y, Z)$. Тогда $p \in Y$. По предположению индукции $(Y, Z) \models p$. Тогда по определению истинности $(A, B) \models !p$.

Пусть имеется пара (A, B) и $!p \in B$. Необходимо найти такую пару (Y, Z), что $(A, B)R_!(Y, Z)$ и $p \in Z$; тогда по предположению индукции $(Y, Z) \not\models p$, а по определению истинности $(A, B) \not\models !p$. Напомним, что $(A, B)R_!(Y, Z)$ означает, что если $!p \in A$, то $p \in Y$. Так и сделаем: если $!p_i \in A$, то положим p_i в Y. Кроме того, положим p в Z. Если эта пара окажется непротиворечивой, то, расширив ее до полной, получим требуемое.

Докажем непротиворечивость от противного: пусть в НС выводимо $\bigwedge_i p_i \to p$. Пользуясь правилом вывода 3), аксиомой 1) и свойством 4) из предложения 1.1, получаем $\bigwedge_i !p_i \to !p$, что означает противоречивость пары (A, B).

Лемма 2.6 доказана. □

Заметим, что построенная нами шкала конечна, поскольку множество всех полных относительно F пар конечно. Пара $(\varnothing, \{\varphi\})$ непротиворечива. Расширим ее до полной пары. В этом мире формула φ ложна в силу леммы 2.6. Это завершает доказательство теоремы 2.3.

Замечание 2.1. Отметим, что в определении 2.2 модели Крипке с двумя множествами миров мы могли бы использовать вместо частичного порядка предпорядок. Тогда доказательства теорем о корректности и полноте остались бы прежними.

2.4 Следствия из теоремы о полноте

В [78] был рассмотрен ряд формул, названных «принципами», и правил, которые эмпирически покрывают все достаточно простые и естественные предположения о поведении модальностей ? и ! (в том числе две гипотезы, выдвинутые Д. Гильбертом и А. Н. Колмогоровым и формализованные на языке логики НС). С. А. Мелихову удалось выделить множество, состоящее из десяти независимых принципов и одного правила, и построить полную решётку импликаций между ними, за исключением одной возможной импликации. В данном разделе мы рассмотрим некоторые из этих принципов и дадим ответ на вопрос про оставшуюся импликацию между ними, тем самым закончив построение решётки.

2.4.1 Некоторые принципы

Приведем несколько формул (названных «принципами» в [78]), невыводимых в логике HC, и HC-шкал, на которых они опровергаются. На рисунках HC-шкал точки множества X будут нарисованы слева, а точки множества W – справа. Отношение порядка $\preccurlyeq$ будет обозначено стрелками (если $a \preccurlyeq b$, то стрелка ведет из a в b), отношение $R_?$ – штриховыми линиями, а отношение $R_!$ – сплошными линиями. Легко проверить, что все приведенные ниже шкалы являются HC-шкалами.

1) “Гильбертов принцип”[1] $?(\alpha \vee \neg\alpha)$ (любая задача имеет решение либо можно доказать, что решения нет) опровергается на шкале на рис. 2.1.

Пусть $a \not\models \alpha, b \models \alpha$. Тогда $a \not\models \alpha \vee \neg\alpha$. Значит, $y \not\models ?(\alpha \vee \neg\alpha)$.

2) “Колмогоровский принцип” $!p \vee !\neg p$ (любое утверждение доказуемо или опровержимо) опровергается на шкале на рис. 2.2.

Пусть $y \models p, x \models \neg p$. Тогда $a \not\models !p$ и $a \not\models !\neg p$, т.е. $a \not\models !p \vee !\neg p$.

Эта же шкала годится для опровержения формулы $!(p \vee q) \to !p \vee !q$ (заметим, что обращение этой формулы является теоремой логики HC; см. предложение 1.1).

Пусть $x \models p$, $x \not\models q$, $y \models q$, $y \not\models p$. Тогда $a \models !(p \vee q)$, $a \not\models !p$, $a \not\models !q$. Значит, $a \not\models !(p \vee q) \to (!p \vee !q)$.

3) “PC-принцип” $!?\alpha \to \alpha$. Соответствующая шкала показана на рис. 2.3.

Пусть $a \not\models \alpha, b \models \alpha$. Тогда $x \models ?\alpha$. Отсюда получаем $a \models !?\alpha$. Но так как $a \not\models \alpha$, имеем $a \not\models !?\alpha \to \alpha$.

Для опровержения этого принципа также подходит шкала из п. 1).

[1] Термины из пп. 1)–3) предложены С. А. Мелиховым.

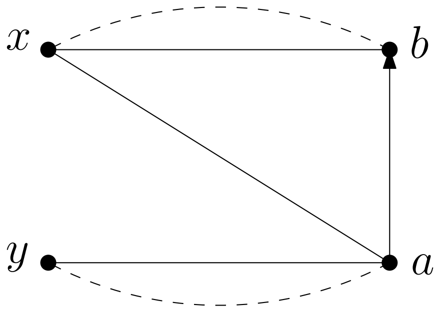

Рис. 2.1:

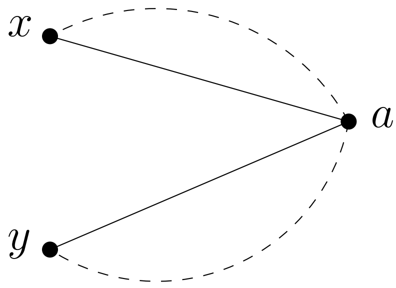

Рис. 2.2:

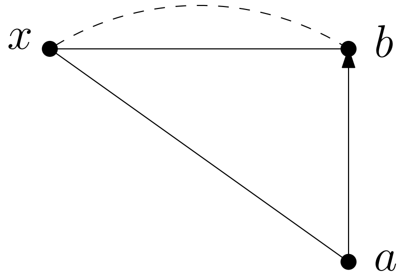

Рис. 2.3:

2.4.2 Дизъюнктивное свойство

Для многих интуиционистских исчислений выполнено дизъюнктивное свойство: дизъюнкция $A \vee B$ доказуема тогда и только тогда, когда доказуема одна из формул A или B. Для логики HC это свойство тоже оказывается верным, как показывает следующая теорема, но, разумеется, лишь для формул сорта задача.

Теорема 2.4. *Если* $\mathrm{HC} \vdash \alpha \vee \beta$*, то* $\mathrm{HC} \vdash \alpha$ *или* $\mathrm{HC} \vdash \beta$*.*

Доказательство. Докажем этот факт, пользуясь полнотой логики HC относительно HC-шкал Крипке. А именно, пусть $\mathrm{HC} \nvdash \alpha$ и $\mathrm{HC} \nvdash \beta$, т.е. имеются две HC-шкалы, $\mathscr{K}^1 = (X^1, W^1, \preccurlyeq^1, R^1_?, R^1_!)$ и $\mathscr{K}^2 = (X^2, W^2, \preccurlyeq^2, R^2_?, R^2_!)$, оценки на них и два мира, $a^1 \in W^1$ и $a^2 \in W^2$, таких, что $\mathscr{K}^1, a^1 \nvDash \alpha$, $\mathscr{K}^2, a^2 \nvDash \beta$. Построим с их помощью опровергающую HC-шкалу для формулы $\alpha \vee \beta$.

Идея состоит в следующем: соединим указанные шкалы в одну и добавим мир d, который будет меньше миров a^1 и a^2, а оценки переменных оставим теми же. В чистом интуиционистском исчислении высказываний построение на этом заканчивается, поскольку $d \nvDash \alpha \vee \beta$, но в нашем случае указанная конструкция перестает быть HC-шкалой. Приведем схематичный чертеж новой шкалы $\mathscr{K} = (X, W, \preccurlyeq, R_?, R_!)$, а затем точно определим ее (рис. 2.4). Как и раньше, отношение порядка $\preccurlyeq$ обозначено стрелками (если $a \preccurlyeq b$, то стрелка ведет из a в b), отношение $R_?$ – штриховой линией, а отношение $R_!$ – сплошными линиями.

Определим теперь явно шкалу $\mathscr{K} = (X, W, \preccurlyeq, R_?, R_!)$. Без ограничения общности можно считать, что $X^1 \cap X^2 = \varnothing$ и $W^1 \cap W^2 = \varnothing$. Тогда положим

$$X = X^1 \cup X^2 \cup \{t\}, \qquad W = W^1 \cup W^2 \cup \{d\}.$$

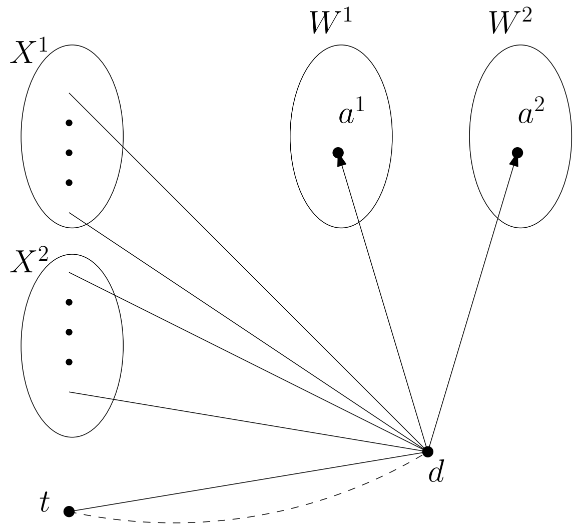

Рис. 2.4:

Порядок $\preccurlyeq$ получается объединением порядков $\preccurlyeq^1$ и $\preccurlyeq^2$ с добавлением

$$d \preccurlyeq a^1, \qquad d \preccurlyeq a^2,$$
$$R_? = R_?^1 \cup R_?^2 \cup \{(t,d)\},$$
$$R_! = R_!^1 \cup R_!^2 \cup \{(d,t)\} \cup \{(d,x) \mid x \in X^1\} \cup \{(d,x) \mid x \in X^2\}.$$

Нетрудно убедиться, что построенная НС-шкала удовлетворяет всем необходимым свойствам, требуемым в определении НС-шкал. Кроме того, $d \not\models \alpha \vee \beta$. □

2.4.3 ED-принцип и PC-правило

В [78] были введены в рассмотрение среди прочих PC-правило и ED-принцип. Одна из формулировок PC-правила следующая: $\dfrac{!?\alpha}{\alpha}$. Неформально это означает, существует метод, позволяющий из доказательства разрешимости задачи α извлечь решение самой задачи α. PC-правило имеет равносильную формулировку $\dfrac{?\alpha}{\alpha}$ (см. [78]), которую мы будем использовать ниже. Одна из формулировок ED-принципа такая:

$$\neg(\alpha \wedge \beta) \to (!?(\alpha \vee \beta) \to !?\alpha \vee !?\beta).$$

Рассмотрение этого принципа мотивировано следующими наблюдениями.

1. Задача $!?\alpha$ имеет решение тогда и только тогда, когда α имеет решение (поскольку $\mathrm{HC} \vdash ?(!?\alpha) \leftrightarrow ?\alpha$).

2. Задача $!?\alpha$ имеет в некотором смысле не более одного решения (см. [79, п. 2.2]).

Далее, по наблюдению 1 задача $!?(\alpha \vee \beta)$ имеет решение тогда и только тогда, когда $!?\alpha \vee !?\beta$ имеет решение. Согласно наблюдению 2 задача $!?\alpha \vee !?\beta$ имеет не больше одного решения, так как задача $!?\alpha \wedge !?\beta$ решений не имеет (это следует из предположения, что задача $\alpha \wedge \beta$ не имеет решений). Таким образом, в некоторых случаях, если известно, что существует и единственно решение задачи, то можно получить решение самой задачи.

В [78, задача 4.13] поставлен вопрос: верно ли, что PC-правило влечет ED-принцип? Ниже мы дадим отрицательный ответ на этот вопрос.

Рассмотрим логику $\mathrm{HC}+\mathrm{PC}$, содержащую все аксиомы и правила вывода логики HC, а также PC-правило (т.е. замыкание логики HC относительно PC-правила). Мы сформулируем некоторое свойство HC-шкал и докажем, что в них и только в них истинны все формулы, выводимые в логике $\mathrm{HC}+\mathrm{PC}$. Затем мы найдем шкалу, обладающую этим свойством, зададим на ней оценку и подберем формулы в ED-принципе (который является схемой аксиом в выбранной нами формулировке) так, что получившаяся формула окажется ложной в некотором мире. Таким образом, будет доказано, что в логике $\mathrm{HC}+\mathrm{PC}$ невыводим ED-принцип.

Везде далее в этом пункте для простоты будут рассматриваться исключительно конечные шкалы Крипке.

Определение 2.9. Конечная HC-шкала обладает *свойством связанности*, если для любого минимального элемента $b \in W$ существует $x \in X$ такой, что $xR_?b$.

Лемма 2.7. *Если конечная* HC-*шкала обладает свойством связанности, то в ней истинны все формулы, выводимые в логике* $\mathrm{HC}+\mathrm{PC}$. *Верно и обратное: если конечная* HC-*шкала не обладает свойством связанности, то множество формул, истинных в ней, не замкнуто относительно* PC-*правила при некоторой оценке.*

Доказательство. Пусть дана конечная HC-шкала, обладающая свойством связанности. Требуется доказать, что множество формул, истинных во всех ее точках классической либо интуиционистской части, замкнуто относительно PC-правила. Пусть для любого $x \in X$ выполнено $x \models ?\alpha$. Это означает, что если $a \in W$ и для какого-то $x \in X$ выполнено $xR_?a$, то $a \models \alpha$. Заметим, что по свойству связанности для любого минимального элемента $b \in W$ выполнено $b \models \alpha$. Отсюда следует, что для любого $a \in W$ выполнено $a \models \alpha$ (так как a больше какого-то минимального элемента и, следовательно, $a \models \alpha$ по лемме 2.2; здесь конечность шкалы существенна, так как из конечности следует существование хотя бы одного минимального элемента). Таким образом, мы доказали, что если во всех точках классической части данной модели Крипке логики HC со свойством связанности выполнено $?\alpha$, то во всех точках интуиционистской части выполнено α.

Если же HC-шкала не обладает свойством связанности, то имеется минимальный элемент $b \in W$, для которого не существует такой $x \in X$, что $xR_?b$ (также используем конечность шкалы). Зададим оценку: пусть во всех точках множества W, кроме точки b, истинна переменная α. Тогда получаем, что для любого $x \in X$ выполнено $x \models ?\alpha$, однако $b \not\models \alpha$. Значит, множество формул, истинных в моделях, не обладающих свойством связанности, не замкнуто относительно PC-правила при предъявленной оценке переменных.

Лемма 2.7 доказана. □

Замечание 2.2. Для произвольных HC-шкал (не обязательно конечных) свойство связанности превращается в такое: для любого $b \in W$ существуют $a \in W$ и $x \in X$ такие, что $a \preccurlyeq b$ и $xR_?a$. Нетрудно заметить, что для таких HC-шкал верна лемма, аналогичная лемме 2.7. Кроме того, в случае конечной HC-шкалы указанное свойство равносильно связанности (также это верно для HC-шкал, в которых нет бесконечно убывающих цепей).

Замечание 2.3. Неизвестно, полна ли логика HC + PC относительно класса конечных связанных HC-шкал.

Предъявим HC-шкалу, обладающую свойством связанности, и зададим на ней оценку так, что ED-принцип окажется ложен в некотором мире. Напомним, что одна из формулировок ED-принципа следующая:

$$\neg(\alpha \wedge \beta) \to (!?(\alpha \vee \beta) \to !?\alpha \vee !?\beta).$$

Рассмотрим HC-шкалу на рис. 2.5.

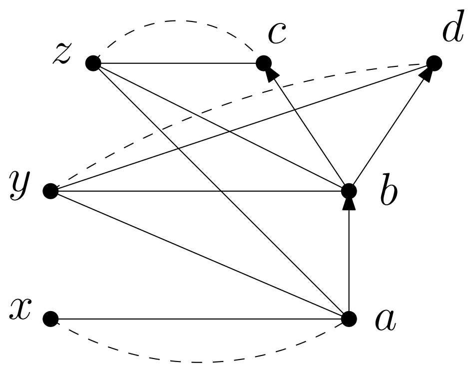

Рис. 2.5:

Эта HC-шкала обладает свойством связанности: a – ее минимальный элемент и $xR_?a$, а значит, множество формул, истинных в ней, замкнуто относительно PC-правила (и содержит все выводимые формулы логики HC + PC). Пусть α и β – две переменные сорта задача. Зададим следующую оценку этих переменных: $c \models \alpha$, $d \models \beta$; во всех остальных точках α и β ложны. Значит, посылка ED-принципа $\neg(\alpha \wedge \beta)$ истинна во всех точках W, в том числе в точке b. Далее, $b \models\, !?(\alpha \vee \beta)$, $b \not\models\, !?\alpha$, $b \not\models\, !?\beta$ (в этом несложно убедиться непосредственно по определению). Следовательно,

$$b \not\models\, !?(\alpha \vee \beta) \to\, !?\alpha \vee\, !?\beta.$$

Значит, в мире b (и, значит, в данной модели) ED-принцип ложен.

Из продемонстрированного построения можно сделать вывод, что PC-правило не влечет ED-принцип в логике HC, так как в противном случае ED-принцип был бы истинным в любом мире интуиционистской части связанной HC-шкалы. Таким образом, доказана

Теорема 2.5. *В логике* HC + PC *невыводим* ED-*принцип*

$$\neg(\alpha \wedge \beta) \to (!?(\alpha \vee \beta) \to\, !?\alpha \vee\, !?\beta).$$

Глава 3

Модели с отмеченными мирами

В работе [38] была построена семантика Крипке с отмеченными мирами для интуиционистской эпистемической логики $\mathsf{H4}$ и доказана теорема о корректности и полноте для этой семантики. В данной главе мы рассмотрим модели Крипке с отмеченными мирами логики HC, построенные на основе шкал с отмеченными мирами, а также докажем, что логика HC является консервативным расширением логики $\mathsf{H4}$.

3.1 Логики HC, $\mathsf{H4}$ и $\mathsf{S4}$

Пользуясь утверждением 1.3, докажем следующий результат.

Теорема 3.1. *Логика* HC *— консервативное расширение логики* $\mathsf{H4}$.

Доказательство. Рассмотрим произвольную формулу φ, не выводимую в логике $\mathsf{H4}$. Согласно теореме о полноте логики $\mathsf{H4}$ относительно шкал Крипке с отмеченными мирами существуют шкала $(W, \preccurlyeq, \mathrm{Aud})$, оценка на ней и некоторый мир $c \in W$ такой, что $c \not\models \varphi$. Построим теперь HC-шкалу следующим образом.

Множество W и частичный порядок $\preccurlyeq$ на нем уже имеются. Осталось определить множество X и отношения $R_? \subseteq X \times W$ и $R_! \subseteq W \times X$. Пусть

$$X = \mathrm{Aud}, \quad xR_?a \Leftrightarrow x = a; \qquad aR_!x \Leftrightarrow a \preccurlyeq x.$$

Убедимся, что действительно получается НС-шкала. Для этого проверим четыре свойства НС-шкал.

1) $\forall x \in X \;\; \exists a \in W \;\; (xR_{?}a \wedge aR_{!}x)$.

Это свойство выполнено, если взять $a = x$.

2) $\forall x \in X \;\; \forall a, b \in W \;\; (aR_{!}x \wedge xR_{?}b \Rightarrow a \preccurlyeq b)$.

Перепишем это свойство для нашей шкалы: $a \preccurlyeq x \wedge x = b \Rightarrow a \preccurlyeq b$, что, очевидно, верно.

3) $\forall x \in X \;\; \forall a, b \in W \;\; (bR_{!}x \wedge a \preccurlyeq b \Rightarrow aR_{!}x)$.

Перепишем это свойство для нашей шкалы: $b \preccurlyeq x \wedge a \preccurlyeq b \Rightarrow a \preccurlyeq x$, что выполнено по транзитивности $\preccurlyeq$.

4) $\forall a \in W \;\; \exists x \in X \;\; (aR_{!}x)$.

Здесь требуется доказать, что $\forall a \in W \;\; \exists x \in \mathrm{Aud} \; (a \preccurlyeq x)$. Это выполнено по свойству шкал с отмеченными мирами.

Таким образом, получена НС-шкала. Определим в ней оценку интуиционистских переменных так же, как она была определена в исходной модели с отмеченными мирами. Осталось проверить индукцией по построению формул, что определение истинности не изменилось. Истинность переменных, а также формул, получаемых из меньших формул при помощи интуиционистских связок, не изменилась. Значит, осталось проверить определение истинности для формул, получаемых при помощи модальности ∇. В первоначальной шкале

$$a \models \nabla\varphi \Leftrightarrow \forall b \in W \quad (a \preccurlyeq b \wedge b \in \mathrm{Aud} \Rightarrow b \models \varphi).$$

В полученной НС-шкале

$$\begin{aligned} a \models \nabla\varphi \Leftrightarrow a \models {!?}\varphi &\Leftrightarrow \forall x \in X \quad (aR_{!}x \Rightarrow x \models {?}\varphi) \\ &\Leftrightarrow \forall x \in X \quad (aR_{!}x \Rightarrow (\forall b \in W \; xR_{?}b \Rightarrow b \models \varphi)) \\ &\Leftrightarrow \forall x \in X \quad \forall b \in W \quad (aR_{!}x \wedge xR_{?}b \Rightarrow b \models \varphi) \\ &\Leftrightarrow \forall x \in \mathrm{Aud} \quad \forall b \in W \quad (a \preccurlyeq x \wedge x = b \Rightarrow b \models \varphi). \end{aligned}$$

Это совпадает с определением истинности в первоначальной шкале, а так как в первоначальной шкале $c \not\models \varphi$, то и в НС-шкале $c \not\models \varphi$, что означает $\mathrm{HC} \nvdash \varphi$.

Теорема 3.1 доказана. $\square$

Замечание 3.1. Той же техникой, которая была использована в теореме 3.1, можно доказать консервативность логики НС над логикой S4. А именно, S4-шкала — это множество X с предпорядком $\preccurlyeq$, возможно, с немонотонной оценкой переменных и отношением истинности $x \models \Box p \Leftrightarrow \forall\, y \in X \ \ (x \preccurlyeq y \Rightarrow y \models p)$ (истинность для формул, получаемых при помощи классических связок из других формул, определяется поточечно). Логика S4 полна относительно S4-шкал (см. [46]). Для построения НС-шкалы возьмем $W = X$, $aR_!x \Leftrightarrow a \preccurlyeq x$, $xR_?a \Leftrightarrow x = a$. Доказательство того, что мы получили НС-шкалу, уже проведено в теореме 3.1 (только в этом случае отношение $\preccurlyeq$ является предпорядком, а не частичным порядком. Но доказательство от этого существенным образом не изменится. См. также замечание 2.1). Определение истинности не изменилось: в НС-шкале

$$
\begin{aligned}
x \models \Box p \Leftrightarrow x \models ?!p \Leftrightarrow \forall\, a \in W \quad \forall\, y \in X \quad (xR_?a \wedge aR_!y \Rightarrow y \models p)\\
\Leftrightarrow \forall\, a \in W \quad \forall\, y \in X \quad (x = a \wedge a \preccurlyeq y \Rightarrow y \models p),
\end{aligned}
$$

что в точности соответствует определению истинности в исходной S4-шкале.

Кроме того, подобным образом можно доказать, что НС – консервативное расширение как классической, так и интуиционистской логики высказываний.

3.2 Модели логики НС с отмеченными мирами

Определение шкал Крипке с отмеченными мирами можно обобщить и затем обогатить до моделей логики НС. Как будет показано ниже, для моделей такого типа имеет место теорема о полноте, а также свойство конечных моделей. Напомним, что шкалы Крипке с отмеченными мирами — это тройка $(W, \preccurlyeq, \mathrm{Aud})$, где $(W, \preccurlyeq)$ — непустое множество с определенным на нем частичным порядком, $\mathrm{Aud} \subseteq W$, и выполнено следующее свойство:

$$\forall\, a \in W \quad \exists\, b \in W \quad (a \preccurlyeq b \wedge b \in \mathrm{Aud}).$$

Для того, чтобы определить семантику логики НС с отмеченными мирами, возьмём за основу приведённое выше определение с тем изменением, что будем считать $\preccurlyeq$ предпорядком, а не частичным порядком. (Такие шкалы также будем называть шкалами Крипке с отмеченными мирами.)

Определим истинность формул в таких моделях. Формулы сорта задача могут быть истинны или ложны в любом мире множества W. Определим оценку переменных сорта задача и формул, получаемых с помощью интуиционистских связок из других формул, точно так же, как она определялась в моделях Крипке с двумя множествами миров логики HC (в частности, эта оценка будет монотонна). Формулы сорта высказывание могут быть истинны или ложны только в мирах из Aud. Аналогично, оценка переменных сорта высказывание и формул, получаемых при помощи классических связок, определяется, как в моделях Крипке с двумя множествами миров логики HC. Осталось определить оценки для формул, получаемых при помощи модальностей:

$$a \models ?\alpha \Leftrightarrow a \models \alpha \quad (\text{для } a \in \mathrm{Aud}),$$
$$a \models !p \Leftrightarrow \forall b \in \mathrm{Aud}\ (a \preccurlyeq b \Rightarrow b \models p) \quad (\text{для } a \in W).$$

Теорема 3.2 (о корректности). *Все формулы, выводимые в логике* HC*, истинны в любом мире любой модели Крипке с отмеченными мирами.*

Доказательство. По данной модели Крипке с отмеченными мирами определим модель Крипке логики HC, как в теореме 3.1: W и $\preccurlyeq$ сохраняются, $X = \mathrm{Aud}$, $xR_?a \Leftrightarrow x = a$, $aR_!x \Leftrightarrow a \preccurlyeq x$. Нетрудно проверить, что при таком определении истинность формул в старой и новой моделях совпадает. Осталось сослаться на теорему 2.2 о корректности логики HC относительно моделей Крипке логики HC. $\square$

Теорема 3.3 (о полноте). *Для любой формулы, не выводимой в логике* HC*, существует конечная модель Крипке с отмеченными мирами, в некотором мире которой эта формула ложна.*

Доказательство. Поскольку имеет место теорема 2.3 о полноте логики HC относительно конечных моделей Крипке с двумя множествами миров логики HC, то достаточно, имея такую модель, построить конечную модель Крипке с отмеченными мирами и доказать, что истинность формул при этом сохраняется.

Пусть имеется $\mathscr{K} = (X, W, \preccurlyeq, R_?, R_!)$ – конечная модель Крипке с двумя множествами миров логики HC. Положим $a\widetilde{R}x \Leftrightarrow (xR_?a \wedge aR_!x)$. Построим новую шкалу Крипке с двумя множествами миров логики HC, в которой будет выполнено *свойство однозначности* $a\widetilde{R}x_1 \wedge a\widetilde{R}x_2 \Rightarrow x_1 = x_2$.

В самом деле, рассмотрим некоторое $a \in W$. Пусть $a\widetilde{R}x_1, a\widetilde{R}x_2, \ldots, a\widetilde{R}x_n$ (перечислены все такие элементы $x_1, x_2, \ldots, x_n \in X$ без повторений). В новой шкале Крипке с двумя множествами миров логики HC вместо одного мира a будет n миров $a_1, a_2, \ldots, a_n$. Все отношения для элементов, отличных от a_i и x_i, сохраняются, а для a_i и x_i доопределяются следующим образом ($\preccurlyeq$ необходимо замкнуть по транзитивности):

$$
\begin{aligned}
& a_i \preccurlyeq a_j \quad \text{для всех} \quad i, j; \\
& a_i \preccurlyeq b \Leftrightarrow a \preccurlyeq b, \qquad b \preccurlyeq a_i \Leftrightarrow b \preccurlyeq a; \\
& x_i R_? a_i \quad \text{для всех} \quad i; \\
& x R_? a_i \Leftrightarrow x R_? a, \quad \text{если} \quad x \neq x_1, x_2, \ldots, x_n; \\
& a_i R_! x_j \quad \text{для всех} \quad i, j; \\
& a_i R_! x \Leftrightarrow a R_! x, \quad \text{если} \quad x \neq x_1, x_2, \ldots, x_n.
\end{aligned}
$$

Изобразим для наглядности преобразование шкалы, в которой $n = 2$ для данного a (рис. 3.1 и рис. 3.2). Как и раньше, $\preccurlyeq$ изображается стрелками, $R_?$ — штриховыми линиями, а $R_!$ — сплошными линиями.

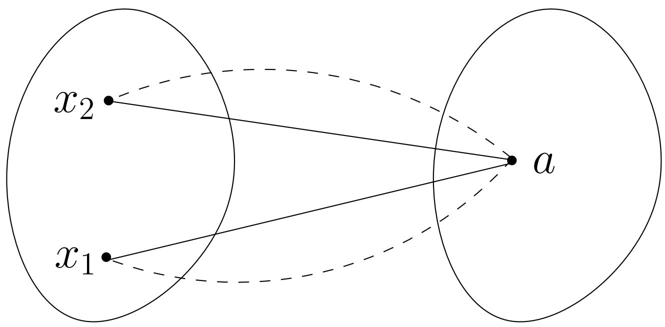

Рис. 3.1: Схема исходной шкалы Крипке.

Нетрудно доказать, что получившаяся конструкция действительно является шкалой Крипке логики HC с двумя множествами миров и имеет конечное число миров (теперь отношение $\preccurlyeq$ является предпорядком, согласно замечанию 2.1 это несущественно). Более того, истинность формул сохраняется (в том смысле, что $a_i \models \varphi \Leftrightarrow a \models \varphi$, а для остальных миров не меняется), если положить $a_i \models \alpha \Leftrightarrow a \models \alpha$ для переменных α сорта задача, а остальные оценки переменных оставить прежними.

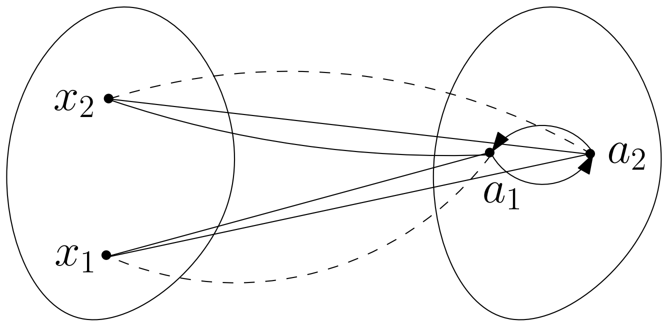

Рис. 3.2: Схема полученной шкалы Крипке.

Рассмотрев все $a \in W$ и повторив в случае необходимости указанную процедуру, получим конечную модель Крипке с двумя множествами миров логики HC, обладающую свойством однозначности и опровергающую те же формулы, что и исходная шкала.

Таким образом, можно без ограничения общности считать, что нам дана конечная модель Крипке $\mathscr{K} = (X, W, \preccurlyeq, R_?, R_!)$ с двумя множествами миров логики HC со свойством однозначности. Определим теперь модель Крипке с отмеченными мирами $\mathscr{A} = (W, \preccurlyeq, \mathrm{Aud})$ следующим образом: W и $\preccurlyeq$ остаются прежними;

$$\mathrm{Aud} = \{a \in W \mid \exists\, x \in X \ a\widetilde{R}x\} = \{a \in W \mid \exists\, x \in X \ aR_!x \wedge xR_?a\}.$$

Поскольку шкала $\mathscr{K}$ обладает свойством однозначности, то для каждого $a \in \mathrm{Aud}$ существует единственное $x \in X$ такое, что $a\widetilde{R}x$. Проверим, что при этом действительно получается шкала Крипке с отмеченными мирами. Для этого убедимся, что выполнено свойство $\forall\, a \in W \ \ \exists\, b \in W \ \ (a \preccurlyeq b \wedge b \in \mathrm{Aud})$. Рассмотрим произвольное $a \in W$. По свойству 4) шкал Крипке логики HC $\exists\, x \in X \ \ aR_!x$. По свойству 1) для этого $x \in X \ \exists\, b \in W \ \ (xR_?b \wedge bR_!x)$, значит, $b \in \mathrm{Aud}$. Наконец, по свойству 2) $\forall\, x \in X \ \ \forall\, a, b \in W \ \ (aR_!x \wedge xR_?b \Rightarrow a \preccurlyeq b)$ заключаем, что $a \preccurlyeq b$. Тем самым, проверено требуемое свойство.

Определим оценки переменных в шкале $\mathscr{A}$. Оценки интуиционистских переменных определяются так же, как и в старой шкале $\mathscr{K}$, а для классической переменной p и мира $a \in \mathrm{Aud}$ положим $a \models p \Leftrightarrow \exists\, x \in X \ \ (a\widetilde{R}x \wedge x \models p)$. Поскольку шкала $\mathscr{K}$ обладает свойством однозначности, то это определение корректно. Более того, из свойства 1) шкал Крипке логики HC следует, что для любого мира $x \in X$ найдется мир $a \in \mathrm{Aud}$, для которого $a\widetilde{R}x$, т.е. при построении шкалы $\mathscr{A}$ ни один мир из множества X "не будет утерян".

Осталось проверить, что истинность формул в модели $\mathscr{A}$ такая же, как и в модели $\mathscr{K}$, в следующем смысле: $\mathscr{K}, a \models \varphi \Leftrightarrow \mathscr{A}, a \models \varphi$, если $a \in W$, и $\mathscr{K}, x \models p \Leftrightarrow \mathscr{A}, a \models p$, если $x \in X$, $a \in W$ и $a\widetilde{R}x$. Проделаем это индукцией по построению формул: для переменных это уже имеет место по определению, для классических и интуиционистских связок определения истинности в обеих моделях одинаковы. Осталось проверить этот факт для модальностей.

Для модальности ? запишем определения истинности:

$$\mathscr{K}, x \models ?\alpha \Leftrightarrow \forall b \in W\ (xR_?b \Rightarrow b \models \alpha) \quad (x \in X);$$
$$\mathscr{A}, a \models ?\alpha \Leftrightarrow \mathscr{A}, a \models \alpha \quad (a \in \mathrm{Aud}).$$

Необходимо доказать, что если $a\widetilde{R}x$, то $\mathscr{K}, x \models ?\alpha \Leftrightarrow \mathscr{A}, a \models ?\alpha$.

Пусть $\mathscr{A}, a \models ?\alpha$. Тогда $\mathscr{A}, a \models \alpha$ (по определению), $\mathscr{K}, a \models \alpha$ (по индуктивной гипотезе). Заметим, что $\forall b \in W \quad (xR_?b \Rightarrow b \models \alpha)$, так как из $xR_?b$ и $a\widetilde{R}x$ следует $a \preccurlyeq b$ по свойству 2) шкал Крипке логики НС, а из этого следует $b \models \alpha$ по монотонности оценки (лемма 2.2). Последнее соотношение означает, что $\mathscr{K}, x \models ?\alpha$.

Обратно, пусть $\mathscr{A}, a \not\models ?\alpha$. Тогда $\mathscr{A}, a \not\models \alpha$ (по определению), $\mathscr{K}, a \not\models \alpha$ (по индуктивной гипотезе). Отсюда получаем $\exists b \in W \quad (xR_?b \wedge b \not\models \alpha)$, так как можно взять $b = a$. Следовательно, $\mathscr{K}, x \not\models ?\alpha$, что и требовалось.

Для модальности ! запишем определения истинности:

$$\mathscr{K}, a \models !p \Leftrightarrow \forall y \in X\ (aR_!y \Rightarrow y \models p) \quad (a \in W);$$
$$\mathscr{A}, a \models !p \Leftrightarrow \forall b \in \mathrm{Aud}\ (a \preccurlyeq b \Rightarrow b \models p) \quad (a \in W).$$

Необходимо доказать, что $\mathscr{K}, a \models !p \Leftrightarrow \mathscr{A}, a \models !p$.

Пусть $\mathscr{K}, a \models !p$. Рассмотрим произвольный $b \in \mathrm{Aud}$ такой, что $a \preccurlyeq b$. Для этого b существует $y \in X$ такой, что $b\widetilde{R}y$. По свойству 3) шкал Крипке логики НС заключаем, что $aR_!y$. Следовательно, $\mathscr{K}, y \models p$. По индуктивному предположению $\mathscr{A}, b \models p$. Отсюда получаем $\mathscr{A}, a \models !p$.

Обратно, пусть $\mathscr{A}, a \models !p$. Рассмотрим произвольный $y \in X$ такой, что $aR_!y$. По свойству 1) шкал Крипке логики НС существует $b \in W$ такой, что $b\widetilde{R}y$, т.е. $b \in \mathrm{Aud}$. По свойству 2) шкал Крипке логики HC $a \preccurlyeq b$. Следовательно, $\mathscr{A}, b \models p$. По индуктивной гипотезе $\mathscr{K}, y \models p$. Следовательно, $\mathscr{K}, a \models !p$.

Теорема 3.3 доказана. □

Замечание 3.2. 1) Из полноты логики HC относительно шкал Крипке с отмеченными мирами следует консервативность HC над H4 (см. теорему 3.1), потому что определение истинности для формул логики HC согласовано с определением истинности для формул логики H4 (если полагать $\nabla = !?$).

2) В теореме 3.3 шкала Крипке с отмеченными мирами получается конечной, если исходная шкала Крипке с двумя множествами миров логики HC конечна. Рассмотрим эту модель Крипке с отмеченными мирами как модель логики H4 (при этом полагаем $\nabla = !?$, формулы сорта высказывание не рассматриваются). В такой модели отношение $\preccurlyeq$ является предпорядком. Профакторизовав W по отношению эквивалентности $a \sim b \Leftrightarrow a \preccurlyeq b \wedge b \preccurlyeq a$ и определив $[a] \in \mathrm{Aud} \Leftrightarrow \exists b\,(b \sim a \wedge b \in \mathrm{Aud})$, получим модель логики H4 с отмеченными мирами.

Таким образом отсюда следует, что логика H4 полна относительно класса конечных шкал Крипке с отмеченными мирами, что влечет разрешимость логики H4. (В [38] была доказана полнота логики H4 относительно класса произвольных шкал Крипке с отмеченными мирами, но не было отмечено свойство конечных моделей.)

3) Из полноты логики HC относительно шкал Крипке с отмеченными мирами и консервативности логики HC над S4 следует полнота логики S4 относительно стандартной семантики Крипке (см., например, [46]). Для этого необходимо рассмотреть модель Крипке с отмеченными мирами, после чего рассмотреть модель, состоящую из множества Aud с индуцированным на нём предпорядком $\preccurlyeq$. Истинность переменных сорта высказывание остаётся прежней, переменные сорта задача не рассматриваются. Тогда, учитывая, что $\Box = ?!$, истинность всех формул сорта высказывание останется прежней.

4) Доказательство теоремы 3.2 показывает, что модели Крипке логики HC с отмеченными мирами по существу являются частным случаем моделей Крипке с двумя множествами миров логики HC. По теореме 3.3 для проверки доказуемости данной формулы в логике HC достаточно ограничиться более удобными моделями с отмеченными мирами.

3.3 Топологические модели логик HC и H4

Одну из стандартных семантик неклассических логик образует семантика, опирающаяся на понятие топологического пространства. С. А. Мелихов построил несколько типов топологических моделей логики QHC [78], но данная семантика не обладала свойством полноты даже для пропозиционального фрагмента логики QHC — логики HC. В этом разделе мы рассмотрим топологические модели логики HC, для которых имеет место теорема о корректности и полноте.

В работе В. Н. Крупского [15] рассматривается топологическая семантика логик IEL и IEL$^+$, и для этих семантик доказана теорема о полноте. Семантика, предложенная В. Н. Крупским для логики IEL$^+$, совпадает с рассматриваемой нами семантикой логики H4. В настоящем разделе предлагается доказательство теоремы о полноте логики H4 относительно топологической семантики, опирающееся на теорему 3.3 о полноте логики HC относительно топологической семантики, а также на консервативность логики HC над логикой H4 (теорему 3.1).

3.3.1 Топологические модели логики HC

Опишем класс моделей логики HC, опирающихся на понятие топологического пространства, и докажем теорему о корректности и полноте логики HC относительно данного класса моделей. Будем называть их *топологическими моделями логики* HC.

Пусть (X, τ) — произвольное непустое топологическое пространство, A — его всюду плотное подмножество. Переменные p сорта высказывание интерпретируются как произвольные подмножества $|p| \subseteq A$. Переменные α сорта задача интерпретируются как произвольные открытые подмножества $|\alpha| \subseteq X$. Истинностные значения формул определяются индукцией по построению формулы, при этом истинностное значение любой формулы сорта высказывание будет представлять некоторое подмножество A, а истинностное значение любой формулы сорта задача будет представлять некоторое открытое подмножество X.

Классические и интуиционистские связки и константы интерпретируются стандартным образом, см. например, [30]. Ниже приведена эта интерпретация.

Классические связки и константа 0:

$|p \wedge q| = |p| \cap |q|$;

$|p \vee q| = |p| \cup |q|$;

$|p \to q| = (A \setminus |p|) \cup |q|$;

$|0| = \varnothing$.

Интуиционистские связки и константа $\perp$:

$|\alpha \wedge \beta| = |\alpha| \cap |\beta|$;

$|\alpha \vee \beta| = |\alpha| \cup |\beta|$;

$|\alpha \to \beta| = \mathrm{Int}((X \setminus |\alpha|) \cup |\beta|)$;

$|\perp| = \varnothing$.

Модальности интерпретируются следующим образом:

$|?\alpha| = A \cap |\alpha|$;

$|!p| = X \setminus \mathrm{Cl}(A \setminus |p|)$.

Иными словами, $|!p|$ – это объединение всех открытых множеств U таких, что $U \cap A \subseteq |p|$.

Формула p сорта высказывание (формула α сорта задача) называется *истинной в топологической модели* логики HC, если $|p| = A$ ($|\alpha| = X$).

Теорема 3.4 (о корректности)**.** *Если формула выводима в логике* HC*, то она истинна в любой топологической модели логики* HC*.*

Доказательство. Для доказательства теоремы достаточно проверить, что все аксиомы логики HC истинны в любой топологической модели логики HC и что правила вывода логики HC сохраняют это свойство. Для аксиом и правил вывода классической (интуиционистской) пропозициональной логики это выполнено в силу корректности этой логики относительно булевых алгебр подмножеств (топологических моделей) [30]. Проверим указанное свойство для дополнительных аксиом и правил вывода логики HC.

$!(p \to q) \to (!p \to !q)$. Необходимо доказать, что $|!(p \to q) \to (!p \to !q)| = X$, то есть $|!(p \to q)| \subseteq |!p \to !q|$. По определению $|!(p \to q)| = X \setminus \mathrm{Cl}(|p| \setminus |q|)$ – открытое множество, $|!p \to !q| = \mathrm{Int}(\mathrm{Cl}(A \setminus |p|) \cup (X \setminus \mathrm{Cl}(A \setminus |q|)))$ – максимальное открытое множество, содержащееся внутри $\mathrm{Cl}(A \setminus |p|) \cup (X \setminus \mathrm{Cl}(A \setminus |q|))$. Таким образом, достаточно доказать, что $X \setminus \mathrm{Cl}(|p| \setminus |q|) \subseteq \mathrm{Cl}(A \setminus |p|) \cup (X \setminus \mathrm{Cl}(A \setminus |q|))$. Это равносильно $(X \setminus \mathrm{Cl}(A \setminus |p|)) \cap \mathrm{Cl}(A \setminus |q|) \subseteq \mathrm{Cl}(|p| \setminus |q|)$. Возьмём произвольную точку x такую, что $x \in \mathrm{Cl}(A \setminus |q|)$ и $x \notin \mathrm{Cl}(A \setminus |p|)$. Второе условие означает существование окрестности U точки x такой, что $U \cap (A \setminus |p|) = \varnothing$. В силу всюду плотности A это равносильно тому, что любое непустое открытое подмножество U содержит точку из $|p|$. Пусть V — произвольная окрестность точки x. Первое условие означает, что для окрестности $U \cap V$ точки x имеем $U \cap V \cap (A \setminus |q|) \neq \varnothing$. Отсюда получаем, что $U \cap V$ содержит точку, лежающую в $|p|$ и не лежащую в $|q|$, что означает $x \in \mathrm{Cl}(|p| \setminus |q|)$.

$?(\alpha \to \beta) \to (?\alpha \to ?\beta)$. Необходимо доказать, что $|?(\alpha \to \beta) \to (?\alpha \to ?\beta)| = A$, то есть $|?(\alpha \to \beta)| \subseteq |?\alpha \to ?\beta|$. По определению $|?(\alpha \to \beta)| = A \cap \mathrm{Int}((X \setminus |\alpha|) \cup |\beta|)$, $|?\alpha \to ?\beta| = (A \setminus |?\alpha|) \cup |?\beta| = (A \setminus (A \cap |\alpha|)) \cup (A \cap |\beta|) = (A \setminus |\alpha|) \cup (A \cap |\beta|)$. Пусть $x \in |?(\alpha \to \beta)|$, откуда следует, что $x \in A$, а также $x \in X \setminus |\alpha|$ или $x \in |\beta|$. Получаем, что $x \in A \setminus |\alpha|$ или $x \in A \cap |\beta|$, то есть $x \in |?\alpha \to ?\beta|$.

$\dfrac{p}{!p}$. Пусть $|p| = A$. Тогда $|!p| = X \setminus \mathrm{Cl}(A \setminus |p|) = X \setminus \mathrm{Cl}(A \setminus A) = X$.

$\dfrac{\alpha}{?\alpha}$. Пусть $|\alpha| = X$. Тогда $|?\alpha| = A \cap |\alpha| = A \cap X = A$.

$?!p \to p$. Необходимо доказать, что $|?!p \to p| = A$, то есть $|?!p| \subseteq |p|$. $|?!p| = A \cap \bigcup\{U \in \tau \mid U \cap A \subseteq |p|\}$. Пусть $x \in |?!p|$, то есть $x \in A$ и существует такое открытое U, что $x \in U$ и $U \cap A \subseteq |p|$. Из этих условий следует, что $x \in |p|$, то есть $|?!p| \subseteq |p|$.

$\alpha \to !?\alpha$. Необходимо доказать, что $|\alpha \to !?\alpha| = X$, то есть $|\alpha| \subseteq |!?\alpha|$. $|!?\alpha| = \bigcup\{U \in \tau \mid U \cap A \subseteq |?\alpha|\} = \bigcup\{U \in \tau \mid U \cap A \subseteq A \cap |\alpha|\}$. $U = |\alpha|$ также входит в искомое объединение, поэтому $|\alpha| \subseteq |!?\alpha|$.

$\neg !0$. По определению $|0| = \varnothing$, $|!0| = X \setminus \mathrm{Cl}(A \setminus |0|) = X \setminus \mathrm{Cl}(A) = \varnothing$, поскольку A всюду плотно. $|\neg !0| = \mathrm{Int}(X \setminus |!0|) = \mathrm{Int}(X) = X$.

Теорема 3.4 доказана. □

Теорема 3.5 (о полноте). *Если формула φ невыводима в логике* HC, *то существует топологическая модель логики* HC, *в которой формула φ не является истинной.*

Доказательство. Пусть φ невыводима в HC. По теореме 3.3 существует модель Крипке $\mathscr{K} = (W, \preccurlyeq, \mathrm{Aud})$ такая, что в некотором мире модели $\mathscr{K}$ ложна формула φ. Определим топологическую модель логики HC. Топологическим пространством является множество W со стандартной александровской топологией, базой которой являются все верхние конусы (см., например, [34]). Всюду плотным подмножеством W является множество Aud, которое всюду плотно в силу свойства шкал Крипке логики НС $\forall a \in W\, \exists b \in W\ (a \preccurlyeq b \wedge b \in \mathrm{Aud})$. Определим в этой топологической модели отношение истинности для любой пропозициональной переменной естественным образом: $|p| = \{x \in \mathrm{Aud} \mid \mathscr{K}, x \models p\}$, $|\alpha| = \{x \in W \mid \mathscr{K}, x \models \alpha\}$, причём множество $|\alpha|$ окажется открытым в силу монотонности оценки интуиционистских формул в моделях Крипке.

Будем писать $x \models_{\text{Кр.}} \varphi$, если $\mathscr{K}, x \models \varphi$, и $x \models_{\text{топ.}} \varphi$, если $x \in |\varphi|$. Необходимо доказать, что $x \models_{\text{Кр.}} \varphi \Leftrightarrow x \models_{\text{топ.}} \varphi$. Покажем это индукцией по построению формулы. Для переменных это выполнено по определению отношения истинности в построенной топологической модели. Для классических и интуиционистских связок доказательство стандартно [30], [40], [84], [91], [86]. Проверим индуктивный переход с использованием модальностей.

$x \models_{\text{Кр.}} ?\alpha \Leftrightarrow x \in \mathrm{Aud}$ и $x \models_{\text{Кр.}} \alpha$. По предположению индукции последнее условие равносильно $x \models_{\text{топ.}} \alpha$, откуда получаем равносильность $x \models_{\text{топ.}} ?\alpha$.

$x \models_{\text{Кр.}} !p \Leftrightarrow \forall b \in \mathrm{Aud}(x \preccurlyeq b \Rightarrow b \models_{\text{Кр.}} p) \Leftrightarrow \forall b \in \mathrm{Aud}(x \preccurlyeq b \Rightarrow b \models_{\text{топ.}} p)$ (последняя равносильность имеет место в силу предположения индукции). Если последнее условие выполнено, то x лежит в открытом множестве $U = \{b \mid x \preccurlyeq b\}$, для которого выполнено $U \cap \mathrm{Aud} \subseteq |p|$, откуда $x \models_{\text{топ.}} !p$. Если же, наоборот, оно не выполнено, то всякое открытое множество U, содержащее x, будет содержать некоторую точку $b \in \mathrm{Aud}$, для которой $b \not\models_{\text{топ.}} p$, откуда $x \not\models_{\text{топ.}} !p$.

Из совпадения отношения истинности на множествах W и Aud как в модели Крипке, так и в топологической модели логики НС получаем утверждение теоремы.

Теорема 3.5 доказана. $\square$

Замечание 3.3. 1) В силу того, что логика НС полна относительно конечных моделей Крипке с отмеченными мирами, из доказательства теоремы выше получаем полноту логики НС относительно класса конечных александровских пространств.

2) Если в топологической модели логики НС взять всюду плотное подмножество A совпадающим со всем топологическим пространством X, то получим модели, которые ввёл в рассмотрение С. А. Мелихов и назвал их моделями

Эйлера-Тарского [78].

3) Если положить $A = X$ и рассматривать только классическую часть логики HC с производной модальностью $\Box =?!$, то получатся топологические модели логики S4 [76]. Логика HC является консервативным расширением логики S4 [77].

3.3.2 Топологические модели логики H4

Аналогично топологическим моделям логики HC, можно определить топологические модели логики H4. Как и для моделей логики HC, необходимо задать (X, τ) — произвольное непустое топологическое пространство и A — его всюду плотное подмножество. Пропозициональные переменные интерпретируются как произвольные открытые подмножества $|\alpha| \subseteq X$. Истинностные значения формул определяются индукцией по построению формулы. Индуктивный переход в определении истинности для булевых связок такой же, как в топологических моделях интуиционистской логики. Переход для модальности ∇ следующий:

$$|\nabla\varphi| = X \setminus \mathrm{Cl}(A \setminus |\varphi|).$$

Теорема 3.6 (о корректности)**.** *Если формула выводима в логике* H4*, то она истинна в любой топологической модели логики* H4*.*

Доказательство. Отметим, что если понимать формулу φ логики H4 как формулу логики HC, где модальность ∇ интерпретируется как $!?$, то определение истинности формулы φ в топологической модели логики H4 совпадает с определением истинности этой формулы в топологической модели логики HC (при этом считаем, что истинность пропозициональных переменных остаётся прежней). Для доказательства этого факта достаточно проверить только индуктивный переход в определении истинности с ипользованием модальности ∇. Действительно, в топологической модели логики H4 имеем $|\nabla\varphi| = X \setminus \mathrm{Cl}(A \setminus |\varphi|)$, а в топологической модели логики HC имеем $|!?\alpha| = X \setminus \mathrm{Cl}(A \setminus |?\alpha|) = X \setminus \mathrm{Cl}(A \setminus (A \cap |\alpha|)) = X \setminus \mathrm{Cl}(A \setminus |\alpha|)$. Поскольку любая теорема логики H4 выводима в HC [77], получаем требуемое. $\Box$

Теорема 3.7 (о полноте)**.** *Если формула φ невыводима в логике* H4*, то существует топологическая модель логики* H4*, в которой формула φ не является истинной.*

Доказательство. Как было отмечено в доказательстве теоремы 3.6, топологические модели логики H4 можно рассматривать как топологические модели логики HC с сохранением значений пропозициональных переменных. Если при этом понимать модальность ∇ логики H4 как производную модальность !? логики HC, то истинностные значения формул будут сохраняться. По теореме 3.1, логика H4 является консервативным расширением логики HC. Это означает, что невыводимость формулы φ в логике H4 равносильна невыводимости формулы φ в логике HC. Таким образом, по теореме 3.5 существует топологическая модель логики HC такая, что в этой модели опровергается формула φ. Поскольку отношение истинности при переходе от модели логики H4 к модели логики HC сохраняется, получаем требуемую модель логики H4. $\square$

Замечание 3.4. 1) Теорему 3.7 можно доказывать, не опираясь на консервативность логики HC относительно логики H4. Для этого можно, как в доказательстве теоремы 3.5, используя модели Крипке с отмеченными мирами логики H4, рассмотреть в качестве топологического пространства множество верхних конусов, а в качестве всюду плотного подмножества — множество Aud, после чего определить отношение истинности на этой модели и проверить его совпадение с отношением истинности на моделях Крипке логики H4.

2) Аналогично отмеченному в замечании 3.3, логика H4 полна относительно класса конечных александровских пространств.

Глава 4

Семантика логик QHC и $\mathrm{QH4}$

В главе 2 была построена семантика типа Крипке логики HC — пропозиционального фрагмента логики QHC. В этой главе мы построим семантику логики QHC на основе семантики Крипке с отмеченными мирами.

4.1 Выводимость из гипотез в логике QHC

Определение 4.1. *Вывод в логике* QHC — конечная последовательность формул $\Phi_1, \ldots, \Phi_n$ такая, что для каждого $i = 1, \ldots, n$ формула Φ_i либо является аксиомой логики QHC, либо получена из одной или двух предыдущих формул этого списка по одному из правил вывода (правилу modus ponens, или по одному из правил Бернайса, или по одному из правил усиления). Формула Φ *выводима в логике* QHC (*является теоремой логики* QHC), если существует вывод, оканчивающийся формулой Φ. Обозначение: $\vdash \Phi$.

Определение 4.2. *Квазивывод из гипотез* Γ — конечная последовательность формул $\Phi_1, \ldots, \Phi_n$ такая, что для каждого $i = 1, \ldots, n$ формула Φ_i либо является аксиомой логики QHC, либо является гипотезой (формулой из множества Γ), либо получена из одной или двух предыдущих формул по одному из правил вывода.

Для данного квазивывода $\Phi_1, \ldots, \Phi_n$ и для каждого $i = 1, \ldots, n$ определим по индукции множество $\Delta(\Phi_i) \subseteq \Gamma$:

1. если Φ_i — аксиома, то $\Delta(\Phi_i) = \varnothing$;

2. если Φ_i — гипотеза, то $\Delta(\Phi_i) = \{\Phi_i\}$;

3. если Φ_i получена по правилу modus ponens из Φ_k и Φ_l, то

$$\Delta(\Phi_i) = \Delta(\Phi_k) \cup \Delta(\Phi_l);$$

4. если Φ_i получена по одному из правил Бернайса 10, 11 или же по одному из правил усиления 3, 4 из Φ_k, то $\Delta(\Phi_i) = \Delta(\Phi_k)$.

Неформально, $\Delta(\Phi_i)$ — множество гипотез, от которых зависит формула Φ_i, получающаяся при выводе.

Определение 4.3. *Вывод из гипотез* Γ — квазивывод из Γ, в котором любое применение правил Бернайса 10 и 11 к формуле Φ_i связывает переменную, не входящую свободно ни в одну из формул множества $\Delta(\Phi_i)$. Формула Φ *выводима из* Γ, если существует вывод из Γ, оканчивающийся формулой Φ. Обозначение: $\Gamma \vdash^* \Phi$.

Определение 4.4. *Слабый квазивывод из гипотез* Γ — конечная последовательность формул $\Phi_1, \ldots, \Phi_n$ такая, что для каждого $i = 1, \ldots, n$ формула Φ_i либо является теоремой логики QHC, либо является гипотезой, либо получена из двух предыдущих формул этого списка по правилу modus ponens или по одному из правил Бернайса.

Аналогичным образом определяется $\Delta(\Phi_i)$ для данного слабого квазивывода и понятие *слабого вывода из множества гипотез* Γ. Тот факт, что существует слабый вывод формулы Φ из множества гипотез Γ, обозначается как $\Gamma \vdash \Phi$.

Если Γ и Δ – два множества формул, то будем писать $\Gamma \vdash \Delta$ ($\Gamma \vdash^* \Delta$), если $\Gamma \vdash \Phi$ ($\Gamma \vdash^* \Phi$) для любой формулы $\Phi \in \Delta$.

Теорема 4.1 (о дедукции)**.** *Пусть* Γ *— некоторое множество формул,* Φ, Ψ *— формулы одного сорта. Пусть* $\Gamma \cup \{\Phi\} \vdash \Psi$*. Тогда* $\Gamma \vdash \Phi \to \Psi$*.*

Доказательство. Доказательство проводится индукцией по длине вывода. Доказательство аналогичной теоремы приведено в [29]. □

Отметим несколько простых свойств отношений выводимости $\vdash$ и $\vdash^*$ из гипотез в логике QHC.

Лемма 4.1.
1) Пусть Γ *– множество формул сорта задача и* $\Gamma \vdash \alpha$*. Тогда* $?\Gamma \vdash ?\alpha$*.*
2) Пусть Γ *– множество формул сорта высказывание и* $\Gamma \vdash p$*. Тогда* $!\Gamma \vdash !p$*.*

Доказательство. Докажем первый пункт леммы. Из того, что $\Gamma \vdash \alpha$, следует, что существует конечное множество формул $\beta_1, \ldots, \beta_n \in \Gamma$ таких, что $\{\beta_1, \ldots, \beta_n\} \vdash \alpha$. Применяя несколько раз теорему о дедукции 4.1, имеем $\vdash \beta_1 \to (\ldots(\beta_n \to \alpha))$. Переписав равносильным образом, получаем $\vdash \beta_1 \wedge \ldots \wedge \beta_n \to \alpha$. Получаем, что $\beta_1 \wedge \ldots \wedge \beta_n \to \alpha$ — теорема логики QHC. Следовательно, $?(\beta_1 \wedge \ldots \wedge \beta_n \to \alpha)$ также является теоремой логики QHC. Далее, так как $?\beta_1, \ldots, ?\beta_n \in ?\Gamma$, имеем $?\Gamma \vdash ?\beta_1 \wedge \ldots \wedge ?\beta_n$. Кроме того, из того, что $?(\beta_1 \wedge \ldots \wedge \beta_n \to \alpha)$ – теорема логики QHC, получаем $?\Gamma \vdash ?\beta_1 \wedge \ldots \wedge ?\beta_n \to ?\alpha$ (здесь была применена аксиома $?(\beta \to \gamma) \to (?\beta \to ?\gamma)$ и теорема QHC $?(\beta \wedge \gamma) \leftrightarrow (?\beta \wedge ?\gamma)$, см. утверждение 1.1). Наконец, применяя правило вывода modus ponens, получаем $?\Gamma \vdash ?\alpha$.

Второй пункт леммы доказывается аналогично первому: в логике QHC имеется аксиома $!(p \to q) \to (!p \to !q)$, а $!(p \wedge q) \leftrightarrow (!p \wedge !q)$ является теоремой логики QHC по утверждению 1.1. □

Кроме того, имеет место консервативность: при слабом выводе формулы сорта задача можно оставить среди гипотез только формулы сорта задача; при слабом выводе формулы сорта высказывание можно оставить среди гипотез только формулы сорта высказывание.

Определение 4.5. Для множества формул Γ обозначим через Γ^C множество формул сорта высказывание из Γ, а через Γ^H – множество формул сорта задача из Γ.

Лемма 4.2. *1)* $\Gamma \vdash \alpha \Leftrightarrow \Gamma^H \vdash \alpha$*.*
2) $\Gamma \vdash p \Leftrightarrow \Gamma^C \vdash p$*.*

Доказательство. В обоих пунктах следование справа налево очевидно, а слева направо проводится несложной индукцией по построению вывода. □

Также отметим связь между отношениями $\vdash$ и $\vdash^*$.

Лемма 4.3. *1)* $\Gamma \vdash^* \alpha \Leftrightarrow \Gamma^H, !\Gamma^C \vdash \alpha$*;*
2) $\Gamma \vdash^* p \Leftrightarrow ?\Gamma^H, ?!\Gamma^C \vdash p$*.*

Доказательство. Следование справа налево в 1) и 2) очевидно: гипотезы правой части получаются по правилам усиления из гипотез левой. Следование слева направо для 1) и 2) докажем совместной индукцией по построению выводов. Ясно, что достаточно рассмотреть шаг индукции с применением правил усиления.

1) Пусть α получена по правилу усиления $\dfrac{p}{!p}$, тогда $\alpha =!p$. Значит, $\Gamma \vdash^* p$. По предположению индукции для второго пункта леммы имеем $?\Gamma^H, ?!\Gamma^C \vdash p$. Тогда $!?\Gamma^H, !?!\Gamma^C \vdash !p$ по лемме 4.1. Так как в логике QHC имеет место равносильность $!?!q \leftrightarrow !q$, получаем $!?\Gamma^H, !\Gamma^C \vdash !p$. Поскольку в логике QHC имеет место аксиома $\beta \to !?\beta$, имеем $\Gamma^H, !\Gamma^C \vdash !p$.

2) Пусть p получена по правилу усиления $\dfrac{\alpha}{?\alpha}$, тогда $p =?\alpha$. Значит, $\Gamma \vdash^* \alpha$. По предположению индукции для первого пункта леммы имеем $\Gamma^H, !\Gamma^C \vdash \alpha$. Тогда $?\Gamma^H, ?!\Gamma^C \vdash ?\alpha$ по лемме 4.1, что и требовалось. □

Лемма 4.4. *Пусть* Γ *— некоторое множество формул.*

1) Если $\Gamma \nvdash \alpha$ *для некоторой формулы* α *сорта задача, то* $\Gamma \nvdash \perp$.

2) Если $\Gamma \nvdash p$ *для некоторой формулы* p *сорта высказывание, то* $\Gamma \nvdash 0$.

Доказательство. Лемма следует из того, что формулы $\perp \to \alpha$, $0 \to p$ являются теоремами QHC: $\perp \to \alpha$ – интуиционистская тавтология для любой формулы α сорта задача, $0 \to p$ – классическая тавтология для любой формулы p сорта высказывание. □

Определение 4.6. Множество замкнутых формул Γ некоторого языка будем называть *теорией в логике* QHC, если оно содержит все теоремы логики QHC, замкнуто относительно слабой выводимости (если $\Gamma \vdash \Phi$, то $\Phi \in \Gamma$) и $?\Gamma^H \subseteq \Gamma^C$. Теория *непротиворечива*, если она не содержит констант 0 и $\perp$.
Замыканием $[\Gamma]$ множества замкнутых формул Γ будем называть наименьшую по включению теорию, содержащую это множество.

Замечание 4.1. Пусть имеется некоторое множество Γ, состоящее из формул логики QHC. Отметим, что для получения его замыкания $[\Gamma]$ необходимо проделать следующее:
1) Добавить к Γ все теоремы логики QHC, получив множество Γ_1.

2) Замкнуть Γ_1 относительно интуиционистских правил Бернайса и modus ponens, получив множество Γ_2.
3) Рассмотреть множество $\Gamma_3 = ?\Gamma_2^H \cup \Gamma_2$ и замкнуть его относительно классических правил Бернайса и modus ponens.
Ясно, что получившееся в результате множество является наименьшей по включению теорией, содержащей Γ.

Лемма 4.5. *Пусть* Γ *— теория в логике* QHC. *Тогда, если* $\Gamma \nvdash 0$, *то* $\Gamma \nvdash \bot$.

Доказательство. Предположим, что $\Gamma \vdash \bot$. Значит, $\bot \in \Gamma$. В силу того, что $?\Gamma^H \subseteq \Gamma^C$, получаем $\Gamma \vdash ?\bot$. $?\bot \to 0$ — теорема QHC (см. утверждение 1.1). Далее по modus ponens получаем $\Gamma \vdash 0$. □

Из доказанной леммы следует, что для непротиворечивости теории достаточно потребовать только отсутствия константы 0 среди теорем данной теории.

Лемма 4.6. *Пусть* Γ *— некоторое множество формул,* p *— формула сорта высказывание,* β *— формула сорта задача. Тогда:*
1) $\beta \in [\Gamma] \Leftrightarrow \Gamma \vdash \beta$.
2) $p \in [\Gamma] \Leftrightarrow ?\Gamma^H \cup \Gamma^C \vdash p$.

Доказательство. В обоих пунктах импликация справа налево очевидна. Докажем, что имеет место следствие слева направо.

1) Пусть $\beta \in [\Gamma]$. Согласно замечанию 4.1, это означает, что либо β является теоремой логики QHC, либо имеется слабый вывод формулы β из Γ. В обоих случаях, пользуясь леммой 4.2, получаем $\Gamma \vdash \beta$.

2) Пусть $p \in [\Gamma]$. Рассмотрим множество Γ_1, которое получается из Γ добавлением всех теорем логики QHC, и множество Γ_2, которое получается из Γ_1 замыканием относительно интуиционистских правил Бернайса и modus ponens. Согласно замечанию 4.1 получаем, что либо p является теоремой логики QHC, либо имеется слабый вывод формулы p из $?\Gamma_2^H \cup \Gamma_2$. В обоих случаях, пользуясь леммой 4.2, получаем $?\Gamma_2^H \cup \Gamma_2^C \vdash p$. Поскольку $\Gamma^H \vdash \Gamma_2^H$ и $\Gamma^C \vdash \Gamma_2^C$, окончательно получаем $?\Gamma^H \cup \Gamma^C \vdash p$.

□

4.2 Модели Крипке с отмеченными мирами логики QHC

Пусть Ω — язык логики QHC. *Моделью Крипке с отмеченными мирами* этого языка логики QHC называется пятёрка $\mathscr{K} = (W, \preccurlyeq, \mathrm{Aud}, D, \models)$, где $(W, \preccurlyeq, \mathrm{Aud})$ — шкала Крипке, D — функция, которая каждому $a \in W$ сопоставляет непустое множество D_a. Для каждого $a \in W$ расширим язык Ω множеством константных символов для обозначения всех элементов D_a (будем отождествлять эти константные символы и элементы D_a). Обозначим этот расширенный язык через $\Omega(D_a)$. $\models$ — соответствие между мирами (отмеченными мирами) $a \in W$ и замкнутыми атомарными формулами сорта задача (сорта высказывание) языка $\Omega(D_a)$. Таким образом, формулы сорта задача могут быть истинны или ложны в любом мире множества W, но формулы сорта высказывание могут быть истинны или ложны только в мирах из множества Aud.

Кроме того, выполнены следующие условия.

1. Если $a \preccurlyeq b$, то $D_a \subseteq D_b$. Интуитивно, D_a — множество объектов, построенных к моменту времени a и доступных для исследования. Условие $a \preccurlyeq b \Rightarrow D_a \subseteq D_b$ означает, что обнаруженные объекты не исчезают в будущем.

2. Если язык Ω содержит константу c, то ей сопоставляется объект $\bar{c}$, который принадлежит любому D_a для $a \in W$. В дальнейшем c отождествляется с элементом $\bar{c}$.

3. Если $\varphi(z_1, \ldots, z_n)$ — замкнутая атомарная формула сорта задача в языке $\Omega(D_a)$, $a \models \varphi(z_1, \ldots, z_n)$ и $a \preccurlyeq b$, то $b \models \varphi(z_1, \ldots, z_n)$ (для атомарных формул сорта задача выполнена монотонность).

Пусть $a \in W$ ($a \in \mathrm{Aud}$). Продолжим соответствие $\models$ между a и множеством замкнутых атомарных формул сорта задача (сорта высказывание) языка $\Omega(D_a)$ до соответствия $\models$ между a и множеством всех замкнутых формул сорта задача (сорта высказывание) языка $\Omega(D_a)$ индукцией по построению формулы. Для атомарных формул оно уже определено; для любого мира $b \in W$ ($b \in \mathrm{Aud}$) полагаем $b \not\models \bot$ ($b \not\models 0$). Индуктивный переход для классических связок $\wedge, \vee, \rightarrow$

определяется поточечно в мирах множества Aud:
$a \models p \wedge q$ тогда и только тогда, когда $a \models p$ и $a \models q$;
$a \models p \vee q$ тогда и только тогда, когда $a \models p$ или $a \models q$;
$a \models p \to q$ тогда и только тогда, когда $a \not\models p$ или $a \models q$.

Индуктивный переход для интуиционистских связок $\wedge, \vee, \to$ определяется в мирах множества W как в стандартных моделях Крипке интуиционистской логики. Индуктивный переход для модальностей определяется следующим образом:

$$a \models ?\alpha \Leftrightarrow a \models \alpha \text{ (для } a \in \mathrm{Aud})$$
$$a \models !p \Leftrightarrow \forall b \in \mathrm{Aud}(a \preccurlyeq b \Rightarrow b \models p) \text{ (для } a \in W).$$

Определим индуктивный переход для классических кванторов $\exists$ и $\forall$ ($a \in \mathrm{Aud}$).

$$a \models \exists x\ p \Leftrightarrow (\exists z \in D_a) a \models p[x/z];$$
$$a \models \forall x\ p \Leftrightarrow (\forall z \in D_a) a \models p[x/z].$$

(Здесь $p[x/z]$ означает результат замены всех свободных вхождений x в p на z.)

Наконец, определим индуктивный переход для интуиционистских кванторов $\exists$ и $\forall$ ($a \in W$).

$$a \models \exists x\ \alpha \Leftrightarrow \exists z \in D_a\ a \models \alpha[x/z];$$
$$a \models \forall x\ \alpha \Leftrightarrow \forall b \succcurlyeq a\ \forall z \in D_b\ b \models \alpha[x/z].$$

Отметим, что выше мы определили соответствие $w \models A$ для замкнутых формул A сорта задача (сорта высказывание) языка $\Omega(D_w)$ и мира $w \in W$ ($w \in \mathrm{Aud}$). Допустима также запись $\mathscr{K}, w \models A$, чтобы подчеркнуть, о какой именно модели Крипке идёт речь. Если $w \models A$, то будем говорить, что формула A *истинна в мире* w. Будем говорить, что формула A сорта задача (высказывание) *истинна в модели Крипке* $\mathscr{K}$ *с отмеченными мирами языка* Ω, если она истинна в любом мире (отмеченном мире) этой модели Крипке. Обозначение: $\mathscr{K} \models A$.

Следующая лемма доказывается стандартной индукцией по построению формулы.

Лемма 4.7 (монотонность). *Если $a \preccurlyeq b$ и $a \models \alpha$, то $b \models \alpha$.*

Теорема 4.2 (корректность)**.** *Если замкнутая формула языка* Ω *выводима в логике* QHC*, то она истинна в любой модели Крипке для языка* Ω*.*

Доказательство. Докажем более общее утверждение: если формула выводима в логике QHC, то её универсальное замыкание истинно в любой модели Крипке. Очевидно, достаточно проверить, что универсальное замыкание любой аксиомы истинно в любой модели Крипке и что правила вывода сохраняют это свойство.

Для аксиом и правил вывода логики HC это следует из корректности HC относительно моделей Крипке с отмеченными мирами (теорема 3.2), поскольку модели Крипке логики QHC с отмеченными мирами являются обогащением таковых моделей логики HC. Тот факт, что правило вывода modus ponens сохраняет указанное свойство формул, очевиден. Проверим это для новых аксиом и правил вывода 8-11. Для их классических вариантов корректность устанавливается непосредственно по определению, а для интуиционистских доказательство имеется в [29, теорема 53]. □

Приведём пример модели Крипке с отмеченными мирами.

Классическую логику иногда понимают как логику, в которой все высказывания делятся на истинные и ложные. В интуиционистской логике, помимо истинных и ложных высказываний, имеются также неустановленные, которые могут стать истинными или ложными спустя время. Поскольку в математике имеются недоказуемые и неопровержимые утверждения, второй подход представляется более удовлетворительным. Покажем, что логика QHC предусматривает эту возможность. Изобразим шкалу Крипке логики QHC, в которой отношение порядка $\preccurlyeq$ обозначено стрелками (если $x \preccurlyeq y$, то стрелка ведёт из x в y), а множество отмеченных миров $\mathrm{Aud} = \{b, c\}$.

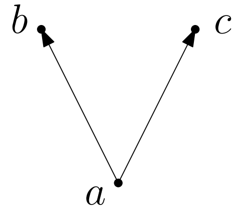

Рис. 4.1:

Зададим на ней оценку переменных: $b \models p$, $c \not\models p$. Отсюда получаем $b \models !p$, $c \models !\neg p$. Таким образом, находясь в мире a, выше него имеем два мира, в одном из которых строится доказательство высказывания p, а в другом строится доказательство высказывания $\neg p$.

4.3 Полнота логики QHC относительно моделей Крипке с отмеченными мирами

В доказательстве теоремы о полноте мы будем следовать общей канве [29], пользуясь идеями из [38]. Мы приведём доказательство теоремы о полноте для не более чем счётных языков. Для более чем счётных языков доказательство аналогично, но технически несколько более сложно, поскольку требует использования леммы Цорна и трансфинитной индукции.

Пусть имеется язык L_M, содержащий счётное множество константных символов M.

Определение 4.7. Множество формул Γ языка L_M называется M–*насыщенным,* если

1. Γ — непротиворечивая теория (в логике QHC);
2. Γ обладает *свойством дизъюнктивности:* если $A \vee B \in \Gamma$, то $A \in \Gamma$ или $B \in \Gamma$ (здесь A и B — формулы одного сорта);
3. Γ обладает *свойством экзистенциальности:* если $\exists v A(v) \in \Gamma$, то $A(c) \in \Gamma$ для некоторой константы $c \in M$.

Замечание 4.2.

1) Для теории Γ условие $\Gamma \vdash \varphi$ равносильно $\varphi \in \Gamma$.

2) Если теория Γ является M–насыщенной, то её классический фрагмент Γ^C является полной теорией по отношению к формулам сорта высказывание: для любой формулы p сорта высказывание либо $p \in \Gamma$, либо $\neg p \in \Gamma$ (но не обе сразу в силу $0 \notin \Gamma$). Это следует из того, что $p \vee \neg p$ — теорема логики QHC, а Γ обладает свойством дизъюнктивности.

Лемма 4.8. *Пусть M – не более чем счётное множество констант, M' – его расширение счётным множеством дополнительных констант* $\{c_1, c_2, \ldots\}$.

Пусть Γ — *теория в логике* QHC, p — *формула языка* L_M *сорта высказывание, и* $\Gamma \nvdash p$. *Тогда существует* M'*–насыщенная теория* Γ' *языка* $L_{M'}$ *такая, что* $\Gamma \subseteq \Gamma'$ *и* $p \notin \Gamma'$.

Доказательство. Приведём набросок доказательства. Аналогичное утверждение для интуиционистского исчисления предикатов доказано в [29].

Рассматривается последовательность всех экзистенциальных формул языка $L_{M'}$

$$\exists v_0 \Psi_0(v_0), \exists v_1 \Psi_1(v_1), \exists v_2 \Psi_2(v_2), \ldots$$

и последовательность всех дизъюнктивных формул языка $L_{M'}$

$$\Psi_0 \vee \Psi_0', \Psi_1 \vee \Psi_1', \Psi_2 \vee \Psi_2', \ldots .$$

Определим множество формул Γ_n для каждого n следующим образом. Γ_0 совпадает с множеством Γ. Далее, для каждого чётного n в последовательности экзистенциальных формул найдём первую ещё не рассмотренную формулу $\exists v \Psi(v)$ такую, что $\Gamma_n \vdash \exists v \Psi(v)$. Пусть c — константа, которая не встречается в формулах из Γ_n и формуле $\exists v \Psi(v)$. Положим $\tilde{\Gamma}_{n+1} = \Gamma_n \cup \{\Psi(c)\}$. Для каждого нечётного n в последовательности дизъюнктивных формул найдём первую ещё не рассмотренную формулу $\Psi \vee \Psi'$ такую, что $\Gamma_n \vdash \Psi \vee \Psi'$. Если $\Gamma_n \cup \{\Psi\} \nvdash p$, положим $\tilde{\Gamma}_{n+1} = \Gamma_n \cup \{\Psi\}$. В противном случае положим $\tilde{\Gamma}_{n+1} = \Gamma_n \cup \{\Psi'\}$. Наконец, определим $\Gamma_{n+1} = [\tilde{\Gamma}_{n+1}]$.

Положим $\Gamma' = \bigcup\limits_{n=0}^{\infty} \Gamma_n$ и покажем, что $\Gamma' \nvdash p$. Достаточно доказать, что $\Gamma_n \nvdash p$ для любого n. Рассуждаем индукцией по n. Действительно, для $n = 0$ это следует из условия леммы. Теперь пусть для некоторого n имеет место $\Gamma_n \nvdash p$. Докажем, что $\Gamma_{n+1} \nvdash p$. Предположим противное: пусть $\Gamma_{n+1} \vdash p$. Поскольку Γ_{n+1} – теория, это означает, что $p \in \Gamma_{n+1}$. В силу леммы 4.6 имеем $?\tilde{\Gamma}^H_{n+1} \cup \tilde{\Gamma}^C_{n+1} \vdash p$.

Рассмотрим два случая. Пусть n чётно. Тогда $\tilde{\Gamma}_{n+1} = \Gamma_n \cup \{\Psi(c)\}$, причём $\Gamma_n \vdash \exists v \Psi(v)$, а константа c не встречается в $\exists v \Psi(v)$ и формулах из Γ_n. Пусть формула $\Psi(c)$ имеет сорт высказывание. Тогда, в силу $\tilde{\Gamma}^C_{n+1} = \{\Psi(c)\} \cup \Gamma^C_n$ и $\tilde{\Gamma}^H_{n+1} = \Gamma^H_n$, применяя теорему о дедукции 4.1, получаем $?\Gamma^H_n \cup \Gamma^C_n \vdash \Psi(c) \to p$. Поскольку Γ_n – теория, то $?\Gamma^H_n \subseteq \Gamma_n$, и получаем $\Gamma_n \vdash \Psi(c) \to p$. Заменим в этом выводе каждое вхождение константы c на переменную u, которая не встречается ни в одной из формул данного вывода. Индукцией по выводу несложно показать, что тогда будет иметь место $\Gamma_n \vdash \Psi(u) \to p$. Применяя правило Бернайса, имеем $\Gamma_n \vdash \exists v\Psi(v) \to p$, а, так как $\Gamma_n \vdash \exists v\Psi(v)$, получаем $\Gamma_n \vdash p$, что противоречит предположению $\Gamma_n \nvdash p$.

Пусть $\Psi(c)$ имеет сорт задача. Поскольку $\tilde{\Gamma}^C_{n+1} = \Gamma^C_n$ и $?\tilde{\Gamma}^H_{n+1} =?\Gamma^H_n \cup \{?\Psi(c)\}$, то, применяя теорему о дедукции 4.1, получаем $?\Gamma^H_n \cup \Gamma^C_n \vdash ?\Psi(c) \to p$. Поскольку Γ_n – теория, то $?\Gamma^H_n \subseteq \Gamma_n$, и получаем $\Gamma_n \vdash ?\Psi(c) \to p$. Заменим в этом выводе каждое вхождение константы c на переменную u, которая не встречается ни в одной из формул данного вывода. Получим $\Gamma_n \vdash ?\Psi(u) \to p$. Применяя правило Бернайса, имеем $\Gamma_n \vdash \exists v?\Psi(v) \to p$. Поскольку $?\exists x\alpha(x) \leftrightarrow \exists x?\alpha(x)$ — теорема логики QHC (см. [77]), имеем $\Gamma_n \vdash ?\exists v\Psi(v) \to p$. Так как $\Gamma_n \vdash \exists v\Psi(v)$ и, так как Γ_n – теория, получаем $\Gamma_n \vdash ?\exists v\Psi(v)$, и далее получаем $\Gamma_n \vdash p$, что противоречит предположению $\Gamma_n \nvdash p$.

Пусть n нечётно. Тогда $\Gamma_n \vdash \Psi \vee \Psi'$. Обозначим $\Delta = [\Gamma_n \cup \{\Psi\}]$, $\Delta' = [\Gamma_n \cup \{\Psi'\}]$. Ясно, что достаточно показать, что из $\Delta \vdash p$ и $\Delta' \vdash p$ следует $\Gamma_n \cup \{\Psi \vee \Psi'\} \vdash p$ и, так как $\Gamma_n \vdash \Psi \vee \Psi'$, получаем противоречие с $\Gamma_n \nvdash p$. Разберём наиболее трудный случай — $\Psi \vee \Psi'$ имеет сорт задача. Тогда по лемме 4.6 имеем $?\Gamma^H_n \cup \Gamma^C_n \cup \{?\Psi\} \vdash p$ и $?\Gamma^H_n \cup \Gamma^C_n \cup \{?\Psi'\} \vdash p$. По теореме о дедукции 4.1 получаем $?\Gamma^H_n \cup \Gamma^C_n \vdash ?\Psi \to p$ и $?\Gamma^H_n \cup \Gamma^C_n \vdash ?\Psi' \to p$. Поскольку Γ_n — теория, то $?\Gamma^H_n \subseteq \Gamma_n$, и получаем $\Gamma_n \vdash ?\Psi \to p$ и $\Gamma_n \vdash ?\Psi' \to p$. В силу того, что $(q_1 \to r) \to ((q_2 \to r) \to (q_1 \vee q_2 \to r))$ — аксиома логики QHC, имеем $\Gamma_n \vdash (?\Psi \vee ?\Psi') \to p$. Далее, поскольку $?(\alpha \vee \beta) \leftrightarrow (?\alpha \vee ?\beta)$ — теорема QHC (см. утверждение 1.1), получаем $\Gamma_n \vdash ?(\Psi \vee \Psi') \to p$. Так как $\Gamma_n \vdash \Psi \vee \Psi'$ и Γ_n — теория, получаем $\Gamma_n \vdash ?(\Psi \vee \Psi')$, откуда получаем $\Gamma_n \vdash p$, что противоречит предположению $\Gamma_n \nvdash p$.

Итак, было показано, что $\Gamma' \nvdash p$. Ясно, что Γ' содержит все теоремы логики QHC. Доказательство замкнутости Γ' относительно слабой выводимости, дизъюнктивного и экзистенциального свойства Γ' проводится аналогично доказательству подобной теоремы из [29]. Покажем, что $?\Gamma'^H \subseteq \Gamma'^C$. Действительно, если $\alpha \in \Gamma'^H$, то для некоторого n $\alpha \in \Gamma^H_n$, и, так как Γ_n — теория, получаем $?\alpha \in \Gamma^C_n$, то есть $?\alpha \in \Gamma'$. Таким образом, Γ' — теория. Наконец, это непротиворечивая теория (то есть достаточно $\Gamma' \nvdash 0$) по второму пункту леммы 4.4.

Лемма 4.8 доказана. □

Определение 4.8. M–насыщенная теория Γ *рефлексивна,* если $\Gamma_? \subseteq \Gamma$, где

$\Gamma_? = \{\alpha \mid ?\alpha \in \Gamma\}$.

Лемма 4.9. *Пусть* Γ *— некоторая теория,* $\Gamma \nvdash p$ *и* $\Delta = [\Gamma_? \cup \Gamma]$. *Тогда* $\Delta \nvdash p$.

Доказательство. Докажем от противного: пусть $\Delta \vdash p$. По лемме 4.6 имеем $?\Gamma^H, ?\Gamma_?, \Gamma^C, \Gamma_? \vdash p$. Поскольку $?\Gamma_? \subseteq \Gamma^C$, имеем $?\Gamma^H, \Gamma^C, \Gamma_? \vdash p$. Так как Γ — теория, то $?\Gamma^H \subseteq \Gamma^C$, и $\Gamma^C, \Gamma_? \vdash p$. Поскольку $\Gamma_?$ — множество формул сорта задача, по лемме 4.2 имеем $\Gamma^C \vdash p$, откуда приходим к противоречию с $\Gamma \nvdash p$. □

Лемма 4.10. *Пусть* M *— не более чем счётное множество констант,* M' *— его расширение счётным множеством дополнительных констант* $\{c_1, c_2, \ldots\}$. *Тогда для любой* M*–насыщенной теории* Γ*, если* $\Gamma \nvdash p$*, то существует рефлексивная* M'*–насыщенная теория* Δ *такая, что* $\Gamma \subseteq \Delta$ *и* $\Delta \nvdash p$.

Доказательство. Пусть $M = M_0 \subseteq M_1 \subseteq M_2 \subseteq \ldots M'$, где M_{i+1} — расширение M_i счётным числом констант, и $M' = \bigcup\limits_{i=0}^{\infty} M_i$.

Определим последовательность теорий $\Gamma^0, \Gamma^1, \Gamma^2, \ldots$, где Γ^i — M_i–насыщенная теория, следующим образом. Пусть $\Gamma_0 = \Gamma$. Для $n \geqslant 0$ определим

$$\Gamma^{n+1} = M_{n+1}\text{–насыщенная теория, что } \Gamma'_n = \Gamma^n_? \cup \Gamma^n \subseteq \Gamma^{n+1} \text{ и } \Gamma^{n+1} \nvdash p.$$

(Это возможно, так как из $\Gamma^n \nvdash p$ следует $\Gamma'_n \nvdash p$ по лемме 4.9. Далее расширим Γ'_n до M_{n+1}-насыщенной теории Γ_{n+1}, пользуясь леммой 4.8.)

Положим

$$\Delta = \bigcup_{n=0}^{\infty} \Gamma^n.$$

Ясно, что Δ — теория. Покажем, что Δ обладает свойством дизъюнктивности. Пусть $\psi_1 \vee \psi_2 \in \Delta$. Тогда $\psi_1 \vee \psi_2 \in \Gamma^n$ для некоторого $n \geqslant 0$. Поскольку Γ^n обладает свойством дизъюнктивности, то либо $\psi_1 \in \Gamma^n$, либо $\psi_2 \in \Gamma^n$. Отсюда $\psi_1 \in \Delta$ или $\psi_2 \in \Delta$.

Покажем, что Δ обладает свойством экзистенциальности. Пусть $\exists v\, \psi(v) \in \Delta$. Тогда $\exists v\, \psi(v) \in \Gamma^n$ для некоторого $n \geqslant 0$. Поскольку Γ^n обладает свойством экзистенциальности, то $\psi(c) \in \Gamma^n$ для некоторой константы $c \in M_n \subseteq M'$. Отсюда $\psi(c) \in \Delta$.

Покажем, что Δ рефлексивна, то есть $\Delta_? \subseteq \Delta$. Действительно, пусть $\alpha \in \Delta_?$. Тогда $?\alpha \in \Delta$, то есть $?\alpha \in \Gamma^n$ для некоторого n. Следовательно, $\alpha \in \Gamma^n_?$ и $\alpha \in \Gamma^{n+1}$, то есть $\alpha \in \Delta$.

Осталось показать, что $\Delta \nvdash p$. Действительно, в противном случае $p \in \Gamma^n$ для некоторого n — противоречие. Отсюда заключаем, что $\Delta \nvdash p$. $\square$

Лемма 4.11. *Пусть M — не более чем счётное множество констант, M' — его расширение счётным множеством дополнительных констант $\{c_1, c_2, \dots\}$. Тогда для любой теории Γ и формулы p в языке L_M, если $\Gamma \nvdash !p$, то существует рефлексивная M'–насыщенная теория Δ такая, что $\Gamma^H \subseteq \Delta$ и $p \notin \Delta$.*

Доказательство. Рассмотрим множество формул $\Gamma' = \Gamma^H \cup ?\Gamma^H$. Покажем, что $\Gamma' \nvdash p$. Действительно, предположим противное: $\Gamma' \vdash p$. Тогда по лемме 4.2 получаем, что $?\Gamma^H \vdash p$. Отсюда по лемме 4.1 имеем $!?\Gamma^H \vdash !p$. Поскольку $\alpha \to !?\alpha$ — аксиома логики QHC, имеем $\Gamma^H \vdash !?\Gamma^H$, и в конечном итоге получаем $\Gamma^H \vdash !p$, что противоречит условию $\Gamma \nvdash !p$. Следовательно, $\Gamma' \nvdash p$. Отсюда по лемме 4.10 найдётся рефлексивная M'–насыщенная теория Δ, содержащая Γ' (а, значит, и Γ^H) такая, что $p \notin \Delta$, что и требовалось. $\square$

Теорема 4.3. *Если M–насыщенная теория Γ языка L_M является рефлексивной, то существует модель Крипке $\mathscr{K} = (W, \preccurlyeq, \mathrm{Aud}, D, \models)$ с отмеченными мирами и её отмеченный мир x такие, что для любой формулы α сорта задача языка L_M выполнено $x \models \alpha \Leftrightarrow \alpha \in \Gamma$, а для любой формулы p сорта высказывание языка L_M выполнено $x \models p \Leftrightarrow p \in \Gamma$.*

Доказательство. Построим модель Крипке с отмеченными мирами $\mathscr{K}$ следующим образом. Определим последовательность множеств констант $M_0, M_1, M_2, \dots$ индуктивно: $M_0 = M$, а M_{i+1} получается добавлением к M_i счётного множества новых констант. Пусть W — семейство всех теорий Δ таких, что

1. Δ состоит из замкнутых формул некоторого языка L_{M_i};
2. Δ является M_i-насыщенной;
3. $\Gamma^H \subseteq \Delta$.

Для $\Delta_1, \Delta_2 \in W$ положим $\Delta_1 \preccurlyeq \Delta_2 \rightleftharpoons \Delta_1^H \subseteq \Delta_2^H$. $\Delta \in \mathrm{Aud}$ тогда и только тогда, когда Δ рефлексивна. Далее, пусть $\Delta \in W$ является M_i–насыщенной теорией. Тогда полагаем $D_\Delta = M_i$, и если $A(c_1, \ldots, c_n)$ — атомарная формула с константами $c_1, \ldots, c_n \in M_i$, то положим

$$\Delta \models A(c_1, \ldots, c_n) \rightleftharpoons A(c_1, \ldots, c_n) \in \Delta.$$

Проверим, что мы действительно получили модель Крипке с отмеченными мирами. Ясно, что $\preccurlyeq$ — частичный порядок на W и что $\mathrm{Aud} \subseteq W$. Далее, свойство $\forall \Delta_1 \in W\ \exists \Delta_2 \in W(\Delta_1 \preccurlyeq \Delta_2 \wedge \Delta_2 \in \mathrm{Aud})$ выполнено в силу леммы 4.10 (в качестве p можно взять, например, 0). Кроме того, для атомарных формул сорта задача выполнена монотонность отношения истинности $\models$ (так как $\Delta_1 \preccurlyeq \Delta_2 \Leftrightarrow \Delta_1^H \subseteq \Delta_2^H$). Наконец, из построения следует, что $\Delta_1 \preccurlyeq \Delta_2 \Rightarrow D_{\Delta_1} \subseteq D_{\Delta_2}$.

Таким образом, построена модель Крипке с отмеченными мирами $\mathscr{K} = (W, \preccurlyeq, \mathrm{Aud}, D, \models)$. Докажем, что для любого $\Delta \in W$ выполнено следующее: если Δ является M_i–насыщенным, то для любой замкнутой формулы A языка L_{M_i}

$$\Delta \models A \Leftrightarrow A \in \Delta$$

(при этом, если A — формула сорта высказывание, то рассматриваем данную равносильность только для $\Delta \in \mathrm{Aud}$). Тогда утверждение теоремы будет немедленно получено, если положить $x = \Gamma$.

Доказательство проводится индукцией по построению формулы A. Для атомарных формул это выполнено по определению $\models$. Доказательство случая индуктивного перехода с использованием интуиционистских связок и кванторов проводится методом, изложенным в [29] для интуиционистского исчисления предикатов. Приведём данное рассуждение в самом трудном случае — индуктивный переход для кванторов.

Пусть дана формула $\alpha(x)$ с единственной свободной переменной x. Тогда, в силу того, что $\alpha(c)$ — замкнутая формула для любой константы c, имеем следующую цепочку равносильностей:

$$\Delta \models \exists x\ \alpha(x) \Leftrightarrow \exists c \in D_\Delta(\Delta \models \alpha(c)) \Leftrightarrow \exists c \in D_\Delta(\alpha(c) \in \Delta) \Leftrightarrow \exists x\ \alpha(x) \in \Delta.$$

Последний равносильный переход слева направо имеет место в силу того, что

Δ замкнута относительно слабой выводимости, а справа налево — в силу того, что Δ обладает свойством экзистенциальности.

Рассмотрим цепочку равносильностей для квантора всеобщности:

$$\Delta \models \forall x\ \alpha(x) \Leftrightarrow \forall \Delta' \succcurlyeq \Delta\ \forall c \in D_{\Delta'}(\Delta' \models \alpha(c)) \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow \forall \Delta' \succcurlyeq \Delta\ \forall c \in D_{\Delta'}(\alpha(c) \in \Delta') \Leftrightarrow \forall x\ \alpha(x) \in \Delta$$

В обосновании нуждается только последний равносильный переход. Действительно, импликация справа налево выполнена в силу замкнутости Δ относительно слабой выводимости. Докажем импликацию слева направо. Пусть $\forall \Delta' \succcurlyeq \Delta\ \forall c \in D_{\Delta'}(\alpha(c) \in \Delta')$, но при этом условие $\forall x\ \alpha(x) \in \Delta$ не выполнено. Следовательно, $\Delta \nvdash \forall x\ \alpha(x)$. Тогда $\Delta \nvdash \alpha(c)$ для любой константы $c \notin D_\Delta$. Действительно, в противном случае, заменив все вхождения константы c на переменную u, не встречающуюся в этом выводе, получим вывод из Δ формулы $\alpha(u)$, после чего получим $\Delta \vdash \forall u\ \alpha(u)$, что противоречит предположению $\Delta \nvdash \forall x\ \alpha(x)$. Пусть Δ — M_i–насыщенная теория, тогда для $c \in M_{i+1} \setminus M_i$ имеем $\Delta \nvdash \alpha(c)$. В силу леммы 4.8 существует M_{i+2}–насыщенная теория Δ' такая, что $\Delta \preccurlyeq \Delta'$ и $\alpha(c) \notin \Delta'$, что противоречит изначальному предположению.

Доказательство случаев индуктивного перехода с использованием классических связок и кванторов проводится ещё более простым рассуждением (или можно определить «порядок» на отмеченных мирах как $\Delta^1 \preccurlyeq_{\text{клас.}} \Delta^2$, если $\Delta^1 = \Delta^2$, а затем просто повторить доказательство в интуиционистском случае). Осталось доказать случаи индуктивного перехода с применением модальностей.

Пусть $?\alpha \in \Delta$ (при этом $\Delta \in \mathrm{Aud}$, так как $?\alpha$ имеет сорт высказывание). Так как Δ — рефлексивная теория, $\alpha \in \Delta$. По предположению индукции $\Delta \models \alpha$. Отсюда $\Delta \models ?\alpha$ по определению $\models$.

Пусть $\Delta \models ?\alpha$. Тогда $\Delta \models \alpha$ по определению $\models$. По предположению индукции $\alpha \in \Delta$. Отсюда $?\alpha \in \Delta$ в силу того, что Δ — теория.

Пусть $!p \in \Delta$. Необходимо доказать, что $\Delta \models !p$, то есть $\forall \Delta' \in \mathrm{Aud}(\Delta \preccurlyeq \Delta' \Rightarrow \Delta' \models p)$. Рассмотрим произвольное $\Delta' \in \mathrm{Aud}$, $\Delta' \succcurlyeq \Delta$. Поскольку $!p \in \Delta$, имеем $!p \in \Delta'$ ($!p$ имеет сорт задача). Так как Δ' — теория, $?!p \in \Delta'$. Так как $?!p \to p$ — аксиома QHC, $p \in \Delta'$. По предположению индукции это означает, что $\Delta' \models p$. Отсюда $\Delta \models !p$.

Пусть $!p \notin \Delta$. Если Δ является M_i–насыщенной теорией, то по лемме 4.11 найдётся рефлексивная M_{i+1}–насыщенная теория Δ', что $\Delta^H \subseteq \Delta'$ и $p \notin \Delta'$. Таким образом, мы нашли рефлексивную теорию $\Delta' \succcurlyeq \Delta$, что $\Delta' \not\models p$. Это означает, что $\Delta \not\models !p$.

Теорема 4.3 доказана. $\square$

Теорема 4.4. *Для любой непротиворечивой теории* Γ *логики* QHC *существует модель Крипке* $\mathscr{K}$ *и её отмеченный мир* x *такие, что в этом мире данной модели* $\mathscr{K}$ *истинны все формулы из* Γ.

Доказательство. Пусть Γ — непротиворечивая теория логики QHC в сигнатуре Ω. Тогда $\Gamma \nvdash 0$. В силу леммы 4.8 существует M–насыщенное множество формул Γ' сигнатуры Ω', полученной добавлением к Ω счётного множества дополнительных констант такое, что $\Gamma \subseteq \Gamma'$. В силу леммы 4.10 существует рефлексивное M'–насыщенное множество формул Γ'' сигнатуры Ω'', полученной добавлением к Ω' счётного множества дополнительных констант такое, что $\Gamma' \subseteq \Gamma''$. По теореме 4.3 существует модель Крипке с отмеченными мирами $\mathscr{K}$, в одном из миров которой истинны все формулы множества Γ''. Так как $\Gamma \subseteq \Gamma''$, то $\mathscr{K}$ — модель Крипке, в одном из миров которой истинны все формулы множества Γ. $\square$

Из этой теоремы получаем следствие:

Теорема 4.5 (о полноте QHC относительно моделей Крипке с отмеченными мирами)**.** *Если формула* A *сорта задача (сорта высказывание) языка* Ω *истинна в любом мире (отмеченном мире) любой модели Крипке с отмеченными мирами для языка* Ω*, то* A *выводима в логике* QHC.

4.4 Модели логики QH4 с отмеченными мирами

В этом разделе мы докажем теорему о полноте логики QH4 относительно семантики Крипке с отмеченными мирами.

Логика QH4 — предикатный вариант пропозициональной модальной интуиционистской логики H4. Термами логики QH4 являются индивидные переменные и константы. Язык логики QH4 содержит интуиционистские связки

$\wedge, \vee, \to$, логическую константу ложь $\perp$, кванторы $\forall, \exists$ и модальность ∇, а также предикатные символы только одного сорта (в отличие от логики QHC). Стандартным образом определяется понятие формулы логики QH4.

Аксиомы и правила вывода логики QH4 состоят из аксиом и правил вывода интуиционистского исчисления предикатов, а также следующих схем аксиом:

(1^∇) $\alpha \to \nabla\alpha$;

(2^∇) $\nabla\nabla\alpha \to \nabla\alpha$;

(3^∇) $\nabla\perp \to \perp$;

(4^∇) $\nabla(\alpha \to \beta) \to (\nabla\alpha \to \nabla\beta)$.

Для логики QH4 можно определить понятие вывода, квазивывода из гипотез и вывода из гипотез аналогичным образом, как это было сделано для логики QHC в разделе 4.1.

Опишем модели Крипке с отмеченными мирами логики QH4. Пусть Ω — язык логики QH4 (без функциональных символов). Модель Крипке логики QH4 с отмеченными мирами — шкала Крипке с отмеченными мирами с функцией D, которая каждому $a \in W$ сопоставляет непустое множество D_a, а также оценкой атомарных формул $\models$. Предполагается, что если $a \preccurlyeq b$, то $D_a \subseteq D_b$. Если язык Ω содержит константу c, то ей сопоставляется объект $\bar{c} \in D_a$ для любого $a \in W$ (мы отождествляем c и $\bar{c}$). Для каждого $a \in W$ обозначим через $\Omega(D_a)$ язык логики QH4, расширенный множеством константных символов для обозначения всех элементов D_a. $\models$ — соответствие между мирами $a \in W$ и замкнутыми атомарными формулами языка $\Omega(D_a)$, для которого выполнена монотонность (если $\varphi(z_1, \dots, z_n)$ — замкнутая атомарная формула языка $\Omega(D_a)$, $a \models \varphi(z_1, \dots, z_n)$ и $a \preccurlyeq b$, то $b \models \varphi(z_1, \dots, z_n)$).

Отношение истинности для остальных формул логики QH4 определяется индукцией по построению формулы. Для связок $\wedge, \vee, \to$ и кванторов $\forall, \exists$ индуктивный переход в определении отношения истинности осуществляется так же, как для формул сорта задача в моделях Крипке с отмеченными мирами логики QHC (иными словами, как и в моделях Крипке интуиционистского исчисления предикатов). Определим отношение истинности в индуктивном переходе для модальности ∇:

$$a \models \nabla\varphi \Leftrightarrow \forall b \in W(a \preccurlyeq b \wedge b \in \mathrm{Aud} \Rightarrow b \models \varphi).$$

Аналогично лемме 4.7, можно показать, что монотонность имеет место не только для атомарных формул, но и для любых формул логики QH4.

Теорема 4.6 (корректность)**.** *Если замкнутая формула языка Ω выводима в логике* QH4, *то она истинна в любой модели Крипке логики* QH4 *для языка* Ω.

Доказательство. Как и в теореме 4.2, следует проверить, что если формула выводима в логике QH4, то её универсальное замыкание истинно в любой модели Крипке с отмеченными мирами. Ясно, что достаточно проверить, что универсальное замыкание любой аксиомы истинно в любой модели Крипке и что правила вывода сохраняют это свойство. Для аксиом и правил вывода интуиционистского исчисления предикатов это уже проверено в теореме 4.2. Для дополнительных аксиом QH4 доказательство имеется в [38] (ясно, что модели логики QH4 являются обогащением моделей логики H4). □

Как и в разделе 4.3, рассматриваем M–насыщенные теории, но только не в логике QHC, а в логике QH4 (с тем отличием, что для M–насыщенных теорий в логике QH4 отсутствует требование ?$\Gamma^H \subseteq \Gamma^C$). Напомним, что $\Gamma \vdash \varphi$ означает, что существует вывод формулы φ из гипотез Γ; $[\Gamma]$ означает наименьшую по включению теорию, содержащую Γ.

Определение 4.9. M–насыщенная теория Γ в логике QH4 *рефлексивна*, если $\Gamma_\nabla \subseteq \Gamma$, где $\Gamma_\nabla = \{\varphi \mid \nabla\varphi \in \Gamma\}$.

Лемма 4.12. *Пусть M — не более чем счётное множество констант, M' — его расширение счётным множеством дополнительных констант $\{c_1, c_2, \ldots\}$. Тогда для любого множества формул Γ и формулы β в языке L_M, если $\Gamma \nvdash \nabla\beta$, то существует рефлексивная M'–насыщенная теория Δ такая, что $\Gamma \subseteq \Delta$ и $\Delta \nvdash \beta$.*

Доказательство. Доказательство данной леммы очень близко к доказательству леммы 4.10. Определим $M = M_0 \subseteq M_1 \subseteq M_2 \subseteq \ldots M'$, где M_{i+1} —

расширение M_i счётным числом констант, и $M' = \bigcup\limits_{i=0}^{\infty} M_i$. Далее отметим, что если $\Sigma \nvdash \nabla\varphi$, то $\Sigma_\nabla \nvdash \nabla\varphi$ (доказательство этого факта имеется в [38, лемма 5]).

Аналогично лемме 4.8, для любого множества формул Γ и формулы α языка M, если $\Gamma \nvdash \alpha$, то существует M'–насыщенная теория Γ', расширяющая Γ, что $\Gamma' \nvdash \alpha$ (M' — расширение M счётным множеством дополнительных констант). Определим последовательность теорий $\Gamma^0, \Gamma^1, \Gamma^2, \ldots$ следующим образом. Пусть $\Gamma^0 = [\Gamma]$, и

$$\Gamma^{n+1} - M_{n+1}\text{–насыщенная теория, что } \Gamma^n_\nabla \subseteq \Gamma^{n+1} \text{ и } \Gamma^{n+1} \nvdash \beta.$$

Таким образом мы имеем следующую цепочку включений

$$\Gamma^0 \subseteq \Gamma^0_\nabla \subseteq \Gamma^1 \subseteq \Gamma^1_\nabla \subseteq \Gamma^2 \subseteq \Gamma^2_\nabla \subseteq \ldots$$

Положим

$$\Delta = \bigcup_{n=0}^{\infty} \Gamma^n.$$

Докажем, что Δ обладает всеми необходимыми свойствами. В [38] имеется доказательство аналогичного утверждения, но для логики H4, а не QH4. Ясно, что подобными рассуждениями можно показать, что Δ — теория, $\Delta_\nabla \subseteq \Delta$, $\Delta \nvdash \beta$ и Δ обладает свойством дизъюнктивности. Осталось показать, что Δ обладает свойством экзистенциальности. Действительно, пусть $\exists v\varphi(v) \in \Delta$. Тогда $\exists v\varphi(v) \in \Gamma^n$ для некоторого $n > 0$. Поскольку Γ^n — M_n–насыщенная теория, то $\varphi(c) \in \Gamma^n$ для некоторой константы c. Отсюда $\varphi(c) \in \Delta$. $\square$

Теорема 4.7. *Если множество формул Γ языка L_M является M–насыщенной теорией, то существует модель Крипке $\mathscr{K} = (W, \preccurlyeq, \mathrm{Aud}, D, \models)$ с отмеченными мирами логики* QH4 *такая, что для любой формулы A языка L_M выполнено $\forall x \in W\ x \models A \Leftrightarrow A \in \Gamma$.*

Доказательство. Построим модель Крипке логики QH4 следующим образом (как в теореме 4.3). Определим последовательность множеств констант $M_0, M_1, M_2, \ldots$ индуктивно: $M_0 = M$, а M_{i+1} получается добавлением к M_i счётного множества новых констант. Пусть W — семейство всех теорий Δ таких, что

1. Δ состоит из замкнутых формул некоторого языка L_{M_i};

2. Δ является M_i–насыщенной;

3. $\Gamma \subseteq \Delta$.

Для $\Delta_1, \Delta_2 \in W$ положим $\Delta_1 \preccurlyeq \Delta_2 \rightleftharpoons \Delta_1 \subseteq \Delta_2$. $\Delta \in \mathrm{Aud}$ тогда и только тогда, когда Δ рефлексивна. Далее, пусть $\Delta \in W$ является M_i–насыщенной теорией. Тогда полагаем $D_\Delta = M_i$, и если $A(c_1, \ldots, c_n)$ — атомарная формула с константами $c_1, \ldots, c_n \in M_i$, то положим

$$\Delta \models A(c_1, \ldots, c_n) \rightleftharpoons A(c_1, \ldots, c_n) \in \Delta.$$

Проверим, что мы действительно получили модель Крипке логики QH4. Ясно, что $\preccurlyeq$ — частичный порядок на W и что $\mathrm{Aud} \subseteq W$. Покажем, что $\forall \Delta_1 \in W \, \exists \Delta_2 \in W (\Delta_1 \preccurlyeq \Delta_2 \wedge \Delta_2 \in \mathrm{Aud})$. Возьмём произвольное $\Delta_1 \in W$. Пусть Δ_1 — M_i–насыщенная теория. Так как Δ непротиворечива, $\Delta \nvdash \nabla\bot$, и по лемме 4.12 найдётся рефлексивная M_{i+1}–насыщенная теория Δ_2, что $\Delta_1 \subseteq \Delta_2$ и $\bot \notin \Delta_2$. Таким образом, найдена нужная теория Δ_2. Кроме того, для атомарных формул выполнена монотонность отношения истинности $\models$ (так как $\Delta_1 \preccurlyeq \Delta_2 \Leftrightarrow \Delta_1 \subseteq \Delta_2$). Наконец, из построения следует, что $\Delta_1 \preccurlyeq \Delta_2 \Rightarrow D_{\Delta_1} \subseteq D_{\Delta_2}$.

Таким образом, построена модель Крипке с отмеченными мирами $\mathscr{K} = (W, \preccurlyeq, \mathrm{Aud}, D, \models)$. Докажем, что для любого $\Delta \in W$ выполнено следующее: если Δ является M_i–насыщенным, то для любой формулы A языка L_{M_i}

$$\Delta \models A \Leftrightarrow A \in \Delta.$$

Доказательство проводится индукцией по построению формулы A. Для атомарных формул это выполнено по определению $\models$. Для связок и кванторов доказательство проводится методом, изложенным в [29] (случай индуктивного перехода с применением кванторов разобран в теореме 4.3). Осталось доказать случай индуктивного перехода с применением модальности ∇.

Пусть $\nabla\varphi \in \Delta$. Необходимо доказать, что $\Delta \models \nabla\varphi$, то есть $\forall \Delta' \supseteq \Delta$, если Δ' рефлексивна, то тогда $\Delta' \models \varphi$. Действительно, возьмём рефлексивную теорию $\Delta' \supseteq \Delta$. Так как $\nabla\varphi \in \Delta$, имеем $\nabla\varphi \in \Delta'$. Так как Δ' рефлексивна, имеем $\varphi \in \Delta'$. По предположению индукции $\Delta' \models \varphi$. Следовательно, $\Delta \models \nabla\varphi$.

Пусть $\nabla\varphi \notin \Delta$. По лемме 4.12 существует рефлексивная теория $\Delta' \supseteq \Delta$ такая, что $\varphi \notin \Delta'$. По предположению индукции $\Delta' \not\models \varphi$. Следовательно, $\Delta \not\models \nabla\varphi$.

Теорема 4.7 доказана. $\square$

Эта теорема имеет два важных следствия.

Теорема 4.8 (полнота логики QH4)**.** *Для любого непротиворечивого множества формул* Γ *логики* QH4 *существует модель Крипке* $\mathscr{K}$ *логики* QH4 *такая, что в любом мире модели* $\mathscr{K}$ *истинны все формулы из* Γ.

Доказательство. Проводится аналогично доказательству теоремы 4.4. $\square$

Теорема 4.9 (консервативность)**.** *Логика* QHC *— консервативное расширение логики* QH4.

Доказательство. Рассмотрим формулу φ, не выводимую в логике QH4. Согласно теореме 4.8, найдётся контрмодель Крипке $\mathscr{K}$ логики QH4 для формулы φ. Пусть $\tilde{\varphi}$ получена из формулы φ заменой всех символов ∇ на !?. Контрмодель Крипке логики QHC для формулы $\tilde{\varphi}$ совпадает с $\mathscr{K}$, поскольку истинность формул в языке логики QH4 согласована в обеих моделях (см. доказательство теоремы 3.1 для пропозициональных вариантов этих логик; ясно, что для кванторов определение истинности также согласовано). $\square$

4.5 Дизъюнктивное и экзистенциальное свойства

Изложение этой части во многом близко к [29].

Пусть T — некоторая непротиворечивая теория в логике QHC. Будем говорить, что теория T обладает *дизъюнктивным свойством*, если из $\alpha \vee \beta \in T$ следует $\alpha \in T$ или $\beta \in T$ (здесь α, β — произвольные формулы сорта задача). Теория T обладает *экзистенциальным свойством*, если из $\exists x\, \alpha(x) \in T$ следует, что существует такая константа c, что $\alpha(c) \in T$ (здесь α — произвольная формула сорта задача). Ясно, что имеет смысл говорить об экзистенциальности теории, если её язык содержит хотя бы одну константу.

Пусть имеются две модели Крипке с отмеченными мирами $\mathscr{K}_1 = (W_1, \preccurlyeq_1, \mathrm{Aud}_1, D_1, \models_1)$ и $\mathscr{K}_2 = (W_2, \preccurlyeq_2, \mathrm{Aud}_2, D_2, \models_2)$ логики QHC, причём $W_1 \cap W_2 = \varnothing$. Их *суммой* называется модель $\mathscr{K} = (W, \preccurlyeq, \mathrm{Aud}, D, \models)$ такая, что

$W = W_1 \cup W_2$;

$\preccurlyeq = \preccurlyeq_1 \cup \preccurlyeq_2$;

$\mathrm{Aud} = \mathrm{Aud}_1 \cup \mathrm{Aud}_2$;

если $a \in W_i$ (где $i \in \{1,2\}$), то $D_a = D^i_a$;

если $a \in W_i$ (где $i \in \{1,2\}$), то для произвольной атомарной формулы A имеет место $a \models A$ тогда и только тогда, когда $a \models_i A$.

Сумма моделей $\mathscr{K}_1$ и $\mathscr{K}_2$ обозначается как $\mathscr{K}_1 + \mathscr{K}_2$. Ясно, что для любой формулы A имеет место

$$(\mathscr{K}_1 + \mathscr{K}_2) \models A \Leftrightarrow (\mathscr{K}_1 \models_1 A \text{ и } \mathscr{K}_2 \models_2 A).$$

Отсюда следует, что сумма двух моделей теории также является моделью теории. Сумма $\sum\limits_{i \in I} \mathscr{K}_i$ любого семейства моделей Крипке $\{\mathscr{K}_i \mid i \in I\}$ определяется аналогично ($I \neq \varnothing$). В этом случае, если каждая $\mathscr{K}_i$ ($i \in I$) является моделью теории T, то сумма $\sum\limits_{i \in I} \mathscr{K}_i$ также является моделью этой теории.

Для модели Крипке с отмеченными мирами $\mathscr{K} = (W, \preccurlyeq, \mathrm{Aud}, D, \models)$ языка L_M, где $M \neq \varnothing$, определим модель $\mathscr{K}' = (W', \preccurlyeq', \mathrm{Aud}', D', \models')$ следующим образом:

$W' = W \cup \{a_0\}$, где $a_0 \notin W$;

$\preccurlyeq' = \preccurlyeq \cup \{(a_0, a) \mid a \in W\} \cup \{(a_0, a_0)\}$;

$\mathrm{Aud}' = \mathrm{Aud}$;

$D'_a = D_a$, если $a \in W$. $D_{a_0} = \{\bar{c} \mid c \in M\}$

если $a \in W$, то для произвольной атомарной формулы A имеет место $a \models' A$ тогда и только тогда, когда $a \models A$. $a_0 \models' A$ тогда и только тогда, когда $\mathscr{K} \models A$.

Ясно, что в результате применения операции $'$ получается модель Крипке с отмеченными мирами.

Лемма 4.13. *Если класс моделей теории T замкнут относительно операции $'$, то теория T обладает дизъюнктивным и экзистенциальным свойствами.*

Доказательство. Доказательство не отличается от доказательства аналогичной теоремы для интуиционистского исчисления предикатов [29]. Приведём набросок доказательства.

Покажем, что T обладает дизъюнктивным свойством. В самом деле, если $T \nvdash \alpha$ и $T \nvdash \beta$, то найдутся контрмодели Крипке $\mathscr{K}_1$ и $\mathscr{K}_2$ для α и β соответственно. Тогда $\mathscr{K} = (\mathscr{K}_1 + \mathscr{K}_2)'$, являющаяся по условию моделью теории T, является контрмоделью для $\alpha \vee \beta$.

Покажем, что T обладает экзистенциальным свойством. В самом деле, если $T \nvdash \alpha(c)$ для любой константы $c \in M$, то для любой константы $c \in M$ найдётся контрмодель Крипке с отмеченными мирами $\mathscr{K}_c$ теории T, что $\mathscr{K}_c \nvDash A(c)$. Тогда $\mathscr{K} = (\sum\limits_{c \in M} \mathscr{K}_c)'$, являющаяся по условию моделью теории T, является контрмоделью для $\exists x\, \alpha(x)$. $\square$

Теорема 4.10. *Если сигнатура Ω содержит хотя бы одну константу, то логика* QHC *(в этой сигнатуре) обладает дизъюнктивным и экзистенциональным свойствами.*

Доказательство. Класс моделей логики QHC в сигнатуре Ω замкнут относительно операции $'$. Осталось применить теорему 4.13. $\square$

Мы установили дизъюнктивное свойство для логики QHC только в случае, если сигнатура Ω содержит хотя бы одну константу. Это ограничение несущественно, как показывает следующая теорема.

Теорема 4.11. *Логика* QHC *в любой сигнатуре Ω обладает дизъюнктивным свойством.*

Доказательство. Рассуждение не отличается от доказательства аналогичной теоремы из [29]. $\square$

Замечание 4.3. В силу консервативности логики QHC относительно логики QH4, для логики QH4 также имеют место дизъюнктивное и экзистенциальное свойства.

Заключение

Среди изложенных в работе результатов в качестве основных можно выделить следующие.

1. Построены различные типы семантик логики HC — пропозиционального фрагмента логики QHC: алгебраическая семантика, семантика Крипке с двумя множествами миров, семантика Крипке с отмеченными мирами, топологическая семантика. Установлены теорема о полноте и свойство конечных моделей для каждого из этих классов моделей. Доказана разрешимость логики HC.

2. Доказано, что в логике HC из PC–правила не следует ED–принцип. Этот результат завершает построение решётки импликаций между различными принципами в логике QHC.

3. Построена семантика типа Крипке логики QHC и доказана теорема о полноте этой логики относительно построенной семантики. Показано, что рассматриваемые модели могут быть использованы в качестве моделей логики QH4. Установлено, что логика QHC является консервативным расширением логики QH4. Кроме того, доказаны дизъюнктивное и экзистенциальное свойства логики QHC.

Наиболее естественными направлениями развития результатов, полученных в диссертации, являются исследования следующих задач.

1. Построение топологической модели логики QHC, для которой будет иметь место теорема о полноте.

2. Исследование синтаксических интерпретаций логики QHC в логику QH4.

3. Построение исчисления секвенций генценовского типа логики QHC.

Список литературы

[1] Артёмов С. Н., “Подход Колмогорова и Гёделя к интуиционистской логике и работы последнего десятилетия в этом направлении”, *УМН*, **59**:2(356) (2004), 9–36; англ. пер.: Artemov S. N., “Kolmogorov and Gödel's approach to intuitionistic logic: current developments”, *Russian Math. Surveys*, **59**:2 (2004), 203–229.

[2] Верещагин Н. К., Скворцов Д. П., Скворцова Е. З., Чернов А. В., “Варианты понятия реализуемости для пропозициональных формул, приводящие к логике слабого закона исключенного третьего”, *Математическая логика и алгебра*, Сборник статей. К 100-летию со дня рождения академика Петра Сергеевича Новикова, Труды МИАН, **242**, Наука, МАИК «Наука/Интерпериодика», М., 2003, 77–97.

[3] Верещагин Н. К., Шень А., *Лекции по математической логике и теории алгоритмов*, Часть 2. Языки и исчисления, 4-е изд., испр., МЦНМО, М., 2012, 240 с.

[4] Гейтинг А., *Обзор исследований по основаниям математики: Интуиционизм — теория доказательства: Пер. с нем.*, ОНТИ НКТП, СССР, 1936.

[5] Гейтинг А., *Интуиционизм. Введение*, Мир, М., 1965, 200 с.; пер. с англ.: Heyting A., *Intuitionism. An introduction*, North-Holland Publishing Co., Amsterdam, 1956, viii+133 pp.

[6] Гильберт Д., *О Бесконечном*, доклад, прочитанный 4-го июня 1925 г. на съезде математиков, организованном вестфальским математическим обществом в Мюнстере в память Вейерштрасса.

[7] Драгалин А. Г., *Математический интуиционизм. Введение в теорию доказательств.*, Наука, М., 1979.

[8] Клини С. К., *Введение в метаматематику*, ИЛ, М., 1957, 526 с.; пер. с англ.: Kleene S. C., *Introduction to metamathematics*, D. Van Nostrand Co., Inc., New York, NY, 1952, x+550 pp.

[9] Колмогоров А. Н., “О принципе tertium non datur”, *Матем. сб.*, **32** (1925), 646–667.

[10] Колмогоров А. Н., *Избранные труды. Математика и механика*, Наука, М., 1985, 470 с.

[11] Коновалов А. Ю., Плиско В. Е., “О гиперарифметической реализуемости”, *Математические заметки*, **98**:5 (2015), 725–746.

[12] Коновалов А. Ю., “Арифметическая реализуемость и базисная логика”, *Вестник Московского университета. Серия 1. Математика, механика*, 2016, № 1, 52–56.

[13] Коновалов А. Ю., “Арифметическая реализуемость и примитивно-рекурсивная реализуемость”, *Вестник Московского университета. Серия 1. Математика, механика*, 2016, № 4, 60–64.

[14] Коновалов А. Ю., “Общерекурсивная реализуемость и базисная логика”, *Алгебра и логика*, **59**:5 (2020), 542–566.

[15] Крупский В. Н., “О моделировании знания в социальных сетях”, *Л694. Десятые Смирновские чтения: материалы Междунар. науч. конф., Москва, 15–17 июня 2017 г.[редкол.: И. А. Герасимова, О. М. Григорьев]*, **15** (2017), 30–31.

[16] Максимова Л. Л., Скворцов Д. П., Шехтман В. Б., “Невозможность конечной аксиоматизации логики финитных задач Медведева”, *Докл. АН СССР*, **245**:5 (1979), 1051–1054.

[17] Марков А. А., “О конструктивной математике”, *Проблемы конструктивного направления в математике. 2. Конструктивный математический*

анализ, Сборник работ, Тр. МИАН СССР, **67**, Изд-во АН СССР, М.–Л., 1962, 8–14.

[18] Марков А. А., “Т. II. Теория алгоритмов и конструктивная математика, математическая логика, информатика и смежные вопросы”, *Избранные труды*, МЦНМО, М., 2003.

[19] Марков А. А., “О полноте классического исчисления предикатов в конструктивной математической логике”, *Докл. АН СССР*, **215**:2 (1974), 266–269.

[20] Марков А. А., “Попытка построения логики конструктивной математики”, *Исследования по теории алгорифмов и математической логике*, **2**, Вычислительный центр АН СССР, Москва, 1976, 3–31.

[21] Медведев Ю. Т., “Степени трудности массовых проблем”, *Докл. АН СССР*, **104**:4 (1955), 501–504.

[22] Медведев Ю. Т., “Финитные задачи”, *Докл. АН СССР*, **142**:5 (1962), 1015–1018.

[23] Медведев Ю. Т., “Интерпретация логических формул посредством финитных задач и связь ее с теорией реализуемости”, *Докл. АН СССР*, **148**:4 (1963), 771–774.

[24] Медведев Ю. Т., “Об интерпретации логических формул посредством финитных задач”, *Докл. АН СССР*, **169**:1 (1966), 20–23.

[25] Медведев Ю. Т., “Локально-финитные алгоритмические проблемы”, *Докл. АН СССР*, **203**:2 (1972), 285–288.

[26] А. А. Мучник, “О сильной и слабой сводимости алгоритмических проблем”, *Сиб. матем. журн.*, **4**:6 (1963), 1328–1341.

[27] Плиско В. Е., “О реализуемых предикатных формулах”, *Докл. АН СССР*, **212**:3 (1973).

[28] Плиско В. Е., “Абсолютная реализуемость предикатных формул”, *Известия АН СССР. Серия математическая*, **47**:2 (1983), 315–334.

[29] Плиско В. Е., Хаханян В. Х., *Интуиционистская логика*, МГУ, мех.-матем. ф-т, М., 2009, 159 с.

[30] Расёва Е., Сикорский Р., *Математика метаматематики*, Наука, М., 1972, 591 с.; пер. с англ.: Rasiowa H., Sikorski R., *The mathematics of metamathematics*, Monogr. Mat., **41**, Państwowe Wydawnictwo Naukowe, Warsaw, 1963, 522 pp.

[31] Скворцов Д. П., "О вхождении импликации в финитно общезначимые интуиционистски недоказуемые формулы логики высказываний", *Математические заметки*, **20**:3 (1976), 383–390.

[32] Скворцов Д. П., "О реализуемости и финитной общезначимости пропозициональных формул с ограничениями на вхождения импликации", *Математические заметки*, **25**:6 (1979), 919–931.

[33] Aczel P., "The Russell-Prawitz modality", *Mathematical Structures in Computer Science*, **11**:4 (2001), 541–554.

[34] Alexandroff P., "Diskrete Räume", *Математический сборник*, **2(44)**:3 (1937), 501—519.

[35] Artemov S., "Logic of proofs", *Annals of Pure and Applied Logic*, **67**:1–3 (1994), 29–59.

[36] Artemov S. N., "Operational modal logic", *Mathematical Sciences Institute*, **95**:29 (1995).

[37] Artemov S. N., "Explicit provability and constructive semantics", *Bull. Symbolic Logic*, **7**:1 (2001), 1–36.

[38] Artemov S., Protopopescu T., *Intuitionistic epistemic logic*, 2014, arXiv: 1406.1582v2.

[39] Artemov S., Protopopescu T., "Intuitionistic epistemic logic", *Rev. Symb. Log.*, **9**:2 (2016), 266–298.

[40] Baron M. E., "A note on the historical development of logic diagrams: Leibniz, Euler and Venn", *Math. Gazette*, **53** (1969), 113–125.

[41] Basu S.S., Simpson S.G., "Mass problems and intuitionistic higher-order logic", *Computability*, **5**:1 (2016), 29–47.

[42] Beeson M., "A constructive version of Tarski's geometry", *Annals of Pure and Applied Logic*, **166**:11 (2015), 1199-1273.

[43] Bílková M., Greco G., Palmigiano A., Tzimoulis A., Wijnberg N., "The logic of resources and capabilities", *Rev. Symb. Log.*, **11**:2 (2018), 371–410.

[44] Brouwer L. E. J., "Begründung der Mengenlehre unabhängig vom logischen Satz vom ausgeschlossenen Dritten. I und II", *Verhandelingen der Koninklijke Akad. van Wetenschappen te Amsterdam (eerste sectie)*, **12** (1918–1919).

[45] Brouwer L. E. J., "Consciousness, philosophy and mathematics", *Proceedings of the Tenth International Congress of Philosophy*, 1948, 1235–1249.

[46] Chagrov A., Zakharyaschev M., *Modal logic*, Oxford Logic Guides, **35**, Oxford Univ. Press, New York, 1997, xvi+605 pp.

[47] Damnjanovic Z., "Strictly primitive recursive realizability, I", *The Journal of Symbolic Logic*, **59**:4 (1994), 1210—1227.

[48] Damnjanovic Z., "Minimal realizability of intuitionistic arithmetic and elementary analysis", *The Journal of Symbolic Logic*, **60**:4 (1995), 1208—1241.

[49] Gentzen G., "Untersuchungen über das logische schließen. I", *Mathematische zeitschrift*, **35** (1935).

[50] Gentzen G., "Untersuchungen über das logische schließen. II", *Mathematische zeitschrift*, **39** (1935).

[51] Fairtlough M., Mendler M., "Propositional Lax Logic", *Information and Computation*, **137**:1 (1997), 1–33.

[52] Fairtlough M., Walton M., "Quantified lax logic", *University of Sheffield*, 1997.

[53] Girard J.-Y., "Linear logic", *Theoret. Comput. Sci.*, **50**:1 (1987), 1–101.

[54] Girard J.-Y., "On the unity of logic", *Ann. Pure Appl. Logic*, **59**:3 (1993), 201–217.

[55] Glivenko V., "Sur quelques points de la logique de M. Brouwer", *Bulletins de la classe des sciences*, **15**:5 (1929), 183–188.

[56] Gödel K., "Eine Interpretation des intuitionistischen Aussagenkalküls", *Ergebnisse math. Kolloquium Wien*, **4** (1933), 39–40.

[57] Gödel K., "Lecture at Zilsel's", *Collected works.* V. III, Clarendon Press, Oxford Univ. Press, New York, 1995, 86–113.

[58] Goldblatt R. I., "Grothendieck topology as geometric modality", *Mathematical Logic Quarterly*, **27**:31–35 (1981), 495–529.

[59] Goldblatt R., "Cover semantics for quantified lax logic", *Journal of Logic and Computation*, **21**:6 (2011), 1035–1063.

[60] Heyting A., "Die formalen Regeln der intuitionistischen Logik", *Sitzungsbericht PreuBische Akademie der Wissenschaften Berlin, physikalisch-mathematische Klasse II*, 1930, 42–56.

[61] Japaridze G., De Jongh D., "The logic of provability", *Studies in Logic and the Foundations of Mathematics*, **137** (Elsevier, 1998), 475–546.

[62] Japaridze G., "The logic of tasks", *Ann. Pure Appl. Logic*, **117**:1–3 (2002), 261–293.

[63] Japaridze G., "Introduction to computability logic", *Annals of Pure and Applied Logic*, **123**:1–3 (2003), 1–99.

[64] Japaridze G., "Intuitionistic computability logic", *Acta Cybernet.*, **18**:1 (2007), 77–113.

[65] Japaridze G., "The logic of interactive Turing reduction", *The Journal of Symbolic Logic*, **72**:1 (2007), 243–276.

[66] Japaridze G., "The intuitionistic fragment of computability logic at the propositional level", *Ann. Pure Appl. Logic*, **147**:3 (2007), 187–227.

[67] Japaridze G., "Sequential operators in computability logic", *Information and Computation*, **206**:12 (2008), 1443–1475.

[68] Japaridze G., "In the Beginning was Game Semantics?", *Games: Unifying Logic, Language, and Philosophy*, Springer Netherlands, Dordrecht, 2009, 249–350.

[69] Japaridze G., *On resources and tasks*, 2013, arXiv: 1312.3372.

[70] Kleene S. C., "On the interpretation of intuitionistic number theory", *The journal of symbolic logic*, **10**:4 (1945), 109–124.

[71] Kreisel G., "Perspectives in the philosophy of pure mathematics", *Logic, methodology and philosophy of science*. V. IV (Bucharest, 1971), Stud. Logic Found. Math., **74**, North-Holland, Amsterdam, 1973, 255–277.

[72] Liang C., Miller D., "Kripke semantics and proof systems for combining intuitionistic logic and classical logic", *Ann. Pure Appl. Logic*, **164**:2 (2013), 86–111.

[73] Liang C., Miller D., "Unifying classical and intuitionistic logics for computational control", *2013 28th annual* ACM/IEEE *symposium on logic in computer science (*LICS *2013)*, IEEE Computer Soc., Los Alamitos, CA, 2013, 283–292.

[74] Markov A. A., "On a Semantical Language Hierarchy in a Constructive Mathematical Logic", *Logic, Foundations of Mathematics, and Computability Theory: Part One of the Proceedings of the Fifth International Congress of Logic, Methodology and Philosophy of Science, London, Ontario, Canada-1975*, Springer Netherlands, Dordrecht, 1977, 299–306.

[75] Martin-Löf P., *Intuitionistic type theory*, Notes by G. Sambin, Stud. Proof Theory Lecture Notes, **1**, Bibliopolis, Naples, 1984, iv+91 pp.

[76] McKinsey J. C. C., "A solution of the decision problem for the Lewis systems S2 and S4, with an application to topology", *The Journal of Symbolic Logic*, **6**:4 (1941), 117—134

[77] Melikhov S. A., *A Galois connection between classical and intuitionistic logics.* I*: Syntax*, 2013–2017, arXiv: 1312.2575.

[78] Melikhov S. A., *A Galois connection between classical and intuitionistic logics. II: Semantics*, 2015–2018, arXiv: 1504.03379.

[79] Melikhov S. A., *Mathematical semantics of intuitionistic logic*, 2015–2017, arXiv: 1504.03380.

[80] Nelson D., "Recursive functions and intuitionistic number theory", *Transactions of the American Mathematical Society*, **61**:2 (1947), 307–368.

[81] Protopopescu T., "Intuitionistic epistemology and modal logics of verification", *Logics, rationality and interaction (*LORI *2015)*, Lecture Notes in Comput. Sci., **9394**, Springer, Heidelberg, 2015, 295–307.

[82] Rogozin D., "Categorical and algebraic aspects of the intuitionistic modal logic IEL^{-} and its predicate extensions", *Journal of Logic and Computation*, **31**:1 (2021), 347–374.

[83] Rose G. F., "Propositional calculus and realizability", *Transactions of the American Mathematical Society*, **75**:1 (1953), 1–19.

[84] Stone M. H., "Topological representations of distributive lattices and Brouwerian logics", *Časopis pro pěstování matematiky a fysiky*, **67** (1938), 1–25.

[85] Su Y., Sano K., "First-order intuitionistic epistemic logic", 2019; *International Workshop on Logic, Rationality and Interaction*, Springer, Berlin, Heidelberg, 326–339.

[86] Tarski A., "Der Aussagenkalkül und die Topologie", *Fund. Math.*, **31** (1938), 103–134.

[87] Tarski A., "What is elementary geometry?", *Studies in Logic and the Foundations of Mathematics*, **27** (1959), 16–29.

[88] Troelstra A. S., "Aspects of constructive mathematics", *Handbook of mathematical logic*, Stud. Logic Found. Math., **90**, North-Holland, Amsterdam, 1977, 973–1052.

[89] Troelstra A. S., Schwichtenberg H., *Basic proof theory*, Cambridge Tracts Theoret. Comput. Sci., **43**, Cambridge Univ. Press, Cambridge, 1996, xii+343 pp.

[90] Troelstra A. S., Van Dalen D., “Constructivism in mathematics”, *Studies in Logic and the Foundations of Mathematics*, 1988.

[91] Tsao-Chen T., “Algebraic postulates and a geometric interpretation for the Lewis calculus of strict implication”, *Bull. Amer. Math. Soc.*, **44**:10 (1938), 737–744.

[92] Yu J., “Self-referentiality of Brouwer–Heyting–Kolmogorov semantics”, *Annals of Pure and Applied Logic*, **165**:1 (2014), 371–388.

Список публикаций автора по теме диссертации

Статьи в рецензируемых научных изданиях, рекомендованных для защиты в диссертационном совете МГУ

[93] Оноприенко А. А., “Семантика типа Крипке для пропозициональной логики задач и высказываний”, *Математический сборник*, **211**:5 (2020), 98–125.

Журнал индексируется Scopus, РИНЦ, RSCI WoS. IF: 1,778.

[94] Оноприенко А. А., “Предикатный вариант совместной логики задач и высказываний”, *Математический сборник*, **213**:7 (2022), 97–120.

Журнал индексируется Scopus, РИНЦ, RSCI WoS. IF: 1,778.

[95] Оноприенко А. А., “Топологические модели пропозициональной логики задач и высказываний”, *Вестник Московского университета. Серия 1. Математика. Механика*, **5** (2022), 25–30.

Журнал индексируется Scopus, РИНЦ, RSCI WoS. IF: 0,658.

Тезисы докладов

[96] Оноприенко А. А., “Объединенная логика задач и высказываний”, *Одиннадцатые Смирновские чтения по логике* (Материалы Международной научной конференции 19 – 21 июня 2019 г.), Москва, 2019, 32–34.

[97] Оноприенко А. А., “Объединенная логика задач и высказываний”, *Международная конференция «Мальцевские чтения»* (19–23 августа 2019 г.), Новосибирский государственный университет, Новосибирск, 2019, 77.

[98] Оноприенко А. А., “Предикатный вариант объединённой логики задач и высказываний”, *Двенадцатые Смирновские чтения по логике* (Материалы Международной научной конференции 24 – 26 июня 2021 г.), Русское общество истории и философии науки, Москва, 2021, 40–43.

[99] Оноприенко А. А., “Топологические модели логик HC и H4”, *Всероссийская конференция «Математические основы информатики и информационно-коммуникационных технологий»* (Сборник трудов, 3-8 декабря 2021 г.), ТвГУ, Тверь, 2021, 241–245.

[100] Оноприенко А. А., “Семантика Крипке объединённой логики задач и высказываний”, *Интеллектуальные системы. Теория и приложения*, **25**:4 (2021), 333–336.