ОТЗЫВ официального оппонента
на диссертацию на соискание ученой степени
кандидата физико-математических наук Галстяна Арсена Хачатуровича
на тему: «Проблема Ферма-Штейнера в гиперпространствах»
по специальности 1.1.3 – Геометрия и топология

Диссертационная работа Галстяна Арсена Хачатуровича посвящена задаче, находящейся на стыке таких областей математики, как метрическая геометрия и теория графов. Более конкретно, она относится к так называемой теории экстремальных сетей и направлена на развитие геометрических методов оптимизации в этой области. Задачу, которую исследует А.Х. Галстян, принято называть проблемой Ферма-Штейнера, и состоит она в поиске всех точек метрического пространства, которые реализуют минимум суммы расстояний до элементов из некоторого фиксированного конечного подмножества этого пространства. На языке теории графов это означает, что в метрическом пространстве ищутся все минимальные заполнения особого типа для заданного конечного подмножества. Под особым типом здесь имеется в виду тип граф-звезда, множество листьев которого совпадает с изначально заданным подмножеством.

В качестве метрического пространства в диссертационной работе Галстяна А.Х. рассматривается пространство с метрикой Хаусдорфа всех непустых компактных подмножеств конечномерного нормированного пространства. Пространства с такой метрикой в научной литературе часто называют гиперпространствами (hyperspaces). Эта метрика весьма популярна не только в общетеоретических областях математики, но и в прикладных, таких как, например, распознавание и сравнение образов.

Стоит отметить, что на сегодняшний день проблема Ферма-Штейнера в гиперпространствах остаётся плохо изученной. Работа Галстяна делает серьёзный шаг в сторону исследования данного вопроса, а именно, в ней предлагаются геометрические методы, позволяющие в ряде случаев существенно упрощать решение.

Во **введении** диссертации приведён краткий исторический обзор задачи Ферма-Штейнера и обоснована её актуальность. Также выписаны методы исследования, перечислены положения, выносимые на защиту, описана научная новизна работы, дана оценка её теоретической и практической значимости и сформулирована степень достоверности полученных в диссертационной работе результатов.

В **первой главе** диссертации в основном содержатся необходимые определения и приводится различная вспомогательная теория. В этой главе (в разделе 1.6) также получен результат имеющий самостоятельный интерес с точки зрения выпуклой геометрии. А именно, в конечномерных нормированных пространствах была доказана непрерывность в топологии, порождённой метрикой Хаусдорфа, некоторой деформации пересечения двух выпуклых компактных подмножеств. Такая деформация может быть интересна специалистам в области геометрической оптимизации.

Все основные результаты, касающиеся непосредственно проблемы Ферма-Штейнера, расположены **во второй главе** текста диссертационной работы. **Раздел 2.1** этой главы ориентирован исключительно на конечные изначально заданные компактные подмножества, минимум суммы расстояний до которых требуется найти.

Опираясь на теорию графов, такие изначально заданные подмножества автор называет в своей работе границами. Для границ, состоящих лишь из конечных множеств, в диссертации был также введён термин «финитные границы».

Для финитных границ в разделе 2.1 приведены точные оценки сверху на количество точек в минимальных по включению компактах в классе решений проблемы Ферма-Штейнера (компакты из класса решений автор называет компактами Штейнера). Также в том же разделе приведён ряд критериев, когда произвольный компакт в конечномерном нормированном пространстве является минимальным компактом Штейнера. Все перечисленные результаты из раздела 2.1 оказались важными на практике, что продемонстрировано автором в подразделе 2.1.7.

В разделе 2.2 строится оригинальная теория «множеств сцепки». Она в основном формулируется для финитных границ и границ, состоящих из выпуклых множеств. Её суть состоит в том, чтобы описать геометрию обнаруженных типов точек (дискретных, далёких и неплотных), возникающих при некоторых условиях на границу. Иными словами, в этом разделе формулируются свойства, которыми обязана обладать конфигурация решения проблемы Ферма-Штейнера в тех или иных ситуациях. Основными результатами раздела являются теорема 2.21 о существовании далёких точек для границ из выпуклых компактов, теорема 2.22 о существовании дискретных точек для финитных границ в случае пространств со строго выпуклой нормой и теорема 2.23, дающая условия, при которых множества всех трёх типов точек совпадают друг с другом.

Раздел 2.3 также относится к построению теории множеств сцепки. Основная теорема этого раздела (теорема 2.28) описывает в случае границы, состоящей из выпуклых компактов, некоторую особую взаимосвязь максимального компакта с каждым из граничных компактов через множества сцепки, порождаемые далёкими точками.

Раздел 2.4 содержит ряд теорем и утверждений, которые отвечают на следующие вопросы. Что произойдёт с векторами решений проблемы Ферма-Штейнера при переходе от финитной границы к границе, состоящей из выпуклых оболочек исходных множеств? При каких условиях на исходную финитную границу вектора сохранятся, а при каких нет? И если вектора изменятся, то что можно сказать об изменении веса сети? А именно, можно ли как-то оценить изменение значения минимума суммы расстояний при переходе к выпуклым оболочкам? Теорема 2.4.2 приводит необходимое условие сохранения векторов решений при таком переходе. Следствие 11, следствие 12 и теорема 2.40 дают различные достаточные условия для того, чтобы вектора не сохранились и минимум суммы расстояний уменьшился.

Теорема 2.40 также приводит оценку снизу на уменьшение веса сети при переходе от финитной границы к границе из выпуклых оболочек.

В **заключении** последовательно обсуждается построенная теория, а также подводятся итоги проведённого исследования.

Результаты диссертационной работы А.Х. Галстяна являются новыми и нетривиальными. Они носят как теоретический, так и практический характер, что продемонстрировано автором на ярких примерах. Текст диссертации хорошо продуман и структурирован, а материал в нём изложен строго и прозрачно, несмотря на сложность используемых конструкций.

Все полученные автором результаты были представлены на международных и всероссийских конференциях, а также своевременно опубликованы в четырёх статьях в математических рецензируемых журналах, рекомендованных для защиты в диссертационном совете МГУ.

Автореферат А.Х. Галстяна верно отражает содержание диссертационной работы. К замечаниям стоит отнести излишнюю подробность формулирования результатов диссертации в автореферате и как следствие – его большой объём.

Относительно самого текста диссертации имеются замечания к рисункам. В разделе 2.1.7 большая часть рисунков выглядит бледно, некоторые обозначения плохо видны, из-за чего возникают некоторые неудобства в восприятии. Также в целом в связи с разнообразием новых вводимых геометрических конструкций хотелось бы больше примеров с их иллюстрациями.

Вместе с тем, указанные замечания не умаляют значимости диссертационного исследования. Диссертация отвечает требованиям, установленным Московским государственным университетом имени М.В.Ломоносова к работам подобного рода. Содержание диссертации соответствует специальности 1.1.3 – Геометрия и топология (по физико-математическим наукам), а также критериям, определенным пп. 2.1-2.5

Положения о присуждении ученых степеней в Московском государственном университете имени М.В.Ломоносова, а также оформлена согласно требованиям Положения о совете по защите диссертаций на соискание ученой степени кандидата наук Московского государственного университета имени М.В.Ломоносова.

Таким образом, считаю, что соискатель Галстян Арсен Хачатурович заслуживает присуждения ученой степени кандидата физико-математических наук по специальности 1.1.3 – Геометрия и топология.

Официальный оппонент:

кандидат физико-математических наук,
профессор кафедры геометрии имени Л.С. Атанасяна
института математики и информатики
ФГБОУ ВО «Московский педагогический государственный университет»

Гусева Надежда Ивановна

подпись

16.10.2023

Дата подписания

Контактные данные:

тел.: +7-(906)-063-00-29, e-mail: ngus12@mail.ru

Специальность, по которой официальным оппонентом защищена диссертация:
01.01.04 – Геометрия и топология

Адрес места работы:

107140, г. Москва, ул. Краснопрудная, д. 14,
ФГБОУ ВО «Московский педагогический государственный университет»,
Институт Математики и Информатики,
кафедра геометрии имени Л.С. Атанасяна
Тел.: +7-(906)-063-00-29; e-mail: ni.guseva@mpgu.su

Подпись Н.И. Гусевой

УДОСТОВЕРЯЮ

Зам. начальника
Управления
делами С.С. Яковлев

Подпись сотрудника
ФГБОУ ВО «Московский педагогический государственный университет»
Н.И. Гусевой удостоверяю: