

ОТЗЫВ

**научного руководителя на диссертацию Давыдова Александра Вадимовича
«Спектральный анализ интегродифференциальных операторов, возникающих в
теории вязкоупругости», представленную на соискание учёной степени кандидата
физико-математических наук по специальности**

1.1.1 – Вещественный, комплексный и функциональный анализ

Диссертационная работа Давыдова Александра Вадимовича «Спектральный анализ интегродифференциальных операторов, возникающих в теории вязкоупругости» посвящена исследованию интегро-дифференциальных уравнений с неограниченными операторными коэффициентами в гильбертовом пространстве. Исследование указанных уравнений автором осуществляется с помощью спектрального анализа оператор-функций, которые являются символами исходных уравнений. Спектральный анализ таких операторных функций, основывается на идеях, восходящих к работам М.В. Келдыша. Эти идеи получили развитие в работах многих известных математиков, в частности, работы С. А. Иванова, А.И. Милославского и Г.В. Радзиевского посвящены изучению дробно-мероморфных оператор-функций, обобщением которых являются изучаемые в диссертации символы интегро-дифференциальных уравнений. Отметим, что изучаемые абстрактные интегро-дифференциальные уравнения могут быть реализованы как интегро-дифференциальные уравнения в частных производных, возникающие в задачах теории вязкоупругости. С помощью таких уравнений моделируются, например, колебания вязкоупругой пластины в сверхзвуковом потоке жидкости или газа в рамках поршневой модели.

Остановлюсь на основном содержании диссертационной работы. Диссертация состоит из введения, двух глав, заключения и списка литературы. Во введении даётся общая характеристика работы, а также проводится обзор исследований, проводившихся ранее по теме диссертации.

Первая глава диссертации посвящена уравнению колебания вязкоупругой пластины в сверхзвуковом потоке жидкости или газа. Данное уравнение представляет собой уравнение Гуртина-Пипкина, модифицированное относительно компактным возмущением.

В первом параграфе первой поставлена задача Коши для абстрактного интегродифференциального уравнения второго порядка, исследованию которой посвящена первая глава, вводятся необходимые для дальнейшего изложения определения и обозначения, а также приводятся используемые в дальнейшем результаты из теории пространств Соболева и Харди.

Во втором параграфе первой главы приводится уравнение колебания вязкоупругой пластины в сверхзвуковом потоке жидкости или газа из теории вязкоупругих сред. Данное уравнение потом записывается в операторном виде при условии шарнирного закрепления края пластины. Приводится конкретный вид дифференциальных операторов с граничными условиями, а также доказываются важные свойства данных операторов, служащие основой для исследования уравнения в операторном виде в дальнейшем.

В третьем параграфе первой главы автором установлена корректная разрешимость задачи Коши, ассоциируемой с данным уравнением в пространствах Соболева. С помощью анализа резольвенты символа уравнения было найдено слабое решение уравнения в пространствах Соболева с экспоненциальным весом в зависимости от

начальных данных. Кроме того, получено условие асимптотической устойчивости решений, устойчивости решений по Ляпунову, а также оценка снизу критической скорости потока, при которых колебания перестают быть устойчивыми в зависимости от конкретных физических параметров изначальной задачи.

В четвертом параграфе первой главы исследуется асимптотика спектра символа уравнения. Используя операторный аналог теоремы Руше, автор устанавливает асимптотику спектра символа уравнения и показывает связь с асимптотикой спектра символа немодифицированного уравнения Гуртина-Пипкина.

Вторая глава диссертации посвящена исследованию классического уравнения Гуртина-Пипкина. В данной главе представлены следующие результаты: вычисление асимптотики не вещественного спектра символа данного уравнения в случае ядер релаксации, представимых в виде интеграла Стилтеса, исследования разрешимости данного уравнения в шкале пространств, а также доказательство возможности наличия бесконечного не вещественного спектра при учете трения Кельвина-Фойгхта.

В первом параграфе второй главы автор определяет задачу Коши для классического уравнения Гуртина-Пипкина, исследованию которой посвящена вторая глава, приводит связь данного уравнения с уравнением колебания вязкоупругой пластины, описанной в первой главе, вводит необходимые для дальнейшего изложения определения и обозначения.

Во втором параграфе второй главы исследуется асимптотика не вещественного спектра символа уравнения в случае ядер релаксации, представимых в виде интеграла Стилтеса. В случае неконечной меры Стилтеса класс функций, описанный в работе, позволяет определить ядра релаксации с полиномиальным стремлением к бесконечности в нуле и экспоненциальным убыванием на бесконечности. Данные ядра используются во многих моделях теории вязкоупругости и теории распространении тепла в средах с памятью. Автор приводит асимптотику не вещественного спектра символа уравнения Гуртина-Пипкина для ядер релаксации, представимых в виде интеграла Стилтеса. Результаты автора являются существенным развитием результатов, установленных А.Э. Ерёменко и С.А. Иванова.

В третьем параграфе второй главы приводятся результаты, касающиеся разрешимости в шкале пространств уравнения Гуртина-Пипкина. Автор определяет и приводит основные свойства шкалы пространств, связанных с неограниченным оператором уравнения. После этого с помощью анализа резольвенты символа уравнения находится сильное решение уравнения для не весовых пространств Соболева. Для ядер релаксации, представляющих собой бесконечную сумму убывающих экспонент с полиномиальными коэффициентами, существенно ослабляются требования, предъявляемые к начальным данным для получения сильного решения. Кроме того, приводится теорема для нахождения слабого решения уравнения. На основании трех представленных выше результатов в конце приводится корректная разрешимость в шкале пространств уравнения Гуртина-Пипкина.

В четвертом параграфе второй главы рассмотрено уравнение Гуртина-Пипкина с внутренним трением, или трением Кельвина-Фойгхта. Проведен анализ не вещественного спектра символа данного уравнения, а именно: рассмотрены случаи, когда эта часть конечна и когда спектр содержит счётное число не вещественных собственных значений, приведены конкретные примеры ядер релаксации для данного оператора, когда не вещественный спектр бесконечен, а также получен результат о том, что ядро релаксации в данной задаче можно изменить так, что не вещественный спектр будет

бесконечен, и при этом измененное ядро будет сколь угодно близко к изначальному в пространстве L_1 . Данный результат может служить ответом на поставленный в работе А.Э. Ерёмченко и С.А. Иванова вопрос о конечности не вещественной части спектра.

Результаты, полученные в диссертации А. В. Давыдова, являются новыми и представляют несомненный научный интерес. Данные результаты изложены в 5 научных статьях, опубликованных в рецензируемых журналах, входящих в базы данных Scopus и Web of Science. Из этих работ 2 написаны в соавторстве с Ю. А. Тихоновым, при этом А.В. Давыдову принадлежит идея примеров символов изучаемых интегродифференциальных уравнений, содержащих бесконечное число собственных чисел в спектре и результаты, посвященные условию отсутствия бесконечного не вещественного спектра, а Ю.А. Тихонову принадлежат результаты о локализации спектра оператор-функции. Этот факт отмечен в тексте диссертации. Результаты диссертации обсуждались на ряде научно-исследовательских семинаров, а также излагались на международных конференциях.

На основании изложенного считаю, что при работе над диссертацией автор продемонстрировал уверенное владение методами спектральной теории, теории полугрупп и методами комплексного анализа. Тематика диссертации является актуальной и тесно связана с приложениями. Считаю, что диссертация Давыдова А.В. «Спектральный анализ интегродифференциальных операторов, возникающих в теории вязкоупругости», представленная на соискание учёной степени кандидата физико-математических наук по специальности 1.1.1 - «Вещественный, комплексный и функциональный анализ» удовлетворяет требованиям «Положения о присуждении учёных степеней в Московском государственном университете имени М.В.Ломоносова» и рекомендуется к защите в диссертационном совете МГУ 011.3(01.07).

Научный руководитель
профессор кафедры математического анализа
механико-математического факультета МГУ М.В. Ломоносова
119991, ГСП-1, Москва, Ленинские горы, МГУ, д.1, Главное здание,
механико-математический факультет, тел. +7 (495) 939-12-63,
e-mail: mmmf@mech.math.msu.su, сайт: <https://www.math.msu.su/>)
доктор физико-математических наук, профессор
(тел.: +7 (495) 939-18-01, e-mail: victor.vlasov@math.msu.ru)

В.В. Власов

« » сентября 2022 г.

Подпись профессора В.В. Власова удостоверяю
Декан механико-математического факультета
МГУ имени М.В. Ломоносова, член-корр. РАН,
доктор физико-математических наук, профессор
« » сентября 2022 г.

А.И. Шафаревич