Отзыв научного руководителя на диссертационную работу

Латы Александра Николаевича

"Производные структуры унарных алгебр",

представленную на соискание ученой степени

кандидата физико-математических наук по специальности

01.01.06 – Математическая логика, алгебра и теория чисел

(физико-математические науки).

Лата Александр Николаевич окончил с отличием Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего образования «Волгоградский государственный социально-педагогический университет», факультет математики, информатики и физики по специальности 050201 «Математика» с дополнительной специальностью 050202 «Информатика» в 2014 году. Окончив с отличием магистратуру факультета математики, информатики и физики Волгоградского государственного социально-педагогического университета в 2016 году, А.Н. Лата поступил в очную аспирантуру механико-математического факультета МГУ имени М.В. Ломоносова.

Перед диссертантом был поставлен ряд открытых проблем описания производных структур и объектов алгебр. Производные структуры универсальных алгебр (их решетки подалгебр, решетки конгруэнций, группы автоморфизмов, полугруппы эндоморфизмов и т. д.) являются одним из классических инструментов исследования строения и классификации этих алгебр.

Диссертационная работа А.Н. Латы посвящена изучению решеток подалгебр (подалгебр) и решеток конгруэнций (конгруэнций) унарных алгебр и М–алгебр $\langle A, d, f\rangle$ с унарной операцией f и тернарной операцией d, удовлетворяющих тождеству перестановочности $f\big(d(x,y,z)\big) = d(f(x), f(y), f(z))$. При этом тернарная операцией $d(x,y,z)$ определена по одному из правил (1)–(4).

Пусть $\langle A,\ f\rangle$ — произвольный унар и $x, y \in A$. Для любого элемента x унара $\langle A, f\rangle$ через $f^n(x)$ обозначается результат n-кратного применения операции f к элементу x; при этом $f^0(x) = x$. Положим $M_{x,y} = \{n \in \mathbb{N} \cup \{0\} \mid f^n(x) = f^n(y)\}$, и $k(x,y) = min\, M_{x,y}$, если $M_{x,y} \neq \emptyset$ и $k(x,y) = \infty$, если $M_{x,y} = \emptyset$. Положим далее

$$p(x;y;z) = \begin{cases} z, & \text{если } k(x,y) \leq k(y,z); \\ x, & \text{если } k(x,y) > k(y,z). \end{cases} \qquad (1)$$

$$s(x;y;z) = \begin{cases} z, & \text{если } k(x,y) < k(y,z); \\ y, & \text{если } k(x,y) = k(y,z); \\ x, & \text{если } k(x,y) > k(y,z). \end{cases} \qquad (2)$$

$$w(x;y;z) = \begin{cases} z, & \text{если } k(x,y) > k(y,z); \\ y, & \text{если } k(x,y) = k(y,z); \\ x, & \text{если } k(x,y) < k(y,z). \end{cases} \qquad (3)$$

$$m(x;y;z) = \begin{cases} z, & \text{если } k(x,y) \geq k(y,z); \\ x, & \text{если } k(x,y) < k(y,z). \end{cases} \qquad (4)$$

Унарные алгебры имеют глубокие связи с другими разделами универсальной алгебры. В частности, любая унарная алгебра является полигоном над полугруппой. И, наоборот, всякий полигон над полугруппой является унарной алгеброй. Возможна интерпретация унарной алгебры как автомата без выхода (автомата Мура). Также унарную алгебру можно представить с помощью ориентированного графа. Унарные алгебры используются при изучении других алгебраических систем. Г. Гретцер и Е.Т. Шмидт доказали, что для любой универсальной алгебры A существует унарная алгебра B такая, что $\mathrm{Con}\, A \cong \mathrm{Con}\, B$. В отличие от произвольных универсальных алгебр, где конгруэнции подалгебры могут не продолжаться до конгруэнций алгебры, конгруэнции подалгебры унарной алгебры всегда продолжаются до конгруэнций унарной алгебры, и, вообще, решетка конгруэнций подалгебры унарной алгебры изоморфно вкладывается в решетку конгруэнций унарной алгебры. В.К. Карташов показал, что для произвольных коммутативных унарных алгебр, сигнатура которых содержит более одной операции, проблема описания решетки конгруэнций, обладающей заданным свойством, является гораздо более сложной. Д. Хобби и Р. Маккензи в своей монографии отмечают, что в теории конгруэнций часто удобнее работать с унарными алгебрами. Поскольку основные операции алгебры A

определяют множество $\mathrm{Pol}_1 A$ всех унарных операций клона $\mathrm{Pol}\, A$, а этот моноид определяет решетку конгруэнции алгебры A.

В ходе исследования для доказательства утверждений А.Н. Лата использовал методы универсальной алгебры, теории решеток и теории графов.

В диссертации получены следующие основные результаты:

1. Описаны коатомы, дополнения и копсевдодополнения в решетках конгруэнций М–алгебр $\langle A, d, f \rangle$.
2. Описаны М–алгебры $\langle A, d, f \rangle$, решетки конгруэнций которых являются решетками с дополнениями, с копсевдодополнениями или геометрическими решетками.
3. Описаны конгруэнц-когерентные унары, а также конгруэнц-когерентные, слабо и локально когерентные М–алгебры $\langle A, d, f \rangle$.
4. Найдены эквивалентные условия отсутствия подалгебр для унарной алгебры.

Диссертация А.Н. Латы состоит из введения, четырех глав, заключения и списка литературы.

Первая глава диссертации является вводной и содержит основные определения, обозначения и вспомогательные результаты, которые используются в дальнейшем.

Вторая глава диссертации посвящена изучению решеток конгруэнций М–алгебр $\langle A, d, f \rangle$. В разделе 2.1 приведено описание строения коатомов в решетках конгруэнций данных алгебр. В разделе 2.2 приводится описание М–алгебр $\langle A, d, f \rangle$, решетки конгруэнций которых являются решетками с дополнениями, с относительными дополнениями, с копсевдодополнениями или геометрическими решетками. Дается описание дополнений и копсевдодополнений в решетках конгруэнций рассматриваемых алгебр.

Третья глава диссертации посвящена изучению конгруэнц–когерентности алгебр и ее модификациям. В разделе 3.1 дается определение конгруэнц–когерентности алгебры, изложен краткий обзор вопроса. В разделе 3.2 приводятся определения локальной и слабой когерентности алгебры. Доказываются вспомогательные утверждения, используемые автором при доказательстве основных результатов работы. В разделе 3.3 доказываются основные результаты исследования конгруэнц–когерентности М–алгебр $\langle A, d, f \rangle$.

Четвертая глава диссертации посвящена алгебрам без собственных подалгебр. Дается краткий обзор результатов. В разделе 4.1 приводятся эквивалентные условия отсутствия подалгебр для унарной алгебры. В разделе 4.2 описывается алгоритм, который проверяет отсутствие подалгебр или находит собственные подалгебры и порождающие их элементы унарной алгебры, носитель и сигнатура которой конечны. В разделе 4.3 вводится определение изотопии унарных алгебр. Получено полное описание конечных унаров, изотопных унару без собственных подунаров.

А.Н. Лата провел полное исследование каждой поставленной задачи, выходя в отдельных случаях за первоначально поставленные рамки. В частности, им получена интересная информация об алгебрах с операторами произвольной сигнатуры. Работа А.Н. Латы имеет большое значение, как теоретическое, так и практическое, и является серьезным вкладом в современную алгебру. Рассматриваемая диссертация представляет собой законченное научное исследование. Все результаты диссертации нетривиальны, получены автором самостоятельно, апробированы в выступлениях на международных конференциях и семинарах. Полученные результаты корректно доказаны и хорошо оформлены.

Основные результаты диссертации А.Н. Латы изложены в трех статьях в рецензируемых научных изданиях, определенных п. 2.3 Положения о присуждении ученых степеней в Московском государственном университете имени М.В. Ломоносова, представленные публикации полно и правильно отражают основные результаты выполненных исследований. На протяжении обучения в аспирантуре А.Н. Лата неоднократно принимал участие в международных математических конференциях и выступал на научных семинарах с высокопрофессиональными докладами об основных результатах диссертации.

Считаю, что диссертация Латы Александра Николаевича полностью соответствует критериям, установленным в «Положении о присуждении ученых степеней в Московском государственном университете имени М.В. Ломоносова», и рекомендую ее к защите в диссертационном совете МГУ.01.17 ФГБОУ ВО «Московский государственный университет имени М. В. Ломоносова» по специальности 01.01.06 – Математическая логика, алгебра и теория чисел (физико-математические науки).

Научный руководитель:

доктор физико-математических наук,
профессор
6 декабря 2021г.

М.В. Зайцев