ОТЗЫВ ОФИЦИАЛЬНОГО ОППОНЕНТА

о диссертации Булинской Екатерины Владимировны «Вероятностно-геометрические свойства пространственного ветвящегося случайного блуждания» на соискание ученой степени доктора физико-математических наук по специальности 1.1.4 теория вероятностей и математическая статистика.

Диссертация Е.В. Булинской посвящена получению новых фундаментальных результатов в активно развивающейся области современной теории вероятностей – теории ветвящихся случайных процессов. Эти процессы получаются добавлением в обычные марковские случайные процессы специального механизма ветвления. Ветвящиеся процессы обычно интерпретируются как движение частицы, которая некоторое время движется вдоль траектории марковского процесса, а в случайный момент времени исчезает, порождая, вообще говоря, случайное число новых частиц, каждая из которых далее продолжает двигаться независимо от всех остальных частиц в системе по тому же закону. Самым общим образом ветвящийся случайный процесс можно определить как марковский процесс в пространстве конфигураций на фазовом пространстве базового марковского процесса, или как марковский процесс эволюции популяции частиц.

Среди ветвящихся процессов можно условно выделить две типа процессов – ветвящиеся процессы, в которых параметры ветвления зависят от точки, в которой произошло ветвление, и те процессы, в которых механизм ветвления однороден по пространству. Процессы первого типа значительно сложнее для изучения – даже вопрос о среднем числе частиц в популяции может быть для этого типа процессов вполне нетривиальным.

В диссертации Е.В. Булинской рассматривается ветвящийся процесс с непрерывным временем на конечном или счетном множестве, в котором ветвление может происходить в конечном или счетном числе точек (катализаторов), при этом параметры ветвления различны в разных каталитических точках.

Диссертация состоит из введения, трех глав, заключения и списка литературы. Во введении освещается общая проблематика диссертации, приводится достаточно подробный обзор литературы по тематике исследования, обосновывается актуальность и научная новизна диссертационной работы, перечисляются методы исследования и положения, выносимые на защиту, описывается апробация результатов, излагаются основные результаты диссертации.

В первой главе диссертации исследован случай, когда базовое блуждание является практически произвольной неприводимой марковской цепью с непрерывным временем. Впервые проведена классификация соответствующих ветвящихся марковских процессов на надкритические, критические и докритические. Исследовано асимптотическое поведение общих и локальных средних численностей частиц в популяции, а также их факториальных моментов при $t \to \infty$ (теорема 4). Такого рода результаты ранее были получены в работах Е.Б. Яровой и ее учеников для случая, когда базовая марковская цепь представляет из себя симметричное случайное блуждание по решетке $\mathbb{Z}^d$. В этих работах использовалась операторная техника. Средние локальные и общие численности частиц удовлетворяют эволюционному уравнению, в котором в правой части стоит самосопряженный оператор типа свертки, отвечающий блужданию, плюс потенциал конечного ранга, описывающий ветвление. Классификация процессов на надкритические, критические и докритические определялась правым краем спектра данного оператора. Применяемые в работах Е.Б. Яровой с учениками подходы, по-видимому, могут быть использованы также и в случае симметричной марковской цепи, но в отсутствие предположения о симметричности оператор перестает быть самосопряженным, что приводит к большим трудностям в использовании спектральных методов. В диссертации Е.В. Булинской для решения задачи классификации использовалась совсем другая техника, основанная на построении вспомогательного процесса Беллмана–Харриса. Каждой частице присваивался некоторый тип, грубо говоря, в зависимости от порядка посещения частицей каталитических точек. Далее строилась матрица средних этого процесса и показывалось, что она является неразложимой. Такая матрица в силу теоремы Перрона-Фробениуса обладает положительным собственным значением (перроновым корнем) ρ. Классификация ветвящихся процессов в диссертации проводилась в зависимости от величины этого корня: $\rho > 1$ – надкритический, $\rho < 1$ – докритический, $\rho = 1$ – критический. Получено уравнение, определяющее мальтусовский параметр ν, определяющий скорость роста популяции в надкритическом случае. Последний параграф этой главы посвящен вычислению вероятностей локального и глобального вырождения ветвящегося процесса (теоремы 5 и 6), а также доказательству предельной теоремы о сходимости п.н. вектора, составленного из общей численности частиц и локальных численностей частиц в нескольких точках (каждая численность нормируются на свое математическое ожидание) к некоторому случайному вектору (теорема 7). Данные результаты в настоящий момент, по-видимому, являются наиболее сильными в этой области.

Глава 2 диссертации посвящена исследованию вероятностно-геометрических свойств распространения популяции частиц ветвящегося процесса на $\mathbb{Z}^d$. Относительно базового марковского процесса предполагалось, что он представляет из себя случайное блуждание с непрерывным временем (сложный пуассоновский процесс), т.е. генератор соответствующей полугруппы является оператором типа свертки.

Отметим, что вопросы, касающиеся распространения популяции частиц, технически являются чрезвычайно сложными, так как функции распределения экстремальных значений, в отличие от средних значений численностей частиц, удовлетворяют уже нелинейным эволюционным уравнениям, крайне сложным для исследования.

В диссертации Е.В. Булинской впервые был предложен общий подход к исследованию нормированного облака частиц, т.е. разделение пространства на области, асимптотически содержащие и не содержащие частиц ветвящегося процесса. При различных предположениях об асимптотическом поведении хвостов распределения базового случайного блуждания доказаны теоремы о предельной форме фронта распространения популяции частиц каталитического ветвящегося случайного блуждания. Получена явная формула выражающая поверхность, задающую предельную форму фронта распространения частиц, через логарифмическую производящую функцию моментов базового блуждания и мальтусовский параметр. В случае легких хвостов эта поверхность неслучайна и является границей выпуклого тела, а фронт распространяется линейно по времени. Предложен новый оригинальный подход, позволяющий измерять "амплитуду" флуктуаций положений облака частиц относительно масштабированной предельной поверхности. Этот подход позволил доказать предельную теорему, дающая информацию о скорости сходимости нормированного облака частиц к предельной форме. Данный результат существенно обобщает результат Ph. Carmona и Y. Hu на случай многомерной решетки и произвольного конечного числа катализаторов. Для случая "тяжелых" (правильно меняющихся) хвостов распределения, нормирующий множитель зависит от скорости убывания хвостов случайного блуждания. Для этого случая в диссертации показано, что предельная форма фронта популяции частиц случайна. Отдельно рассмотрены случаи независимых координат и изотропный случай. Также найдена предельная форма фронта каталитического ветвящегося случайного блуждания в случае семиэкспоненциального распределения скачка блуждания. В отличие от случая легких хвостов, эта поверхность уже не является границей выпуклого тела.

В главе 3 диссертации в параграфе 3.1 для модели надкритического каталитического ветвящегося случайного блуждания по целочисленной решетке $\mathbb{Z}$ в случае легких хвостов скачка блуждания (т.е. при условии Крамера) доказывается предельная теорема о сходимости почти наверное для времени первого достижения частицами высокого уровня, растущего линейно по времени.

В параграфах 3.2 и 3.3 для модели критического и докритического каталитического ветвящегося случайного блуждания по $\mathbb{Z}$ исследуется случайная величина M – максимальное отклонение (вправо от начала координат) частиц ветвящегося блуждания за все время существования популяции частиц. Найдено асимптотическое поведение хвоста распределения случайной величины M.

В параграфе 3.4 диссертации изучается новая модель ветвящегося случайного блуждания уже с бесконечным числом источников ветвления, но расположенных периодически. Ранее для модели такого типа исследовались только асимптотическое разложение (при больших временах) средних значений локальных численностей частиц. В диссертации Е.В. Булинской для модели с периодическими источниками (надкритический случай и легкие хвосты скачков базового блуждания) найдено явное описание для выпуклого множества, представляющего собой асимптотическую форму нормированного поля частиц, то есть выпуклое множество, к которому в смысле метрики Хаусдорфа стремится выпуклая оболочка всех положений частиц ветвящегося блуждания в момент времени t при $t \to \infty$. В параграфе 3.5 аналогичный результат получен для ветвящегося случайного блуждания на периодическом графе.

В заключении выделены основные результаты диссертационной работы и обозначены перспективы дальнейшей разработки тематики исследований.

Существенных критических замечаний к диссертации не имеется. Отмечу только одну стилистическую неточность – на стр.73 в формулировке леммы 6 вместо фразы «а при $u \geqslant 0$ мы положили» лучше было бы написать просто «где».

Упомянутое замечание не умаляет научной ценности диссертационного исследования и не влияет на высокую научную оценку полученных результатов.

В заключение отмечу, что диссертация является научным исследованием, обладающим внутренним единством, и может быть оценена как крупное научное достижение в актуальной области теории вероятностей – теории ветвящихся случайных процессов. К одному из основных достижений диссертации следует отнести разработку общего подхода к исследованию вероятностно-геометрических свойств распространения поля частиц, задаваемого ветвящимся случайным процессом, в пространстве и времени. Данный новый подход позволил Е.В. Булинской в ряде случаев существенно обобщить известные результаты об асимптотическом поведении поля частиц, а также получить новые результаты в теории ветвящихся случайных процессов, многие из которых имеют неулучшаемый характер. Нет сомнения в актуальности, новизне и высокой научной ценности полученных в диссертации результатов. Все результаты сопровождаются строгими математическими доказательствами. Результаты диссертации докладывались на научно-исследовательских семинарах и конференциях и опубликованы в высокорейтинговых научных журналах, что еще раз подтверждает достоверность выводов и заключений научной работы. Автореферат правильно отражает содержание диссертации.

Считаю, что диссертация Екатерины Владимировны Булинской на тему «Вероятностно-геометрические свойства пространственного ветвящегося случайного блуждания» удовлетворяет всем критериям, определенным пп. 2.1-2.5 Положения о присуждении ученых степеней в Московском государственном университете имени М.В.Ломоносова и соответствует специальности 1.1.4 теория вероятностей и математическая статистика. Диссертация оформлена согласно требованиям Положения о совете по защите диссертаций на соискание ученой степени доктора наук Московского государственного университета имени М.В. Ломоносова.

Таким образом, представленная диссертационная работа полностью соответствует требованиям, установленным Московским государственным университетом имени М.В. Ломоносова к докторским диссертациям, а ее автор несомненно заслуживает присуждения ученой степени доктора физико-математических наук по специальности 1.1.4 теория вероятностей и математическая статистика.

Официальный оппонент:
доктор физико-математических наук, ведущий научный сотрудник лаборатории прикладных вероятностных и алгоритмических методов Санкт-Петербургского отделения математического института имени В.А. Стеклова РАН

[redacted]

Смородина Наталия Васильевна

22 августа 2024 г.

Подпись руки Смородиной Наталии Васильевны
удостоверяю
Помощник директора по кадрам [redacted]
22.08.2024

Контактные данные:
тел.: +7(921)921-28-64, e-mail: smorodina@pdmi.ras.ru
Специальность, по которой официальным оппонентом защищена диссертация:
01.01.05 – теория вероятностей и математическая статистика.

[redacted]

Адрес места работы: 191023, Санкт-Петербург, наб. реки Фонтанки 27, Санкт-Петербургское отделение математического института им. В.А. Стеклова РАН. лаборатория прикладных вероятностных и алгоритмических методов
Тел.: +7(812)312-40-58, e-mail: admin@pdmi.ras.ru

Подпись ведущего научного сотрудника лаборатории прикладных вероятностных и алгоритмических методов ПОМИ им. В.А.Стеклова РАН Смородиной Наталии Васильевны удостоверяю: