МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ
УНИВЕРСИТЕТ имени М. В. ЛОМОНОСОВА

на правах рукописи
УДК 512.54

Клячко Антон Александрович

# УРАВНЕНИЯ В ГРУППАХ И СМЕЖНЫЕ ВОПРОСЫ

1.1.5 — математическая логика, алгебра, теория чисел и дискретная математика
(01.01.06 — математическая логика, алгебра и теория чисел)

**АВТОРЕФЕРАТ
ДИССЕРТАЦИИ
на соискание ученой степени
доктора физико-математических наук**

**МОСКВА 2022**

Работа выполнена на кафедре высшей алгебры механико-математического факультета Московского государственного университета им. М. В. Ломоносова.

Официальные оппоненты:

**Романьков Виталий Анатольевич**,
доктор физико-математических наук, профессор
Омский филиал Института математики им. С. Л. Соболева Сибирского отделения РАН,
главный научный сотрудник;

**Тимошенко Евгений Иосифович**,
доктор физико-математических наук, профессор
Новосибирский государственный технический университет,
профессор;

**Трофимов Владимир Иванович**,
доктор физико-математических наук,
Институт математики и механики им. Н. Н. Красовского Уральского отделения РАН,
ведущий научный сотрудник.

Защита диссертации состоится 23 сентября 2022 г. в 16 ч. 45 мин.
на заседании диссертационного совета МГУ.011.4 (МГУ.01.17) в Московском государственном университете им. М. В. Ломоносова по адресу: 119991, Москва, Ленинские горы, МГУ, механико-математический факультет, аудитория 14-08.

С диссертацией можно ознакомиться в отделе диссертаций Фундаментальной библиотеки Московского государственного университета имени М. В. Ломоносова (Москва, Ломоносовский проспект, д. 27) и на сайте ИСА «ИСТИНА»: https://istina.msu.ru/dissertations/450303697/

Автореферат разослан 21 июля 2022 г.

Учёный секретарь диссертационного совета
доктор физико-математических наук, профессор — С. Б. Гашков

**Краткое содержание работы**

Диссертация посвящена следующим вопросам теории групп и смежных областей.

Пересечение подгрупп в группах, близким к свободным (главы 1 и 2)

Нам удалось, в частности, получить (короткое) доказательство следующего обобщения теоремы Минеева–Фридмана (ранее известной как гипотеза Ханны Нейман):

*если $A$ и $B$ — нетривиальные свободные подгруппы почти свободной группы, содержащей свободную подгруппу индекса $n$, то*

$$\operatorname{rank}(A \cap B) - 1 \leqslant n \cdot (\operatorname{rank}(A) - 1) \cdot (\operatorname{rank}(B) - 1)$$

(и эта оценка неулучшаема). Мы получаем также аналог этого утверждения для почти свободных произведений.

Факт, сформулированный выше, доказывается в главе 1; а в главе 2 читатели могут найти формулировку и доказательство «почти свободного аналога» утверждения, которое принято называть усиленной гипотезой Ханны Нейман.

Делимость в группах (главы 3–7)

Общий факт, который нам удалось получить, включает в себя естественным образом теорему Фробениуса (1895) о числе решений уравнения $x^n = 1$ в группе, теорему Соломона (1969) о числе решений в группе системы уравнений, в которой уравнений меньше, чем неизвестных, и теорему Ивасаки (1985) о корнях из подгрупп. Из этого общего факта вытекают и новые любопытные следствия о группах и кольцах. Если говорить чуть более подробно, то результаты этой части распределены по главам так:

- в главе 3 доказывается аналог теоремы Соломона для произвольных формул первого порядка в групповом языке (в том смысле, что системы уравнений в группах представляют собой простейшие такие формулы);
- в главе 4 доказывается общее утверждение о числе решений систем уравнений в группах, включающая в себя теоремы Соломона и Ивасаки;
- в главе 5 основной результат главы 4 (включающий в себя теоремы Соломона и Ивасаки) обобщается путём добавления «фробениусовости» и, таким образом, получается факт, включающий в себя все три классические теоремы о делимости в группах;
- в главе 7 этот результат ещё более обобщается;
- глава 6 стоит несколько особняком: в ней мы доказываем аналоги результатов глав 3–5 для алгебраических групп (то есть вместо количества решений уравнений, мы рассматриваем размерность множества решений).

Вербальная замкнутость (главы 8–10)

Наши исследования в этом направлении были вдохновлены следующей теоремой Мясникова и Романькова (2014):

*подгруппа $H$ конечно порождённой свободной группы $G$ является ретрактом тогда и только тогда, когда каждое уравнение вида $w(x_1, \ldots, x_n) = h$ (где $w$ — это произвольное слово в алфавите $\{x_1^{\pm1}, \ldots, x_n^{\pm1}\}$ и $h \in H$), имеющее решение в $G$, имеет решение и в $H$.*

Мы показываем, что то же самое верно для л ю б о й конечно порождённой группы $G$, если подгруппа $H$

– свободна (глава 8);
– или почти свободна и не имеет нетривиальных конечных нормальных (в $H$) подгрупп (глава 8, кроме одного исключительного случая, который рассмотрен в главе 9);
– или является свободным произведением нескольких (больше, чем одной) нетривиальных групп с тождествами (глава 9);

А в главе 10 показано, что фундаментальная группа бутылки Клейна этим свойством не обладает, в отличие от всех остальных групп поверхностей.*)

Цена симметрии (главы 11–14)

Хорошо известно и просто доказывается, что

> *если группа $G$ содержит абелеву подгруппу конечного индекса, то $G$ содержит характеристическую (то есть инвариантную относительно всех автоморфизмов) абелеву подгруппу конечного индекса.*

Этот простой факт много раз обобщался в разных направлениях (смотрите введение к главе 14). Утверждения такого сорта называют иногда *теоремами типа Макаренко–Хухро* в честь одного из таких нетривиальных обобщений. Наш вклад здесь состоит в следующем:
– в главе 11 приводится короткое (на порядок короче оригинального) доказательство собственно теоремы Макаренко–Хухро;
– в главе 12 эта теорема существенно обобщается;
– в главе 13 она ещё больше обобщается (так, что все, или почти все, известные результаты такого типа становятся частными случаями нашей обобщённой теоремы);
– а в главе 14 рассматривается применение общей теоремы из главы 13 к комбинаторным задачам; во многих случаях удаётся получить неулучшаемую оценку; простейшим частным случаем теоремы из главы 14 является, например, (неулучшаемый) ответ на следующий естественный вопрос.

> *Пусть известно, что в графе можно уничтожить все стоугольники, удалив 2021 ребро. Сколько рёбер заведомо достаточно удалить, если мы хотим уничтожить все стоугольники так, чтобы множество удаляемых рёбер было инвариантно относительно всех автоморфизмов исходного графа?*

Произведения коммутаторов в свободных произведениях (глава 15)

В свободной группе, как известно, никакой неединичный коммутатор не является истинной степенью. Мы доказываем одну общую теорему, из которой вытекает несколько любопытных фактов, например, следующее усиление упомянутого выше утверждения:

> *если в свободной группе неединичный коммутатор разложить в произведение нескольких сопряжённых между собой элементов, то все эти элементы обязательно окажутся попарно разными.*

Сбалансированные разложения на множители (главы 16 и 17)

Следующее простое, но не тривиальное, утверждение предлагалось в качестве задачи на олимпиаде для школьников:

> *всякое рациональное число можно разложить в произведение нескольких рациональных чисел, сумма которых равна нулю.*

---

*) Факт про «все остальные группы поверхностей» — это результат Андрея Мажуги, ученика автора данной диссертации.

А если здесь слово *нескольких* заменить на *четырёх*, то получится уже не школьная задача, которую, как выяснилось, решил ещё Эйлер. Мы занимались этим вопросом, не зная (к своему стыду) о результате Эйлера, но наше решение оказалось гораздо проще и эйлерова, и вообще всех известных, смотрите главу 17. Мы решаем также аналогичные задачи в конечных полях и в некоторых других кольцах. Интересно, что в конечных полях приходится использовать нетривиальные факты об эллиптических кривых (смотрите главу 16).

Алгоритмически конечные группы (глава 18)

Мы строим конечно порождённую бесконечную рекурсивно представленную финитно аппроксимируемую алгоритмически конечную группу $G$, отвечая тем самым на вопрос Мясникова и Осина. При этом группа $G$ «сильно бесконечна» и «сильно алгоритмически конечна», в том смысле, что $G$ содержит бесконечную абелеву нормальную подгруппу, а все конечные декартовы степени группы $G$ алгоритмически конечны (то есть ни для какого $n$ не существует алгоритма, выписывающего бесконечное число попарно различных элементов группы $G^n$).

Тождества аддитивной двоичной арифметики (глава 19)

Мы показываем, что операции произвольной арности, выражающиеся через сложение по модулю $2^n$ и побитовое сложение по модулю 2, допускают простое описание. Тождества, связывающие эти два сложения, имеют конечный базис. Более того, универсальная алгебра $\mathbb{Z}/2^n\mathbb{Z}$ с этими двумя операциями рационально эквивалентна нильпотентному кольцу и, следовательно, порождает шпехтово многообразие. (Слово «бит» означает двоичный разряд, то есть *побитовое сложение* — это сложение в столбик в двоичной записи без переноса разрядов; сложение по модулю $2^n$ и побитовое сложение — это базовые операции, которые компьютерные процессоры способны выполнять быстро, смотрите введение к соответствующей главе.)

Экономное присоединение квадратных корней к группам (глава 20)

Насколько нужно увеличить группу, чтобы в получившейся группе все элементы исходной группы являлись квадратами? Мы даём довольно точный ответ на этот вопрос (наилучшая возможная оценка сверху отличается от полученной оценки не более, чем в два раза).

Относительные копредставления (главы 21–26)

Один старый, не вошедший в диссертацию, результат автора говорит, что

> *из нетривиальной группы без кручения нельзя сделать тривиальную путём добавления одного образующего и одного соотношения,*

то есть, если группа без кручения $G = \langle X \mid R\rangle$ нетривиальна, то и группа $\widehat{G} = \langle X \sqcup \{t\} \mid R \cup \{w\}\rangle$ тоже нетривиальна (для любого слова $w$ в алфавите $X^{\pm 1} \sqcup \{t^{\pm 1}\}$).*) В этой работе мы доказываем аналогичные (в разных смыслах) факты:

- в главе 21 доказывается «многомерный аналог» этой теоремы;
- в главе 22 доказывается, что из непростой группы $G$ нельзя получить неабелеву простую группу $\widehat{G}$;

*) А верно ли это без предположения об отсутствии кручения, никто не знает; это знаменитая гипотеза Кервера–Лауденбаха.

- в главе 23 доказывается, что $\widehat{G}$ почти всегда содержит неабелеву свободную подгруппу;
- в главе 24 показано, что если добавить два образующих и одно соотношение, то всегда получится SQ-универсальная группа;
- в главе 25 показано, например, что если добавить два образующих и одно соотношение, то центр полученной группы $\widehat{G}$ будет тривиален (при некоторых естественных предположениях);
- в главе 26 показано, например, что если к к любой группе (возможно даже с кручением) добавить один образующий и одно соотношение, являющееся по крайней мере третьей степенью (в свободной группе), то полученная группа будет относительно гиперболична и SQ-универсальна.

Автоморфизмы групп и алгебр Шевалле (глава 27)

Мы показываем, что присоединённая группа Шевалле ранга большего единицы над $\mathbb{Q}$-алгеброй (или похожим кольцом), её элементарная подгруппа и соответствующее кольцо Ли имеют одинаковые группы автоморфизмов. Эти автоморфизмы явно описываются.

Число нерешений уравнений в группах и нетопологизируемые группы (глава 28)

Показано, что для любой пары кардиналов с бесконечной суммой найдётся такая группа и такое уравнение над этой группой, что первый кардинал является числом решений этого уравнения, а второй — числом нерешений этого уравнения. В частности,

*существует такая бесконечная группа $G$, что все её элементы, кроме ровно одного, являются решениями некоторого уравнения $g_1x^{n_1}\dots g_kx^{n_k}=1$ (где $g_i\in G$ и $n_i\in\mathbb{Z}$).*

Из существования таких удивительных уравнений легко выводится, что существует бесконечная счётная нетопологизируемая группа без кручения.

## Актуальность темы и степень её разработанности

Вопросами о пересечениях подгрупп в свободных и близких к ним группах занимались такие известные люди, как, например, Дикс [D12], Антолин, Мартино и Шваброу [AMS14], Захаров [Za14], Араухо, Сильва и Сикотис [ASS15], Носков [Нос16], Хелфер и Вайс [HW16], Иванов [Iv17], Хайкин [JZ17] и, конечно же Ханна Нейман, которая в 1957 году показала, что

*для любых нетривиальных подгрупп $A$ и $B$ свободной группы*

$$\operatorname{rank}(A\cap B)-1\leqslant 2\cdot(\operatorname{rank}(A)-1)\cdot(\operatorname{rank}(B)-1),$$

и задала вопрос, нельзя ли убрать двойку в этой оценке. Гипотеза оказалась верной, но доказать это удалось лишь в 2012 году Минееву [Mi12a] и Фридману [Fr14]. Альтернативные доказательства и обобщения этого результата можно найти, например, в работах, процитированных выше (а также в первых двух главах этой диссертации).

Делимостью числа решений уравнений в группах математики интересуются со времён Фробениуса, который в 1895 году показал, что

*число решений уравнения $x^n=1$ в конечной группе $G$ делится на НОД$(|G|,n)$ для любого натурального $n$.*

Похожие (и не очень похожие) результаты о числе решений уравнений в группах можно найти в очень многих работах известных (и не очень известных) математиков, например, смотрите [Hall36b], [Kula38], [Sehg62], [BrTh88], [Yosh93], [AsTa01], [ACNT13] [Isaa70], [Стру95], [AmV11], [GRV12], [Iwa82] (а также соответствующие главы этой диссертации).

Вопросы о вербальной замкнутости в группах имеют не такую древнюю историю; пионерской работой здесь стала статья [MR14] 2014 года, в которой доказана теорема Мясникова–Романькова (смотрите начало этого введения). Работ по этой теме не так много пока, но смотрите, например, [Маж19], [PT19], [PX13], [Bog18], [Bog19], [Mazh17], [Mazh18] (а также работы автора этой диссертации, которые изложены в соответствующих главах, и работу [KMO21], результаты которой не вошли в диссертацию).

Теоремы о симметричности, то есть теоремы типа Макаренко–Хухро, стали известны, на самом деле, задолго до работы Макаренко и Хухро [KhM07a]; например, простой (но не тривиальный) факт об абелевых характеристических подгруппах, приведённый в первом параграфе этого введения, можно найти в классических учебниках по теории групп (в [KaM82], например). В общем виде эти теоремы выглядят так:

*если где-то есть что-то большое и хорошее, то там можно найти также что-то большое, хорошее и симметричное.*

Конкретных примеров таких утверждений в алгебре очень много; смотрите, например, [Вд00], [BrNa04], [ChD89], [dGT18a], [Fr18], [KhM07b], [MSh12], [PSz02] (а также соответствующие главы этой диссертации).

Изучение коммутаторов в свободных группах можно назвать классикой комбинаторной теории групп. Началась эта наука с наблюдения Шюценберже [Sch59], который ещё в 1959 году заметил, что

*в свободной группе неединичные коммутаторы не являются истинными степенями,*

и это не такой тривиальный факт, как может показаться на первый взгляд. Дело в том, что между коммутаторами и степенями есть неочевидные связи: например, Каллер [Cull81] обнаружил такое тождество, выполненное вообще для любых элементов любой группы: $[a,b]^3 = [a^{-1}ba, a^{-2}bab^{-1}][bab^{-1}, b^2]$, то есть куб любого коммутатора в любой группе можно разложить не только в произведение трёх коммутаторов (что очевидно), но и в произведение двух коммутаторов (что вряд ли кто-то осмелится назвать очевидным). В более общем виде *оценка Каллера* состоит в том, что $[a,b]^n$ *раскладывается в произведение* $k$ *коммутаторов, если* $n \leqslant 2k-1$. То, что оценка Каллера точная в свободной группе, называют *гипотезой Комерфорда–Комерфорда–Эдмундса* [CCE91]:

*в свободной группе равенство* $[x_1, y_1] \dots [x_k, y_k] = z^n$, *где* $n \geqslant 2k$, *влечёт, что* $z = 1$.

Данкану и Хауи [DuH91] удалось доказать, что это действительно так. Позже выяснилось, что аналогичный факт верен и в любых свободных произведениях групп без кручения; этот результат был получен в совместной работе автора и Иванова [IK18], а также (одновременно, независимо и другими методами) в работе Чена [Ch18]. В свободных произведениях групп с кручением ситуация сложнее: что-то на эту тему доказано в [IK18] и [Ch18], а почти окончательный результат получен в совместной работе автора этого труда и Вадима Юрьевича Березнюка [BeK21] (не вошедшей в диссертацию). Обобщения наблюдения Шюценберже в других направлениях можно найти, например, в [CCE91] и в совместной работе автора и Елизаветы Владимировны Френкель [FK12] (тоже не вошедшей в диссертацию).

Уравновешенными разложениями на множители (при всей кажущейся несерьёзности этой задачи) занимались и Эйлер (смотрите первый параграф этого введения), и вполне современные математики [ZS18]. Явные формулы для таких разложений напоминают *теорему Райли* [Ra25] (опубликованную в 1825 году в журнале с интересным названием):

*всякое рациональное число раскладывается в сумму трёх кубов рациональных чисел.*

Доказательство этой теоремы удивительным образом состоит из одной строчки: $x = \left(\frac{\cdots}{\cdots}\right)^3 + \left(\frac{\cdots}{\cdots}\right)^3 + \left(\frac{\cdots}{\cdots}\right)^3$, где точки обозначают некоторые конкретные многочлены от $x$ (которые мы поленились выписать) с целыми коэффициентами, остаётся только проверить, что это равенство действительно является тождеством…$^{*)}$

В работе Мясникова и Осина [MO11] был построен первый пример конечно порождённой рекурсивно представленной бесконечной группы, которая является *алгоритмически конечной*, в том смысле, что не существует алгоритма, выписывающего бесконечное количество попарно различных элементов этой группы. Группы, обладающие этими свойствами (то есть конечно порождённые рекурсивно представленные бесконечные и алгоритмически конечные), авторы [MO11] предложили называть *монстрами Дэна* и поставили вопрос: *существуют ли финитно аппроксимируемые монстры Дэна?* Нам удалось получить положительный ответ. Впоследствии выяснилось, что задача была решена раньше [KhM14], однако наш пример обладает дополнительными удивительными свойствами (смотрите соответствующую главу).

Про проблему конечного базиса тождеств в различных алгебрах есть огромное число работ, смотрите, например, [БаОл88], [Нейм69], [Бело99], [ВаЗе89], [Гриш99], [Зайц78], [Keме87], [Крас90], [Латы73], [Льво73], [O70], [O89], [Щиго99], [GuKr03], [Kras09], [Speht52]. Мы рассматриваем в каком-то смысле «прикладную» (универсальную) алгебру с двумя «компьютерными» операциями: сложение и побитовое сложение. Оказалось, что тождества такой «компьютерной» алгебры тоже конечно базируемы.

Исследованию разрешимости уравнений над группами посвящено множество работ (смотрите, например, [GR62], [Le62], [Ly80], [Б84], [EH91], [How91], [K93], [КП95], [FeR96], [K97], [CG00], [EdJu00], [Juhá03], [K06] и литературу там цитируемую).$^{**)}$ В этих статьях доказывается, что при тех или иных условиях уравнение $w(x) = 1$ с коэффициентами из группы $G$ *разрешимо над* $G$, то есть найдётся группа $H$, содержащая $G$ в качестве подгруппы, и элемент $h \in H$ такой, что $w(h) = 1$. Мы пытаемся исследовать количественный вопрос: *насколько большой должна быть такая группа $H$?* Даже для простых уравнений, разрешимость которых давно известна, этот вопрос оказывается весьма трудным, и мы ограничиваемся изучением самого простейшего нетривиального уравнения $x^2 = g$.

Вопросы об относительных копредставлениях тесно связаны с вопросом об уравнениях над группой: если есть уравнение $w(x) = 1$ с коэффициентами из какой-то группы $G$, то естественным образом возникает относительное копредставление $\widehat{G} = \langle G \sqcup \{x\} \mid w(x) = 1 \rangle$, при этом естественное отображение $G \to \widehat{G}$ инъективно тогда и только тогда, когда уравнение разрешимо над $G$. Таким образом, все работы, упомянутые в предыдущем абзаце (и множество других работ), можно назвать работами об относительных копредставлениях. Смотрите также совместную работу автора и Андреаса Тома [KT17] (результаты которой не вошли в диссертацию).

Про группы Шевалле над кольцами есть очень много работ, например, [Wat80], [Пет82], [ГМи83], [HO'M89], [Абе93], [Che00], [Бун07]. Идея описания автоморфизмов линейных групп путём перехода к соответствующим алгебрам Ли была впервые предложена и применена Левчуком [Лев83] и Зельмановым [Зел85]. Мы используем ту же самую общую идею, но в остальном наш подход сильно отличается.

Как было упомянуто в конце предыдущего раздела этого введения, группа, в которой все элементы, кроме ровно одного, являются решениями некоторого уравнения $w(x) = 1$,

$^{*)}$ Спасибо Виктору Сергеевичу Губе, который обратил внимание автора на теорему Райли.

$^{**)}$ В этой диссертации совсем не рассматриваются вопросы о поведении множества решений уравнений в конкретных интересных группах (в свободных группах, например). Смотрите по этому поводу, скажем, [KhV12] и литературу там цитируемую.

заведомо *нетопологизируема*, то есть не допускает недискретных отделимых групповых топологий. Впервые пример бесконечной нетопологизируемой группы был построен Шелахом. Ольшанский [О80] (смотрите также [О89]) построил счётный пример. Вопрос о существовании счётной нетопологизируемой группы без кручения оставался открытым [НЗТА85, вопрос 1.4], пока мы его не решили (в совместной работе с учеником, Антоном Трофимовым). Другие интересные примеры нетопологизируемых групп были получены в совместной работе автора, Александра Юрьевича Ольшанского и Дениса Валентиновича Осина [КОО13] (но эти результаты не вошли в диссертацию).

### Цели и задачи диссертации

- обобщить теорему Минеева–Фридмана на почти свободные группы;
- получить общий факт, включающий в себя естественным образом теорему Фробениуса (1895) о числе решений уравнения $x^n = 1$ в группе, теорему Соломона (1969) о числе решений в группе системы уравнений, в которой уравнений меньше, чем неизвестных, и теорему Ивасаки (1985) о корнях из подгрупп;
- доказать или опровергнуть вербальную замкнутость свободных и других интересных групп;
- получить обобщение теоремы Макаренко–Хухро, включающее в себя все известные результаты на эту тему;
- доказать неулучшаемость оценки Каллера для свободных произведений групп без кручения;
- решить полностью задачу об уравновешенных разложениях на множители в конечных полях;
- построить финитно аппроксимируемый монстр Дэна;
- доказать шпехтовость аддитивной бинарной арифметики;
- получить теорему об экономном присоединении квадратных корней к группам;
- доказать, что из непростой группы без кручения нельзя получить неабелеву простую группу путём добавления одного образующего и одного соотношения;
- описать автоморфизмы присоединённой группы Шевалле ранга большего единицы над $\mathbb{Q}$-алгеброй;
- построить бесконечную счётную нетопологизируемую группу без кручения.

### Объект и предмет исследования

В диссертации изучаются в основном группы (и конечные, и бесконечные), а также (в некоторой степени) кольца, конечные поля, некоторые универсальные алгебры и графы.

### Теоретическая и практическая значимость работы

Диссертация носит теоретический характер. Результаты, полученные в работе, расширяют знания о группах, графах и других алгебраических и комбинаторных структурах. Результаты диссертации могут найти применение в теории групп, колец, тождеств, а также оказаться полезными при работе с графами. Результаты диссертации могут быть использованы для чтения спецкурсов по теории групп и графов.

### Методы исследования

Используются как традиционные методы комбинаторной и структурной теории групп, так и разработанные автором, например, движения на картах.

### Положения, выносимые на защиту

1. Аналог теоремы Минеева–Фридмана для почти свободных групп.
2. Единое обобщение теоремы Фробениуса о числе решений уравнения $x^n = 1$ в группе, Соломона о числе решений в группе системы уравнений и Ивасаки о корнях из подгрупп.
3. Доказательство вербальной замкнутости (почти) свободных и других интересных групп.
4. Обобщение теоремы Макаренко–Хухро.
5. Неулучшаемость оценки Каллера для свободных произведений групп без кручения.
6. Полное решение задачи об уравновешенных разложениях на множители в конечных полях.
7. Построение финитно аппроксимируемого монстра Дэна с другими интересными свойствами.
8. Доказательство шпехтовости аддитивной бинарной арифметики.
9. Теорема об экономном присоединении квадратных корней к группам.
10. Доказательство того, что из непростой группы без кручения нельзя получить неабелеву простую группу путём добавления одного образующего и одного соотношения.
11. Описание автоморфизмов присоединённой группы Шевалле ранга большего единицы над $\mathbb{Q}$-алгеброй.
12. Пример бесконечной счётной нетопологизируемой группы без кручения.

### Степень достоверности и апробация результатов

Результаты диссертации обоснованы при помощи строгих математических доказательств, докладывались на конференциях и семинарах. Полные тексты всех работ, на основе которых написана диссертация, выложены в открытый доступ на известном сайте `arXiv.org` (и опубликованы в хороших журналах, 26 статей).

### Структура и объём диссертации

Диссертация состоит из 28 глав. Каждая глава снабжена введением, и читать каждую главу можно независимо. Объём диссертации — 237 страниц.

**Научная новизна**

Все результаты являются новыми. В двух случаях аналогичные результаты были получены независимо другими авторами; об этом мы явно пишем (и выше, и во введениях к соответствующим главам). Часть результатов этой диссертации была получена в неразделимом соавторстве со следующими товарищами:

| | |
|---|---|
| Дмитрий Владимирович Баранов: | глава 20, |
| Елена Константиновна Брусянская: | главы 5, 7, |
| **Андрей Викторович Васильев** (Новосибирск): | глава 5, |
| **Антон Николаевич Васильев** (Астана): | глава 16, |
| Александр Олегович Захаров: | глава 2, |
| **Сергей Владимирович Иванов** (Урбана-Шампань): | глава 15, |
| Наталья Михайловна Лунева: | глава 14, |
| Денис Евгеньевич Лурье: | глава 26, |
| Андрей Михайлович Мажуга: | главы 8, 9, 17, |
| **Наталья Юрьевна Макаренко** (Новосибирск): | глава 12, |
| Юлия Борисовна Мельникова: | главы11, 12, |
| Екатерина Викторовна Меньшова: | глава 19, |
| **Мария Владимировна Милентьева** (Москва): | глава 13, |
| Вероника Юрьевна Мирошниченко: | глава 9, |
| Анна Ашотовна Мкртчян: | главы 3, 4, |
| Айрана Каадыр-ооловна Монгуш: | глава 18, |
| Анастасия Николаевна Понфиленко: | главы 1, 17, |
| Мария Андреевна Рябцева: | глава 6, |
| Антон Владимирович Трофимов: | глава 28, |
| **Евгений Иванович Хухро** (Новосибирск): | глава 12, |

то есть результаты, изложенные в главах 10, 21–25 и 27, были получены автором самостоятельно (в работах [К21], [К06а], [К05], [К07], [К06б], [К09] и [К10]), а
результаты главы 1 получены в неразделимом соавторстве с Понфиленко
результаты главы 2 получены в неразделимом соавторстве с Захаровым
результаты главы 3 получены в неразделимом соавторстве с Мкртчян
результаты главы 4 получены в неразделимом соавторстве с Мкртчян
результаты главы 5 получены в неразделимом соавторстве с Брусянской и **А.В.Васильевым**
результаты главы 6 получены в неразделимом соавторстве с Рябцевой
результаты главы 7 получены в неразделимом соавторстве с Брусянской
результаты главы 8 получены в неразделимом соавторстве с Мажугой
результаты главы 9 получены в неразделимом соавторстве с Мажугой и Мирошниченко
результаты главы 11 получены в неразделимом соавторстве с Мельниковой
результаты главы 12 получены в неразделимом соавторстве с **Макаренко**, Мельниковой и **Хухро**
результаты главы 13 получены в неразделимом соавторстве с **Милентьевой**
результаты главы 14 получены в неразделимом соавторстве с Луневой
результаты главы 15 получены в неразделимом соавторстве с **Ивановым**
результаты главы 16 получены в неразделимом соавторстве с **А.Н.Васильевым**
результаты главы 17 получены в неразделимом соавторстве с Мажугой и Понфиленко
результаты главы 18 получены в неразделимом соавторстве с Монгуш
результаты главы 19 получены в неразделимом соавторстве с Меньшовой
результаты главы 20 получены в неразделимом соавторстве с Барановым
результаты главы 26 получены в неразделимом соавторстве с Лурье
результаты главы 28 получены в неразделимом соавторстве с Трофимовым

Все соавторы, кроме **выделенных**, являются учениками автора этой диссертации.

**Автор благодарит**

- всех своих учеников и соавторов за плодотворное и интересное сотрудничество,
- коллектив кафедры алгебры и участников семинара «Теория групп» МГУ за дружескую и творческую атмосферу,
- Ольгу Викторовну Сипачёву за всемерную поддержку.

Особых слов благодарности заслужил Александр Юрьевич Ольшанский: чем старше я становлюсь, тем лучше я понимаю, как много он делает для своих учеников и для науки в целом.

## СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ


[Абе93] Э. Абе, Автоморфизмы групп Шевалле над коммутативными кольцами, Алгебра и Анализ., 5:2 (1993), 74-90.

[Адян71] С. И. Адян, О некоторых группах без кручения, Изв. АН СССР, сер. матем., 35:3 (1971), 459-468.

[Адян75] С. И. Адян, Проблема Бернсайда и тождества в группах. М.: Наука, 1975.

[Б81] С. Д. Бродский, Аномальные произведения локально индикабельных групп, в сборнике Алгебраические системы. Ивановскии государственный университет. Иваново. 1981. 51-77.

[Б84] С. Д. Бродский, Уравнения над группами и группы с одним определяющим соотношением, Сиб. матем. ж., 25:2 (1984), 84-103.

[БаОл75] Ю. А. Бахтурин , А. Ю. Ольшанский, Тождественные соотношения в конечных кольцах Ли, Матем. сб., 96(138):4 (1975), 543-559.

[БаОл88] Ю.А. Бахтурин, А.Ю. Ольшанский, Тождества, Алгебра-2, Итоги науки и техн., Сер. Соврем. пробл. мат. Фундам. направления, 18, ВИНИТИ, М., 1988, 117-240.

[БеК03] В.В. Беляев, М. Кузуджуоглу, Локально конечные едва транзитивные группы, Алгебра и Логика, 42:3 (2003), 261-270.

[Бело99] А. Я. Белов, О нешпехтовых многообразиях, Фундамент. и прикл. матем., 5:1 (1999), 47-66.

[Бо72] А. Борель, Линейные алгебраические группы, М.: Мир, 1972.

[Бун07] Е. И. Бунина, Автоморфизмы элементарных присоединённых групп Шевалле типов $A_l, D_l, E_l$ над локальными кольцами с $1/2$, Алгебра и логика, 48:4 (2009), 443-470. См. также arXiv:math/0702046.

[ВГН06] Н. А. Вавилов, М. Р. Гаврилович, С. И. Николенко, Строение групп Шевалле: доказательство из книги, Зап. Научн. Сем. С-Петерб. Отд. Мат. Инст. Акад. Наук СССР., 330:13 (2006) 36-76.

[ВО88] Э. Б. Винберг, А. Л. Онищик, Семинар по группам Ли и алгебраическим группам, М., Наука 1988.

[ВаЗе89] А. Я. Вайс, Е. И. Зельманов, Теорема Кемера для конечно порожденных йордановых алгебр, Изв. вузов. Сер. матем., 6 (1989), 63-72.

[Вас13] А. Н. Васильев, Казахстанская республиканская олимпиада по математике. 2013. Заключительный этап. 9 класс. Задача 4. `http://matol.kz/olympiads/151`

[Вас14] А. Н. Васильев, Девятая студенческая олимпиада по алгебре в МГУ. 2014. Задача 3.
`http://halgebra.math.msu.su/Olympiad/`

[Вд00] Е. П. Вдовин, Большие нормальные нильпотентные подгруппы конечных групп, Сибирский математический журнал, 41:2 (2000), 304-310.

[Ви49] А. А. Виноградов, О свободном произведении упорядоченных групп, Матем. сб., 25(67):1 (1949), 163-168.

[Вин99] Э. Б. Винберг, Курс алгебры, М. «Факториал», 1999.

[ГКП18] Н. Л. Гордеев, Б. Э. Кунявский, Е. Б. Плоткин, Геометрия вербальных уравнений в простых алгебраических группах над специальными полями, УМН, 73:5(443) (2018), 3-52. См. также arXiv:1808.02303.

[ГШ64] Е. С. Голод, И. Р. Шафаревич, О башне полей классов, Изв. АН СССР. Сер. матем., 28:2 (1964), 261-272.

[Гол97] И. З. Голубчик, Группы лиевского типа над PI-кольцами, Фунд. и Прикл. Мат., 3:2 (1997) 399-424.

[ГМи83] И. З. Голубчик, А. В. Михалёв, Изоморфизмы унитарных групп над ассоциативными кольцами, Зап. Научн. Сем. Ленингр. Отд. Мат. Инст. Акад.

Наук СССР., 132 (1983), 97-109.

[Гриш99] А. В. Гришин, Примеры не конечной базируемости T-пространств и T-идеалов в характеристике 2, Фундамент. и прикл. матем., 5:1 (1999), 101-118.

[Зайц78] М. В. Зайцев, О конечной базируемости многообразий алгебр Ли, Матем. сб., 106(148) (1978), 499-506.

[Зал83] А. Е. Залесский, Линейные группы. Итоги науки и техн. ВИНИТИ. Алгебра. Топология. Геометрия. 1983. 135-182.

[Зел85] Е. И. Зельманов, Изоморфизмы линейных групп над ассоциативным кольцом, Сибирск. матем. журн., 26:4 (1985), 49-67.

[Ива13] А. В. Иванищук, Из опыта учебно-исследовательской деятельности учащихся в лицее 1511 при МИФИ, в книге *Сгибнев А. И. Исследовательские задачи для начинающих. Москва: МЦНМО, 2013.* (Доступна здесь: `http://www.mccme.ru/free-books/`)

[КаМ82] М. И. Каргаполов, Ю. И. Мерзляков, Основы теории групп. М.: Наука, 1982.

[Кеме87] А. Р. Кемер, Конечная базируемость тождеств ассоциативных алгебр, Алгебра и логика, 26:5 (1987), 597-641.

[Крас90] А. Н. Красильников, О конечности базиса тождеств групп с нильпотентным коммутантом, Изв. АН СССР. Сер. матем., 54:6 (1990), 1181-1195.

[Кур62] А. Г. Курош, Лекции по общей алгебре. М.: Физ.-мат. лит., 1962.

[Кур67] А. Г. Курош, Теория групп. М.: Наука, 1967.

[ЛШ80] Р. Линдон, П. Шупп, Комбинаторная теория групп. М.: Мир, 1980.

[Латы73] В. Н. Латышев, О некоторых многообразиях ассоциативных алгебр, Изв. АН СССР. Сер. матем., 37:5 (1973), 1010-1037.

[Лев83] В. М. Левчук Связи унитреугольной группы с некоторыми кольцами. II. Группы автоморфизмов, Сибирск. матем. журн., 24:4 (1983) 543-557.

[Ло86] К. И. Лоссов, SQ-универсальность свободных произведений с конечными объединёнными подгруппами, Сиб. матем. ж., 27:6 (1986), 128-139.

[Льво73] И. В. Львов, О многообразиях ассоциативных колец, I, Алгебра и логика, 12 (1973), 269-297.

[М46] А. А. Марков, О безусловно замкнутых множествах, Мат. сборник, 18:1(1946), 3-28.

[МКС74] В. Магнус, А. Каррас, Д. Солитэр, Комбинаторная теория групп. М.: Наука, 1974.

[МаХ07] Н. Ю. Макаренко, Е. И. Хухро, Большие характеристические подгруппы, удовлетворяющие полилинейным коммутаторным тождествам, ДАН, 412:5 (2007), 594-596.

[Маж19] А. М. Мажуга, Свободные произведения групп сильно вербально замкнуты, Мат. сборник, 210:10 (2019), 122-160. См. также arXiv:1803.10634.

[Маль40] А. И. Мальцев, Об изоморфном представлении бесконечных групп матрицами, Матем. сб., 8(50):3 (1940), 405-422.

[Мо69] Д. И. Молдаванский, Об одной теореме Магнуса, Уч. зап. Ивановск. гос. пед. ин-та, 44 (1969), 26-28.

[НЗТА85] Нерешённые задачи топологической алгебры. (ред. В.И.Арнаутов, А.В.Архангельский, П.И.Кирку, А.В.Михалёв, Ю.Н. Мухин, И.В.Протасов, М.М.Чобан), Кишинёв: Штиинца, 1985.

[Нейм69] Х. Нейман, Многообразия групп. М.: Мир, 1969.

[Нос16] Г. А. Носков, Доказательство Минеева-Дикса HN-гипотезы и характеристика Эйлера-Пуанкаре, Мат. заметки, 99:3 (2016), 376-383.

[О70] А. Ю. Ольшанский, О проблеме конечного базиса тождеств в группах, Изв. АН СССР. Сер. матем., 34:2 (1970), 376-384.

[O80] А. Ю. Ольшанский, Замечание о счётной нетопологизируемой группе, Вестн. МГУ: мат., мех., 1980:3 (1980), 103-103.

[O89] А. Ю. Ольшанский, Геометрия определяющих соотношений в группах. М.: Наука, 1989.

[O95] А. Ю. Ольшанский, SQ-универсальность гиперболических групп, Мат. Сборник, 186:8 (1995), 119-132.

[OA91] В. А. Артамонов, В. Н. Салий, Л. А. Скорняков, Л. Н. Шеврин, Е. Г. Шульгейфер, Общая алгебра, 2, М.: Наука, 1991.

[Пет82] В. М. Петечук, Автоморфизмы матричных групп над коммутативными кольцами, Мат. Сб., 117:4 (1982), 534-547.

[Ром77] Н. С. Романовский, Свободные подгруппы в конечно-определенных группах, Алгебра и логика, 16:1 (1977), 88-97.

[PT19] В. А. Романьков, Е. И. Тимошенко, О вербально замкнутых подгруппах свободных разрешимых групп, Вестник Омского университета, 24:1 (2019), 9-16. См. также arXiv:1906.11689.

[PX13] В. А. Романьков, Н. Г. Хисамиев, Вербально и экзистенциально замкнутые подгруппы свободных нильпотентных групп, Алгебра и логика, 52:4 (2013), 502-525.

[Стру95] С. П. Струнков, К теории уравнений на конечных группах, Изв. РАН., Сер. матем., 59:6 (1995), 171-180.

[T04] А. В. Трофимов, Теорема вложения в нетопологизируемую группу, Вестн. МГУ: мат., мех., 2007:1 (2007), 7-13.

[Шем78] Л. А. Шеметков, Формации конечных групп. М.: Наука, 1978.

[Щиго99] В. В. Щиголев, Примеры бесконечно базируемых T-идеалов, Фундамент. и прикл. матем., 5:1 (1999), 307-312.

[ACNT13] T. Asai, N. Chigira, T. Niwasaki, Yu. Takegahara, On a theorem of P. Hall, Journal of Group Theory, 16:1 (2013), 69-80.

[AHu88] E. Abe, J. Hurley, Centers of Chevalley groups over commutative rings, Comm. Algebra, 16:1 (1988), 57-74.

[AMO07] G. Arzhantseva, A. Minasyan, D. Osin, The SQ-universality and residual properties of relatively hyperbolic groups, Journal of Algebra, 315:1 (2007), 165-177. См. также arXiv:math.GR/0601590.

[AMS14] Y. Antolín, A. Martino, I. Schwabrow, Kurosh rank of intersections of subgroups of free products of right-orderable groups, Mathematical Research Letters, 21:4 (2014), 649-661. См. также arXiv:1109.0233.

[ASS15] V. Araújo, P. V. Silva, M. Sykiotis, Finiteness results for subgroups of finite extensions, J. Algebra, 423 (2015), 592-614. См. также arXiv:1402.0401.

[AST13] A. Arikan, H. Smith, N. Trabelsi, On certain application of the Khukhro-Makarenko theorem, Glasgow Math. J., 55(2013), 275-283.

[ASu76] E. Abe, K. Suzuki, On normal subgroups of Chevalley groups over commutative rings, Tôhoku Math. J., 28:1 (1976), 185-198.

[Abe89] E. Abe, Normal subgroups of Chevalley groups over commutative rings, Contemp. Math., 83 (1989), 1-117.

[AmV11] A. Amit, U. Vishne, Characters and solutions to equations in finite groups, J. Algebra Its Appl., 10:4 (2011), 675-686.

[And16] R. Andreev, A translation of “Verallgemeinerung des Sylow'schen Satzes” by F. G. Frobenius, arXiv:1608.08813.

[AsTa01] T. Asai, Yu. Takegahara, $|\mathrm{Hom}(A, G)|$, IV, J. Algebra, 246 (2001), 543-563.

[AsYo93] T. Asai, T. Yoshida, $|\mathrm{Hom}(A, G)|$, II, J. Algebra, 160 (1993), 273-285.

[BGGT12] E. Breuillard, B.Green, R. Guralnick, T. Tao, Strongly dense free subgroups of semisimple algebraic groups, Israel Journal of Mathematics, 192:1 (2012), 347-379. См. также arXiv:1010.4259.

[BMRe99] G. Baumslag, A. Myasnikov, V. Remeslennikov, Algebraic geometry over groups I. Algebraic sets and ideal theory, J. Algebra., 219 (1999), 16-79.

[BMRo97] G. Baumslag, A. Myasnikov, V. Roman'kov, Two theorems about equationally Noetherian groups, J. Algebra., 194 (1997), 654-664.

[BMS87] G. Baumslag, J. W. Morgan, P. B. Shalen, Generalized triangle groups, Math. Proc. Camb. Phil. Soc., 102 (1987), 25-31.

[BaPr78] B. Baumslag, S. Pride, Groups with two more generators than relators, J. London Math. Soc., 17 (1978), 425-426.

[BaTa68] G. Baumslag, T. Taylor, The centre of groups with one defining relator, Math. Ann., 175 (1968), 315-319.

[BoP92] W.A. Bogley, S. J. Pride, Aspherical relative presentations, Proc. Edinburgh Math. Soc. II, 35:1, (1992), 1-39.

[Bog18] O. Bogopolski, Equations in acylindrically hyperbolic groups and verbal closedness, arXiv:1805.08071.

[Bog19] O. Bogopolski, On finite systems of equations in acylindrically hyperbolic groups, arXiv:1903.10906.

[Bor70] A. Borel, Properties and linear representations of Chevalley groups. In Semin. Algebr. Groups related Finite Groups Princeton 1968/69, Lect. Notes Math. 131, A1-A55 (1970).

[Bou61] N. Bourbaki, Éléments de Mathématique. Algèbre commutative. Chapitres 1 et 2. Paris: Hermann. 1961.

[Boy88] S. Boyer, On proper powers in free products and Dehn surgery, J. Pure Appl. Algebra, 51:3 (1988), 217-229.

[Bra69] R. Brauer, On A Theorem of Frobenius, The American Mathematical Monthly, 76:1 (1969), 12-15.

[BrNa04] B. Bruno, F. Napolitani, A note on nilpotent-by-Černikov groups, Glasgow Math. J., 46 (2004), 211-215.

[BrTh88] K. Brown, J. Thévenaz, A generalization of Sylow's third theorem, J. Algebra, 115 (1988), 414-430.

[Bro00] K. S. Brown, The coset poset and probabilistic zeta function of a finite group, J. Algebra, 225 (2000), 989-1012.

[Bum04] I. Bumagina, The conjugacy problem for relatively hyperbolic groups, Algebraic & Geometric Topology, 4 (2004), 1013-1040. См. также arXiv:math/0308171.

[Bu05] J. O. Button, Large mapping tori of free group endomorphisms, arXiv:math.GR/0511715.

[But08] J. O. Button, Largeness of LERF and 1-relator groups, arXiv:0803.3805, 2008.

[Ch18] L. Chen, Spectral gap of scl in free products, Proc. Amer. Math. Soc., 146:7 (2018), 3143-3151. См. также arXiv:1611.07936.

[C02] A. Clifford, A class of exponent sum two equations over groups, Glasgow Math. J., 44 (2002) 201-207.

[C03] A. Clifford, Nonamenable type K equations over groups, Glasgow Math. J., 45 (2003), 389-400.

[CCE91] J. A. Comerford, L. P. Comerford, C. C. Edmunds, Powers asproducts of commutators, Comm. Algebra, 19 (1991), 675-684.

[CER94] L. P. Comerford, C. C. Edmunds, G. Rosenberger, Commutators as powers in free products of groups, Proc. Amer. Math. Soc., 122 (1994), 47-52.

[CG00] A. Clifford, R. Z. Goldstein, Equations with torsion-free coefficients, Proc. Edinburgh Math. Soc., 43:2 (2000), 295-307.

[CG95] A. Clifford, R. Z. Goldstein, Tesselations of $S^2$ and equations over torsion-free groups, Proc. Edinburgh Math. Soc., 38 (1995), 485-493.

[CKe99] D. L. Costa, G. E. Keller, On the normal subgroups of $G_2(A)$, Trans. Amer. Math. Soc., 351:12 (1999), 5051-5088.

[CR01] M. M. Cohen, C. Rourke, The surjectivity problem for one-generator, one-relator extensions of torsion-free groups, Geometry & Topology, 5 (2001), 127-142. См. также arXiv:math.GR/0009101..

[ChD89] A. Chermak, A. Delgado, A measuring argument for finite group. Proc. Amer. Math. Soc., 107 (1989), 907-914.

[Che00] Yu Chen, Isomorphisms of Chevalley groups over algebras, J. Algebra, 226:2 (2000) 719-741.

[Che95] Yu Chen, Automorphisms of simple Chevalley groups over $\mathbb{Q}$-algebras, ,Tôhoku Math. J., 47:1 (1995), 81-97.

[Che96] Yu Chen, Isomorphisms of adjoint Chevalley groups over integral domains, Trans. Amer. Math. Soc., 348:2 (1996), 521-541.

[CoLy63] D. E. Cohen, R. C. Lyndon, Free bases for normal subgroups of free groups, Trans. Amer. Math. Soc., 108 (1963), 528-537.

[Coll10] D. J. Collins, Generating Sequences of Finite Groups. Senior Thesis. Cornell University Mathematics Department, 2010.

[Corn13] Y. Cornulier (http://mathoverflow.net/users/14094/yves-cornulier), Large abelian characteristic subgroups in abelian-by-countable groups, URL (version: 2013-12-15): http://mathoverflow.net/q/151889

[Cull81] M. Culler, Using surfaces to solve equations in free groups, Topology, 20 (1981), 133-145.

[D12] W. Dicks, Simplified Mineyev, `https://mat.uab.cat/~dicks/pub.html` .

[dGT18a] F. de Giovanni, M. Trombetti, A note on large characteristic subgroups. Communications in Algebra, 46:11 (2018), 4654-4662.

[dGT18b] F. de Giovanni, M. Trombetti, Large characteristic subgroups with modular subgroup lattice, Archiv der Mathematik, 111:2 (2018), 123-128.

[dGT19a] F. de Giovanni, M. Trombetti, Large characteristic subgroups in which normality is a transitive relation, Atti Accad. Naz. Lincei Cl. Sci. Fis. Mat. Natur. 30 (2019), 255-268.

[dGT19b] F. de Giovanni, M. Trombetti, Large characteristic subgroups and abstract group classes, Quaestiones Mathematicae (to appear).

[DuH91] A. J. Duncan, J. Howie, The genus problem for one-relator products of locally indicable groups, Math. Z., 208 (1991), 225-237.

[DuH92] A. J. Duncan, J. Howie, Weinbaum's conjecture on unique subwords of nonperiodic words, Proc. Amer. Math. Soc., 115 (1992), 947-954.

[DuH93] A. J. Duncan, J. Howie, One-relator products with high-powered relator, in: Geometric group theory (G.A.Niblo, M.A.Roller, eds.), 48-74, Cambridge Univ. Press, Cambridge (1993).

[DŠ20] W. Dicks, Z. Šunić, Orders on trees and free products of left-ordered groups, Canadian Mathematical Bulletin, 63:2 (2020), 335-347. См. также arXiv:1405.1676 .

[Ed84] M. Edjvet, Groups with balanced presentations, Arch. Math., 42:4 (1984), 311-313.

[EH91] M. Edjvet, J. Howie, The solution of length four equations over groups, Trans. Amer. Math. Soc., 326 (1991), 345-369.

[EdJu00] M. Edjvet, A. Juhász, Equations of length 4 and one-relator products, Math. Proc. Cambridge Phil. Soc., 129:2 (2000), 217-230.

[Er12] M. Ershov, Golod-Shafarevich groups: a survey, Int. J. Algebra Comput. 22:5 (2012), 1230001. См. также arXiv:1206.0490.

[Far98] B. Farb, Relatively hyperbolic groups, GAFA, 8 (1998), 810-840.

[FeR96] R. Fenn, C. Rourke, Klyachko's methods and the solution of equations over torsion-free groups,
L'Enseignment Mathématique, 42 (1996), 49-74.

[FeR98] R. Fenn, C. Rourke, Characterisation of a class of equations with solution over torsion-free groups, from "The Epstein Birthday Schrift", (I. Rivin, C. Rourke and C. Series, editors), Geometry and Topology Monographs., 1 (1998), 159-166.

[FeTh63] W. Feit, J. G. Thompson, Solvability of groups of odd order, Pacific J. Math., 13 (1963), 755-1029.

[FiR99] B. Fine, G. Rosenberger, Algebraic generalizations of discrete groups. A path to combinatorial group theory through one-relator products. Monographs and Textbooks in Pure and Applied Math. 223. Marcel Dekker, Inc., New York, 1999.

[FoR05] M. Forester and C. Rourke, Diagrams and the second homotopy group, Comm. Anal. Geom., 13 (2005), 801-820. См. также arXiv:math.AT/0306088.

[Fr14] J. Friedman, Sheaves on graphs, their homological invariants, and a proof of the Hanna Neumann conjecture. With an appendix by Warren Dicks, Mem. Amer. Math. Soc. 233:1100 (2014). См. также arXiv:1105.0129.

[Fr18] E. Frolova, Khukhro-Makarenko type theorems for algebras, arXiv:1804.00268.

[Frob95] F. G. Frobenius, Verallgemeinerung des Sylow'schen Satzes, Sitzungsberichte der Königl. Preuß. Akad. der Wissenschaften (Berlin) (1895), 981-993.

[Frob03] F. G. Frobenius, Über einen Fundamentalsatz der Gruppentheorie, Sitzungsberichte der Königl. Preuß. Akad. der Wissenschaften (Berlin) (1903), 987-991.

[GR62] M. Gerstenhaber, O.S. Rothaus, The solution of sets of equations in groups, Proc. Nat. Acad. Sci. USA, 48:9 (1962), 1531-1533.

[GRV12] C. Gordon, F. Rodriguez-Villegas, On the divisibility of $\#\mathrm{Hom}(\Gamma, G)$ by $|G|$, J. Algebra, 350:1 (2012), 300-307. См. также arXiv:1105.6066.

[Ger87] S. M. Gersten, Reducible diagrams and equations over groups. InEssays in group theory, 15-73. Springer, New York-Berlin, 1987.

[Gr83] M. Gromov, Volume and bounded cohomology, Inst. Hautes Etudes Sci. Publ. Math., 1982:56 (1983), 5-99.

[GuKr03] C. K. Gupta, A. N. Krasilnikov, The finite basis question for varieties of groups - Some recent results, Illinois Journal of Mathematics, 47:1-2 (2003), 273.

[HIÖ89] T. Hawkes, I. M. Isaacs, M. Özaydin, On the Möbius function of a finite group, Rocky Mountain J. Math., 19:4 (1989), 1003-1034

[HO'M89] A. J. Hahn, O. T. O'Meara, The classical groups and K-theory. Springer. Berlin et al. 1989.

[HW16] J. Helfer, D. T. Wise, Counting cycles in labeled graphs: the nonpositive immersion property for one-relator groups, International Mathematics Research Notices 2016:9 (2016), 2813-2827.

[HaV03] R. Hazrat, N. Vavilov, $K_1$ of Chevalley groups are nilpotent, J. Pure Appl. Algebra, 179 (2003), 99-116.

[Hall36a] P. Hall, The Eulerian functions of a group, Quart. J. Math. Oxford Ser., 7 (1936), 134-151.

[Hall36b] P. Hall, On a theorem of Frobenius, Proc. London Math. Soc. 40 (1936), 468-501.

[Higg56] P. J. Higgins, Groups with multiple operators, Proc. London Math. Soc. (3) 6 (1956), 366-416.

[How81] J. Howie, On pairs of 2-complexes and systems of equations over groups, J. Reine Angew Math., 1981:324 (1981), 165-174.

[How83] J. Howie, The solution of length three equations over groups, Proc. Edinburgh Math. Soc., 26 (1983), 89-96.

[How87] J. Howie, How to generalize one-relator group theory, in: Combinatorial group theory and topology (S.M. Gersten and J.R. Stallings, eds.), 53-78, Ann. of Math. Stud., 111, Princeton Univ. Press, (1987).

[How90] J. Howie, The quotient of a free product of groups by a single high-powered relator. II. Fourth powers, Proc. London Math. Soc., 61 (1990), 33-62.

[How91] J. Howie, The quotient of a free product of groups by a single high-powered relator. III: The word problem, Proc. Lond. Math. Soc., 62:3 (1991), 590-606.

[How98] J. Howie, Free subgroups in groups of small deficiency, J. Group Theory, 1:1 (1998), 95-112.

[Is08] I. M. Isaacs, Finite group theory, GSM 92, American Math. Soc., Providence RI, 2008.

[Isaa70] I. M. Isaacs, Systems of equations and generalized characters in groups, Canad. J. Math., 22 (1970), 1040-1046.

[Iv17] S. V. Ivanov, Intersecting free subgroups in free products of left ordered groups, Journal of Group Theory, 20:4 (2017), 807-821. См. также arXiv:1607.03010.

[Iwa82] S. Iwasaki, A note on the $n$th roots ratio of a subgroup of a finite group, J. Algebra, 78:2 (1982), 460-474.

[JZ17] A. Jaikin-Zapirain, Approximation by subgroups of finite index and the Hanna Neumann conjecture, Duke Mathematical Journal, 166:10 (2017), 1955-1987.

[Juhá03] Juhász A. On the solvability of a class of equations over groups, Math. Proc. Cambridge Phil. Soc., 135:2 (2003), 211-217.

[KPS73] A. Karrass, A. Pietrowski, D. Solitar, Finitely generated groups with a free subgroup of finite index, J. Austral. Math. Soc., 16 (1973), 458-466.

[KT84] C. Kratzer, J. Thévenaz, Fonction de Möbius d'un groupe fini et anneau de Burnside, Commentarii Mathematici Helvetici, 59:1 (1984), 425-438.

[KhV12] O. Kharlampovich, A. Vdovina, Linear estimates for solutions of quadratic equations in free groups, International Journal of Algebra and Computation, 22:01 (2012), 1250004. См. также arXiv:1107.2843.

[KhM07a] E. I. Khukhro, N. Yu. Makarenko, Large characteristic subgroups satisfying multilinear commutator identities, J. London Math. Soc., 75:3 (2007), 635-646.

[KhM07b] E. I. Khukhro, N. Yu. Makarenko, Characteristic nilpotent subgroups of bounded co-rank
and automorphically-invariant ideals of bounded codimension in Lie algebras, Quart. J. Math., 58 (2007), 229-247.

[KhM08] E. I. Khukhro, N. Yu. Makarenko, Automorphically-invariant ideals satisfying multilinear identities, and group-theoretic applications, J. Algebra, 320:4 (2008), 1723-1740.

[KhM14] B. Khoussainov, A. Miasnikov, Finitely presented expansions of groups, semigroups, and algebras, Trans. Amer. Math. Soc. 366 (2014), 1455-1474.

[Ki18] K. Kishore, Representation variety of surface groups, Proc. Amer. Math. Soc. 146 (2018), 953-959. См. также arXiv:1702.05981.

[Kras09] A. N. Krasilnikov, A non-finitely based variety of groups which is finitely based as a torsion-free variety, Journal of Group Theory, 12:5 (2009), 735-743.

[Kruse73] R. L. Kruse, Identities satisfied by a finite ring, J. Algebra, 26 (1973), 298-318.

[Ku83] R. S. Kulkarni, An extension of a theorem of Kurosh and applications to Fuchsian groups, Michigan Mathematical Journal, 30:3 (1983), 259-272.

[Kula38] A. Kulakoff, Einige Bemerkungen zur Arbeit: "On a theorem of Frobenius" von P. Hall, Матем. сб., 3(45):2 (1938), 403-405.

[LL13] M. Larsen, A. Lubotzky, Representation varieties of Fuchsian groups, From Fourier analysis and number theory to radon transforms and geometry, 375-397, Dev. Math., 28, Springer, New York, 2013. См. также arXiv:1203.3408.

[LM11] S. Liriano, S. Majewicz, Algebro-geometric invariants of groups (the dimension sequence of representation variety), Int. J. Algebra Comput., 21:4 (2011), 595-614.

[LS05] M. Liebeck, A. Shalev, Fuchsian groups, finite simple groups and representation varieties, Inventiones mathematicae 159:2 (2005), 317-367.

[LT18] D. D. Long, M. B. Thistlethwaite, The dimension of the Hitchin component for triangle groups, Geometriae Dedicata (to appear).

[La05] M. Lackenby, Expanders, rank and graphs of groups, Israel Journal of Mathematics, 146:1 (2005), 357-370. См. также arXiv:math/0403127.

[Lang02] S. Lang, Algebra. New York, Berlin, Heidelberg: Springer-Verlag, 2002.

[Le09] Le Thi Giang, The relative hyperbolicity of one-relator relative presentations, Journal of Group Theory, 12:6 (2009), 949-959. См. также arXiv:0807.2487.

[Le62] F. Levin, Solutions of equations over groups, Bull. Amer. Math. Soc., 68:6 (1962), 603-604.

[Lee02] D. Lee, On certain C-test words for free groups, J. Algebra, 247 (2002), 509-540.

[Ly80] R.C. Lyndon, Equations in groups, Bol. Soc. Bras. Math., 11:1 (1980), 79-102.

[MCW02] J. P. McCammond, D. T. Wise, Fans and ladders in small cancellation theory, Proc. London Math. Soc. (3), 84:3 (2002), 599-644.

[MO10] J. Martín-Morales, A. M. Oller-Marcén, On the number of irreducible components of the representation variety of a family of one-relator groups, Internat. J. Algebra Comput. 20:1 (2010), 77-87. См. также arXiv:0805.4716.

[MO11] A. Myasnikov, D. Osin. Algorithmically finite groups, J. Pure Appl. Algebra 215:11 (2011), 2789-2796. См. также arXiv:1012.1653.

[MO98] S. A. Morris, V. N. Obraztsov, Nondiscrete topological groups with many discrete subgroups, Topology Appl., 84 (1998), 105-120.

[MR14] A. Myasnikov, V. Roman'kov, Verbally closed subgroups of free groups, Journal of Group Theory, 17 (2014), 29-40. См. также arXiv:1201.0497..

[MSh12] N. Yu. Makarenko, P. Shumyatsky, Characteristic subgroups in locally finite groups, J. Algebra, 352:1 (2012), 354-360.

[Ma32] W. Magnus, Das Identitätsproblem für Gruppen mit einer definierenden Relation, Math. Ann., 106 (1932), 295-307.

[Mag30] W. Magnus, Über diskontinuierliche Gruppen mit einer definierenden Relation (Der Freiheitssatz), J. Reine Angew Math., 163 (1930) 141-165.

[Mas84] R.C. Mason, Diophantine Equations over Function Fields, London Mathematical Society Lecture Note Series 96, Cambridge, England: Cambridge University Press, 1984.

[Mazh17] A. M. Mazhuga, On free decompositions of verbally closed subgroups of free products of finite groups, Journal of Group Theory, 20:5, 971-986. См. также arXiv:1605.01766.

[Mazh18] A. M. Mazhuga, Strongly verbally closed groups, J. Algebra, 493 (2018), 171-184. См. также arXiv:1707.02464.

[Met01] V. Metaftsis, On the structure of one-relator products of locally indicable groups with centre, J. Pure Appl. Algebra, 161:3 (2001), 309-325.

[Mi12a] I. Mineyev, Submultiplicativity and the Hanna Neumann conjecture, Ann. Math., 175 (2012), 393-414.

[Mi12b] I. Mineyev, Groups, graphs, and the Hanna Neumann conjecture, J. Topol. Anal., 4:1 (2012), 1-12.

[Mu64] K. Murasugi, The center of a group with a single defining relation, Math.Ann., 155 (1964), 246-251.
[Neu54] B. H. Neumann, Groups covered by permutable subsets, J. London Math. Soc., s1-29:2 (1954), 236-248.
[Neu76] B. H. Neumann, A problem of Paul Erdős on groups, J. Austral. Math. Soc. Ser. A., 21:4 (1976), 467-472.
[Neu73] P. M. Neumann, The SQ-universality of some finitely presented groups, J. Austral. Math. Soc., 16 (1973), 1-6.
[New68] B. B. Newman, Some results on one-relator groups, Bull. Amer. Math. Soc., 74 (1968) 568-571.
[New85] M. Newman, A note on Fuchsian groups, Illinois J. Math., 29:4 (1985), 682-686.
[OaPo64] S. Oates, M. B. Powell, Identical relations in finite groups, J. Algebra 1 (1964), 11-39.
[OlOs06] A. Yu. Olshanskii, D. V. Osin, Large groups and their periodic quotients, Proceedings of the American Mathematical Society, 136:3 (2008), 753-759.
См. также arXiv:math/0601589.
[Os06] Osin D.V. Relatively hyperbolic groups: Intrinsic geometry, algebraic properties, and algorithmic problems. Memoirs Amer. Math. Soc. 179:843 (2006).
См. также arXiv:math/0404040.
[P88] S. D. Promyslow, A simple example of a torsion free nonunique product group, Bull. London Math. Soc., 20 (1988), 302-304.
[PSz02] K. Podoski, B. Szegedy, Bounds in groups with finite abelian coverings or with finite derived groups, J. Group Theory, 5:4 (2002), 443-452.
[Pi74] A. Pietrowski, The isomorphism problem for one-relator groups with non-trivial centre, Math.Z., 136 (1974), 95-106.
[Pia02] A. Pianzola, Automorphisms of toroidal Lie algebras their central quotients, J. Algebra and Appl., 1:1 (2002), 113-121.
[Pri88] S. J. Pride, Star-complexes, and the dependence problems for hyperbolic complexes, Glasgow Math. J., 30:2 (1988), 155-170.
[RBCh96] A. S. Rapinchuk, V. V. Benyash-Krivetz, V. I. Chernousov, Representation varieties of the fundamental groups of compact orientable surfaces, Israel Journal of Mathematics, 93:1 (1996), 29-71.
[RS87] E. Rips, Y. Segev, Torsion free groups without unique product property, J. Algebra, 108 (1987), 116-126.
[Rom12] V. A. Roman'kov, Equations over groups, Groups Complexity Cryptology, 4:2 (2012), 191-239.
[Ry25] S. Ryley, The Ladies' Diary, 122 (1825), 35.
[SaAs07] J. Sato, T. Asai, On the $n$-th roots of a double coset of a finite group, J. School Sci. Eng., Kinki Univ., 43 (2007), 1-4.
[SaSc74] G. S. Sacerdote, P. E. Schupp, SQ-universality in HNN groups and one relator groups, J. London Math. Soc., 7 (1974), 733-740.
[Sch59] M. P. Schützenberger, Sur l'equation $a^{2+n} = b^{2+m}c^{2+p}$ dans un groupe libre, C. R. Acad. Sci. Paris Sér. I Math., 248 (1959), 2435-2436.
[Sehg62] S. K. Sehgal, On P. Hall's generalisation of a theorem of Frobenius, Proc. Glasgow Math. Assoc., 5 (1962), 97-100.
[Ser77] J.-P. Serre. Arbres, amalgames, $SL_2$, Rédigé avec la collaboration de Hyman Bass. Astérisque, No. 46. Sociéte Mathématique de France, Paris, 1977. (English translation: Trees. Springer-Verlag, 1980).
[Sil86] Silverman J. H. The Arithmetic of Elliptic Curves. New York: Springer-Verlag, 1986.
[Sny00] Snyder N. An alternate proof of Mason's theorem, Elem. Math., 55:3 (2000), 93-94.

[Solo69] L. Solomon, The solution of equations in groups, Arch. Math., 20:3 (1969), 241-247.

[Speht52] W. Specht, Gesetze in Ringen. I, Math. Z., 52 (1950), 557-589.

[Sta71] J. Stallings, Group theory and three-dimensional manifolds, Yale Math. Monographs (1971).

[Sta87] J. R. Stallings, A graph-theoretic lemma and group embeddings, Combinatorial group theory and topology (eds. S. M. Gersten, J. R. Stallings). Annals of Mathematical Studies. 111. 1987. 145-155.

[Sto81] W. W. Stothers, Polynomial identities and hauptmoduln, Quarterly J. Math., 32:3 (1981), 349-370.

[Str80] A. Strojnowski, A note on u.p. groups, Comm. Algebra, 8 (1980), 231-234.

[Stö83] Stöhr R. Groups with one more generator than relators, Math. Z., 182:1 (1983), 45-47.

[VPl96] N. Vavilov, E. Plotkin, Chevalley groups over commutative rings. I: Elementary calculations, Acta Appl. Math., 45:1 (1996), 73-113.

[Vas86] L. N. Vaserstein, On normal subgroups of Chevalley groups over commutative rings, Tôhoku Math. J., 36:5 (1986), 219-230.

[Wag67] K. Wagner, Fastplättbare Graphen, J. Combinatorial Theory, 3 (1967), 326-365.

[Wat80] W. C. Waterhouse, Automorphisms of $\mathbf{GL}_n(\mathbb{R})$, Proc. Amer. Math. Soc., 79:3 (1980) 347-351.

[Wils09] R. A. Wilson, The Finite Simple Groups. Graduate Texts in Mathematics. Springer. 2009.

[Wise01] D. T. Wise, The residual finiteness of positive one-relator groups, Comment. Math. Helv., 76 (2001), 314-338.

[Yosh93] T. Yoshida, $|\mathrm{Hom}(A,G)|$, Journal of Algebra, 156:1 (1993), 125-156.

[Za14] A. Zakharov, On the rank of the intersection of free subgroups in virtually free groups, J. Algebra, 418 (2014), 29-43. См. также arXiv:1301.3115.

[ZS18] G. L. Zhou, Z. W. Sun, On sums and products in a field, arXiv:1807.01181.

## РАБОТЫ АВТОРА ПО ТЕМЕ ДИССЕРТАЦИИ

### Статьи в рецензируемых научных изданиях, рекомендованных для защиты в диссертационном совете МГУ по специальности

[БК21] Е. К. Брусянская, А. А. Клячко, О числе эпи-, моно- и гомоморфизмов групп, Известия РАН. Сер. мат., 86:2 (2022), 25-33. См. также arXiv:2012.03123.

[K21] A. A. Klyachko, The Klein bottle group is not strongly verbally closed, though awfully close to being so, Canadian Mathematical Bulletin, 64:2 (2021), 491-497. См. также arXiv:2006.15523.

[KL21] A. A. Klyachko, N. M. Luneva, Invariant systems of representatives, or The cost of symmetry, Discrete Mathematics, 344:6 (2021), 112361. См. также arXiv:1908.03315.

[KP20] A. A. Klyachko, A. N. Ponfilenko, Intersections of subgroups in virtually free groups and virtually free products, Bull. Austral. Math. Soc., 101:2 (2020), 266-271. См. также arXiv:1904.07350.

[KR20] A. A. Klyachko, M. A. Ryabtseva, The dimension of solution sets to systems of equations in algebraic groups, Israel Journal of Mathematics, 237:1 (2020), 141-154. См. также arXiv:1903.05236.

[BKV19] E. K. Brusyanskaya, A. A. Klyachko, A. V. Vasil'ev, What do Frobenius's, Solomon's, and Iwasaki's theorems on divisibility in groups have in common?, Pacific Journal of Mathematics, 302:2 (2019), 437-452. См. также arXiv:1806.08870.

[KMM18] A. A. Klyachko, A. M. Mazhuga, V. Yu. Miroshnichenko, Virtually free finite-normal-subgroup-free groups are strongly verbally closed, Journal of Algebra, 510 (2018), 319-330. См. также arXiv:1712.03406.

[KM18] А. А. Клячко, А. М. Мажуга, Вербально замкнутые почти свободные подгруппы, Мат. сборник, 209:6 (2018), 75-82. См. также arXiv:1702.07761.

[IK18] I. V. Ivanov, A. A. Klyachko, Quasiperiodic and mixed commutator factorizations in free products of groups, Bull. London Math. Soc., 50:5 (2018), 832-844. См. также arXiv:1702.01379.

[KM17] A. A. Klyachko, A. A. Mkrtchyan, Strange divisibility in groups and rings, Archiv der Mathematik, 108:5 (2017), 441-451. См. также arXiv:1506.08967.

[KV16] A. A. Klyachko, A. N. Vassiliev, Balanced factorizations, American Mathematical Monthly, 123:10 (2016), 989-1000. См. также arXiv:1506.01571.

[KMo15] А. А. Клячко, А. К. Монгуш, Финитно аппроксимируемые алгоритмически конечные группы, их подгруппы и прямые произведения, Мат. заметки, 98:3 (2015), 372-377. См. также arXiv:1402.0887.

[KMi15] A. A. Klyachko, M. V. Milentyeva, Large and symmetric: The Khukhro–Makarenko theorem on laws — without laws, Journal of Algebra, 424 (2015), 222-241. См. также arXiv:1309.0571.

[KM14] A. A. Klyachko, A. A. Mkrtchyan, How many tuples of group elements have a given property? With an appendix by Dmitrii V. Trushin, International Journal of Algebra and Computation, 24:4 (2014), 413-428. См. также arXiv::1205.2824.

[KM12] A. A. Klyachko, E. V. Menshova, The identities of additive binary arithmetics, Electronic Journal of Combinatorics, 19:1 (2012), #P40. См. также arXiv:1102.5555.

[БК12] Д. В. Баранов, А. А.Клячко, Экономное присоединение квадратных корней к группам, Сибирский мат. журнал, 53:2 (2012), 250-257. См. также arXiv:1101.3019.

[KL12] A. A. Klyachko, D. E. Lurye, Relative hyperbolicity and similar properties of one-generator one-relator relative presentations with powered unimodular relator, Journal of Pure and Applied Algebra, 216:3 (2012), 524-534. См. также arXiv:1010.4220.

[KhKMM09] E. I. Khukhro, A. A. Klyachko, N. Yu. Makarenko, Yu. B. Melnikova, Automorphism invariance and identities, Bull. London Math. Soc., 41:5 (2009), 804-816. См. также arXiv:0812.1359.

[KM09] А. А. Клячко, Ю. Б. Мельникова, Короткое доказательство теоремы Макаренко–Хухро о больших характеристических подгруппах с тождеством, Мат. сборник, 200:5 (2009), 33-36. См. также arXiv:0805.2747.

[K10] A. A. Klyachko, Automorphisms and isomorphisms of Chevalley groups and algebras, Journal of Algebra, 324:10 (2010), 2608-2619. См. также arXiv:0708.2256.

[K09] A. A. Klyachko, The structure of one-relator relative presentations and their centres, Journal of Group Theory, 12:6 (2009), 923-947. См. также arXiv:math.GR/0701308.

[K06б] А. А. Клячко, SQ-универсальность относительных копредставлений с одним соотношением, Мат. сборник, 197:10 (2006), 87-108. См. также arXiv:math.GR/0603468.

[K07] А. А. Клячко, Свободные подгруппы относительных копредставлений с одним соотношением, Алгебра и логика, 46:3 (2007), 290-298. См. также arXiv:math.GR/0510582.

[KT05] A. A. Klyachko, A. V. Trofimov, The number of non-solutions of an equation in a group, Journal of Group Theory, 8:6 (2005), 747-754. См. также arXiv:math.GR/0411156.

[K05] А. А. Клячко, Гипотеза Кервера–Лауденбаха и копредставления простых групп, Алгебра и логика, 44:4 (2005), 399-437. См. также arXiv:math.GR/0409146.

[K06a] А. А. Клячко, Как обобщить известные результаты об уравнениях над группами, Мат. заметки, 79:3 (2006), 409-419. См. также arXiv:math.GR/0406382.

**Другие работы автора по теме диссертации**

[KZ21] A. A. Klyachko, A. O. Zakharov, An analogue of the strengthened Hanna Neumann conjecture for virtually free groups and virtually free products, Michigan Mathematical Journal (в печати). См. также arXiv:2106.05821.

[KMO21]* A. A. Klyachko, V. Yu. Miroshnichenko, A. Yu. Olshanskii, Finite and nilpotent strongly verbally closed groups, Journal of Algebra and Its Applications (в печати). См. также arXiv:2109.12397.

[DK21]* N. S. Dergacheva, A. A. Klyachko, Small non-Leighton two-complexes, arXiv:2108.01398.

[BeK20]* V. Yu. Bereznyuk, A. A. Klyachko, Commutator length of powers in free products of groups, Proc. Edinburgh Math. Soc., 65:1 (2022), 102-119. См. также arXiv:2008.02861.

[KT17]* A. A. Klyachko, A. B. Thom, New topological methods to solve equations over groups, Algebraic and Geometric Topology, 17:1 (2017), 331-353. См. также arXiv:1509.01376.

[КМП17] А. А. Клячко, А. М. Мажуга, А. Н. Понфиленко, Уравновешенные разложения на множители в некоторых алгебрах, Мат. просвещение, 21 (2017), 136-144. См. также arXiv:1607.01957.

[FK12]* E. V. Frenkel, A. A. Klyachko, Commutators cannot be proper powers in metric small-cancellation torsion-free groups, arXiv:1210.7908.

[KOO13]* A. A. Klyachko, A. Yu. Olshanskii, D. V. Osin, On topologizable and non-topologizable groups, Topology and its Applications, 160:16 (2013), 2104-2120. См. также arXiv:1210.7895.

[IK01]* S. V. Ivanov, A. A. Klyachko, The asphericity and Freiheitssatz for certain lot-presentations of groups, International Journal of Algebra and Computation, 11:3 (2001), 291-300.

[KS01]* A. A. Klyachko, O. V. Sipacheva, Topological solvability of equations over groups, Communications in Algebra, 29:9 (2001), 4249-4265.

[IK00]* S. V. Ivanov, A. A. Klyachko, Solving equations of length at most six over torsion-free groups, Journal of Group Theory, 3:3 (2000), 329-337.

[K99]* A. A. Klyachko, Equations over groups, quasivarieties, and a residual property of a free group, Journal of Group Theory, 2:3 (1999), 319-327.

[K97]* A. A. Klyachko, Asphericity tests, International Journal of Algebra and Computation, 7:4 (1997), 415-431.

[КП95]* А. А. Клячко, М. И. Прищепов, Метод спуска для уравнений над группами, Вестник Московского университета. Серия 1: Математика. Механика, 4 (1995), 90-93.

[K94]* А. А. Клячко, Гипотеза Кервера–Лауденбаха и уравнения над группами, Дисс. ... к.ф.-м.н., М.: МГУ, 1994.

[K93]* A. A. Klyachko, A funny property of sphere and equations over groups, Communications in Algebra, 21:7 (1993), 2555-2575.

Результаты из работ, помеченных звёздочкой, не вошли в диссертацию, хотя и соответствуют по теме.