ОТЗЫВ
официального оппонента
на диссертацию на соискание ученой степени
доктора физико-математических наук
Булинской Екатерины Владимировны
на тему «ВЕРОЯТНОСТНО-ГЕОМЕТРИЧЕСКИЕ СВОЙСТВА ПРОСТРАНСТВЕННОГО ВЕТВЯЩЕГОСЯ СЛУЧАЙНОГО БЛУЖДАНИЯ» по специальности
1.1.4 теория вероятностей и математическая статистика

Диссертационная работа Е.Вл. Булинской посвящена решению актуальных задач теории ветвящихся случайных блужданий – популярного в наше время и быстро развивающегося раздела теории вероятностей и случайных процессов.

Диссертация, объёмом 238 страниц, состоит из введения, трёх глав, заключения и списка литературы, насчитывающего 170 наименований.

Остановимся подробнее на содержании диссертации.

Во введении обосновывается актуальность исследований по теме диссертационной работы, приводится анализ современного состояния рассматриваемой области, ставятся цели исследования, описываются решаемые задачи. Дано обоснование научной новизны и практической значимости результатов.

В первой главе рассматриваются задачи, связанные с классификацией каталитических ветвящихся процессов (КВП) с произвольным конечным числом центров катализа. Особенностью данной модели является возможность для представителей популяции (частиц) не только оставлять потомков, но и перемещаться по законам марковской цепи с произвольным пространством состояний. Предполагается, что частицы производят потомков исключительно в присутствии катализаторов, расположенных в конечном подмножестве состояний марковской цепи. Для КВП естественно ставить вопрос не только о глобальном вырождении популяции, но и о локальном вырождении, а также изучать асимптотическое поведение общих и локальных численностей частиц. Основная часть главы посвящена решению задач о классификации КВП на надкритический, критический и докритический процессы (что является далеко идущим обобщением известной классификации ветвящихся процессов Гальтона-Ватсона), об асимптотическом по времени поведении средних общих и локальных численностей частиц, о вероятностях локального и глобального вырождения КВП. Для классификации КВП автором был должным образом развит аппарат времен достижения с запретами для марковских цепей (теоремы 1,2,3).

Данная классификация основана на значении перронова корня специальной матрицы, введённой автором, причём элементы этой матрицы явно выражаются как раз через вероятности конечности времён достижения с запретами. Теорема 4 подтверждает естественность классификации, предложенной в диссертации, так как демонстрирует различное асимптотическое поведение роста численностей частиц для каждого введённого класса. В этой же главе получены предельные теоремы для общих и локальных численностей частиц в КВП в смысле сильной и слабой сходимости. Отметим также теорему 8, которая даёт критерий сходимости нормированных общих и локальных численностей частиц. При доказательстве ряда результатов первой главы используется анализ вспомогательных многотипных ветвящихся процессов Беллмана–Харриса, анализ системы интегральных уравнений и многомерная теория восстановления. К заслугам автора относится искусное сочетание разнообразной техники, приводящее к неулучшаемым результатам.

Во второй главе диссертации рассмотрены вероятностно-геометрические аспекты формирования фронта распространения нормированного случайного облака частиц каталитического ветвящегося случайного блуждания (КВСБ) на многомерной целочисленной решетке. Установлено, что в зависимости от характеристик случайного блуждания частиц асимптотическое разделение пространства на зону, содержащую частицы, и зону, свободную от них, может происходить как в смысле сильной, так и слабой сходимости. Исследованы случаи легких, умеренно тяжёлых и тяжёлых хвостов распределения шага случайного блуждания по решетке произвольной размерности. В диссертации установлено, что предельной формой фронта является нетривиальная поверхность, причём она оказывается детерминированной в случае легких хвостов и семиэкспоненциального распределения шага блуждания, но случайной, когда хвосты правильно меняются (то есть являются тяжёлыми). Упомянутые результаты содержатся в теоремах 9, 14, 15 и 17. Здесь особенно привлекает полнота полученных результатов, включающих нечасто рассматриваемые промежуточные зоны хвостов.

По сравнению с предыдущими работами в диссертации исследуется распространение популяции при более широких условиях и с другой точки зрения (с точки зрения сходимости почти наверное или по распределению). При доказательстве этих результатов были преодолены значительные технические трудности (особенно это касается теоремы 15). К достижениям автора также относится явное описание предельной формы фронта распространения популяции, что позволяет эффективно находить возникающую поверхность. Это наглядно показано на иллюстрирующих примерах в разделах 2.4.3, 2.5.4 и 2.6.3.
Асимптотические результаты для максимума популяции (в размерности 1) или фронта распространения популяции частиц (на многомерных решетках) в КВСБ в основном выводятся с помощью анализа решений полученных автором нелинейных систем интегральных уравнений типа свертки. В некоторых случаях используется и другая, весьма разнообразная техника, в том числе многомерная теория восстановления, теория больших уклонений, мартингальная замена меры и метод каплинга. Важно подчеркнуть, что в диссертации получено полное описание как нормирующих функций, обеспечивающих существование нетривиальной предельной формы фронта, так и описание этой предельной формы.

Третья глава содержит решения разнообразных задач, относящихся к исследованию КВСБ на целочисленной решётке, когда множество катализаторов конечно или бесконечно, но периодично. Мы остановимся только на некоторых из этих задач. Первая из них была поставлена А.Н. Ширяевым: когда впервые популяция выйдет за пределы определенного множества? Ответ дан в разделе 3.1 диссертации (теорема 19), где доказывается предельная теорема (в смысле сходимости почти наверное) для времени первого достижения частицами высокого уровня, растущего линейно по времени. При этом рассматривается надкритическое блуждание по целочисленной прямой, для шага которого предполагается выполненным условие Крамера.

В главе 3 обсуждается также распространение популяции в критическом и докритическом КВСБ. В этом случае, согласно результатам главы 1, популяция частиц вырождается локально, но глобально на решетке с некоторого момента может оставаться некое количество частиц, которые продолжают блуждать, но уже никогда не попадут в точки расположения катализаторов и, соответственно, никогда не произведут потомков. Поэтому их общая численность останется неизменной. В таком случае естественнее ставить вопрос не о том, как быстро распространяется популяция, а о том, насколько далеко частицы смогут отойти от начальной точки прежде, чем наступит вырождение. В этом направлении получен ряд важных результатов. В частности, рассматривается КВСБ по одномерной решётке, в котором случайное блуждание является простым и симметричным. Пусть M – максимальное отклонение частицы (вправо от начала координат, где расположен единственный катализатор) за всю историю существования популяции. В работе устанавливается асимптотическое поведение хвоста распределения M. Теоремы 20 и 21 демонстрируют отличие убывания хвостов распределения для моделей ВСБ и КВСБ. Интерес представляет и теорема 26, являющаяся аналогом результатов ягломовского типа.

Наконец, в главе 3 рассматривается КВСБ с бесконечным множеством катализаторов, имеющим периодическую структуру расположения, причем интенсивности катализаторов могут быть различными. Такая модель с периодически расположенными источниками ветвления стала недавно рассматриваться в литературе, но, в отличие от предыдущих работ, в диссертации ставятся и решаются задачи о пространственном распространении облака частиц с ростом времени. При этом методы спектральной теории операторов не используются, и поэтому нет необходимости предполагать симметричность случайного блуждания.

В разделе 3.5 изучено распространение популяции частиц в ВСБ с бесконечным числом источников ветвления, расположенных периодически. Установлено, что при надкритическом режиме в случае лёгких хвостов облако частиц распространяется асимптотически линейно по времени. Заслуживает внимания красивый результат (теорема 27), показывающий, что предельная форма множества, занимаемого частицами, в рассматриваемой модели является компактной и выпуклой, причём облако частиц приближается к этой предельной форме в метрике Хаусдорфа.
В тексте также приводится ряд интересных иллюстрирующих примеров.

В заключении к диссертации автор подводит итоги проделанной работы и намечает некоторые направления дальнейших исследований.

Список литературы впечатляет полнотой и актуальностью. Он свидетельствует о большой эрудиции автора.

Сделаем несколько критических замечаний, никак не влияющих на общую положительную оценку работы.

1) Одним из наиболее интересных достижений диссертации является описание фронта распространения популяции частиц надкритического случайного блуждания. Из описания фронта кажется очевидным, что он непосредственно связан с принципом больших уклонений для соответствующего случайного блуждания. Однако в диссертации эта связь прослеживается недостаточно – упоминание о теории больших уклонений «тонет» в перечне вспомогательных техник, использованных при доказательстве.
2) Было бы полезно указать «сценарий», при котором частица популяции попадает в заданную точку фронта.
3) Отметим запутанность обозначений вокруг формулы (2.3) на стр 72. Сама формула как будто говорит о существовании частиц, бесконечное число раз посещающих катализаторы, в то время как пояснения к ней указывают на бесконечное число посещений катализаторов разными частицами.
4) В ссылке [75] перепутаны фамилия (Lv) и имя (You) автора.

Перейдём теперь к общей оценке работы Е.Вл. Булинской.

Диссертация представляет собой цельное научное исследование, выполненное на очень высоком научном уровне. Выводы и положения работы являются новыми, они достоверны и обоснованы. Автором найдены решения ряда важных проблем теории ветвящихся случайных процессов и ветвящихся случайных блужданий. Результаты диссертации вносят значительный вклад в понимание пространственно-геометрической структуры этих процессов.

Достоверность и обоснованность полученных результатов подтверждается строгими математическими доказательствами, публикациями в ведущих российских и международных журналах, многочисленными докладами на научно-исследовательских семинарах и конференциях. По теме диссертации опубликовано 15 работ (без соавторов) в журналах, не только входящих в библиографические базы Web of Science и/или Scopus, но и относящихся к наиболее престижным изданиям в России и в мире, что также свидетельствует о высоком научном уровне выполненного исследования. Автореферат и опубликованные статьи весьма полно и совершенно правильно отражают содержание диссертации.

Из вышесказанного следует однозначный вывод: представленная диссертация является научно-квалификационной работой очень высокого уровня, в которой сформулированы и развиты теоретические положения, совокупность которых можно квалифицировать как крупное научное достижение.

Диссертационная работа полностью удовлетворяет критериям, определённым пп.2.1-2.5 Положения о присуждении учёных степеней в Московском государственном университете имени М.В. Ломоносова, предъявляемым к диссертациям на соискание учёной степени доктора физико-математических наук и оформлена согласно Положению о совете по защите диссертаций на соискание учёной степени доктора наук Московского государственного университета имени М.В. Ломоносова.

По мнению официального оппонента, автор диссертации Булинская Екатерина Владимировна безусловно заслуживает присуждения ей учёной степени доктора физико-математических наук по специальности 1.1.4 теория вероятностей и математическая статистика.

Официальный оппонент:

доктор физико-математических наук, профессор,
профессор факультета математики и компьютерных наук
Санкт-Петербургского государственного университета
Лифшиц Михаил Анатольевич

[redacted] «10» августа 2024 г.

Контактные данные:
тел.: +7 (812) 3636232; e-mail: m.lifshits@spbu.ru
Специальность, по которой официальным оппонентом защищена диссертация:
01. 01. 05, теория вероятностей и математическая статистика

Адрес места работы: 199034, Санкт Петербург, Университетская наб., 7-9.
Санкт-Петербургский государственный университет.
Тел.: +7 (812) 3636000 ; e-mail: spbu@spbu.ru

Подпись профессора факультета математики и компьютерных наук Санкт-Петербургского государственного университета М.А. Лифшица удостоверяю:

ЗАМЕСТИТЕЛЬ НАЧАЛЬНИКА
УПРАВЛЕНИЯ КАДРОВ ГУОРП

[redacted]