

**ОТЗЫВ научного руководителя**  
**на диссертацию на соискание ученой степени кандидата**  
**физико-математических наук Дорощеевой Александры Владимировны**  
**на тему: «Оценки скорости сходимости в центральной предельной**  
**теореме и ее обобщениях при ослабленных моментных условиях»**  
**по специальности 1.1.4 – «Теория вероятностей и математическая**  
**статистика»**

Оценки скорости сходимости в центральной предельной теореме (ЦПТ) находятся в центре внимания многих специалистов в области теории вероятностей. Уточнение и обобщение таких оценок представляет собой важную проблему, актуальность которой обусловлена широким применением нормальной аппроксимации во многих практических и теоретических задачах, связанных с применением математических моделей типа случайных блужданий, в которых итоговая величина имеет аддитивную структуру, то есть может быть представлена в виде суммы (независимых) случайных величин. Наиболее хорошо изучены оценки, в которых известная исследователю информация о распределении слагаемых сконцентрирована в значениях первых трех моментов или моментов порядка  $2+\delta$ , где  $0<\delta\leq 1$ . Такие оценки имеют довольно простую структуру и гарантируют точность нормальной аппроксимации порядка  $O(n^{-\delta/2})$ , где  $n$  – число слагаемых в сумме. Но если существование моментов, имеющих порядок, больший двух, вызывает сомнение (что, например, имеет место во многих ситуациях, когда распределения слагаемых имеют так называемые тяжелые хвосты), то сходимость в центральной предельной теореме может быть как угодно медленной. Поэтому знание оценок скорости сходимости в такой ситуации представляют существенный интерес. Именно такая ситуация и рассматривается в диссертации А.В. Дорощеевой, в которой уточняются некоторые оценки, полученные ранее в работах многих математиков. Особо необходимо отметить, что во многих реальных задачах, в частности, в

актуарной математике, финансовой математике и других областях, используются модели типа сумм случайных величин, в которых число слагаемых также является случайным. Работы, посвященные оценкам скорости сходимости в аналогах центральной предельной теоремы для сумм случайного числа случайных величин при ослабленных моментных условиях, можно пересчитать по пальцам одной руки. Более того, неравномерные оценки в такой ситуации вообще не рассматривались. Указанные обстоятельства подчеркивают большую важность проблем, рассмотренных в диссертации А.В. Дорофеевой, и ее актуальность.

Целью диссертации А.В. Дорофеевой является уточнение существующих и получение новых оценок скорости сходимости в ЦПТ и ее обобщениях при ослабленных моментных условиях, в том числе для сумм случайного числа случайных величин, а также изучение точности нормальной аппроксимации в случае, когда она не применима.

Для достижения поставленной цели А.В. Дорофеева последовательно решила несколько задач: 1) уточнение равномерных оценок скорости сходимости в ЦПТ для неслучайных сумм независимых случайных величин при ослабленных моментных условиях; 2) распространение указанных результатов на некоторые случайные суммы; 3) уточнение неравномерных оценок скорости сходимости в ЦПТ для неслучайных сумм независимых одинаково распределенных случайных величин при ослабленных моментных условиях; 4) распространение неравномерных оценок на некоторые случайные суммы. При этом в диссертации используется логичный подход, в рамках которого сначала оценки получаются (уточняются) для сумм неслучайного числа независимых случайных величин, затем полученные оценки переносятся на биномиальные случайные суммы, с биномиальных сумм с помощью очевидного предельного перехода оценки переносятся на пуассоновские случайные суммы, а затем распространяются на смешанные пуассоновские суммы. В силу того, что класс смешанных пуассоновских распределений очень широк (в частности, он содержит отрицательные

биномиальные и многие другие распределения), использованный в диссертации А.В. Дорофеевой подход позволил получить довольно общие результаты. Необходимо отметить, что наряду с условием существования моментов второго порядка в работе А.В. Дорофеевой также рассмотрены условия в некотором смысле промежуточного типа, когда вместо конечности моментов порядков, больших второго (то есть когда требуется конечность математических ожиданий степенных функций от слагаемых с показателем, большим двух), рассматриваются условия, требующие конечности функций от слагаемых, возрастающих не медленнее квадратичной, но медленнее степенной функции любого порядка, большего двух. Оценки, справедливые в таких условиях, ранее изучались М. Кацем, В.В. Петровым, Л.В. Розовским. В диссертации А.В. Дорофеевой для таких условий впервые получены неравномерные оценки для сумм случайного числа независимых случайных величин.

Указанные результаты позволили А.В. Дорофеевой также получить оценки точности аппроксимации функций концентрации как неслучайных, так и некоторых случайных сумм независимых случайных величин масштабными смесями нормальных законов при ослабленных моментных условиях на слагаемые. В развитие концепции ослабления условий, при которых строятся оценки скорости сходимости в ЦПТ, до минимально возможных в диссертации А.В. Дорофеевой рассмотрены оценки точности нормальной аппроксимации в случае, когда такая аппроксимация применяется несмотря на отсутствие теоретических предпосылок для этого (например, отсутствуют моменты даже второго порядка). Оказывается, что в некоторых подобных ситуациях нормальная аппроксимация тем не менее может иметь приемлемую точность, конкретные оценки которой построены в диссертации А.В. Дорофеевой. Достоинством работы А.В. Дорофеевой является то, что абсолютные константы, участвующие в полученных оценках, вычислены в явном виде.

Работа носит в основном теоретический характер. Результаты работы могут быть использованы в дальнейших исследованиях по оценкам скорости сходимости в ЦПТ для сумм независимых случайных величин. Достоверность полученных результатов подтверждается строгостью математического аппарата, использованного в основных утверждениях работы.

Результаты, выносимые на защиту, получены А.В. Дорофеевой самостоятельно, являются строго математически обоснованными и аккуратно изложенными. Основные результаты своевременно опубликованы в 9 (девяти) научных работах в рецензируемых журналах. Из них 3 входят в базу Web of Science, 5 – в базу Scopus, 3 – в базу RSCI, 3 – в перечень ВАК и 3 – в базу РИНЦ. В работах, выполненных в соавторстве, вклад соискателя был определяющим. Работа апробировалась на различных семинарах и конференциях, в том числе всероссийских и международных.

Считаю, что диссертация А.В. Дорофеевой «Оценки скорости сходимости в центральной предельной теореме и ее обобщениях при ослабленных моментных условиях», представленная на соискание ученой степени кандидата физико-математических наук по специальности 1.1.4 «Теория вероятностей и математическая статистика», удовлетворяет всем требованиям Положения о присуждении ученых степеней в Московском государственном университете имени М.В. Ломоносова и рекомендуется к защите в диссертационном совете МГУ.011.3 (01.07).

Научный руководитель:

заведующий кафедрой математической статистики  
факультета вычислительной математики и кибернетики  
МГУ имени М.В. Ломоносова,

доктор физико-математических наук, профессор

29.03.2012.



В.Ю. Королев

Подпись профессора В.Ю. Королева удостоверяю.

Декан факультета вычислительной математики и кибернетики  
МГУ имени М.В. Ломоносова,

академик РАН, доктор технических наук, профессор

29.03.2012.



И.А. Соколов