

МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
имени М.В. ЛОМОНОСОВА
ФАКУЛЬТЕТ ВЫЧИСЛИТЕЛЬНОЙ МАТЕМАТИКИ И КИБЕРНЕТИКИ

На правах рукописи

М. Каменщиков

Каменщиков Михаил Александрович

**Методы построения оптимальных наблюдателей
пониженного порядка для линейных
стационарных динамических систем**

Специальность 1.1.2 –

«Дифференциальные уравнения и математическая физика»

ДИССЕРТАЦИЯ

на соискание ученой степени

кандидата физико–математических наук

Научный руководитель:

доктор физико–математических наук

Фомичев Василий Владимирович

Москва – 2023

Оглавление

Введение	3
Обзор литературы	12
Глава 1. Методы синтеза оптимальных наблюдателей пониженного порядка	16
1.1. Обозначения и постановки задач	16
1.2. Обобщение условия несмещенности	21
1.3. Сведение задачи наблюдения к задаче оптимизации	28
1.4. Численное моделирование непрерывных стохастических систем	37
1.5. Примеры	40
1.6. Выводы к первой главе	54
Глава 2. Оптимальные наблюдатели различных порядков	55
2.1. Структура оптимальных наблюдателей	55
2.2. Передаточные функции наблюдателей и систем в отклонениях	64
2.3. Примеры	73
2.4. Выводы ко второй главе	88
Глава 3. Оптимальные наблюдатели второго и третьего порядков	90
3.1. Условия существования наблюдателей второго и третьего порядков	90
3.2. Передаточные функции систем в отклонениях	99
3.3. Примеры	103
3.4. Выводы к третьей главе	112
Глава 4. Оптимальные наблюдатели для многосвязных систем	113
4.1. Структура оптимальных наблюдателей	113
4.2. Передаточные функции систем в отклонениях	119
4.3. Примеры	122
4.4. Выводы к четвертой главе	135
Заключение	136
Литература	138
Публикации автора по теме диссертации	149
Список иллюстративного материала	153
Список таблиц	156

Введение

Актуальность темы исследования. Диссертация относится к одному из важных направлений дифференциальных уравнений — теории управления динамическими системами, представленными дифференциальными уравнениями: вопросы управляемости, наблюдаемости, задачи стабилизации посредством управления с обратной связью. В диссертации решается задача построения оптимальных наблюдателей (фильтров) пониженного порядка для линейных стационарных объектов управления в условиях вероятностной неопределенности.

Актуальность рассматриваемой задачи обосновывается теоретической значимостью оптимальных наблюдателей (систем дифференциальных уравнений) пониженного порядка в таких задачах теории автоматического управления, как оптимальная стабилизация неустойчивых стохастических систем с помощью динамической обратной связи по зашумленному выходу, диагностика неисправностей при восстановлении полезной информации с датчиков динамической системы, \mathcal{H}_2 -оптимальное понижение порядка модели, управление на скользящих режимах в стохастических системах. На практике фильтры (оптимальные наблюдатели) пониженного порядка находят широкое применение при решении задач спутниковой навигации и оценки состояния быстродействующих технических объектов, задач в области гидрологии, океанографии и медицины. Вместо традиционно используемого фильтра Калмана, формирующего оценку полного вектора состояния системы и имеющего порядок, совпадающий с порядком системы, предполагается строить его аналог, оптимальный наблюдатель, имеющий пониженную размерность фазового вектора и формирующий несмещенную оценку образа вектора состояния системы при линейном отображении. В этом случае понизится как требовательность к ресурсам вычислительного устройства, на котором реализуется оптимальный наблюдатель, так и время вычисления искомой оценки. Кроме того, невысокий порядок оптимального наблюдателя позволяет упростить анализ и синтез динамической системы.

Степень разработанности темы исследования. Существуют различные подходы к решению задачи синтеза фильтров пониженного порядка для линейных стохастических систем, в том числе на основе решения матричных уравнений Риккати и Ляпунова, техники вычисления псевдообратных матриц, решения линейных матричных неравенств [1–7]. К ограничениям существующих методов [1; 3; 4; 6; 7] можно отнести совпадение порядка синтезируемого фильтра с размерностью оцениваемого функционала. В работах [8; 9] приведены условия существования и алгоритмы синтеза функциональных наблюдателей для линейных стационарных полностью определенных систем для различных случаев: скалярный и векторный выход, скалярный и векторный функционал. К недостаткам метода скалярных наблюдателей, предложенного в работах [8; 9], можно отнести исходное предположение о вещественности и различности спектра и необходимость отдельного изучения случаев кратных и комплексно–сопряженных корней характеристического уравнения синтезируемого наблюдателя.

Цель и задачи диссертации. Целью диссертационной работы является разработка методов построения оптимальных наблюдателей пониженного порядка для изучаемых классов линейных стационарных динамических систем в условиях стохастической неопределенности. В качестве критерия оптимальности выбирается установившаяся среднеквадратическая ошибка наблюдения.

В диссертации автором решены следующие задачи:

1. Разработаны методы построения оптимальных наблюдателей (систем дифференциальных уравнений) пониженного порядка для линейных стационарных динамических систем в каноническом базисе.
2. Решена совместная задача стабилизации посредством управления с обратной связью и оптимального наблюдения, задача диагностики неисправностей для линейных стационарных динамических систем при аддитивных белых шумах.
3. Сформулированы и доказаны необходимые и достаточные условия суще-

ствования и единственности оптимальных наблюдателей второго и третьего порядка в каноническом базисе.

4. Предложены аналитические выражения для передаточных функций системы в отклонениях и оптимальных наблюдателей различных динамических порядков как со скалярными, так и с векторными измеряемым выходом и оцениваемым линейным функционалом от вектора состояния.

Научная новизна. Все результаты диссертационной работы автора являются новыми и состоят в следующем.

1. Впервые решена совместная задача стабилизации посредством управления с обратной связью и оптимального наблюдения и задача диагностики неисправностей для линейных стационарных динамических систем при аддитивных белых шумах предложенными автором методами, основанными на обобщении классического условия несмещенности и позволяющими расширить множество допустимых параметров с помощью дополнительной информации о начальном состоянии.
2. Предложен новый метод построения оптимальных наблюдателей (систем дифференциальных уравнений) пониженного порядка на основе: аналитического представления передаточных функций системы в отклонениях в каноническом базисе, интегральных квадратичных оценок качества [10], сведения задачи оптимального наблюдения к задаче нелинейной оптимизации на невыпуклом множестве допустимых параметров. Предложенный метод позволяет снять условие равенства размерности оцениваемого линейного функционала от вектора состояния и порядка построенного оптимального наблюдателя [1; 3; 4; 6; 7; 11; 12].
3. Впервые сформулированы и доказаны необходимые и достаточные условия существования и единственности оптимальных наблюдателей второго и третьего порядка в каноническом базисе; предложены аналитические выражения для передаточных функций системы в отклонениях и оптимальных наблюдателей различных динамических порядков как для непрерыв-

ных, так и для дискретных систем как со скалярными, так и с векторными измеряемым выходом и оцениваемым образом вектора состояния.

Теоретическая и практическая значимость. Диссертационная работа автора имеет преимущественно теоретический характер. Представленные результаты могут быть использованы для дальнейшего развития и совершенствования математической теории автоматического управления, теории оптимальной фильтрации. В частности, предложенные результаты могут быть использованы как для построения фильтров пониженного порядка как части системы управления, так и как база для дальнейших исследований при решении задачи фильтрации для многосвязных динамических систем.

Практическая значимость работы заключается в возможности применения оптимальных наблюдателей к решению прикладных задач. Например, оптимальные наблюдатели пониженного порядка могут найти применение при обработке сигналов спутниковых навигационных систем, при управлении подвижными космическими аппаратами, в гидрологии и океанографии при анализе водных ресурсов, в медицине при разделении тонов сердца и дыхания [5; 7; 13]. Вместе с тем предложенные результаты можно рассматривать как расширение класса исследуемых объектов управления в задаче оценки предельных точностных характеристик терминальных бортовых систем управления [14].

Методология и методы исследования. В диссертационной работе автором используются методы математической теории управления, теории стохастических дифференциальных и разностных уравнений, теории случайных процессов, вычислительной математики и решения задач оптимизации. При построении наблюдателей использованы интегральные критерии качества, аналитические выражения передаточных функций, канонические представления динамических систем.

Положения, выносимые на защиту:

1. Необходимые и достаточные условия существования несмещенных оценок, формируемых при решении задачи, объединяющей две классические зада-

чи теории управления: стабилизации посредством управления с обратной связью и оптимального наблюдения, и задачи диагностики неисправностей для линейных стационарных динамических систем при аддитивных белых шумах.

2. Необходимые и достаточные условия существования и единственности оптимальных наблюдателей второго и третьего динамических порядков в каноническом базисе.
3. Аналитические выражения для передаточных функций системы в отклонениях и оптимальных наблюдателей различных динамических порядков как для непрерывных, так и для дискретных динамических систем как со скалярными, так и с векторными измеряемым выходом и оцениваемым линейным функционалом от вектора состояния.
4. Методы решения задачи построения оптимальных наблюдателей (систем дифференциальных уравнений) пониженного порядка, основанные на сведении задач оптимального наблюдения к задачам нелинейной оптимизации на невыпуклом множестве допустимых параметров и аналитическом вычислении передаточных функций динамических систем в отклонениях.

Степень достоверности. Достоверность результатов автора подтверждена строгими математическими доказательствами.

Все результаты, выносимые автором на защиту, получены автором лично.

Результаты других авторов, используемые в диссертации, отмечены соответствующими ссылками.

Апробация результатов. Основные результаты работы докладывались на следующих всероссийских и международных конференциях, а также научных семинарах:

- XXV Международная научная конференция студентов, аспирантов и молодых ученых «Ломоносов 2018», секция «Вычислительная математика и кибернетика» (Москва, МГУ имени М.В.Ломоносова, 9–13 апреля 2018);
- XXVI Международная научная конференция студентов, аспирантов и мо-

лодых ученых «Ломоносов 2019», секция «Вычислительная математика и кибернетика» (Москва, МГУ имени М.В.Ломоносова, 8–12 апреля 2019);

- XIII Всероссийское совещание по проблемам управления ВСПУ-2019 (Москва, ИПУ РАН, 17–20 июня 2019);
- научная конференция «Тихоновские чтения 2019» (Москва, МГУ имени М.В.Ломоносова, 28 октября — 1 ноября 2019);
- научная конференция «Тихоновские чтения 2020» (Москва, МГУ имени М.В.Ломоносова, 26–31 октября 2020);
- научная конференция «Ломоносовские чтения 2021» (Москва, МГУ имени М.В.Ломоносова, 20–29 апреля 2021);
- XXXVI International Seminar on Stability Problems for Stochastic Models (Петрозаводск, 21–25 июня 2021);
- научная конференция «Ломоносовские чтения 2022» (Москва, МГУ имени М.В.Ломоносова, 14–22 апреля 2022);
- международная конференция «Теория оптимального управления и приложения» (ОСТА 2022) (Екатеринбург, 27 июня — 1 июля 2022);
- всероссийский научно-исследовательский семинар «Нелинейная динамика и управление» (Москва, МГУ имени М.В.Ломоносова, факультет ВМК, 26 сентября 2022).

Публикации. По теме исследования опубликовано 20 работ. Из них 1 статья [15] в журнале «Mathematics» (входит в базы данных Web of Science, Scopus), 4 статьи [16–19] с переводом в журналах «Вестник Московского университета. Серия 15: Вычислительная математика и кибернетика» (входит в базу данных RSCI), «Дифференциальные уравнения» (входит в базы данных Web of Science, Scopus, RSCI), 3 аннотации докладов [20–22] в журнале «Дифференциальные уравнения» (входит в базу данных RSCI), 2 статьи в сборниках трудов конференции [23; 24], 6 тезисов докладов [25–30].

Личный вклад автора. Автором решены поставленные в работе задачи: задача построения оптимальных наблюдателей пониженного порядка как для

непрерывных, так и для дискретных динамических систем, совместная задача стабилизации и оптимального наблюдения и задача диагностики неисправностей для линейных стационарных стохастических систем при аддитивных белых шумах. Доказаны необходимые и достаточные условия существования и единственности оптимальных наблюдателей второго и третьего порядка в каноническом базисе, предложены аналитические выражения для передаточных функций системы в отклонениях и оптимальных наблюдателей различных динамических порядков как со скалярными, так и с векторными измеряемым выходом и оцениваемым линейным функционалом от вектора состояния.

Структура и объем диссертации. Диссертация состоит из введения, обзора литературы, 4 глав, заключения и библиографии. Общий объем диссертации 156 страниц, включая 19 рисунков. Библиография включает 100 наименований.

Соответствие диссертации паспорту научной специальности. Тема диссертации соответствует паспорту специальности 1.1.2 — «Дифференциальные уравнения и математическая физика» (физико-математические науки).

15. Теория управления дифференциальными уравнениями и системами: вопросы управляемости, наблюдаемости, задачи стабилизации посредством управления с обратной связью.

Обзор литературы содержит реферативное описание имеющихся результатов по теме диссертации, приводятся ссылки на ключевые работы и монографии, позволяющие составить представление об истории развития и о текущем состоянии исследуемой области.

В **первой главе** приведены постановки задач оптимального наблюдения пониженного порядка как для непрерывных, так и для дискретных динамических систем. Кроме того, решены задачи, тесно связанные с классической задачей оптимального наблюдения: задача диагностики, то есть задача оптимального наблюдения при отсутствии управления в системе, и совместная задача стабилизации посредством управления с обратной связью и оптимального

наблюдения. Для данных задач сформулированы и доказаны условия, обобщающие классическое условие несмещенности оценки. Предложен метод построения оптимальных наблюдателей пониженного порядка, основанный на сведении указанных задач к задачам нелинейной оптимизации, и метод численного моделирования непрерывных стохастических систем. В конце главы теоретические результаты проиллюстрированы на вычислительных экспериментах.

Во **второй главе** решена задача построения оптимальных наблюдателей различных динамических порядков, начиная с наблюдателя первого порядка и до одного из представителей повышенного порядка, как для непрерывных, так и для дискретных динамических систем со скалярным выходом. С помощью канонических представлений найдены передаточные функции для наблюдателей и системы в отклонениях, позволяющие вычислить среднеквадратическую ошибку наблюдения в установившемся режиме. На примере систем четвертого порядка использованы найденные передаточные функции и проведено моделирование и сравнение построенных наблюдателей по критерию оптимальности.

В **третьей главе** решена задача построения оптимальных наблюдателей второго и третьего порядков при условии, что оптимальных наблюдателей первого порядка не существует, для стохастических объектов управления со скалярным выходом как в непрерывном, так и в дискретном времени. В каноническом базисе получены необходимые и достаточные условия существования наблюдателей второго и третьего порядков в предположении, что наблюдателей первого порядка не существует. Предложены аналитические выражения передаточных функций наблюдателей, которые позволяют вычислить квадратичный критерий оптимальности. На примере систем четвертого порядка проведено сравнение построенных наблюдателей второго и третьего порядка по оптимизируемой метрике в установившемся режиме.

В **четвертой главе** решена задача построения оптимальных наблюдателей для динамических многосвязных систем с векторным выходом. Предложен метод построения наблюдателей в каноническом базисе Люенбергера. Предло-

жена формула для нахождения общего количества неизвестных параметров оптимальных наблюдателей в канонической форме и представлено левое матричное дробное описание передаточной функции для системы в отклонениях. На численных примерах многосвязных систем седьмого порядка показано, что с помощью предложенного подхода повышается оптимальность наблюдателей по сравнению с динамическими системами на основе скалярных наблюдателей. Кроме того, предложенный подход позволяет синтезировать оптимальные наблюдатели, порядок которых меньше, чем гарантированный порядок наблюдателя.

В заключении подводятся итоги выполненного исследования и приводятся основные результаты. Также обозначаются возможные направления дальнейших исследований.

Обзор литературы

Исследуемая в работе задача синтеза оптимальных наблюдателей пониженного порядка для стохастических систем находится на пересечении двух классических задач теории автоматического управления: задачи оптимального наблюдения полного порядка и задачи о построении функционального наблюдателя пониженного порядка для детерминированных систем.

Первая задача относится к теории оптимальной полноразмерной фильтрации и впервые была решена Р.Л. Стратоновичем [31; 32] в 1959-60 годах для случая нелинейных динамических систем и Р. Калманом и Р. Бьюси [33; 34] в 1960-61 годах для случая линейных динамических дискретных и непрерывных систем. К предпосылкам создания фильтра Калмана часто относят работы знаменитых математиков К. Гаусса [35] и А. Лежандра [36], связанные с открытием метода наименьших квадратов и астрономическими исследованиями в конце XVIII – начале XIX века, в которых движение планет и комет изучалось посредством телескопических измерений. В XX веке исследование метода наименьших квадратов применительно к случайным процессам было проведено в 1941 году знаменитым математиком А.Н. Колмогоровым, в работе [37] которого дано всестороннее рассмотрение и исчерпывающее решение (предложена явная формула дисперсий ошибок оптимальных в среднеквадратическом смысле оценок, выраженная в спектральных терминах) проблемы прогнозирования для стационарных случайных процессов в дискретном времени (стационарных случайных последовательностей), и в 1949 году основоположником кибернетики Н. Винером, в работе [38] которого рассматривалась задача прогнозирования стационарных процессов в установившемся режиме для непрерывного времени с использованием интегрального уравнения Винера–Хопфа и факторизации спектральных плотностей. Кроме того, появлению фильтра Калмана предшествовала работа [39] В.С. Пугачева 1944 года, в которой исследовались векторные стохастические дифференциальные уравнения, порождаемые

произвольными процессами с независимыми приращениями, и впервые было получено уравнение для одномерной характеристической функции случайного процесса; таким образом, этой работой были заложены основы статистической теории процессов управления (статистической динамики). Более полный исторический обзор появления фильтра (наблюдателя) Калмана может быть найден в работах Т. Кайлата [40], О.А. Степанова [41].

Решение второй задачи о построении функциональных наблюдателей для линейных стационарных полностью определенных систем впервые было предложено в 1966 году Д. Люенбергером [42]. Дальнейшее развитие теории функциональных наблюдателей подробно отражено в монографиях Д. О'Рейли [43], С.К. Коровина, В.В. Фомичева [9]. В частности, в работе [9] предложены два метода решения задачи синтеза функционального наблюдателя для линейной стационарной полностью определенной системы: метод псевдовходов и метод скалярных наблюдателей. Оба метода позволяют получить необходимые и достаточные условия существования функциональных наблюдателей порядка k ($k < \nu - 1$, где ν — индекс наблюдаемости исходной системы) и впервые были предложены в работах [44; 45].

Большое внимание уделялось построению фильтров (оптимальных наблюдателей) пониженного порядка для линейных систем, в частности, в работах А. Брайсона, М. Аоки, К. Браммера, М. Атанса, В.Н. Овчаренко, В.В. Домбровского, К. Симса, К. Нагпала, Р. Хелмика, Р. Гессинга, Т. Накамизо, М. Даруаша, Д. Геромела [1–7; 11; 12; 46–52]. В ряде работ [11; 46–49] рассматривались системы, в которых часть наблюдений свободны от воздействия помех, и для построения фильтров использовались методы синтеза наблюдателей Люенбергера пониженного порядка для детерминированных систем. В работе [50] используется понижение порядка исходной системы и построение полноразмерного фильтра Калмана к системе пониженной размерности, аппроксимирующей исходную. В работах [51; 52] активно исследовался случай систем, заданных на конечном интервале времени, и с помощью матричной формулировки принципа

максимума Понтрягина выводилась двухточечная краевая задача для поиска оптимальных параметров фильтров пониженного порядка. Кроме того, для синтеза субоптимальных фильтров предложены подходы на основе решения матричных уравнений Риккати и Ляпунова, вычисления псевдообратных матриц, решения линейных матричных неравенств [2; 3; 5]. В работах [1; 3; 12] были предложены необходимые и достаточные условия существования и единственности функциональных оптимальных наблюдателей для линейных непрерывных (в работе [3] как для непрерывных, так и для дискретных) систем с шумами, в которых ни одно из измерений не предполагается бесшумным, а также даны методы построения таких наблюдателей во временной области. В работе [4] представлен метод построения фильтров пониженного порядка для стохастических дискретных (как стационарных, так и нестационарных) систем с неизвестными входами. Приведены необходимые и достаточные условия существования полученного фильтра. Для стационарных систем получены условия устойчивости. В работе [6] предложен метод синтеза функциональных оптимальных наблюдателей в частотной области, использующий спектральную факторизацию в непрерывном и дискретном времени, получены передаточная функция фильтра и свойства его ассоциированной инновационной последовательности. В работе [7] представлены необходимые и достаточные условия существования функциональных фильтров для систем с неизвестными входными возмущениями.

В последнее время оптимальные наблюдатели пониженного порядка исследуются при решении таких теоретических задач, как стабилизация линейной динамической обратной связью неустойчивой системы [53], управление на скользящих режимах в стохастических дискретных системах [54], низкоранговая аппроксимация фильтров Калмана–Бьюси [55; 56], \mathcal{H}_2 -оптимальное понижение порядка модели [57; 58].

На практике оптимальные наблюдатели пониженного порядка находят применение в задачах спутниковой навигации [59], при управлении динамикой кос-

мических аппаратов [5], при моделировании потока природного газа по трубопроводу [60], при оценке параметров работоспособности авиационного турбовентиляторного двигателя [13], при оценке состояния трехфазного асинхронного электродвигателя [61; 62], при оценке состояния заряда литий-ионных аккумуляторов [7], в задачах обработки изображений и видео [63; 64], в метеорологии и океанографии при анализе данных [65; 66], в медицине при обработке и анализе звуков дыхания и тонов сердца [67].

Вопросы построения фильтров Калмана пониженного порядка также обсуждаются в монографиях Х. Квакернаака, Р. Сивана [68], В.В. Домбровского [69], Д. Саймона [70]. Аппарат теории стохастических дифференциальных и разностных уравнений в задаче оптимальной фильтрации используется в монографиях К. Острема [71], Б. Оксендаля [72], К. Браммера, Г. Зиффлинга [73].

Применительно к линейным стохастическим системам также рассматривалась задача терминального управления. В работе А.Б. Куржанского [74] рассматривается задача о построении оптимального регулятора, приводящего линейную систему, описываемую дифференциальными уравнениями со случайными функциями, из заданного начального положения в окрестность указанного конечного положения за данный промежуток времени. В работе А.С.Братуся, Ф.Л.Черноусько [75] численно решается задача оптимальной коррекции боковой динамики движущегося аппарата при случайных возмущениях. Возникающая в процессе развития космической техники задача фильтрации в терминальных бортовых системах управления отражена в монографии Б.Н.Петрова, Ю.П.Портонова-Соколова, А.Я.Андриенко, В.П.Иванова [14].

Глава 1

Методы синтеза оптимальных наблюдателей пониженного порядка

В первой главе приведены постановки задач оптимального наблюдения пониженного порядка, диагностики и совместной задачи стабилизации и оптимального наблюдения как для непрерывных, так и для дискретных динамических систем. Сформулированы и доказаны условия, обобщающие классическое условие несмещенности оценки. Предложены методы построения оптимальных наблюдателей пониженного порядка как в непрерывном, так и в дискретном времени, основанные на сведении указанных задач к задачам нелинейной оптимизации, и подход к численному моделированию непрерывных стохастических систем. Теоретические результаты проиллюстрированы на вычислительных экспериментах.

Основные результаты первой главы опубликованы в работах [16; 20—23; 25; 26].

1.1. Обозначения и постановки задач

В работе используются следующие основные обозначения. \mathbb{R} и \mathbb{C} — множества вещественных и комплексных чисел соответственно; \mathbb{R}^n и \mathbb{C}^n — пространства n -мерных векторов с вещественными и комплексными координатами соответственно; $\mathbb{R}^{n \times m}$ и $\mathbb{C}^{n \times m}$ — пространства матриц размера $n \times m$ с вещественными и комплексными элементами соответственно; при этом для случая $n = m = 1$ иногда из соображений удобства координата вектора или элемент матрицы обозначается той же буквой, что и сам вектор или матрица. Под размерностью вектора понимается количество координат в нем. $\mathbb{E}[\cdot]$ — оператор математического ожидания. I_n — единичная матрица размера $n \times n$. 0 — нуле-

вая матрица соответствующих размеров. \triangleq — равно по определению. $\text{rank } A$, $\text{tr } A$, $\det A$, $\text{spec } A$, A^\top , A^{-1} , $\text{adj } A$ — ранг, след, определитель, спектр, транспонирование, обратная матрица, присоединенная матрица для матрицы A соответственно. $A \succ 0$ — матрица A положительно определена. $\deg \alpha(s)$ — степень полинома $\alpha(s)$. Вещественная переменная t обозначает непрерывное время, а целочисленный индекс i обозначает дискретное время. Переменная j играет роль как целочисленного индекса, так и мнимой единицы.

Перейдем к постановкам рассматриваемых в работе задач.

Задача 1. Для линейной стационарной динамической системы, заданной системой дифференциальных уравнений с выходом и аддитивными возмущениями

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t) + w(t), \\ y(t) = Cx(t) + v(t); \end{cases} \quad t \geq 0; \quad (1.1)$$

где используются традиционные в теории управления обозначения: $x(t) \in \mathbb{R}^n$ — неизвестный фазовый вектор состояния системы; $u(t) \in \mathbb{R}^m$ — известное непрерывное управление; $y(t) \in \mathbb{R}^l$ — измеряемый выход системы; A, B и C — известные постоянные матрицы соответствующих размеров, то есть $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $B \in \mathbb{R}^{n \times m}$, $C \in \mathbb{R}^{l \times n}$; начальное состояние $x(0)$ — случайный вектор размерности n ; $w(t)$ и $v(t)$ — некоррелированные между собой и с начальным состоянием белые шумы размерности n и l соответственно с априорно известными вероятностными характеристиками:

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[x(0)] &= \bar{x}_0, & \mathbb{E}[(x(0) - \bar{x}_0)(x(0) - \bar{x}_0)^\top] &= P_0, \\ \mathbb{E}[w(t)] &= 0, & \mathbb{E}[w(t)w(t')^\top] &= Q\delta(t - t'), \\ \mathbb{E}[v(t)] &= 0, & \mathbb{E}[v(t)v(t')^\top] &= R\delta(t - t'), \\ \mathbb{E}[x(0)v(t)^\top] &= 0, & \mathbb{E}[w(t)v(t')^\top] &= 0, \\ \mathbb{E}[x(0)w(t)^\top] &= 0, & t \geq 0, \quad t' \geq 0; \end{aligned} \quad (1.2)$$

здесь Q, P_0 — положительно полуопределенные матрицы; R — положительно определенная матрица, $\delta(\cdot)$ — дельта-функция;

построить оптимальный наблюдатель пониженного порядка $k < n$ (систему дифференциальных уравнений с выходом)

$$\begin{cases} \dot{\tilde{q}}(t) = N\tilde{q}(t) + TBu(t) + My(t), & \tilde{q}(0) = T\bar{x}_0, \\ \tilde{\sigma}(t) = P\tilde{q}(t); \end{cases} \quad t \geq 0; \quad (1.3)$$

где $\tilde{q}(t) \in \mathbb{R}^k$ — известный фазовый вектор; $N \in \mathbb{R}^{k \times k}$, $M \in \mathbb{R}^{k \times l}$, $T \in \mathbb{R}^{k \times n}$, $P \in \mathbb{R}^{p \times k}$ — постоянные матрицы, подлежащие определению; \bar{x}_0 — среднее значение начального состояния исходной системы (1.1); $\tilde{\sigma}(t) \in \mathbb{R}^p$ — оптимальная несмещенная (несмещенность означает $\mathbb{E}[\sigma(t) - \tilde{\sigma}(t)] \equiv 0$) линейная оценка образа вектора состояния $x(t)$ при линейном отображении

$$\sigma(t) = Fx(t), \quad F \in \mathbb{R}^{p \times n} \text{ — известная постоянная матрица}; \quad (1.4)$$

в смысле установившегося среднего значения квадрата ошибки наблюдения $e(t) \triangleq \sigma(t) - \tilde{\sigma}(t)$:

$$J_\infty = \lim_{t \rightarrow \infty} \mathbb{E}[(\sigma(t) - \tilde{\sigma}(t))^T(\sigma(t) - \tilde{\sigma}(t))] = \lim_{t \rightarrow \infty} \mathbb{E}[e(t)^T e(t)] \rightarrow \min. \quad (1.5)$$

Задача 2. Для линейной стационарной динамической системы, заданной системой разностных уравнений с выходом и аддитивными возмущениями

$$\begin{cases} x_{i+1} = Ax_i + Bu_i + w_i, \\ y_i = Cx_i + v_i; \end{cases} \quad i = 0, 1, 2, \dots; \quad (1.6)$$

где используются традиционные в теории управления обозначения: $x_i \in \mathbb{R}^n$ — неизвестный фазовый вектор состояния системы; $u_i \in \mathbb{R}^m$ — известное дискретное управление; $y_i \in \mathbb{R}^l$ — измеряемый выход системы; A, B и C — известные постоянные матрицы соответствующих размеров, то есть $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $B \in \mathbb{R}^{n \times m}$, $C \in \mathbb{R}^{l \times n}$; начальное состояние x_0 — случайный вектор размерности n ; w_i и v_i — некоррелированные между собой и с начальным состоянием дискретные белые шумы размерности n и l соответственно с априорно известными вероятностны-

ми характеристиками:

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}[x_0] &= \bar{x}_0, & \mathbb{E}[(x_0 - \bar{x}_0)(x_0 - \bar{x}_0)^\top] &= P_0, \\
\mathbb{E}[w_i] &= 0, & \mathbb{E}[w_i w_j^\top] &= Q \delta_{ij}, \\
\mathbb{E}[v_i] &= 0, & \mathbb{E}[v_i v_j^\top] &= R \delta_{ij}, \\
\mathbb{E}[x_0 v_i^\top] &= 0, & \mathbb{E}[w_i v_j^\top] &= 0, \\
\mathbb{E}[x_0 w_i^\top] &= 0, & i = 0, 1, 2, \dots, \quad j = 0, 1, 2, \dots;
\end{aligned} \tag{1.7}$$

здесь Q, P_0 — положительно полуопределенные матрицы; R — положительно определенная матрица, δ_{ij} — символ Кронекера;

построить оптимальный наблюдатель пониженного порядка $k < n$ (систему разностных уравнений с выходом)

$$\begin{cases} \tilde{q}_{i+1} = N\tilde{q}_i + TBu_i + My_i, & \tilde{q}_0 = T\bar{x}_0, \\ \tilde{\sigma}_i = P\tilde{q}_i + Vy_i; \end{cases} \quad i = 0, 1, 2, \dots; \tag{1.8}$$

где $\tilde{q}_i \in \mathbb{R}^k$ — известный фазовый вектор; $N \in \mathbb{R}^{k \times k}$, $M \in \mathbb{R}^{k \times l}$, $T \in \mathbb{R}^{k \times n}$, $P \in \mathbb{R}^{p \times k}$, $V \in \mathbb{R}^{p \times l}$ — постоянные матрицы, подлежащие определению; \bar{x}_0 — среднее значение начального состояния исходной системы (1.6); $\tilde{\sigma}_i \in \mathbb{R}^p$ — оптимальная несмещенная (несмещенность означает $\mathbb{E}[\sigma_i - \tilde{\sigma}_i] \equiv 0$) линейная оценка образа вектора состояния x_i при линейном отображении

$$\sigma_i = Fx_i, \quad F \in \mathbb{R}^{p \times n} \text{ — известная постоянная матрица; } \tag{1.9}$$

в смысле установившегося среднего значения квадрата ошибки наблюдения $e_i \triangleq \sigma_i - \tilde{\sigma}_i$:

$$J_\infty = \lim_{i \rightarrow \infty} \mathbb{E}[(\sigma_i - \tilde{\sigma}_i)^\top (\sigma_i - \tilde{\sigma}_i)] = \lim_{i \rightarrow \infty} \mathbb{E}[e_i^\top e_i] \rightarrow \min. \tag{1.10}$$

Замечание 1.1. Образ вектора состояния системы (1.1) или (1.6) при линейном отображении (1.4) или (1.9) в дальнейшем также будет называться *линейным функционалом* (данное название является традиционным в теории наблюдателей состояния [9, с. 9]). *Порядком* или *размерностью* систем (1.1) и (1.6) или

наблюдателей (1.3) и (1.8) будет называться размерность соответствующего фазового вектора. Кроме того, первое уравнение в системе (1.1) может быть интерпретировано как система стохастических дифференциальных уравнений [76, с. 65; 77, с. 18], а первое уравнение в системе (1.6) может быть интерпретировано как система стохастических разностных уравнений [76, с. 65]. Кроме того, во втором уравнении наблюдателя (1.3) отсутствует выход $y(t)$ исходной непрерывной системы (1.1), так как прямая связь в наблюдателе позволяет непрерывному белому шуму $v(t)$ проникать непосредственно в ошибку наблюдения $e(t) = \sigma(t) - \tilde{\sigma}(t)$, вследствие чего амплитуда ошибки наблюдения становится бесконечно большой [78, с. 491].

Как непрерывный линейный функционал (1.4), так и дискретный линейный функционал (1.9) от вектора состояния могут быть интерпретированы как модальное управление в совместной задаче стабилизации и оптимального наблюдения [16], как полезная информация с датчиков объекта управления в задаче диагностики неисправностей [79] и как поверхность переключения в задаче управления на скользящих режимах [54]. Критерий оптимальности (1.5) и (1.10) также является \mathcal{H}_2 -нормой взвешенной передаточной функции ошибки наблюдения в задаче понижения порядка модели [58].

В дальнейших рассуждениях будут встречаться понятия управляемости (*управляемости пары* $\{A, B\}$) и наблюдаемости (*наблюдаемости пары* $\{C, A\}$), для которых будут использоваться следующие определения.

Определение 1.1. Пару $\{A, B\}$ для линейной системы (1.1) или (1.6) будем называть управляемой, если матрица $K_{A,B} = \begin{pmatrix} B & AB & \dots & A^{n-1}B \end{pmatrix}$, которую называют матрицей управляемости Калмана, удовлетворяет ранговому условию

$$\text{rank } K_{A,B} = n.$$

Определение 1.2. Пару $\{C, A\}$ для линейной системы (1.1) или (1.6) бу-

дем называть наблюдаемой, если матрица $N_{C,A} = \begin{pmatrix} C \\ CA \\ \vdots \\ CA^{n-1} \end{pmatrix}$, которую называют матрицей наблюдаемости Калмана, удовлетворяет ранговому условию

$$\text{rank } N_{C,A} = n.$$

Далее предполагается, что исходные системы (1.1) и (1.6) *полные* или находятся *в общем положении*, то есть являются наблюдаемыми и управляемыми одновременно.

1.2. Обобщение условия несмещенности

В этой главе для построения несмещенной и оптимальной оценки линейного функционала (1.4) и (1.9) будем искать оптимальный наблюдатель (1.3) и (1.8) специального типа, в котором $k = p$, $P = I_p$, $T = F$, $V = 0$, и вектор состояния \tilde{q} сам по себе является оценкой $\tilde{\sigma}$, то есть соответственно из класса линейных стационарных непрерывных систем вида

$$\dot{\tilde{\sigma}}(t) = N\tilde{\sigma}(t) + My(t) + FBu(t), \quad \tilde{\sigma}(0) = F\bar{x}_0; \quad (1.11)$$

и линейных стационарных дискретных систем вида

$$\tilde{\sigma}_{i+1} = N\tilde{\sigma}_i + My_i + FBu_i, \quad \tilde{\sigma}_0 = F\bar{x}_0; \quad (1.12)$$

где $F, B, y(t), y_i, u(t), u_i, \bar{x}_0, \tilde{\sigma}(t), \tilde{\sigma}_i$ имеют тот же смысл, что и в задаче 1 и задаче 2, а N и M — некоторые, которые мы определим позже, матрицы соответствующих размеров, то есть $N \in \mathbb{R}^{p \times p}$, $M \in \mathbb{R}^{p \times l}$. При таком представлении наблюдателя задача сводится к определению матриц N и M . Заметим, что динамический порядок наблюдателей (1.11) и (1.12) совпадает с размерностью линейного функционала $\sigma(t)$ и σ_i .

Присоединение оптимального наблюдателя (1.11) или (1.12) соответственно к системе (1.1) или (1.6) показано на структурной схеме на рисунке 1.1.

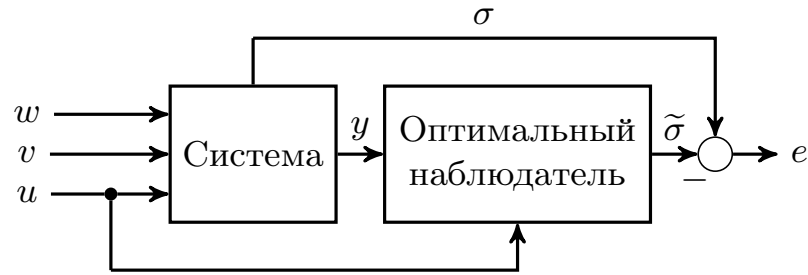


Рисунок 1.1. Структурная схема объединенной системы (исходная система и искомый оптимальный наблюдатель) в отклонениях.

В этом разделе будет рассмотрено условие несмещенности в задаче 1 и в задаче 2 при произвольном управлении и обобщение условия несмещенности:

- в задаче диагностики, то есть в задаче 1 и в задаче 2 при управлении $u(t) \equiv 0$ и $u_i \equiv 0$ соответственно;
- в совместной задаче стабилизации и оптимального наблюдения, то есть в задаче 1 и в задаче 2 при условии $m = p$ и стабилизирующем исходную систему (1.1) и (1.6) управлении $u(t) = -\tilde{\sigma}(t)$ и $u_i = -\tilde{\sigma}_i$ соответственно.

Присоединение оптимального наблюдателя (1.11) или (1.12) соответственно к системе (1.1) или (1.6) в задаче диагностики и в совместной задаче стабилизации и оптимального наблюдения показано на структурной схеме на рисунке 1.2.

Под задачей стабилизации понимается задача выбора управления в виде линейной динамической обратной связи по измеряемому выходу, обеспечивающего асимптотическую устойчивость замкнутой системы. Одним из классических способов выбора управления является принцип разделения задач стабилизации и наблюдения, приводящий к управлению $u = -K\tilde{x}$, где $K \in \mathbb{R}^{m \times n}$ и $\tilde{x} \in \mathbb{R}^n$ — оценка оптимального полноразмерного наблюдателя. С теоретической

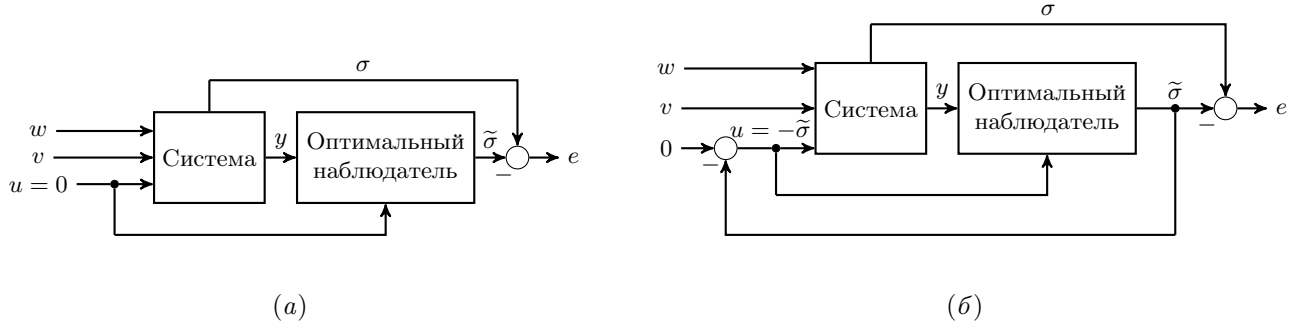


Рисунок 1.2. Структурная схема объединенной системы (исходная система и искомый оптимальный наблюдатель) в отклонениях в задаче (а) диагностики и в совместной задаче (б) стабилизации и оптимального наблюдения.

точки зрения этот способ ясен и прост, однако можно считать недостатком тот факт, что размерность наблюдателя близка к размерности системы. При этом понижение размерности наблюдателя позволяет снизить как требовательность к ресурсам вычислительного устройства, на котором он реализуется, так и понизить время на вычисление оценки \tilde{x} . Кроме того, невысокий порядок системы позволяет упростить анализ поведения динамической системы.

Используя правило дифференцирования Ито [76, с. 85] и учитывая (1.1), (1.4) и (1.11), находим соотношение для ошибки наблюдения $e(t) = \sigma(t) - \tilde{\sigma}(t)$:

$$\dot{e}(t) = \dot{\sigma}(t) - \dot{\tilde{\sigma}}(t) = FAx(t) + FBu(t) + Fw(t) - N\tilde{\sigma}(t) - My(t) - FBu(t). \quad (1.13)$$

Подставляя в (1.13) выражение для $y(t)$ из (1.1), получим

$$\dot{e}(t) = FAx(t) + Fw(t) - N\tilde{\sigma}(t) - M(Cx(t) + v(t)). \quad (1.14)$$

Используя соотношение для ошибки $e(t)$, исключим из (1.14) оценку $\tilde{\sigma}(t)$:

$$\dot{e}(t) = (FA - MC - NF)x(t) + Ne(t) + Fw(t) - Mv(t), \quad e(0) = F(x(0) - \bar{x}_0). \quad (1.15)$$

Выпишем формулу Коши для первого уравнения системы (1.1), понимая интеграл в смысле Ито или Стратоновича (что одно и то же в силу вида матрицы при шуме $w(t)$, [80, с. 267]):

$$x(t) = e^{At}x(0) + \int_0^t e^{A(t-\tau)}(Bu(\tau) + w(\tau))d\tau. \quad (1.16)$$

Определим математическое ожидание обеих частей уравнения (1.16), меняя местами порядок выполнения операций интегрирования и математического ожидания и учитывая, что $\mathbb{E}[w(t)] = 0$ и $\mathbb{E}[x(0)] = \bar{x}_0$:

$$\mathbb{E}[x(t)] = e^{At}\bar{x}_0 + \int_0^t e^{A(t-\tau)}B\mathbb{E}[u(\tau)]d\tau. \quad (1.17)$$

Выпишем формулу Коши для уравнения (1.15):

$$e(t) = e^{Nt}F(x(0) - \bar{x}_0) + \int_0^t e^{N(t-\tau)}(FA - MC - NF)x(\tau)d\tau + \\ + \int_0^t e^{N(t-\tau)}(Fw(\tau) - Mv(\tau))d\tau. \quad (1.18)$$

Определим математическое ожидание обеих частей уравнения (1.18), меняя местами порядок выполнения операций интегрирования и математического ожидания [78, с. 113] и учитывая уравнение (1.17) и вероятностные характеристики (1.2):

$$\mathbb{E}[e(t)] = \int_0^t e^{N(t-\tau)}(FA - MC - NF)e^{A\tau}\bar{x}_0d\tau + \\ + \int_0^t e^{N(t-\tau)}(FA - MC - NF) \int_0^\tau e^{A(\tau-\theta)}B\mathbb{E}[u(\theta)]d\theta d\tau. \quad (1.19)$$

Аналогично для дискретного времени, учитывая (1.6), (1.9) и (1.12), находим соотношение для ошибки наблюдения $e_i = \sigma_i - \tilde{\sigma}_i$:

$$e_{i+1} = (FA - MC - NF)x_i + Ne_i + Fw_i - Mv_i, \quad e_0 = F(x_0 - \bar{x}_0). \quad (1.20)$$

Выпишем формулу общего решения для первого разностного уравнения системы (1.6):

$$x_i = A^i x_0 + \sum_{j=0}^{i-1} A^{i-1-j}(Bu_j + w_j). \quad (1.21)$$

Определим математическое ожидание обеих частей уравнения (1.21), меняя местами порядок выполнения операций суммирования и математического ожидания и учитывая, что $\mathbb{E}[w_i] = 0$ и $\mathbb{E}[x_0] = \bar{x}_0$:

$$\mathbb{E}[x_i] = A^i \bar{x}_0 + \sum_{j=0}^{i-1} A^{i-1-j} B \mathbb{E}[u_j]. \quad (1.22)$$

Выпишем формулу общего решения для разностного уравнения (1.20):

$$e_i = N^i F(x_0 - \bar{x}_0) + \sum_{j=0}^{i-1} N^{i-1-j} ((FA - MC - NF)x_j + Fw_j - Mv_j). \quad (1.23)$$

Определим математическое ожидание обеих частей уравнения (1.23), меняя местами порядок выполнения операций суммирования и математического ожидания и учитывая уравнение (1.22) и вероятностные характеристики (1.7):

$$\mathbb{E}[e_i] = \sum_{j=0}^{i-1} N^{i-1-j} (FA - MC - NF) \left\{ A^j \bar{x}_0 + \sum_{k=0}^{j-1} A^{j-1-k} B \mathbb{E}[u_k] \right\}. \quad (1.24)$$

Опираясь на выражения (1.19) и (1.24), можно доказать следующую теорему.

Теорема 1.1. *I. В задаче 1 и в задаче 2 для формирования несмещенной оценки $\tilde{\sigma}(t)$ и $\tilde{\sigma}_i$ соответственно оптимальным наблюдателем вида (1.11) и (1.12) необходимо и достаточно, чтобы выполнялось условие*

$$FA - MC - NF = 0. \quad (1.25)$$

II. Если в задаче диагностики $\bar{x}_0 \neq 0$, и пара $\{A, \bar{x}_0\}$ — управляема, то условие (1.25) также является необходимым и достаточным условием несмещенности оценки $\tilde{\sigma}(t)$ и $\tilde{\sigma}_i$. При этом если пара $\{A, \bar{x}_0\}$ не является управляемой, то для несмещенности оценки $\tilde{\sigma}(t)$ и $\tilde{\sigma}_i$ необходимо и достаточно, чтобы выполнялось условие

$$(FA - MC - NF)K_{A, \bar{x}_0} = 0, \quad (1.26)$$

где K_{A, \bar{x}_0} — матрица управляемости Калмана для пары $\{A, \bar{x}_0\}$.

III. Если в совместной задаче стабилизации и оптимального наблюдения

$\bar{x}_0 \neq 0$, и пара $\{A_F, \bar{x}_0\}$ — управляема, то условие (1.25) также является необходимым и достаточным условием несмещенности оценки $\tilde{\sigma}(t)$ и $\tilde{\sigma}_i$. Здесь $A_F = A - BF$. При этом если пара $\{A_F, \bar{x}_0\}$ не является управляемой, то для несмещенности оценки $\tilde{\sigma}(t)$ и $\tilde{\sigma}_i$ необходимо и достаточно, чтобы выполнялось условие

$$(FA - MC - NF)K_{A_F, \bar{x}_0} = 0, \quad (1.27)$$

где K_{A_F, \bar{x}_0} — матрица управляемости Калмана для пары $\{A_F, \bar{x}_0\}$.

IV. Если $\bar{x}_0 = 0$, то произвольный наблюдатель вида (1.11) и (1.12) формирует несмещенную оценку $\tilde{\sigma}(t)$ и $\tilde{\sigma}_i$ в задаче диагностики или в совместной задаче стабилизации и оптимального наблюдения.

Доказательство. Первое утверждение теоремы основывается на известных результатах [43, с. 55; 47], следует из (1.19) и (1.24) и того, что управление $u(t)$ и u_i может быть произвольным.

Второе и третье утверждение теоремы могут быть получены, после анализа и преобразований выражения (1.19) и (1.24) по следующей схеме:

- 1) взять преобразование Лапласа от обеих частей равенства (1.19) и преобразование Лорана от обеих частей равенства (1.24),
- 2) преобразовать полученное выражение,
- 3) разложить в степенной ряд обратную матрицу,
- 4) воспользоваться теоремой Гамильтона-Кэли.

После первой операции при $u(t) \equiv 0$ и $u_i \equiv 0$ получим:

$$(sI_p - N)^{-1}(FA - MC - NF)(sI_n - A)^{-1}\bar{x}_0 \equiv 0,$$

$$(zI_p - N)^{-1}(FA - MC - NF)(zI_n - A)^{-1}\bar{x}_0 \equiv 0;$$

затем (после второй и третьей операции) при достаточно больших s и z получим

$$(FA - MC - NF) \sum_{i=0}^{\infty} \frac{A^i}{s^{i+1}} \bar{x}_0 \equiv 0, \quad (FA - MC - NF) \sum_{i=0}^{\infty} \frac{A^i}{z^{i+1}} \bar{x}_0 \equiv 0,$$

откуда получим равенства $(FA - MC - NF)A^i\bar{x}_0 = 0, i = 0, 1, \dots$. Из теоремы Гамильтона-Кэли для матрицы A следует, что из первых n равенств следуют остальные, а сами равенства можно записать в матричном виде (1.26). Поэтому из управляемости пары $\{A, \bar{x}_0\}$ (в определении 1.1 вместо матрицы B берется вектор \bar{x}_0) следует необходимость и достаточность условия (1.25). Второе утверждение теоремы доказано.

После первой операции при $u(t) = -\tilde{\sigma}(t)$ и $u_i = -\tilde{\sigma}_i$ получим:

$$\begin{aligned} & (I_p - (sI_p - N)^{-1}(FA - MC - NF)(sI_n - A_F)^{-1}B)^{-1} \times \\ & \times (sI_p - N)^{-1}(FA - MC - NF)(sI_n - A_F)^{-1}\bar{x}_0 \equiv 0, \end{aligned} \quad (1.28)$$

$$\begin{aligned} & (I_p - (zI_p - N)^{-1}(FA - MC - NF)(zI_n - A_F)^{-1}B)^{-1} \times \\ & \times (zI_p - N)^{-1}(FA - MC - NF)(zI_n - A_F)^{-1}\bar{x}_0 \equiv 0; \end{aligned} \quad (1.29)$$

затем (после второй и третьей операции) при достаточно больших s и z получим

$$(FA - MC - NF) \sum_{i=0}^{\infty} \frac{A_F^i}{s^{i+1}} \bar{x}_0 \equiv 0, \quad (FA - MC - NF) \sum_{i=0}^{\infty} \frac{A_F^i}{z^{i+1}} \bar{x}_0 \equiv 0,$$

откуда получим равенства $(FA - MC - NF)A_F^i\bar{x}_0 = 0, i = 0, 1, \dots$. Из теоремы Гамильтона-Кэли для матрицы A_F следует, что из первых n равенств следуют остальные, а сами равенства можно записать в матричном виде (1.27). Поэтому из управляемости пары $\{A_F, \bar{x}_0\}$ (в определении 1.1 вместо матрицы A берется матрица A_F , а вместо матрицы B берется вектор \bar{x}_0) следует необходимость и достаточность условия (1.25). Третье утверждение теоремы доказано.

Если $u(t) \equiv 0$ и $u_i \equiv 0, \bar{x}_0 = 0$, то последнее утверждение теоремы следует из выражения (1.19) и (1.24). Если $u(t) = -\tilde{\sigma}(t)$ и $u_i = -\tilde{\sigma}_i, \bar{x}_0 = 0$, то последнее утверждение теоремы следует из выражения (1.28) и (1.29).

Теорема полностью доказана. □

Равенство (1.25) в первом (I) утверждении теоремы 1.1 является классическим условием несмещенности оценки в задаче фильтрации пониженного порядка для стохастических систем [1; 3; 6] и также является одним из условий

асимптотической устойчивости функционального наблюдателя для полностью определенных детерминированных систем [47; 43, с. 55; 9, с. 66].

Смысл второго (II), третьего (III) и четвертого (IV) утверждения теоремы 1.1 состоит в том, что при построении оценки линейного функционала замкнутой системы возможно получение несмещенных оценок в случае, когда равенство (1.25) не выполнено.

С теоретической точки зрения это расширяет пространство параметров оптимального наблюдателя и, следовательно, дает возможность уменьшить значение критерия оптимальности (1.5) и (1.10).

С практической точки зрения оптимальные наблюдатели для замкнутой системы могут играть как роль регулятора (в случае, когда $u(t) = -\tilde{\sigma}(t)$ и $u_i = -\tilde{\sigma}_i$), так и диагностическую (информационную) роль (в случае, когда $u(t) \equiv 0$ и $u_i \equiv 0$).

1.3. Сведение задачи наблюдения к задаче оптимизации

В этом разделе представлено описание основных рассматриваемых в работе методов синтеза оптимальных наблюдателей (как непрерывных, так и дискретных), которые используют представление линейных систем с помощью передаточных функций.

Определение 1.3. Передаточной функцией непрерывной (дискретной) стационарной системы называется оператор $W_{yu}(s)$ от комплексной переменной s (оператор $W_{yu}(z)$ от комплексной переменной z), связывающий преобразования Лапласа $Y(s)$ и $U(s)$ (Z -преобразования или преобразования Лорана $Y(z)$ и $U(z)$) выхода и входа системы при нулевых начальных условиях, то есть

$$Y(s) = W_{yu}(s)U(s) \quad (Y(z) = W_{yu}(z)U(z)).$$

Например, для системы (1.1) или (1.6) относительно входа u и выхода y передаточная функция $W_{yu}(s) \in \mathbb{C}^{l \times m}$ или $W_{yu}(z) \in \mathbb{C}^{l \times m}$, причем элементы

матрицы передаточной функции являются дробно–рациональными функциями комплексной переменной s или z соответственно.

Основная идея рассматриваемых методов построения оптимального наблюдателя заключается в сведении задачи определения неизвестных параметров оптимального наблюдателя к задаче на условный или безусловный минимум критерия оптимальности (1.5) в непрерывном времени и (1.10) в дискретном времени как функции от искомым параметров.

Для систем (1.1) и (1.6) определены следующие передаточные функции от соответствующего входа к соответствующему выходу:

$$\begin{aligned} W_{yw}(s) &= C(sI_n - A)^{-1}, & W_{yw}(z) &= C(zI_n - A)^{-1}, \\ W_{\sigma w}(s) &= F(sI_n - A)^{-1}, & W_{\sigma w}(z) &= F(zI_n - A)^{-1}, \\ W_{yv}(s) &= I_l, & W_{yv}(z) &= I_l, \\ W_{yu}(s) &= C(sI_n - A)^{-1}B, & W_{yu}(z) &= C(zI_n - A)^{-1}B, \\ W_{\sigma u}(s) &= F(sI_n - A)^{-1}B, & W_{\sigma u}(z) &= F(zI_n - A)^{-1}B. \end{aligned}$$

Передаточные функции наблюдателей (1.11) и (1.12) имеют вид:

$$\begin{aligned} W_{\tilde{\sigma}u}(s) &= (sI_p - N)^{-1}FB, & W_{\tilde{\sigma}u}(z) &= (zI_p - N)^{-1}FB, \\ W_{\tilde{\sigma}y}(s) &= (sI_p - N)^{-1}M, & W_{\tilde{\sigma}y}(z) &= (zI_p - N)^{-1}M. \end{aligned}$$

В совместной задаче стабилизации и оптимального наблюдения передаточные функции от шума объекта w к ошибке наблюдения e и от шума наблюдения v к ошибке e равны соответственно для непрерывных систем:

$$W_{ew}(s) = W_{\sigma w}(s) - (I_p + W_{\sigma u}(s))(I_p + W_{\tilde{\sigma}u}(s) + W_{\tilde{\sigma}y}(s)W_{yu}(s))^{-1}W_{\tilde{\sigma}y}(s)W_{yw}(s),$$

$$W_{ev}(s) = -(I_p + W_{\sigma u}(s))(I_p + W_{\tilde{\sigma}u}(s) + W_{\tilde{\sigma}y}(s)W_{yu}(s))^{-1}W_{\tilde{\sigma}y}(s)W_{yv}(s);$$

и для дискретных систем:

$$W_{ew}(z) = W_{\sigma w}(z) - (I_p + W_{\sigma u}(z))(I_p + W_{\tilde{\sigma}u}(z) + W_{\tilde{\sigma}y}(z)W_{yu}(z))^{-1}W_{\tilde{\sigma}y}(z)W_{yw}(z),$$

$$W_{ev}(z) = -(I_p + W_{\sigma u}(z))(I_p + W_{\tilde{\sigma}u}(z) + W_{\tilde{\sigma}y}(z)W_{yu}(z))^{-1}W_{\tilde{\sigma}y}(z)W_{yv}(z).$$

В задаче диагностики передаточные функции от шума объекта w к ошибке наблюдения e и от шума наблюдения v к ошибке e равны соответственно для непрерывных и дискретных систем:

$$\begin{aligned} W_{ew}(s) &= W_{\sigma w}(s) - W_{\tilde{\sigma}y}(s)W_{yw}(s), & W_{ew}(z) &= W_{\sigma w}(z) - W_{\tilde{\sigma}y}(z)W_{yw}(z), \\ W_{ev}(s) &= -W_{\tilde{\sigma}y}(s)W_{yv}(s); & W_{ev}(z) &= -W_{\tilde{\sigma}y}(z)W_{yv}(z). \end{aligned} \quad (1.30)$$

Пусть $S_e(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} \mathbb{E}[e(t)e(t-\tau)^\top]e^{-j\omega\tau}d\tau$ — спектральная плотность ошибки наблюдения $e(t)$, а $S_e(\theta) = \sum_{i=-\infty}^{\infty} \mathbb{E}[e_k e_{k+i}^\top]e^{-j\theta i}$, $-\pi \leq \theta \leq \pi$ — спектральная плотность ошибки наблюдения e_i , тогда [81, с. 19]

$$J_\infty = \lim_{t \rightarrow \infty} \mathbb{E}[e(t)^\top e(t)] = \frac{1}{2\pi} \operatorname{tr} \left[\int_{-\infty}^{\infty} S_e(\omega) d\omega \right], \quad (1.31)$$

$$J_\infty = \lim_{i \rightarrow \infty} \mathbb{E}[e_i^\top e_i] = \frac{1}{2\pi} \operatorname{tr} \left[\int_{-\pi}^{\pi} S_e(\theta) d\theta \right]. \quad (1.32)$$

Так как шумы $w(t)$ и $v(t)$ и шумы w_i и v_i не коррелированы между собой, то в установившемся режиме [81, с. 21]

$$S_e(\omega) = W_{ew}(j\omega)QW_{ew}^\top(-j\omega) + W_{ev}(j\omega)RW_{ev}^\top(-j\omega), \quad (1.33)$$

$$S_e(\theta) = W_{ew}(e^{j\theta})QW_{ew}^\top(e^{-j\theta}) + W_{ev}(e^{j\theta})RW_{ev}^\top(e^{-j\theta}), \quad (1.34)$$

где передаточные функции W_{ew} (от шума w к ошибке e) и W_{ev} (от шума v к ошибке e) должны быть устойчивы. Это условие устойчивости заведомо выполняется, если матрицы A и N имеют устойчивые характеристические полиномы. В частном случае, когда для матриц исходных систем (1.1) и (1.6), восстанавливаемых линейных функционалов (1.4) и (1.9) и искомым наблюдателей (1.11) и (1.12) выполняется классическое условие несмещенности (1.25),

после сокращений передаточные функции $W_{ew}(s), W_{ev}(s)$ не содержат множителя $(sI_n - A)^{-1}$, а передаточные функции $W_{ew}(z), W_{ev}(z)$ не содержат множителя $(zI_n - A)^{-1}$:

$$\begin{aligned} W_{ew}(s) &= (sI_p - N)^{-1}F, & W_{ew}(z) &= (zI_p - N)^{-1}F, \\ W_{ev}(s) &= -(sI_p - N)^{-1}M; & W_{ev}(z) &= -(zI_p - N)^{-1}M. \end{aligned}$$

Поэтому требования устойчивости характеристического полинома матрицы A исходной системы не возникает в этом случае.

Подставляя (1.33) в (1.31), а (1.34) в (1.32), получаем

$$\begin{aligned} J_\infty &= \lim_{t \rightarrow \infty} \mathbb{E}[e(t)^\top e(t)] = \\ &= \frac{1}{2\pi} \operatorname{tr} \left[\int_{-\infty}^{\infty} \begin{pmatrix} W_{ew}(j\omega) & W_{ev}(j\omega) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} Q & 0 \\ 0 & R \end{pmatrix} \begin{pmatrix} W_{ew}^\top(-j\omega) \\ W_{ev}^\top(-j\omega) \end{pmatrix} d\omega \right], \end{aligned} \quad (1.35)$$

$$\begin{aligned} J_\infty &= \lim_{i \rightarrow \infty} \mathbb{E}[e_i^\top e_i] = \\ &= \frac{1}{2\pi} \operatorname{tr} \left[\int_{-\pi}^{\pi} \begin{pmatrix} W_{ew}(e^{j\theta}) & W_{ev}(e^{j\theta}) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} Q & 0 \\ 0 & R \end{pmatrix} \begin{pmatrix} W_{ew}^\top(e^{-j\theta}) \\ W_{ev}^\top(e^{-j\theta}) \end{pmatrix} d\theta \right]. \end{aligned} \quad (1.36)$$

Вычисление критерия оптимальности (1.35) для непрерывных систем можно свести к вычислению интегралов вида

$$\bar{J}_\nu = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{G(j\omega)}{H(j\omega)H(-j\omega)} d\omega, \quad (1.37)$$

где $G(j\omega)$ и $H(j\omega)$ являются полиномами от комплексной переменной $j\omega$:

$$G(j\omega) = \bar{b}_0(j\omega)^{2\nu-2} + \bar{b}_1(j\omega)^{2\nu-4} + \dots + \bar{b}_{\nu-1},$$

$$H(j\omega) = a_0(j\omega)^\nu + a_1(j\omega)^{\nu-1} + \dots + a_\nu;$$

коэффициенты a_i, \bar{b}_i зависят от неизвестных параметров искомого непрерывного наблюдателя, а индекс ν равен *порядку* (то есть степени полинома знаменателя) передаточных функций $W_{ew}(s)$ и $W_{ev}(s)$. Для расчета интегралов (1.37)

существуют таблицы с точными аналитическими значениями и специальная формула [82, с. 741], позволяющая найти значение интеграла без нахождения полюсов передаточной функции:

$$\bar{J}_\nu = (-1)^{\nu+1} \frac{\det(\Theta_\nu)}{2a_0 \det(\Gamma_\nu)},$$

где Γ_ν — матрица Гурвица полинома $H(j\omega)$, Θ_ν — матрица, которая получается из матрицы Гурвица полинома $H(j\omega)$ заменой первой строки коэффициентами полинома $G(j\omega)$:

$$\Gamma_\nu = \begin{pmatrix} a_1 & a_3 & a_5 & \dots & 0 \\ a_0 & a_2 & a_4 & \dots & 0 \\ 0 & a_1 & a_3 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & a_\nu \end{pmatrix}, \quad \Theta_\nu = \begin{pmatrix} \bar{b}_0 & \bar{b}_1 & \bar{b}_2 & \dots & \bar{b}_{\nu-1} \\ a_0 & a_2 & a_4 & \dots & 0 \\ 0 & a_1 & a_3 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & a_\nu \end{pmatrix}.$$

Кроме того, вычисление критерия оптимальности (1.35) для непрерывных систем также можно свести к вычислению интегралов вида

$$\bar{J}_\nu = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \left| \frac{\bar{b}_0(j\omega)^{\nu-1} + \bar{b}_1(j\omega)^{\nu-2} + \dots + \bar{b}_{\nu-1}}{a_0(j\omega)^\nu + a_1(j\omega)^{\nu-1} + \dots + a_\nu} \right|^2 d\omega, \quad (1.38)$$

где коэффициенты a_i , \bar{b}_i зависят от неизвестных параметров искомого непрерывного наблюдателя, а индекс ν равен порядку передаточных функций $W_{ew}(s)$ и $W_{ev}(s)$. Для расчета интегралов (1.38) также существуют таблицы с точными аналитическими значениями и специальными формулами [83; 84, с. 707]. Готовые формулы для вычисления интегралов (1.38) для $\nu = \overline{1, 4}$ имеют следующий вид:

$$\begin{aligned} \bar{J}_1 &= \frac{\bar{b}_0^2}{2a_0a_1}; & \bar{J}_2 &= \frac{\bar{b}_0^2a_2 + \bar{b}_1^2a_0}{2a_0a_1a_2}; & \bar{J}_3 &= \frac{\bar{b}_0^2a_3a_2 + (\bar{b}_1^2 - 2\bar{b}_2\bar{b}_0)a_3a_0 + \bar{b}_2^2a_0a_1}{2a_0a_3(a_1a_2 - a_3a_0)}; \\ \bar{J}_4 &= \frac{\bar{b}_0^2(-a_4^2a_1 + a_4a_3a_2) + (\bar{b}_1^2 - 2\bar{b}_2\bar{b}_0)a_4a_3a_0}{2a_4a_0(-a_4a_1^2 - a_3^2a_0 + a_1a_2a_3)} + \\ &+ \frac{(\bar{b}_2^2 - 2\bar{b}_3\bar{b}_1)a_4a_1a_0 + \bar{b}_3^2(-a_3a_0^2 + a_2a_1a_0)}{2a_4a_0(-a_4a_1^2 - a_3^2a_0 + a_1a_2a_3)}. \end{aligned}$$

Вычисление критерия оптимальности (1.36) для дискретных систем можно свести к вычислению интегралов вида

$$\tilde{J}_\nu = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \left| \frac{\tilde{b}_0 e^{j\theta\nu} + \tilde{b}_1 e^{j\theta(\nu-1)} + \dots + \tilde{b}_\nu}{\tilde{a}_0 e^{j\theta\nu} + \tilde{a}_1 e^{j\theta(\nu-1)} + \dots + \tilde{a}_\nu} \right|^2 d\theta, \quad (1.39)$$

коэффициенты \tilde{a}_i , \tilde{b}_i зависят от неизвестных параметров искомого дискретного наблюдателя, а индекс ν равен порядку передаточных функций $W_{ew}(z)$ и $W_{ev}(z)$. Для расчета интегралов (1.39) существуют таблицы с точными аналитическими значениями и специальная формула [85], позволяющая найти значение интеграла без нахождения полюсов передаточной функции:

$$\tilde{J}_\nu = \frac{\det(\Omega_1)}{\tilde{a}_0 \det(\Omega)},$$

где Ω — матрица из элементов \tilde{a}_i , Ω_1 — матрица, сформированная из матрицы Ω заменой элементов первого столбца на столбец d :

$$\Omega = \begin{pmatrix} \tilde{a}_0 & \tilde{a}_1 & \tilde{a}_2 & \tilde{a}_3 & \dots & \tilde{a}_\nu \\ \tilde{a}_1 & \tilde{a}_0 + \tilde{a}_2 & \tilde{a}_1 + \tilde{a}_3 & \tilde{a}_2 + \tilde{a}_4 & \dots & \tilde{a}_{\nu-1} \\ \tilde{a}_2 & \tilde{a}_3 & \tilde{a}_0 + \tilde{a}_4 & \tilde{a}_1 + \tilde{a}_5 & \dots & \tilde{a}_{\nu-2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \tilde{a}_\nu & 0 & 0 & 0 & \dots & \tilde{a}_\nu \end{pmatrix}, \quad d = \begin{pmatrix} \sum_{i=0}^{\nu} \tilde{b}_i^2 \\ 2 \sum_{i=0}^{\nu-1} \tilde{b}_i \tilde{b}_{i+1} \\ 2 \sum_{i=0}^{\nu-2} \tilde{b}_i \tilde{b}_{i+2} \\ \vdots \\ 2 \sum_{i=0}^1 \tilde{b}_i \tilde{b}_{i+\nu-1} \\ 2\tilde{b}_0 \tilde{b}_\nu \end{pmatrix}.$$

Готовые формулы для вычисления интегралов (1.39) для $\nu = \overline{1, 3}$ имеют следующий вид:

$$\begin{aligned} \tilde{J}_1 &= \frac{\tilde{a}_0 \tilde{b}_0^2 - 2\tilde{a}_1 \tilde{b}_0 \tilde{b}_1 + \tilde{a}_0 \tilde{b}_1^2}{\tilde{a}_0 (\tilde{a}_0^2 - \tilde{a}_1^2)}; \\ \tilde{J}_2 &= \frac{\tilde{a}_0 (\tilde{b}_0^2 + \tilde{b}_1^2 + \tilde{b}_2^2) (\tilde{a}_0 + \tilde{a}_2) - 2(\tilde{b}_0 \tilde{b}_1 + \tilde{b}_1 \tilde{b}_2) \tilde{a}_0 \tilde{a}_1 + 2\tilde{b}_0 \tilde{b}_2 (\tilde{a}_1^2 - \tilde{a}_2 (\tilde{a}_0 + \tilde{a}_2))}{\tilde{a}_0 [(\tilde{a}_0^2 - \tilde{a}_2^2) (\tilde{a}_0 + \tilde{a}_2) - (\tilde{a}_0 \tilde{a}_1 - \tilde{a}_1 \tilde{a}_2) \tilde{a}_1]}; \\ \tilde{J}_3 &= \frac{\tilde{a}_0 B_0 Q_0 - \tilde{a}_0 B_1 Q_1 + \tilde{a}_0 B_2 Q_2 - B_3 Q_3}{\tilde{a}_0 [(\tilde{a}_0^2 - \tilde{a}_3^2) Q_0 - (\tilde{a}_0 \tilde{a}_1 - \tilde{a}_2 \tilde{a}_3) Q_1 + (\tilde{a}_0 \tilde{a}_2 - \tilde{a}_1 \tilde{a}_3) Q_2]}; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
B_0 &= \tilde{b}_0^2 + \tilde{b}_1^2 + \tilde{b}_2^2 + \tilde{b}_3^2; & B_1 &= 2(\tilde{b}_0\tilde{b}_1 + \tilde{b}_1\tilde{b}_2 + \tilde{b}_2\tilde{b}_3); & B_2 &= 2(\tilde{b}_0\tilde{b}_2 + \tilde{b}_1\tilde{b}_3); \\
B_3 &= 2\tilde{b}_0\tilde{b}_3; & Q_0 &= \tilde{a}_0(\tilde{a}_0 + \tilde{a}_2) - \tilde{a}_3(\tilde{a}_1 + \tilde{a}_3); & Q_1 &= \tilde{a}_0\tilde{a}_1 - \tilde{a}_2\tilde{a}_3; \\
Q_2 &= \tilde{a}_1(\tilde{a}_1 + \tilde{a}_3) - \tilde{a}_2(\tilde{a}_0 + \tilde{a}_2); \\
Q_3 &= (\tilde{a}_1 - \tilde{a}_3)((\tilde{a}_1 + \tilde{a}_3)^2 - (\tilde{a}_0 + \tilde{a}_2)^2) + \tilde{a}_0(\tilde{a}_0(\tilde{a}_1 + \tilde{a}_3) - \tilde{a}_3(\tilde{a}_0 + \tilde{a}_2)).
\end{aligned}$$

Кроме того, вычисление критерия оптимальности (1.36) для дискретных систем можно свести к вычислению интегралов вида (1.38) с помощью билинейного преобразования [82, с. 432; 86].

Из вида выражений интегралов (1.37), (1.38) и (1.39) ясно, что критерий оптимальности (1.5) и (1.10) в задаче оптимизации является рациональной функцией, то есть отношением двух полиномов от многих переменных — неизвестных элементов матриц искомых наблюдателей.

Уравнения, которые описывают динамику исходной системы и динамику ошибки оценивания, в задаче диагностики могут быть записаны в виде:

$$\begin{aligned}
\begin{pmatrix} \dot{x}(t) \\ \dot{e}(t) \end{pmatrix} &= \bar{A} \begin{pmatrix} x(t) \\ e(t) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} I_n & 0 \\ F & -M \end{pmatrix} \begin{pmatrix} w(t) \\ v(t) \end{pmatrix}, & \bar{A} &= \begin{pmatrix} A & 0 \\ FA - MC - NF & N \end{pmatrix}; \\
\begin{pmatrix} x_{i+1} \\ e_{i+1} \end{pmatrix} &= \bar{A} \begin{pmatrix} x_i \\ e_i \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} I_n & 0 \\ F & -M \end{pmatrix} \begin{pmatrix} w_i \\ v_i \end{pmatrix}, & \bar{A} &= \begin{pmatrix} A & 0 \\ FA - MC - NF & N \end{pmatrix}.
\end{aligned}$$

Уравнения, которые описывают динамику исходной системы и динамику ошибки оценивания, в совместной задаче стабилизации и оптимального наблюдения могут быть записаны в виде:

$$\begin{aligned}
\begin{pmatrix} \dot{x}(t) \\ \dot{e}(t) \end{pmatrix} &= \bar{\bar{A}} \begin{pmatrix} x(t) \\ e(t) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} I_n & 0 \\ F & -M \end{pmatrix} \begin{pmatrix} w(t) \\ v(t) \end{pmatrix}, & \bar{\bar{A}} &= \begin{pmatrix} A - BF & B \\ FA - MC - NF & N \end{pmatrix}; \\
\begin{pmatrix} x_{i+1} \\ e_{i+1} \end{pmatrix} &= \bar{\bar{A}} \begin{pmatrix} x_i \\ e_i \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} I_n & 0 \\ F & -M \end{pmatrix} \begin{pmatrix} w_i \\ v_i \end{pmatrix}, & \bar{\bar{A}} &= \begin{pmatrix} A - BF & B \\ FA - MC - NF & N \end{pmatrix}.
\end{aligned}$$

Функция времени, описывающая динамику аналитического значения среднеквадратичной ошибки в задаче диагностики и в совместной задаче стабилизации и оптимального наблюдения (для краткости просто в задаче стабилизации),

имеет вид

$$J(t) \triangleq \mathbb{E} [e(t)^\top e(t)] = \mathbb{E} \left[\begin{pmatrix} x(t) \\ e(t) \end{pmatrix}^\top \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & I_p \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x(t) \\ e(t) \end{pmatrix} \right] = \text{tr} \left[\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & I_p \end{pmatrix} P_{xe}(t) \right], \quad (1.40)$$

$$J_i \triangleq \mathbb{E} [e_i^\top e_i] = \mathbb{E} \left[\begin{pmatrix} x_i \\ e_i \end{pmatrix}^\top \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & I_p \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_i \\ e_i \end{pmatrix} \right] = \text{tr} \left[\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & I_p \end{pmatrix} P_{xe,i} \right], \quad (1.41)$$

где $P_{xe}(t) = \mathbb{E} \left[\begin{pmatrix} x(t) \\ e(t) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x(t) \\ e(t) \end{pmatrix}^\top \right]$ — ковариационная матрица, удовлетворяющая дифференциальному матричному уравнению Ляпунова

$$\dot{P}_{xe}(t) = \mathcal{A}P_{xe}(t) + P_{xe}(t)\mathcal{A}^\top + \begin{pmatrix} I_n \\ F \end{pmatrix} Q \begin{pmatrix} I_n \\ F \end{pmatrix}^\top + \begin{pmatrix} 0 \\ M \end{pmatrix} R \begin{pmatrix} 0 \\ M \end{pmatrix}^\top, \quad (1.42)$$

$$P_{xe}(0) = \begin{pmatrix} P_0 + \bar{x}_0\bar{x}_0^\top & P_0F^\top \\ FP_0 & FP_0F^\top \end{pmatrix}, \quad \mathcal{A} = \begin{cases} \bar{A} & \text{в задаче диагностики,} \\ \bar{\bar{A}} & \text{в задаче стабилизации;} \end{cases}$$

а $P_{xe,i} = \mathbb{E} \left[\begin{pmatrix} x_i \\ e_i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_i \\ e_i \end{pmatrix}^\top \right]$ — ковариационная матрица, удовлетворяющая разностному матричному уравнению Ляпунова

$$P_{xe,i+1} = \mathcal{A}P_{xe,i}\mathcal{A}^\top + \begin{pmatrix} I_n \\ F \end{pmatrix} Q \begin{pmatrix} I_n \\ F \end{pmatrix}^\top + \begin{pmatrix} 0 \\ M \end{pmatrix} R \begin{pmatrix} 0 \\ M \end{pmatrix}^\top, \quad (1.43)$$

$$P_{xe,0} = \begin{pmatrix} P_0 + \bar{x}_0\bar{x}_0^\top & P_0F^\top \\ FP_0 & FP_0F^\top \end{pmatrix}, \quad \mathcal{A} = \begin{cases} \bar{A} & \text{в задаче диагностики,} \\ \bar{\bar{A}} & \text{в задаче стабилизации.} \end{cases}$$

Используя обобщения условий несмещенности из теоремы 1.1, формулировки [87, с. 15] условий устойчивости через матричные неравенства Ляпунова и изложенные методы сведения к задаче нелинейной оптимизации, можно сформулировать вывод относительно задачи 1, задачи 2, задачи диагностики и совместной задачи стабилизации и оптимального наблюдения в виде следующего утверждения.

Теорема 1.2. *I. Непрерывный оптимальный наблюдатель (1.11) или дискретный оптимальный наблюдатель (1.12), являющийся решением задачи 1 или задачи 2, а также задачи диагностики для непрерывной системы (1.1), (1.2) или дискретной системы (1.6), (1.7), в которой пара $\{A, \bar{x}_0\}$ управляема, существует тогда и только тогда, когда существует решение задач оптимизации соответственно для непрерывного или дискретного случая*

$$\min_{P_N \in \mathbb{R}^{p \times p}, N, M} J_\infty(N, M) \text{ или } \min_{P_N \in \mathbb{R}^{p \times p}, N, M} J_\infty(N, M),$$

$$\begin{cases} MC - NF = FA, \\ -(P_N N + N^\top P_N) \succ 0, \\ P_N \succ 0 \end{cases} \quad \begin{cases} MC - NF = FA, \\ P_N - N^\top P_N N \succ 0, \\ P_N \succ 0 \end{cases}$$

где критерий оптимальности J_∞ зависит от неизвестных матриц N, M и определяется в соответствии с (1.35) или (1.36).

II. Непрерывный оптимальный наблюдатель (1.11) или дискретный оптимальный наблюдатель (1.12), являющийся решением совместной задачи стабилизации и оптимального наблюдения для непрерывной системы (1.1), (1.2) или дискретной системы (1.6), (1.7), существует тогда и только тогда, когда существует решение задач оптимизации соответственно для непрерывного или дискретного случая

$$\min_{P_{\bar{A}} \in \mathbb{R}^{(n+p) \times (n+p)}, N, M} J_\infty(N, M) \text{ или}$$

$$\begin{cases} (MC - NF)K_{A_F, \bar{x}_0} = FAK_{A_F, \bar{x}_0}, \\ -(P_{\bar{A}} \bar{A} + \bar{A}^\top P_{\bar{A}}) \succ 0, P_{\bar{A}} \succ 0 \end{cases}$$

$$\min_{P_{\bar{A}} \in \mathbb{R}^{(n+p) \times (n+p)}, N, M} J_\infty(N, M),$$

$$\begin{cases} (MC - NF)K_{A_F, \bar{x}_0} = FAK_{A_F, \bar{x}_0}, \\ P_{\bar{A}} - \bar{A}^\top P_{\bar{A}} \bar{A} \succ 0, P_{\bar{A}} \succ 0 \end{cases}$$

где $\bar{A} = \begin{pmatrix} A - BF & B \\ FA - MC - NF & N \end{pmatrix}$ — матрица системы, описывающей динамику исходной системы и ошибки оценивания, K_{A_F, \bar{x}_0} — матрица управляемости Калмана для пары $\{A_F, \bar{x}_0\}$, критерий оптимальности J_∞ зависит от неизвестных матриц N, M и определяется в соответствии с (1.35) или (1.36).

1.4. Численное моделирование непрерывных стохастических систем

В данном разделе содержится описание численного моделирования линейных непрерывных стохастических систем и оптимальных наблюдателей. Численное моделирование линейных стохастических систем и оптимальных наблюдателей проводится с целью подтверждения аналитически полученных результатов. Моделирование проводится путем перехода от дифференциальных уравнений к их разностным аналогам и построения статистических оценок для среднеквадратичной ошибки с помощью проведения серии экспериментов с различными реализациями случайных величин, распределенных по нормальному закону.

Рассмотрим численное моделирование непрерывной системы (1.1) и наблюдателя (1.11) на отрезке $[0, T_f]$. Для этого введем равномерное разбиение отрезка $[0, T_f]$ с малым шагом $\tau = \frac{T_f}{K}$ при достаточно больших целых K :

$$t_i = i\tau, \quad i = 0, \dots, K.$$

Рассматривая первое уравнение системы (1.1) на отрезке $[t_i, t_{i+1}]$, запишем формулу Коши:

$$x(t_{i+1}) = e^{A\tau}x(t_i) + \int_{t_i}^{t_{i+1}} e^{A(t_{i+1}-\lambda)}Bu(\lambda) d\lambda + \int_{t_i}^{t_{i+1}} e^{A(t_{i+1}-\lambda)}w(\lambda) d\lambda.$$

Будем использовать фиксатор нулевого порядка [78, с. 508] для управления $u(t)$:

$$u(t) = u(t_i) = u_i, \quad t \in [t_i, t_{i+1}].$$

Применяя правила интегрирования белого шума [78, с. 119], можно сделать вывод, что

$$w_i = \int_{t_i}^{t_{i+1}} e^{A(t_{i+1}-\lambda)}w(\lambda) d\lambda,$$

образуют последовательность взаимно некоррелированных стохастических величин с нулевыми математическими ожиданиями и матрицами дисперсий вида:

$$\mathbb{E}[w_i w_i^\top] = \int_{t_i}^{t_{i+1}} e^{A(t_{i+1}-\lambda)} Q e^{A^\top(t_{i+1}-\lambda)} d\lambda,$$

где Q имеет тот же смысл, что и в исходной системе (1.1), (1.2).

В качестве дискретного аналога измеряемого выхода $y(t)$ системы (1.1) возьмем [88] интегральный фильтр вида:

$$y(t) = y_i = \frac{1}{\tau} \int_{t_i}^{t_{i+1}} y(\lambda) d\lambda, \quad t \in [t_i, t_{i+1}].$$

Вновь используя фиксатор нулевого порядка [78, с. 508] для фазового вектора $x(t)$ во втором уравнении системы (1.1):

$$x(t) = x(t_i) = x_i, \quad t \in [t_i, t_{i+1}]$$

и применяя правила интегрирования белого шума [78, с. 119], можно сделать вывод, что

$$v_i = \frac{1}{\tau} \int_{t_i}^{t_{i+1}} v(\lambda) d\lambda.$$

образуют последовательность взаимно некоррелированных стохастических величин с нулевыми математическими ожиданиями и матрицами дисперсий вида:

$$\mathbb{E}[v_i v_i^\top] = \frac{1}{\tau^2} \int_{t_i}^{t_{i+1}} R d\lambda = \frac{1}{\tau} R,$$

где R имеет тот же смысл, что и в исходной системе (1.1), (1.2).

Рассматривая уравнение наблюдателя (1.11) на отрезке $[t_i, t_{i+1}]$, запишем формулу Коши:

$$\tilde{\sigma}(t_{i+1}) = e^{N\tau} \tilde{\sigma}(t_i) + \int_{t_i}^{t_{i+1}} e^{N(t_{i+1}-\lambda)} M y(\lambda) d\lambda + \int_{t_i}^{t_{i+1}} e^{N(t_{i+1}-\lambda)} F B u(\lambda) d\lambda.$$

Будем также применять фиксатор нулевого порядка [78, с. 508] для фазового вектора $\tilde{\sigma}(t)$ наблюдателя (1.11) и для оцениваемого линейного функционала $\sigma(t)$:

$$\tilde{\sigma}(t) = \tilde{\sigma}(t_i) = \tilde{\sigma}_i, \quad \sigma(t) = \sigma(t_i) = \sigma_i, \quad t \in [t_i, t_{i+1}];$$

Используя разложение матричных экспонент в степенные ряды

$$\begin{aligned} e^{A\tau} &= I_n + A\tau + \frac{A^2\tau^2}{2!} + \dots, \quad e^{N\tau} = I_p + N\tau + \frac{N^2\tau^2}{2!} + \dots, \\ \int_{t_i}^{t_{i+1}} e^{A(t_{i+1}-\lambda)} B d\lambda &= B\tau + \frac{AB\tau^2}{2!} + \dots, \quad \int_{t_i}^{t_{i+1}} e^{N(t_{i+1}-\lambda)} M d\lambda = M\tau + \frac{NM\tau^2}{2!} + \dots, \\ \int_{t_i}^{t_{i+1}} e^{A(t_{i+1}-\lambda)} Q e^{A\tau(t_{i+1}-\lambda)} d\lambda &= Q\tau + \frac{(AQ + QA^\top)\tau^2}{2!} + \dots, \\ \int_{t_i}^{t_{i+1}} e^{N(t_{i+1}-\lambda)} F B d\lambda &= FB\tau + \frac{NFB\tau^2}{2!} + \dots, \end{aligned}$$

получим разностные аппроксимации с первым порядком точности по τ (*аппроксимации Эйлера*) для исходной системы (1.1), (1.2) и линейного функционала (1.4) имеют следующий вид:

$$\begin{aligned} x_{i+1} &= (I_n + A\tau)x_i + B\tau u_i + w_i, & i = 0, \dots, K-1, \\ y_i &= Cx_i + v_i, & i = 0, \dots, K, \\ \sigma_i &= Fx_i, & i = 0, \dots, K, \end{aligned} \tag{1.44}$$

с вероятностными характеристиками начального состояния и шумов:

$$\mathbb{E} \left[\begin{pmatrix} w_i \\ v_i \\ x_0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} w_j^\top & v_j^\top & x_0^\top & 1 \end{pmatrix} \right] = \begin{bmatrix} Q\tau\delta_{ij} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{\tau}R\delta_{ij} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & P_0 + \bar{x}_0\bar{x}_0^\top & \bar{x}_0 \end{bmatrix}, \quad i, j = 0, \dots, K.$$

Для наблюдателя (1.11) разностная аппроксимация имеет вид:

$$\begin{aligned} \tilde{\sigma}_{i+1} &= (I_p + N\tau)\tilde{\sigma}_i + M\tau y_i + FB\tau u_i, & i = 0, \dots, K-1, \\ \tilde{\sigma}_0 &= F\bar{x}_0. \end{aligned} \tag{1.45}$$

Для подтверждения полученных аналитически результатов также могут использоваться такие статистические оценки для среднеквадратичной ошибки, как выборочное среднее и доверительный интервал.

В качестве точечной оценки среднего значения квадрата ошибки наблюдения примем выборочное среднее по всем реализациям квадрата ошибки наблюдения, которые были получены после проведения серии из r экспериментов с различными реализациями случайных нормально распределенных величин (далее j -й элемент выборки ошибки наблюдения в i -й дискретный момент времени обозначается как $e_{i(j)}$; объем выборки обозначается как r):

$$\overline{e_i^\top e_i} = \frac{1}{r} \sum_{j=0}^r (e_{i(j)}^\top e_{i(j)}), \quad i = 0, \dots, K. \quad (1.46)$$

С целью получения наглядного представления о точности выбранной оценки будем строить γ -доверительные интервалы [89, с. 117] для неизвестного среднего значения квадрата ошибки наблюдения μ_i в каждый i -й дискретный момент времени с уровнем доверия γ такие, что:

$$\mathbb{P} \left(\overline{e_i^\top e_i} - t_{\frac{1+\gamma}{2}, r-1} \frac{S_i}{\sqrt{r-1}} \leq \mu_i \leq \overline{e_i^\top e_i} + t_{\frac{1+\gamma}{2}, r-1} \frac{S_i}{\sqrt{r-1}} \right) \geq \gamma, \quad (1.47)$$

где $i = 0, \dots, K$, $t_{p, r-1}$ — p -квантиль распределения Стьюдента с $r-1$ степенями свободы, S_i — выборочное среднеквадратическое отклонение:

$$S_i^2 = \frac{1}{r} \sum_{j=0}^r (e_{i(j)}^\top e_{i(j)} - \overline{e_i^\top e_i})^2, \quad i = 0, \dots, K.$$

1.5. Примеры

В данном разделе приводятся вычислительные примеры, иллюстрирующие второе (пример 1.1), третье (пример 1.2) и четвертое (пример 1.3) утверждения теоремы 1.1, методы сведения задачи построения оптимального наблюдателя к задаче нелинейной оптимизации из раздела 1.3 и подход к численному моделированию из раздела 1.4.

Пример 1.1. Рассмотрим задачу диагностики для непрерывной системы (1.1), (1.2), в которой пара $\{A, \bar{x}_0\}$ не является управляемой, $\bar{x}_0 \neq 0$:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -6 \\ 1 & 0 & -11 \\ 0 & 1 & -6 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \bar{x}_0 = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad Q = P_0 = I_3, \\ F = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 5 \end{pmatrix}, \quad R = 1.$$

Будем искать оптимальный наблюдатель первого порядка вида (1.11), в котором введем следующие обозначения:

$$N = a \in \mathbb{R}, \quad M = b \in \mathbb{R},$$

где для устойчивости наблюдателя (1.11) параметр a — отрицательное вещественное число. Классическое условие несмещенности (1.25), имеющее следующий вид:

$$FA - MC - NF = \begin{pmatrix} -a - 2 & 2a + 5 & -5a - b - 14 \end{pmatrix} = 0,$$

несовместно для любых a и b , то есть классическое условие несмещенности не дает возможности решить задачу диагностики с помощью наблюдателя первого порядка. Обобщенное условие несмещенности (1.26), имеющее следующий вид:

$$(FA - MC - NF)K_{A, \bar{x}_0} = \begin{pmatrix} -a - b - 3 & 3a + 3b + 9 & -9a - 9b - 27 \end{pmatrix} = 0,$$

эквивалентно условию $b = -a - 3$. Используя эту связь, далее оставляем только параметр a . Передаточные функции системы (1.1) и наблюдателя (1.11) имеют вид:

$$W_{yw}(s) = C(sI_3 - A)^{-1} = \frac{1}{s^3 + 6s^2 + 11s + 6} \begin{pmatrix} 1 & s & s^2 \end{pmatrix}, \\ W_{\sigma w}(s) = F(sI_3 - A)^{-1} = \frac{1}{s^2 + 4s + 3} \begin{pmatrix} s + 2 \\ -2s - 3 \\ 5s + 6 \end{pmatrix}^T, \\ W_{y\tilde{\sigma}}(s) = 1, \quad W_{\tilde{\sigma}y}(s) = \frac{-a - 3}{s - a}.$$

Передаточные функции от шумов $w(t)$ и $v(t)$ к ошибке оценивания $e(t)$, вычисленные по формулам (1.30), равны соответственно:

$$W_{ew}(s) = \frac{1}{(s-a)(s^2+3s+2)} \begin{pmatrix} s^2 + (1-a)s + 1-a \\ -2s^2 + (2a-1)s + 2a \\ 5s^2 + 4(1-a)s - 4a \end{pmatrix}^T, \quad W_{ev}(s) = \frac{a+3}{s-a}.$$

После применения формулы (1.35) и формул для вычисления интегралов (1.38) получаем явную аналитическую зависимость критерия оптимальности от параметра a :

$$J_\infty(a) = \frac{-6a^4 + 45a^3 - 179a^2 + 249a - 111}{12a(a^2 - 3a + 2)}.$$

Представленная функция $J_\infty(a)$ на интервале $a \in (-\infty, 0)$ имеет глобальный минимум в точке $a^* \approx -3.3426$ равный: $J_\infty(a^*) \approx 5.7735$.

Оптимальный наблюдатель первого порядка, который решает рассмотренную задачу диагностики, имеет вид (1.11), в котором:

$$N \approx -3.3426, \quad M \approx 0.3426.$$

Таким образом, в данном примере показана возможность получить несмещенную оценку линейного функционала в случае, когда классическое условие несмещенности (1.25) не выполнено.

Для иллюстрации динамики синтезированного наблюдателя и критерия оптимальности было проведено численное моделирование согласно разделу 1.4 на отрезке $[0, 5]$ с шагом по времени равным $\tau = 0.05$.

На рисунке 1.3, a показана динамика аналитического значения среднеквадратичной ошибки $J(t)$ для построенного наблюдателя первого порядка, вычисленная по формулам (1.40), (1.42).

Для разностных аппроксимаций построенного наблюдателя (1.45) первого порядка, исходной системы и оцениваемого линейного функционала (1.44) на рисунке 1.3, b красной линией показана динамика аналитического значения

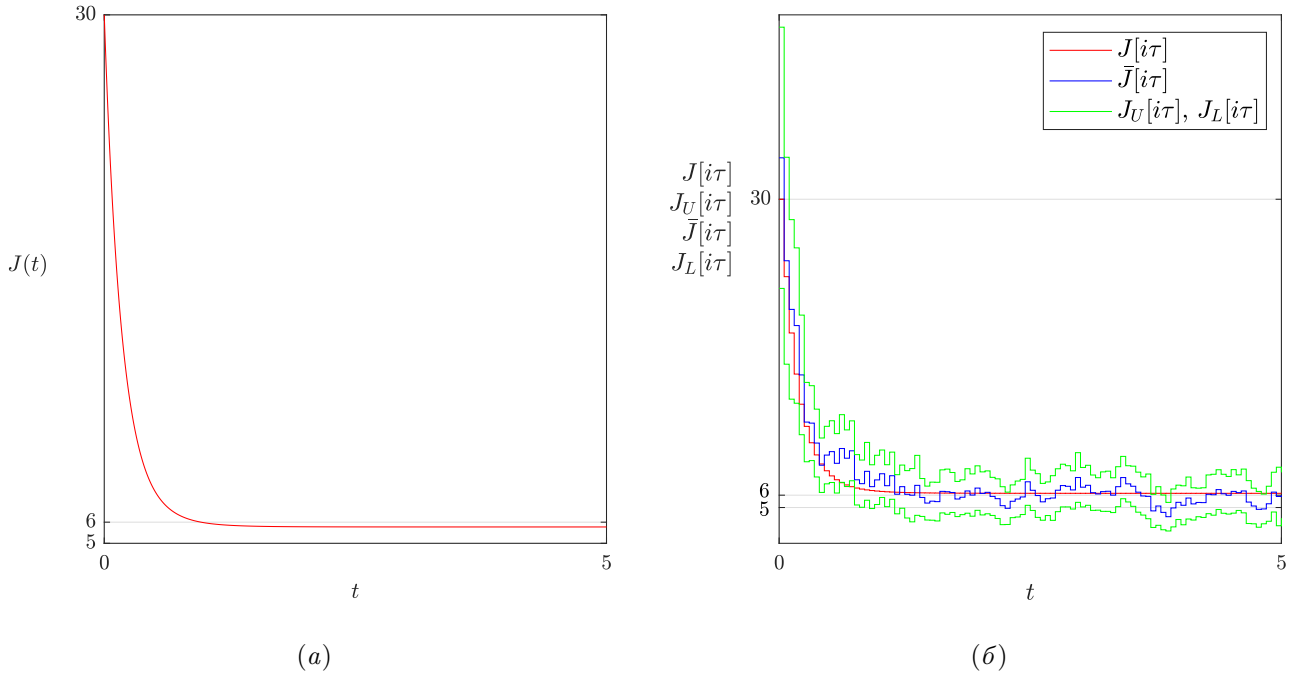


Рисунок 1.3. Динамика среднеквадратичной ошибки для (а) исходной непрерывной системы, для (б) разностной аппроксимации в примере 1.1.

среднеквадратичной ошибки $J[i\tau] = \text{tr} \left[\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} P_{xe}[i\tau] \right]$, где ковариационная матрица $P_{xe}[i\tau] = \mathbb{E} \left[\begin{pmatrix} x[i\tau] \\ e[i\tau] \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x[i\tau] \\ e[i\tau] \end{pmatrix}^\top \right]$ удовлетворяет разностному матричному уравнению Ляпунова

$$P_{xe}[(i+1)\tau] = \tilde{A}P_{xe}[i\tau]\tilde{A}^\top + \begin{pmatrix} I_4 \\ F \end{pmatrix} Q\tau \begin{pmatrix} I_4 \\ F \end{pmatrix}^\top + \begin{pmatrix} 0 \\ M \end{pmatrix} R\tau \begin{pmatrix} 0 \\ M \end{pmatrix}^\top,$$

$$P_{xe}[0] = \begin{pmatrix} P_0 + \bar{x}_0\bar{x}_0^\top & P_0F^\top \\ FP_0 & FP_0F^\top \end{pmatrix}, \quad \tilde{A} = \begin{pmatrix} I_3 + A\tau & 0 \\ (FA - MC - NF)\tau & I_1 + N\tau \end{pmatrix}.$$

Вследствие квантования по времени аналитическое значение установившейся среднеквадратичной ошибки для разностной аппроксимации отличается от аналитического значения установившейся среднеквадратичной ошибки для исход-

ной непрерывной системы:

$$J[\infty] = \text{tr} \left[\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} P_{xe} \right] \approx 6.1515,$$

где P_{xe} — решение алгебраического матричного уравнения Ляпунова:

$$P_{xe} = \tilde{A}P_{xe}\tilde{A}^\top + \begin{pmatrix} I_4 \\ F \end{pmatrix} Q_\tau \begin{pmatrix} I_4 \\ F \end{pmatrix}^\top + \begin{pmatrix} 0 \\ M \end{pmatrix} R_\tau \begin{pmatrix} 0 \\ M \end{pmatrix}^\top.$$

Синей и зелеными линиями на рисунке 1.3, б показаны статистические оценки для среднеквадратичной ошибки, построенные после проведения серии из $r = 100$ экспериментов с различными реализациями случайных нормально распределенных величин: синей линией показано $\bar{J}[i\tau]$ — выборочное среднее (1.46) по всем реализациям квадрата ошибки наблюдения; зелеными линиями показаны $J_U[i\tau]$ и $J_L[i\tau]$ — верхняя и нижняя границы γ -доверительных интервалов (1.47) для неизвестного среднего значения квадрата ошибки наблюдения с уровнем доверия $\gamma = 95\%$.

На рисунке 1.4 синей линией показана динамика линейного функционала $\sigma_i = \sigma(t_i) = \sigma[i\tau]$ от зашумленного вектора состояния. Для сравнения черной линией показана динамика $\check{\sigma}_i = \check{\sigma}(t_i) = \check{\sigma}[i\tau] = F(I_3 + A\tau)^i \bar{x}_0$ линейного функционала от вектора состояния системы, свободной как от шума объекта, так и от шума наблюдения и с усредненным начальным условием. Красной линией показана оценка $\tilde{\sigma}_i = \tilde{\sigma}(t_i) = \tilde{\sigma}[i\tau]$ линейного функционала, формируемая дискретной аппроксимацией наблюдателя первого порядка.

Пример 1.2. Рассмотрим совместную задачу стабилизации и оптимального наблюдения для непрерывной неустойчивой системы (1.1), (1.2), в которой па-

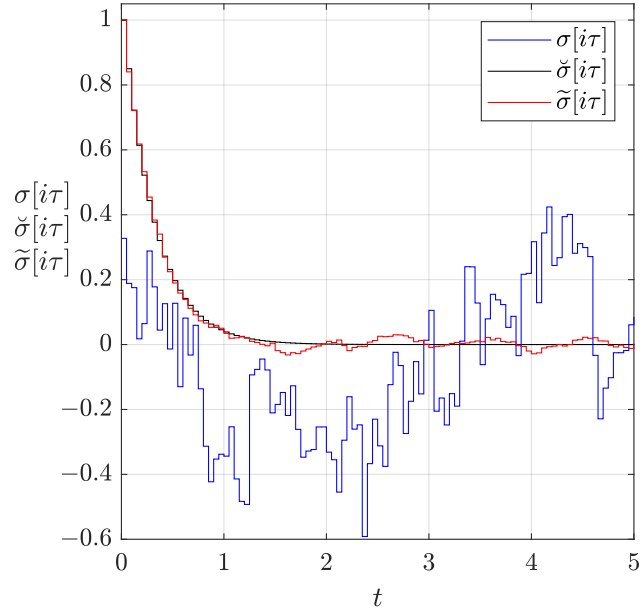


Рисунок 1.4. Динамика оценки и линейных функционалов для разностных аппроксимаций системы и наблюдателя в примере 1.1.

ра $\{A_F, \bar{x}_0\}$ не является управляемой, $\bar{x}_0 \neq 0$:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 6 \\ 1 & 0 & 4 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 12 \\ 12 \\ 6 \end{pmatrix}, \quad \bar{x}_0 = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad Q = P_0 = I_3, \\ F = \begin{pmatrix} 1 & -5 & 9 \end{pmatrix}, \quad R = 1.$$

Будем искать оптимальный наблюдатель первого порядка вида (1.11), в котором введем следующие обозначения:

$$N = a \in \mathbb{R}, \quad M = b \in \mathbb{R},$$

где для устойчивости наблюдателя (1.11) параметр a — отрицательное вещественное число. Классическое условие несмещенности (1.25), имеющее следующий вид:

$$FA - MC - NF = \begin{pmatrix} -a - 5 & 5a + 9 & -9a - b - 5 \end{pmatrix} = 0,$$

несовместно для любых a и b , то есть классическое условие несмещенности не дает возможности решить совместную задачу стабилизации и оптимального наблюдения с помощью оптимального наблюдателя первого порядка. Обобщенное

условие несмещенности (1.27), имеющее следующий вид:

$$(FA - MC - NF)K_{AF, \bar{x}_0} = \begin{pmatrix} 3 - b - a & 9 - 3b - 3a & 27 - 9b - 9a \end{pmatrix} = 0,$$

эквивалентно условию $b = 3 - a$. Используя эту связь, далее оставляем только параметр a . Передаточные функции системы (1.1) и наблюдателя (1.11) имеют вид:

$$\begin{aligned} W_{yw}(s) &= C(sI_3 - A)^{-1} = \frac{1}{s^3 - s^2 - 4s - 6} \begin{pmatrix} 1 & s & s^2 \end{pmatrix}, \\ W_{\sigma w}(s) &= F(sI_3 - A)^{-1} = \frac{1}{s^3 - s^2 - 4s - 6} \begin{pmatrix} s^2 - 6s + 10 \\ -5s^2 + 14s + 6 \\ 9s^2 - 14s - 30 \end{pmatrix}^T, \\ W_{yv}(s) &= 1, \quad W_{\tilde{\sigma}u}(s) = \frac{6}{s - a}, \quad W_{\tilde{\sigma}y}(s) = \frac{3 - a}{s - a} \end{aligned}$$

Передаточные функции от шумов $w(t)$ и $v(t)$ к ошибке оценивания $e(t)$, вычисленные по формулам (1.30), равны соответственно:

$$W_{ew}(s) = \frac{1}{(s - a)(s^2 + 2s + 2)} \begin{pmatrix} s^2 - (3 + a)s + 3a + 1 \\ -5s^2 + (5a - 1)s + 2a \\ 9s^2 + (10 - 8a)s - 10a \end{pmatrix}^T, \quad W_{ev}(s) = \frac{a - 3}{s - a}.$$

После применения формулы (1.35) и формул для вычисления интегралов (1.38) получаем явную аналитическую зависимость критерия оптимальности от параметра a :

$$J_\infty(a) = \frac{-4a^4 + 325a^3 - 680a^2 + 753a - 74}{8a(a^2 - 2a + 2)}.$$

Представленная функция $J_\infty(a)$ на интервале $a \in (-\infty, 0)$ имеет глобальный минимум в точке $a^* \approx -3.4741$ равный: $J_\infty(a^*) \approx 42.9816$.

Оптимальный наблюдатель первого порядка, который решает совместную задачу стабилизации и оптимального наблюдения, имеет вид (1.11), в котором:

$$N \approx -3.4741, \quad M \approx 6.4741.$$

Таким образом, в данном примере показана возможность получить несмещенную оценку линейного функционала в случае, когда классическое условие несмещенности (1.25) не выполнено.

Для иллюстрации динамики синтезированного наблюдателя и критерия оптимальности было проведено численное моделирование согласно разделу 1.4 на отрезке $[0, 5]$ с шагом по времени равным $\tau = 0.05$.

На рисунке 1.5, *a* показана динамика аналитического значения среднеквадратичной ошибки $J(t)$ для построенного наблюдателя первого порядка, вычисленная по формулам (1.40), (1.42).

Для разностных аппроксимаций построенного наблюдателя (1.45) первого порядка, исходной системы и оцениваемого линейного функционала (1.44) на рисунке 1.5, *б* красной линией показана динамика аналитического значения

среднеквадратичной ошибки $J[i\tau] = \text{tr} \left[\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} P_{xe}[i\tau] \right]$, где ковариационная матрица $P_{xe}[i\tau] = \mathbb{E} \left[\begin{pmatrix} x[i\tau] \\ e[i\tau] \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x[i\tau] \\ e[i\tau] \end{pmatrix}^\top \right]$ удовлетворяет разностному матричному уравнению Ляпунова

$$P_{xe}[(i+1)\tau] = \tilde{A}P_{xe}[i\tau]\tilde{A}^\top + \begin{pmatrix} I_4 \\ F \end{pmatrix} Q\tau \begin{pmatrix} I_4 \\ F \end{pmatrix}^\top + \begin{pmatrix} 0 \\ M \end{pmatrix} R\tau \begin{pmatrix} 0 \\ M \end{pmatrix}^\top,$$

$$P_{xe}[0] = \begin{pmatrix} P_0 + \bar{x}_0\bar{x}_0^\top & P_0F^\top \\ FP_0 & FP_0F^\top \end{pmatrix}, \quad \tilde{A} = \begin{pmatrix} I_3 + (A - BF)\tau & B\tau \\ (FA - MC - NF)\tau & I_1 + N\tau \end{pmatrix}.$$

Вследствие квантования по времени аналитическое значение установившейся среднеквадратичной ошибки для разностной аппроксимации отличается от аналитического значения установившейся среднеквадратичной ошибки для

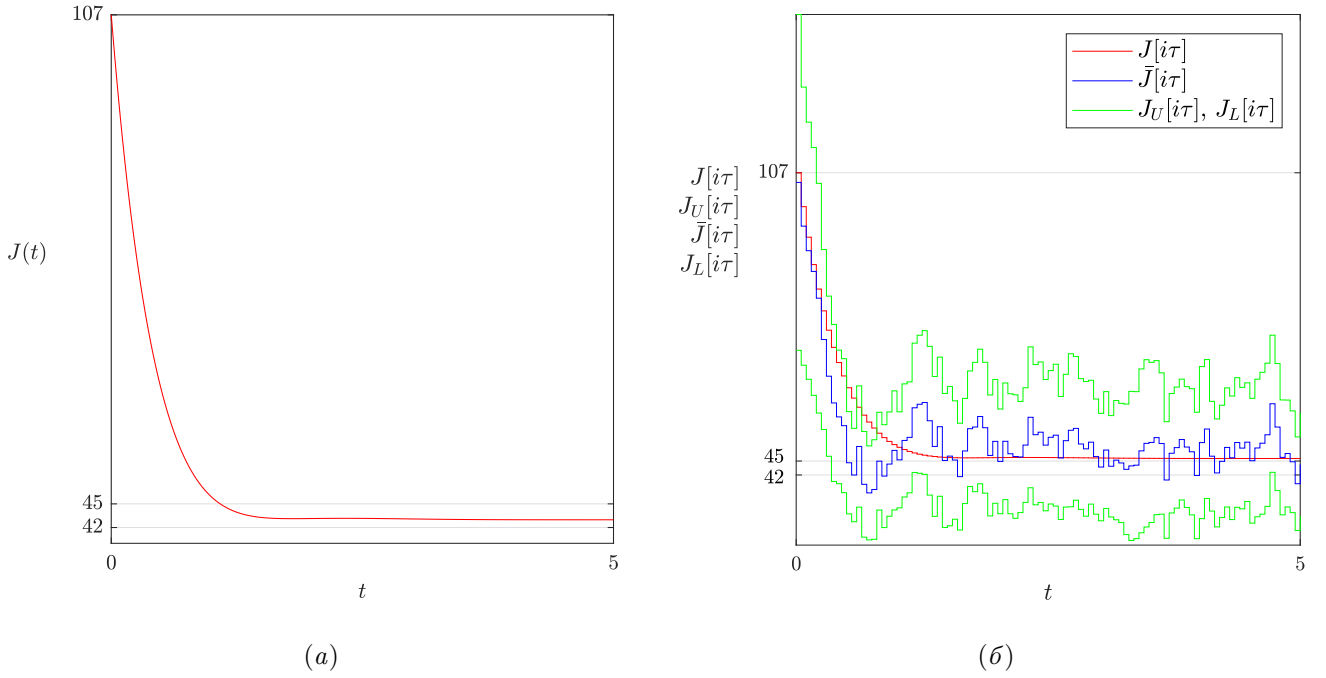


Рисунок 1.5. Динамика среднеквадратичной ошибки для (а) исходной непрерывной системы, для (б) разностной аппроксимации в примере 1.2.

исходной непрерывной системы:

$$J[\infty] = \text{tr} \left[\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} P_{xe} \right] \approx 45.5442,$$

где P_{xe} — решение алгебраического матричного уравнения Ляпунова:

$$P_{xe} = \tilde{A}P_{xe}\tilde{A}^\top + \begin{pmatrix} I_4 \\ F \end{pmatrix} Q_\tau \begin{pmatrix} I_4 \\ F \end{pmatrix}^\top + \begin{pmatrix} 0 \\ M \end{pmatrix} R_\tau \begin{pmatrix} 0 \\ M \end{pmatrix}^\top.$$

Синей и зелеными линиями на рисунке 1.5, б показаны статистические оценки для среднеквадратичной ошибки, построенные после проведения серии из $r = 100$ экспериментов с различными реализациями случайных нормально распределенных величин: синей линией показано $\bar{J}[i\tau]$ — выборочное среднее (1.46) по всем реализациям квадрата ошибки наблюдения; зелеными линиями показаны $J_U[i\tau]$ и $J_L[i\tau]$ — верхняя и нижняя границы γ -доверительных

интервалов (1.47) для неизвестного среднего значения квадрата ошибки наблюдения с уровнем доверия $\gamma = 95\%$.

На рисунке 1.6 синей линией показана динамика линейного функционала $\sigma_i = \sigma(t_i) = \sigma[i\tau]$ от зашумленного вектора состояния. Черной линией показана динамика $\check{\sigma}_i = \check{\sigma}(t_i) = \check{\sigma}[i\tau] = \begin{pmatrix} F & 0 \end{pmatrix} \tilde{A}^i \begin{pmatrix} \bar{x}_0 \\ F(x_0 - \bar{x}_0) \end{pmatrix}$ линейного функционала от вектора состояния системы, свободной как от шума объекта, так и от шума наблюдения и с усредненным начальным условием. Красной линией показана оценка $\tilde{\sigma}_i = \tilde{\sigma}(t_i) = \tilde{\sigma}[i\tau]$ линейного функционала, формируемая дискретной аппроксимацией наблюдателя первого порядка.

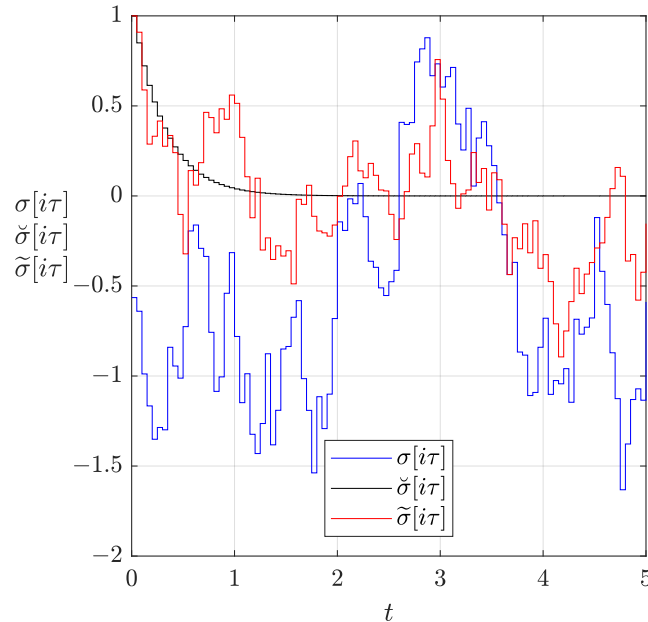


Рисунок 1.6. Динамика оценки и линейных функционалов для разностных аппроксимаций системы и наблюдателя в примере 1.2.

Пример 1.3. Рассмотрим задачу диагностики для непрерывной системы (1.1), (1.2), в которой пара $\{A, \bar{x}_0\}$ не является управляемой, $\bar{x}_0 = 0$:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -2 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -5 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \bar{x}_0 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad Q = P_0 = I_3, \\ F = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}, \quad R = 1.$$

Будем искать оптимальный наблюдатель первого порядка вида (1.11), в котором введем следующие обозначения:

$$N = a \in \mathbb{R}, \quad M = b \in \mathbb{R},$$

где для устойчивости наблюдателя (1.11) параметр a — отрицательное вещественное число. Классическое условие несмещенности (1.25):

$$FA - MC - NF = \begin{pmatrix} -a - 1 & a + 1 & -a - b - 6 \end{pmatrix} = 0,$$

имеет единственное решение $a = -1$ и $b = -5$, то есть классическое условие несмещенности дает возможность решить задачу диагностики с помощью наблюдателя первого порядка:

$$\dot{\tilde{\sigma}}(t) = -\tilde{\sigma}(t) - 5y(t), \quad \tilde{\sigma}(0) = 0. \quad (1.48)$$

Так как $\bar{x}_0 = 0$, то согласно четвертому (IV) утверждению теоремы 1.1 произвольный наблюдатель первого порядка вида (1.11) формирует несмещенную оценку линейного функционала $\sigma(t)$:

$$\dot{\tilde{\sigma}}(t) = a\tilde{\sigma}(t) + by(t), \quad \tilde{\sigma}(0) = 0; \quad a < 0, \quad b \in \mathbb{R}. \quad (1.49)$$

Передаточные функции системы (1.1):

$$W_{yw}(s) = C(sI_3 - A)^{-1} = \frac{1}{s^3 + 5s^2 + s + 2} \begin{pmatrix} 1 & s & s^2 \end{pmatrix}, \quad W_{yv}(s) = 1,$$

$$W_{\sigma w}(s) = F(sI_3 - A)^{-1} = \frac{1}{s^3 + 5s^2 + s + 2} \begin{pmatrix} s^2 + 4s - 3 \\ -s^2 - 4s - 2 \\ s^2 - s + 2 \end{pmatrix}^T.$$

Передаточные функции наблюдателей (1.48) и (1.49) имеют вид соответственно:

$$W_{\tilde{\sigma}y}(s) = \frac{-5}{s + 1} \quad \text{и} \quad W_{\tilde{\sigma}y}(s) = \frac{b}{s - a}.$$

Передаточные функции от шумов $w(t)$ и $v(t)$ к ошибке оценивания $e(t)$ для случая с наблюдателем (1.48) равны соответственно:

$$W_{ew}(s) = \frac{1}{s + 1} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{и} \quad W_{ev}(s) = \frac{5}{s + 1}.$$

Передаточные функции от шумов $w(t)$ и $v(t)$ к ошибке оценивания $e(t)$ для случая с наблюдателем (1.49) равны соответственно:

$$W_{ew}(s) = \frac{1}{(s-a)(s^3+5s^2+s+2)} \begin{pmatrix} s^3 + (4-a)s^2 - (4a+3)s - b + 3a \\ -s^3 + (a-4)s^2 + (4a-b-2)s + 2a \\ s^3 - (a+b+1)s^2 + (2+a)s - 2a \end{pmatrix}^T,$$

$$W_{ev}(s) = \frac{-b}{s-a}.$$

Для случая с наблюдателем (1.48) с помощью формулы (1.35) и формул для вычисления интегралов (1.38) получаем точное аналитическое значение критерия оптимальности:

$$J_\infty = (1^2 + 1^2 + 1^2 + 5^2) \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \left| \frac{1}{j\omega + 1} \right|^2 d\omega = 14.$$

Для случая с наблюдателем (1.49) с помощью формулы (1.35) и формул для вычисления интегралов (1.38) получаем явную аналитическую зависимость критерия оптимальности от параметров a и b :

$$J_\infty(a, b) = \frac{51a^4 - (2b^2 + 18b + 255)a^3 + (13a^2b^2 + 102b + 51)a^2}{4a(a^3 - 5a^2 + a - 2)} - \frac{(15b^2 + 46b + 102)a - 5b^2}{4a(a^3 - 5a^2 + a - 2)}.$$

Представленная функция $J_\infty(a, b)$ на полуплоскости $(a, b) \in (-\infty, 0) \times (-\infty, \infty)$ имеет глобальный минимум в точке $a^* \approx -0.765$, $b^* \approx -2.0607$ равный:

$$J_\infty(a^*, b^*) \approx 7.1039.$$

Заметим, что значение критерия качества для наблюдателя (1.49) оказалось меньше, чем значение критерия качества для наблюдателя (1.48), которое было получено с помощью классического условия несмещенности. Таким образом, в данном примере удалось достигнуть уменьшения значения критерия оптимальности путем обобщения условия несмещенности и расширения пространства параметров оптимального наблюдателя.

Для иллюстрации динамики наблюдателей (1.48), (1.49) и критерия оптимальности было проведено численное моделирование согласно разделу 1.4 на отрезке $[0, 30]$ с шагом по времени равным $\tau = 0.03$. На рисунке 1.7, *а* показана динамика аналитического значения среднеквадратичной ошибки $J(t)$ для построенных наблюдателей (1.48) и (1.49) первого порядка, вычисленная по формулам (1.40), (1.42). Несмотря на большее значение оптимизируемой метрики, среднеквадратичная ошибка для наблюдателя (1.48) сходится быстрее к своему установившемуся значению, чем для наблюдателя (1.49). Для разностных аппроксимаций построенных наблюдателей (1.48) и (1.49) первой системы и линейного функционала (1.44) на рисунке 1.7, *б* (наблюдатель (1.48) — синие линии, наблюдатель (1.49) — красные линии) сплошными линиями показана динамика аналитического значения среднеквадратичной ошибки $J[i\tau]$, вычисленная по той же схеме, что и в примере 1.1.

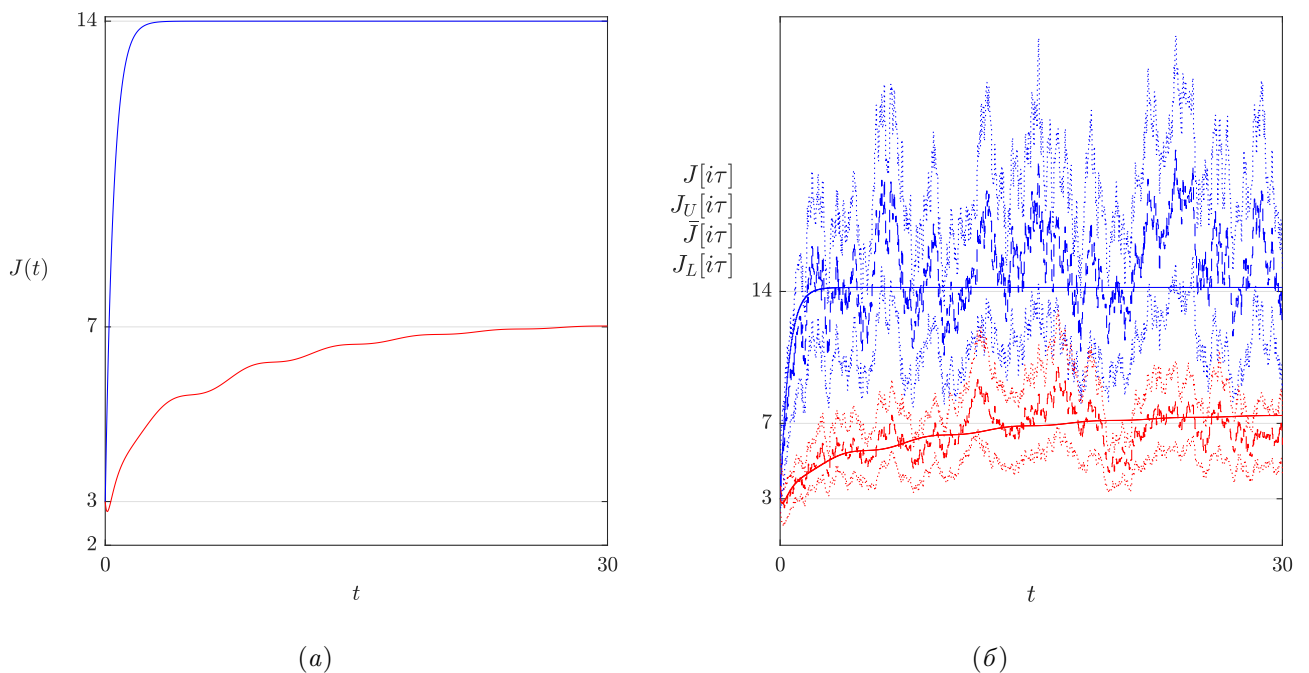


Рисунок 1.7. Динамика среднеквадратичных ошибок для (а) исходной непрерывной системы и построенных наблюдателей: (1.48) — синяя линия $J(t)$ и (1.49) — красная линия $J(t)$; для (б) разностных аппроксимаций системы и построенных наблюдателей: (1.48) — синие линии: сплошная $J[i\tau]$, штриховая $\bar{J}[i\tau]$, пунктирные $J_U[i\tau]$, $J_L[i\tau]$; и (1.49) — красные линии: сплошная $J[i\tau]$, штриховая $\bar{J}[i\tau]$, пунктирные $J_U[i\tau]$, $J_L[i\tau]$ в примере 1.3.

Вследствие квантования по времени аналитическое значение установившейся среднеквадратичной ошибки для разностных аппроксимаций отличается от аналитического значения установившейся среднеквадратичной ошибки для исходной непрерывной системы и равно для наблюдателя (1.48): $J[\infty] \approx 14.2132$; для наблюдателя (1.49): $J[\infty] \approx 7.5552$. Вычисления проведены по формулам из примера 1.1. Штриховыми и пунктирными линиями на рисунке 1.7, б показаны статистические оценки для среднеквадратичной ошибки, построенные после проведения серии из $r = 100$ экспериментов с различными реализациями случайных нормально распределенных величин: штриховыми линиями показаны $\bar{J}[i\tau]$ — выборочные средние (1.46) по всем реализациям квадрата ошибки наблюдения; пунктирными линиями показаны $J_U[i\tau]$ и $J_L[i\tau]$ — верхняя и нижняя границы γ -доверительных интервалов (1.47) для неизвестного среднего значения квадрата ошибки наблюдения с уровнем доверия $\gamma = 95\%$.

На рисунке 1.8 черным пунктиром показана динамика линейного функционала $\sigma_i = \sigma(t_i) = \sigma[i\tau]$ от зашумленного вектора состояния. Для сравнения черной сплошной линией показано $\check{\sigma}_i = \check{\sigma}(t_i) = \check{\sigma}[i\tau] \equiv 0$ нулевое значение оцениваемого линейного функционала от вектора состояния системы, свободной как от шума объекта, так и от шума наблюдения и с усредненным нулевым начальным условием. Синей линией показана оценка $\tilde{\sigma}_i = \tilde{\sigma}(t_i) = \tilde{\sigma}[i\tau]$ линейного функционала, формируемая дискретной аппроксимацией наблюдателя (1.48). Красной линией показана оценка $\tilde{\sigma}_i = \tilde{\sigma}(t_i) = \tilde{\sigma}[i\tau]$ линейного функционала, формируемая дискретной аппроксимацией наблюдателя (1.49).

Из рисунка 1.8 видно, что динамика оценки, формируемой дискретной аппроксимацией наблюдателя (1.49), меньше отклоняется от динамики линейного функционала, чем динамика оценки, формируемой дискретной аппроксимацией наблюдателя (1.48).

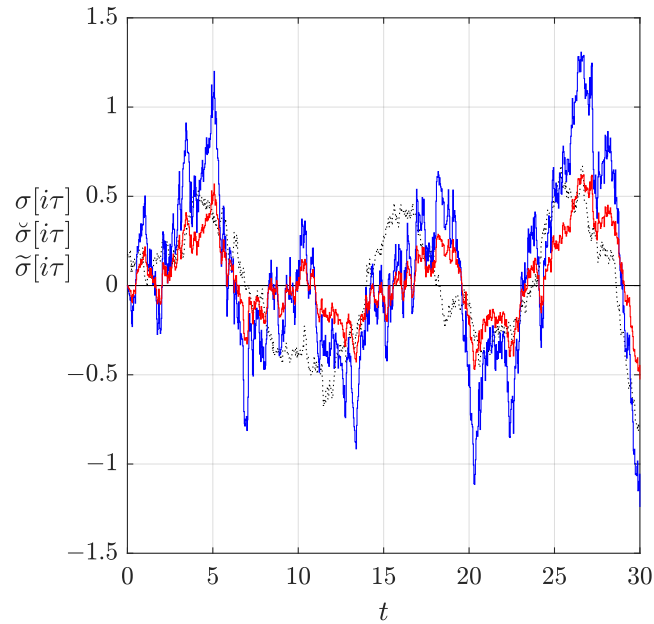


Рисунок 1.8. Динамика оценок, формируемых наблюдателями: (1.48) — синяя линия $\tilde{\tilde{\sigma}}[i\tau]$ и (1.49) — красная линия $\tilde{\sigma}[i\tau]$; и линейных функционалов (черные линии: пунктирная $\sigma[i\tau]$, сплошная $\tilde{\sigma}[i\tau]$) для разностных аппроксимаций в примере 1.3.

1.6. Выводы к первой главе

Для задачи построения оптимального наблюдателя пониженного порядка, задачи диагностики и совместной задачи стабилизации и оптимального наблюдения сформулирована и доказана теорема об условиях, обобщающих классическое условие несмещенности оценки, что расширило допустимое множество параметров оптимального наблюдателя с помощью наличия дополнительной информации о начальном состоянии и позволило усовершенствовать существующие методы фильтрации и оценки состояния по минимизации критерия оптимальности.

Предложены методы построения оптимальных наблюдателей пониженного порядка, основанные на сведении указанных задач к задачам нелинейной оптимизации и аналитическом вычислении интегрального квадратичного показателя качества. Проведены вычислительные эксперименты, иллюстрирующие теоретические результаты и предложенный метод моделирования непрерывных стохастических систем.

Глава 2

Оптимальные наблюдатели различных порядков

Во второй главе строятся оптимальные наблюдатели различных динамических порядков, начиная с первого порядка и до одного из представителей повышенного порядка, как для непрерывных, так и для дискретных стохастических систем со скалярным выходом. Представлена структура оптимальных наблюдателей в каноническом базисе. Сформулированы и доказаны теоремы о передаточных функциях построенных наблюдателей и систем в отклонениях. Для сравнения построенных наблюдателей по среднеквадратической ошибке наблюдения в установившемся режиме и моделирования ее динамики проведены вычислительные эксперименты.

Основные результаты главы опубликованы в работах [17; 27; 28].

2.1. Структура оптимальных наблюдателей

В данном разделе решаются задача 1 и задача 2, в которых исходные системы имеют скалярный выход, то есть размерность выхода $l = 1$, и заданы в канонической форме наблюдаемости, а оцениваемый скалярный линейный функционал (размерность линейного функционала $p = 1$) имеет специальную структуру, позволяющую в каноническом базисе построить оптимальный наблюдатель первого порядка.

Не ограничивая общности рассуждений, считаем, что пара $\{C, A\}$ в исходных системах (1.1) и (1.6) наблюдаема и задана во второй канонической форме

наблюдаемости [9, с. 25]:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 & -\alpha_1 \\ 1 & 0 & \dots & 0 & -\alpha_2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 1 & -\alpha_n \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 0 & \dots & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad (2.1)$$

где α_i — вещественные коэффициенты характеристического полинома матрицы A , то есть для систем (1.1), (1.6) соответственно

$$\alpha(s) = \det(sI_n - A) = s^n + \alpha_n s^{n-1} + \dots + \alpha_1,$$

$$\alpha(z) = \det(zI_n - A) = z^n + \alpha_n z^{n-1} + \dots + \alpha_1.$$

Для построения оптимальных наблюдателей различных порядков, начиная с первого порядка, и дальнейшего определения передаточных функций, воспользуемся основами метода скалярных наблюдателей для детерминированных полностью определенных систем. Известно [9, с. 81], что непрерывный линейный функционал (1.4) может быть восстановлен непрерывным наблюдателем первого порядка (наблюдателем (1.11), в котором $k = 1$, $N = \lambda$, $M = g$) вида

$$\dot{\tilde{\sigma}}(t) = \lambda \tilde{\sigma}(t) + FBu(t) + gy(t), \quad \tilde{\sigma}(0) = F\bar{x}_0; \quad (2.2)$$

а дискретный линейный функционал (1.9) — дискретным скалярным наблюдателем (наблюдателем (1.12), в котором $k = 1$, $N = \lambda$, $M = g$) вида

$$\tilde{\sigma}_{i+1} = \lambda \tilde{\sigma}_i + FBu_i + gy_i, \quad \tilde{\sigma}_0 = F\bar{x}_0; \quad (2.3)$$

где $y(t)$, $u(t)$, $\tilde{\sigma}(t)$, y_i , u_i , $\tilde{\sigma}_i$ имеют тот же смысл, что и в задачах 1 и 2; λ , g — вещественные константы, удовлетворяющие следующим условиям несмещенности оценки и устойчивости:

$$F(\lambda I_n - A) = -gC; \quad \begin{array}{l} \lambda < 0, \quad \text{для непрерывных систем,} \\ |\lambda| < 1, \quad \text{для дискретных систем.} \end{array} \quad (2.4)$$

При заданных λ и g структура вектора F , удовлетворяющего условиям (2.4), имеет вид:

$$F = \eta \begin{pmatrix} 1 & \lambda & \dots & \lambda^{n-1} \end{pmatrix}.$$

Если $\lambda \in \text{спес } A$, то $g = 0$, а η — любое. Если $\lambda \notin \text{спес } A$, то для любого g найдется единственное $\eta = -g/\alpha(\lambda) \neq 0$.

Рассмотрим вопрос, когда скалярные линейные функционалы (1.4) и (1.9), в которых

$$F = \begin{pmatrix} 1 & \lambda & \dots & \lambda^{n-1} \end{pmatrix}, \quad (2.5)$$

могут быть восстановлены оптимальным непрерывным (1.3) и дискретным (1.8) наблюдателем порядка k ($2 \leq k \leq n + 1$).

Пусть для матрицы F линейного функционала (1.4) имеет место разложение

$$F = PT.$$

Тогда оцениваемый непрерывный линейный функционал может быть записан в виде

$$\sigma(t) = Fx(t) = PTx(t) = Pq(t),$$

где $q(t) = Tx(t) \in \mathbb{R}^k$ — неизвестный вектор, подлежащий оценке. Для его восстановления используется непрерывный наблюдатель вида (1.3).

Пусть для матрицы F линейного функционала (1.9) имеет место разложение

$$F = PT + VC.$$

Тогда оцениваемый дискретный линейный функционал может быть записан в виде

$$\sigma_i = Pq_i + Vy_i - Vv_i,$$

где $q_i = Tx_i \in \mathbb{R}^k$ — неизвестный вектор, подлежащий оценке. Для его восстановления используется дискретный наблюдатель вида (1.8).

Используя правило дифференцирования Ито [76, с. 85] стохастического сигнала $\varepsilon(t) \triangleq q(t) - \tilde{q}(t)$, нетрудно получить, что ошибка оценивания $\varepsilon(t)$ описывается дифференциальным уравнением

$$\begin{aligned}\dot{\varepsilon}(t) &= \dot{q}(t) - \dot{\tilde{q}}(t) = T\dot{x}(t) - N\dot{\tilde{q}}(t) - TBu(t) - My(t) = \\ &= TAx(t) - N(q(t) - \varepsilon(t)) - MCx(t) + Tw(t) - Mv(t) = \\ &= N\varepsilon(t) + (TA - MC - NT)x(t) + Tw(t) - Mv(t).\end{aligned}$$

Уравнение для ошибки $e(t) = \sigma(t) - \tilde{\sigma}(t)$ имеет вид:

$$e(t) = \sigma(t) - \tilde{\sigma}(t) = Fx(t) - P\tilde{q}(t) = PTx(t) - P\tilde{q}(t) = P(q(t) - \tilde{q}(t)) = P\varepsilon(t).$$

Аналогично находим, что дискретная ошибка оценивания $\varepsilon_i \triangleq q_i - \tilde{q}_i$ описывается разностным уравнением

$$\varepsilon_{i+1} = N\varepsilon_i + (TA - MC - NT)x_i + Tw_i - Mv_i.$$

Уравнение для дискретной ошибки $e_i = \sigma_i - \tilde{\sigma}_i$ имеет вид:

$$e_i = \sigma_i - \tilde{\sigma}_i = Fx_i - P\tilde{q}_i - Vy_i = PTx_i + VCx_i - P\tilde{q}_i - VCx_i - Vv_i = P\varepsilon_i - Vv_i.$$

На основании известных результатов [43, с. 55] можно сделать вывод, что для того чтобы оценки $\tilde{q}(t)$, $\tilde{\sigma}(t)$ и \tilde{q}_i , $\tilde{\sigma}_i$ являлись несмещенными соответственно для $q(t)$, $\sigma(t)$ и q_i , σ_i необходимо и достаточно, чтобы были выполнены следующие условия для непрерывных систем:

$$F = PT, \quad TA - MC - NT = 0, \quad N - \text{гурвицева}; \quad (2.6)$$

и для дискретных систем:

$$F = PT + VC, \quad TA - MC - NT = 0, \quad N - \text{шуровская}. \quad (2.7)$$

При этом первое и второе уравнения в приведенных условиях означают независимость ошибок наблюдения $e(t)$, $\varepsilon(t)$ и e_i , ε_i от вектора состояния $x(t)$ и x_i

исходной системы (1.1) и (1.6) соответственно. Кроме того, если матрица N — гурвицева или N — шуровская, то [78, с. 127] ошибка $e(t)$ или e_i в установившемся режиме является стационарным в широком смысле случайным процессом.

Для минимизации количества ненулевых элементов в наблюдателях (1.3) и (1.8) неизвестные матрицы N и P ищутся в первой канонической форме наблюдаемости [9, с. 24]:

$$N = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \\ -l_1 & -l_2 & -l_3 & \dots & -l_k \end{pmatrix}, \quad P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}, \quad (2.8)$$

где l_i — вещественные коэффициенты характеристического полинома матрицы N , то есть для искомым оптимальных наблюдателей (1.3) и (1.8) соответственно

$$\beta(s) = \det(sI_k - N) = s^k + l_k s^{k-1} + \dots + l_1,$$

$$\beta(z) = \det(zI_k - N) = z^k + l_k z^{k-1} + \dots + l_1.$$

Для непрерывного оптимального наблюдателя (1.3) из условий (2.6), канонических представлений (2.1), (2.8) и вида (2.5) матрицы F следует, что для случая $k = \overline{2, n-1}$:

$$T = \begin{pmatrix} 1 & \lambda & \dots & \lambda^{n-1} \\ \lambda & \lambda^2 & \dots & \lambda^n \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \lambda^{k-1} & \lambda^k & \dots & \lambda^{n+k-2} \end{pmatrix}, \quad M = -\alpha(\lambda) \begin{pmatrix} 1 \\ \lambda \\ \vdots \\ \lambda^{k-1} \end{pmatrix}, \quad \lambda \in \text{spec } N; \quad (2.9)$$

для случая $k = n$:

$$\begin{aligned}
 T &= \begin{pmatrix} 1 & \lambda & \dots & \lambda^{n-1} \\ \lambda & \lambda^2 & \dots & \lambda^n \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \lambda^{k-1} & \lambda^k & \dots & \lambda^{n+k-2} \end{pmatrix} - \beta(\lambda) \begin{pmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & g_0(\lambda) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & g_0(\lambda) & \dots & g_{k-2}(\lambda) \end{pmatrix}, \\
 M &= -\alpha(\lambda) \begin{pmatrix} 1 \\ \lambda \\ \vdots \\ \lambda^{k-1} \end{pmatrix} + \beta(\lambda) \begin{pmatrix} g_0(\lambda) \\ g_1(\lambda) + h_1(\lambda) \\ \vdots \\ g_{k-1}(\lambda) + h_{k-1}(\lambda) \end{pmatrix};
 \end{aligned} \tag{2.10}$$

для случая $k = n + 1$:

$$\begin{aligned}
 T &= \begin{pmatrix} 1 & \lambda & \dots & \lambda^{n-1} \\ \lambda & \lambda^2 & \dots & C_1 \\ \lambda^2 & \lambda^3 & \dots & \lambda^{n+1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ C_1 & \lambda^k & \dots & \lambda^{n+k-2} \end{pmatrix} - \beta(\lambda) \begin{pmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & g_0(\lambda) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & g_0(\lambda) & \dots & g_{k-3}(\lambda) \end{pmatrix} - \\
 &- (\lambda^n - C_1) \begin{pmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & g_1(0) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & g_1(0) & \dots & g_{k-2}(0) \end{pmatrix}, \quad M = -\alpha(\lambda) \begin{pmatrix} 1 \\ \lambda \\ \lambda^2 \\ \vdots \\ \lambda^{k-1} \end{pmatrix} + \\
 &+ \beta(\lambda) \begin{pmatrix} 0 \\ g_0(\lambda) \\ g_1(\lambda) + h_1(\lambda) \\ \vdots \\ g_{k-2}(\lambda) + h_{k-2}(\lambda) \end{pmatrix} + (\lambda^n - C_1) \begin{pmatrix} g_0(0) \\ g_1(0) + h_1(0) \\ \vdots \\ g_{k-1}(0) + h_{k-1}(0) \end{pmatrix};
 \end{aligned} \tag{2.11}$$

где константа $C_1 \in \mathbb{R}$ является свободной переменной, которая появляется при решении системы линейных алгебраических уравнений, формируемой условия-

ми (2.6); вспомогательные функции $g_j(\lambda)$, $h_j(\lambda)$ определяются равенствами

$$\begin{aligned} g_0(\lambda) &= 1, \quad g_j(\lambda) = \lambda^j - \sum_{i=0}^{j-1} g_i(\lambda) l_{k-j+1+i}, \\ h_j(\lambda) &= \sum_{i=1}^j g_{i-1}(\lambda) \alpha_{n-j+i}, \quad j = 1, 2, \dots \end{aligned} \quad (2.12)$$

В частности, для случая $n = 1$ матрицы непрерывного наблюдателя второго ($k = n + 1 = 2$) порядка имеют вид:

$$T = \begin{pmatrix} 1 \\ C_1 \end{pmatrix}, \quad M = \begin{pmatrix} -C_1 - \alpha_1 \\ l_1 + C_1(l_2 - \alpha_1) \end{pmatrix}.$$

Для случая $n = 2$ матрицы непрерывного наблюдателя второго ($k = n = 2$) порядка имеют вид:

$$T = \begin{pmatrix} 1 & \lambda \\ \lambda & -l_2\lambda - l_1 \end{pmatrix}, \quad M = \begin{pmatrix} (l_2 - \alpha_2)\lambda + l_1 - \alpha_1 \\ (-l_2(l_2 - \alpha_2) + l_1 - \alpha_1)\lambda - l_1(l_2 - \alpha_2) \end{pmatrix};$$

матрицы непрерывного наблюдателя третьего ($k = n + 1 = 3$) порядка равны:

$$\begin{aligned} T &= \begin{pmatrix} 1 & \lambda \\ \lambda & C_1 \\ C_1 & -l_2\lambda - l_1 - C_1 l_3 \end{pmatrix}, \\ M &= \begin{pmatrix} -\alpha_2\lambda - C_1 - \alpha_1 \\ (l_2 - \alpha_1)\lambda + C_1(l_3 - \alpha_2) + l_1 \\ (-l_2(l_3 - \alpha_2) + l_1)\lambda + C_1(-l_3(l_3 - \alpha_2) + l_2 - \alpha_1) - l_1(l_3 - \alpha_2) \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Для дискретного оптимального наблюдателя (1.8) из условий (2.7) канонических представлений (2.1), (2.8) и вида (2.5) матрицы F следует, что для случая $k = \overline{2, n-2}$:

$$T = \begin{pmatrix} 1 & \lambda & \dots & \lambda^{n-1} \\ \lambda & \lambda^2 & \dots & \lambda^n \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \lambda^{k-1} & \lambda^k & \dots & \lambda^{n+k-2} \end{pmatrix}, \quad M = -\alpha(\lambda) \begin{pmatrix} 1 \\ \lambda \\ \vdots \\ \lambda^{k-1} \end{pmatrix}, \quad V = 0, \quad \beta(\lambda) = 0; \quad (2.13)$$

для случая $k = n - 1$:

$$T = \begin{pmatrix} 1 & \lambda & \dots & \lambda^{n-1} \\ \lambda & \lambda^2 & \dots & \lambda^n \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \lambda^{k-1} & \lambda^k & \dots & \lambda^{n+k-2} \end{pmatrix} - \beta(\lambda) \begin{pmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 & g_0(\lambda) \\ 0 & 0 & \dots & g_0(\lambda) & g_1(\lambda) \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & g_0(\lambda) & \dots & g_{k-2}(\lambda) & g_{k-1}(\lambda) \end{pmatrix},$$

$$M = -\alpha(\lambda) \begin{pmatrix} 1 \\ \lambda \\ \vdots \\ \lambda^{k-1} \end{pmatrix} + \beta(\lambda) \begin{pmatrix} g_1(\lambda) + h_1(\lambda) \\ \vdots \\ g_k(\lambda) + h_k(\lambda) \end{pmatrix}, \quad V = \beta(\lambda); \quad (2.14)$$

для случая $k = n$:

$$T = \begin{pmatrix} 1 & \lambda & \dots & \lambda^{n-1} \\ \lambda & \lambda^2 & \dots & \lambda^n \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \lambda^{k-1} & \lambda^k & \dots & \lambda^{n+k-2} \end{pmatrix} - \beta(\lambda) \begin{pmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & g_0(\lambda) \\ 0 & 0 & \dots & g_0(\lambda) & g_1(\lambda) \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & g_0(\lambda) & \dots & g_{k-3}(\lambda) & g_{k-2}(\lambda) \end{pmatrix} -$$

$$-C_1 \begin{pmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 & g_0(0) \\ 0 & 0 & \dots & g_0(0) & g_1(0) \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ g_0(0) & g_1(0) & \dots & g_{k-2}(0) & g_{k-1}(0) \end{pmatrix}, \quad M = -\alpha(\lambda) \begin{pmatrix} 1 \\ \lambda \\ \vdots \\ \lambda^{k-1} \end{pmatrix} +$$

$$+\beta(\lambda) \begin{pmatrix} g_0(\lambda) \\ g_1(\lambda) + h_1(\lambda) \\ \vdots \\ g_{k-1}(\lambda) + h_{k-1}(\lambda) \end{pmatrix} + C_1 \begin{pmatrix} g_1(0) + h_1(0) \\ \vdots \\ g_k(0) + h_k(0) \end{pmatrix}, \quad V = C_1; \quad (2.15)$$

для случая $k = n + 1$:

$$\begin{aligned}
T &= \begin{pmatrix} 1 & \lambda & \dots & \lambda^{n-1} \\ \lambda & \lambda^2 & \dots & C_2 \\ \lambda^2 & \lambda^3 & \dots & \lambda^{n+1} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ C_2 & \lambda^k & \dots & \lambda^{n+k-2} \end{pmatrix} - \beta(\lambda) \begin{pmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & g_0(\lambda) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & g_0(\lambda) & \dots & g_{k-3}(\lambda) \end{pmatrix} - \\
&- (\lambda^n - C_2) \begin{pmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & g_1(0) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & g_1(0) & \dots & g_{k-2}(0) \end{pmatrix} - C_1 \begin{pmatrix} 0 & 0 & \dots & p_0 \\ 0 & 0 & \dots & p_1 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ p_0 & p_1 & \dots & p_{k-2} \\ p_1 & p_2 & \dots & p_{k-1} \end{pmatrix}, \\
M &= -\alpha(\lambda) \begin{pmatrix} 1 \\ \lambda \\ \lambda^2 \\ \vdots \\ \lambda^{k-1} \end{pmatrix} + \beta(\lambda) \begin{pmatrix} 0 \\ g_0(\lambda) \\ g_1(\lambda) + h_1(\lambda) \\ \vdots \\ g_{k-2}(\lambda) + h_{k-2}(\lambda) \end{pmatrix} + \\
&+ (\lambda^n - C_2) \begin{pmatrix} g_0(0) \\ g_1(0) + h_1(0) \\ \vdots \\ g_{k-1}(0) + h_{k-1}(0) \end{pmatrix} + C_1 \begin{pmatrix} r_1 \\ p_2 + r_2 \\ \vdots \\ p_k + r_k \end{pmatrix}, \quad V = C_1;
\end{aligned} \tag{2.16}$$

где

$$\begin{aligned}
g_0(\lambda) &= 1, \quad g_j(\lambda) = \lambda^j - \sum_{i=0}^{j-1} g_i(\lambda) l_{k-j+1+i}, \\
h_j(\lambda) &= \sum_{i=1}^j g_{i-1}(\lambda) \alpha_{n-j+i}, \quad j = 1, 2, \dots;
\end{aligned} \tag{2.17}$$

$$p_0 = 1, \quad p_1 = 0, \quad p_j = - \sum_{i=0}^{j-1} p_i l_{k-j+1+i}, \quad r_j = \sum_{i=1}^j p_{i-1} \alpha_{n-j+i}, \quad j = 2, 3, \dots; \tag{2.18}$$

$\alpha_0 = 0$, константы $C_1, C_2 \in \mathbb{R}$ — свободные переменные, которые появляются при решении системы линейных алгебраических уравнений, формируемой условиями (2.7).

2.2. Передаточные функции наблюдателей и систем в отклонениях

Для наблюдателя (2.2), наблюдателя (2.3) первого порядка ($k = 1$) определены передаточные функции относительно входов $y(t)$, y_i и выходов $\tilde{\sigma}(t)$, $\tilde{\sigma}_i$ соответственно:

$$W_{\tilde{\sigma}y}(s) = \frac{g}{s - \lambda}, \quad W_{\tilde{\sigma}y}(z) = \frac{g}{z - \lambda}.$$

Для наблюдателя (1.3), наблюдателя (1.8) порядка k ($2 \leq k \leq n + 1$) передаточные функции относительно входов $y(t)$, y_i и выходов $\tilde{\sigma}(t)$, $\tilde{\sigma}_i$ равны соответственно:

$$W_{\tilde{\sigma}y}(s) = P(sI_k - N)^{-1}M, \quad W_{\tilde{\sigma}y}(z) = P(zI_k - N)^{-1}M.$$

В дальнейших формулировках теорем относительно указанных передаточных функций будет использоваться следующее вспомогательное определение.

Определение 2.1. Разделенной разностью полинома $\gamma(s) = s^n + \sum_{j=0}^{n-1} \gamma_{j+1}s^j$ называется выражение вида:

$$\delta_\gamma(s, \mu) = \frac{\gamma(s) - \gamma(\mu)}{s - \mu} = \sum_{j=0}^{n-1} \delta_j(\mu) s^{n-1-j},$$

в котором для коэффициентов $\delta_j(\mu)$ существуют рекуррентные соотношения:

$$\delta_0(\mu) = 1; \quad \delta_j(\mu) = \mu \delta_{j-1}(\mu) + \gamma_{n-j+1} \quad (j = \overline{1, n-1}).$$

Далее сформулирована и доказана теорема о передаточных функциях непрерывных наблюдателей.

Теорема 2.1. Если система (1.1) задана в канонической форме (2.1); выполнены условия (2.4) существования скалярного ($k = 1$) наблюдателя (2.2), условия (2.6) существования наблюдателей (1.3) порядка k ($2 \leq k \leq n + 1$) в канонической форме (2.8); и матрица F имеет вид (2.5), то

1) передаточная функция наблюдателей порядка $k = \overline{1, n - 1}$ после сокращения общих нулей и полюсов имеет вид:

$$W_{\tilde{\sigma}y}(s) = \frac{-\alpha(\lambda)}{s - \lambda};$$

2) передаточная функция наблюдателей порядка $k = n$ имеет вид:

$$W_{\tilde{\sigma}y}(s) = \frac{-\alpha(\lambda)\delta_\beta(s, \lambda) + \beta(\lambda)\delta_\alpha(s, \lambda)}{\beta(s)};$$

3) передаточная функция наблюдателей порядка $k = n + 1$ имеет вид:

$$W_{\tilde{\sigma}y}(s) = \frac{-\alpha(\lambda)\delta_\beta(s, \lambda) + \beta(\lambda)\delta_\alpha(s, \lambda) + (\lambda^n - C_1)\alpha(s)}{\beta(s)}, \quad C_1 \in \mathbb{R}.$$

Доказательство. Для наблюдателей (2.2) первого порядка ($k = 1$) из представления (2.5) матрицы F следует, что $g = -\alpha(\lambda)$. Значит, из определения передаточной функции наблюдателя (2.2) следует первое утверждение теоремы для $k = 1$. Из теоремы Гамильтона–Кэли следует [90, с. 91], что

$$\begin{aligned} \text{adj}(sI_k - N) &= \delta_\beta(sI_k, N) = I_k s^{k-1} + \\ &+ (N + l_k I_k) s^{k-2} + \dots + (N^{k-1} + l_k N^{k-2} + \dots + l_2 I_k). \end{aligned} \quad (2.19)$$

Для матриц N и P в каноническом базисе (2.8) верно следующее свойство:

$$PN^\nu = e_{\nu+1} = \begin{pmatrix} 0 & \dots & 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}, \quad \nu = \overline{0, k-1}, \quad (2.20)$$

где $e_{\nu+1}$ является $(\nu + 1)$ -й единичной строкой, у которой все компоненты равны 0, кроме $(\nu + 1)$ -й, равной 1. Из свойства (2.20) и формулы (2.19) следует

$$P(sI_k - N)^{-1} \begin{pmatrix} 1 & \lambda & \dots & \lambda^{k-1} \end{pmatrix}^\top = \frac{\delta_\beta(s, \lambda)}{\beta(s)}.$$

Так как $\beta(\lambda) = 0$ для наблюдателей (1.3) порядка $k = \overline{2, n-1}$, то, используя представление (2.9) матрицы M , получаем первое утверждение теоремы для $k = \overline{2, n-1}$. Кроме того, сокращение общих нулей и полюсов передаточной функции объясняется тем, что согласно (2.9) ранг матрицы управляемости для пары $\{N, M\}$ равен единице.

Используя для случая $k = n$ формулу (2.19), свойство (2.20), представление рекуррентных соотношений (2.17) и перегруппируя слагаемые, получаем:

$$P(sI_k - N)^{-1} \begin{pmatrix} g_0(\lambda) \\ g_1(\lambda) + h_1(\lambda) \\ \vdots \\ g_{k-1}(\lambda) + h_{k-1}(\lambda) \end{pmatrix} = \frac{\delta_\alpha(s, \lambda)}{\beta(s)}.$$

Следовательно, из представления (2.10) матрицы M получаем второе утверждение теоремы. По формуле (2.19), свойству (2.20) и рекуррентным соотношениям (2.17) для случая $k = n + 1$ имеем:

$$P(sI_k - N)^{-1} \begin{pmatrix} 0 \\ g_0(\lambda) \\ g_1(\lambda) + h_1(\lambda) \\ \vdots \\ g_{k-2}(\lambda) + h_{k-2}(\lambda) \end{pmatrix} = \frac{\delta_\alpha(s, \lambda)}{\beta(s)},$$

$$P(sI_k - N)^{-1} \begin{pmatrix} g_0(0) \\ g_1(0) + h_1(0) \\ \vdots \\ g_{k-1}(0) + h_{k-1}(0) \end{pmatrix} = \frac{\alpha(s)}{\beta(s)}.$$

Значит, из вида (2.11) матрицы M следует третье утверждение.

Теорема 2.1 полностью доказана. □

Далее сформулирована и доказана теорема о передаточных функциях дискретных наблюдателей.

Теорема 2.2. Если система (1.6) задана в канонической форме (2.1); выполнены условия (2.4) существования скалярного ($k = 1$) наблюдателя (2.3), условия (2.7) существования наблюдателей (1.8) порядка k ($2 \leq k \leq n + 1$) в канонической форме (2.8); и матрица F имеет вид (2.5), то

1) передаточная функция наблюдателей порядка $k = \overline{1, n - 2}$ после сокращения общих нулей и полюсов имеет вид:

$$W_{\tilde{\sigma}_y}(z) = \frac{-\alpha(\lambda)}{z - \lambda};$$

2) передаточная функция наблюдателей порядка $k = n - 1$ имеет вид:

$$W_{\tilde{\sigma}_y}(z) = \frac{-\alpha(\lambda)\delta_\beta(z, \lambda) + \beta(\lambda)\delta_\alpha(z, \lambda)}{\beta(z)};$$

3) передаточная функция наблюдателей порядка $k = n$ имеет вид:

$$W_{\tilde{\sigma}_y}(z) = \frac{-\alpha(\lambda)\delta_\beta(z, \lambda) + \beta(\lambda)\delta_\alpha(z, \lambda) + C_1\alpha(z)}{\beta(z)};$$

4) передаточная функция наблюдателей порядка $k = n + 1$ имеет вид:

$$W_{\tilde{\sigma}_y}(z) = \frac{-\alpha(\lambda)\delta_\beta(z, \lambda) + \beta(\lambda)\delta_\alpha(z, \lambda) + (\lambda^n - C_2)\alpha(z) + C_1(z + l_k)\alpha(z)}{\beta(z)},$$

где $C_1, C_2 \in \mathbb{R}$ — произвольные константы.

Доказательство. Для наблюдателей (2.3) первого порядка ($k = 1$) из представления (2.5) матрицы F следует, что $g = -\alpha(\lambda)$. Значит, из определения передаточной функции наблюдателя (2.3) следует первое утверждение теоремы для $k = 1$. Из теоремы Гамильтона–Кэли следует [90, с. 91]

$$\begin{aligned} \text{adj}(zI_k - N) &= \delta_\beta(zI_k, N) = \beta(z)(zI_k - N)^{-1} = \\ &= I_k z^{k-1} + (N + l_k I_k)z^{k-2} + \dots + (N^{k-1} + l_k N^{k-2} + \dots + l_2 I_k). \end{aligned} \quad (2.21)$$

Для матриц N и P в каноническом представлении (2.8) имеет верно свойство:

$$PN^\nu = e_{\nu+1} = \begin{pmatrix} 0 & \dots & 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}, \quad \nu = \overline{0, k-1}, \quad (2.22)$$

где $e_{\nu+1}$ является $(\nu + 1)$ -й единичной строкой, у которой все компоненты равны 0, кроме $(\nu + 1)$ -й, равной 1. На основе свойства (2.22) и представления (2.13) матрицы M для наблюдателей (1.8) порядка $k = \overline{2, n - 2}$ получаем соотношение $PN^\nu M = -\lambda^\nu \alpha(\lambda)$, $\nu = \overline{0, k - 1}$. Применяя формулу (2.21) для присоединенной матрицы, ассоциативность произведения матрицы на число и представление (2.13), находим, что для наблюдателей (1.8) порядка $k = \overline{2, n - 2}$

$$W_{\bar{\sigma}y}(z) = P(zI_k - N)^{-1}M + V = \frac{-\alpha(\lambda)\delta_\beta(z, \lambda)}{\beta(z)} = \frac{-\alpha(\lambda)}{z - \lambda}.$$

Кроме того, сокращение общих нулей и полюсов передаточной функции обусловлено тем, что согласно (2.13) ранг матрицы управляемости для пары $\{N, M\}$ равен единице, что можно проверить непосредственной подстановкой.

Используя для случая $k = n - 1$ формулу (2.21), свойство (2.22), представление рекуррентных соотношений (2.17) и перегруппируя слагаемые, получаем:

$$P(zI_k - N)^{-1} \begin{pmatrix} g_1(\lambda) + h_1(\lambda) \\ \vdots \\ g_k(\lambda) + h_k(\lambda) \end{pmatrix} = \frac{\delta_\alpha(z, \lambda) - \beta(z)}{\beta(z)}.$$

Следовательно из представления (2.14) матриц M и V получаем второе утверждение теоремы. Из формулы (2.21), свойства (2.22), представления рекуррентных соотношений (2.17) для случая $k = n$ следует:

$$P(zI_k - N)^{-1} \begin{pmatrix} g_0(\lambda) \\ g_1(\lambda) + h_1(\lambda) \\ \vdots \\ g_{k-1}(\lambda) + h_{k-1}(\lambda) \end{pmatrix} = \frac{\delta_\alpha(z, \lambda)}{\beta(z)},$$

$$P(zI_k - N)^{-1} \begin{pmatrix} g_1(0) + h_1(0) \\ \vdots \\ g_k(0) + h_k(0) \end{pmatrix} = \frac{\alpha(z) - \beta(z)}{\beta(z)}.$$

Значит, из представления (2.15) матриц M и V следует третье утверждение теоремы. По формуле (2.21), свойству (2.22) и рекуррентным соотношениям (2.17)

и (2.18) для случая $k = n + 1$ имеем:

$$P(zI_k - N)^{-1} \begin{pmatrix} 0 \\ g_0(\lambda) \\ g_1(\lambda) + h_1(\lambda) \\ \vdots \\ g_{k-2}(\lambda) + h_{k-2}(\lambda) \end{pmatrix} = \frac{\delta_\alpha(z, \lambda)}{\beta(z)},$$

$$P(zI_k - N)^{-1} \begin{pmatrix} g_0(0) \\ g_1(0) + h_1(0) \\ \vdots \\ g_{k-1}(0) + h_{k-1}(0) \end{pmatrix} = \frac{\alpha(z)}{\beta(z)},$$

$$P(zI_k - N)^{-1} \begin{pmatrix} q_1 \\ p_2 + q_2 \\ \vdots \\ p_k + q_k \end{pmatrix} = \frac{(z + l_k)\alpha(z) - \beta(z)}{\beta(z)}.$$

Таким образом, из вида (2.16) матриц M и V следует четвертое утверждение теоремы. Теорема 2.2 доказана. \square

Передаточные функции от шума объекта $w(t)$ к ошибке наблюдения $e(t)$ и от шума наблюдения $v(t)$ к ошибке $e(t)$ равны соответственно:

$$W_{ew}(s) = W_{\sigma w}(s) - W_{\tilde{\sigma}y}(s)W_{yw}(s), \quad W_{ev}(s) = -W_{\tilde{\sigma}y}(s)W_{yv}(s). \quad (2.23)$$

Передаточные функции от шума объекта w_i к ошибке наблюдения e_i и от шума наблюдения v_i к ошибке e_i равны соответственно:

$$W_{ew}(z) = W_{\sigma w}(z) - W_{\tilde{\sigma}y}(z)W_{yw}(z), \quad W_{ev}(z) = -W_{\tilde{\sigma}y}(z)W_{yv}(z). \quad (2.24)$$

В дальнейших рассуждениях относительно указанных передаточных функций будет использоваться следующее вспомогательное определение.

Определение 2.2. Производящей функцией матрицы Безу полиномов $a(s)$, $b(\mu)$, у которых $\deg b \leq \deg a = n$, называется выражение вида:

$$\Delta_{a,b}(s, \mu) = \frac{a(s)b(\mu) - a(\mu)b(s)}{s - \mu} = \sum_{i=0}^{n-1} \sum_{j=0}^{n-1} \Delta_{ij} s^i \mu^j.$$

Рассмотрим рекуррентную последовательность:

$$d_0(\lambda) = 1; \quad d_j(\lambda) = \lambda^j - \sum_{i=0}^{j-1} d_i(\lambda) \alpha_{n-j+1+i}, \quad j = \overline{1, n},$$

где α_i — коэффициенты из канонической формы (2.1). Тогда для матриц A и C в каноническом представлении (2.1) и матрицы F в представлении (2.5) верны следующие два свойства:

$$CA^j = \left[0 \quad \dots \quad d_0(0) \quad d_1(0) \quad \dots \quad d_j(0) \right], \quad j = \overline{1, n-1}. \quad (2.25)$$

$$FA^j = \lambda^j F - \alpha(\lambda) \left[0 \quad \dots \quad 0 \quad d_0(\lambda) \quad \dots \quad d_{j-1}(\lambda) \right], \quad j = \overline{1, n-1}. \quad (2.26)$$

Согласно первому свойству (2.25) для непрерывных систем:

$$\begin{aligned} W_{yw}(s) &= C(sI_n - A)^{-1} = \\ &= \frac{1}{\alpha(s)} C \left[I_n s^{n-1} + (A + \alpha_n I_n) s^{n-2} + \dots + (A^{n-1} + \alpha_n A^{n-2} + \dots + \alpha_2 I_n) \right] = \\ &= \frac{1}{\alpha(s)} \left[1 \quad s \quad \dots \quad s^{n-1} \right]. \end{aligned}$$

Аналогично по первому свойству (2.25) для дискретных систем получаем:

$$W_{yw}(z) = \frac{1}{\alpha(z)} \left[1 \quad z \quad \dots \quad z^{n-1} \right].$$

Из второго свойства (2.26) для непрерывных систем следует, что:

$$\begin{aligned} W_{\sigma w}(s) &= F(sI_n - A)^{-1} = \\ &= \frac{1}{\alpha(s)} F \left[I_n s^{n-1} + (A + \alpha_n I_n) s^{n-2} + \dots + (A^{n-1} + \alpha_n A^{n-2} + \dots + \alpha_2 I_n) \right] = \\ &= \frac{1}{\alpha(s)} F \Delta_\alpha(s, \lambda) - \frac{\alpha(\lambda)}{\alpha(s)} \left[0 \quad 1 \quad \lambda + s \quad \dots \quad \lambda^{n-2} + s^{n-2} \right] = \\ &= \frac{1}{\alpha(s)} \left[\Delta_{\alpha,1}(s, \lambda) \quad \Delta_{\alpha,\lambda}(s, \lambda) \quad \dots \quad \Delta_{\alpha,\lambda^{n-1}}(s, \lambda) \right]. \end{aligned}$$

Аналогично из второго свойства (2.26) для дискретных систем получаем:

$$W_{\sigma w}(z) = \frac{1}{\alpha(z)} \left[\Delta_{\alpha,1}(z, \lambda) \quad \Delta_{\alpha,\lambda}(z, \lambda) \quad \dots \quad \Delta_{\alpha,\lambda^{n-1}}(z, \lambda) \right].$$

Подставляя в формулу (2.23) и в формулу (2.24) соответствующие значения передаточных функций W_{yw} , $W_{\sigma w}$, $W_{yv} = 1$ и значения передаточных функций $W_{\tilde{\sigma}y}$ из каждого утверждения теоремы 2.1 и теоремы 2.2, получаем следующие два утверждения.

Теорема 2.3. *Если система (1.1) задана в канонической форме (2.1); выполнены условия (2.4) существования скалярного ($k = 1$) наблюдателя (2.2), условия (2.6) существования наблюдателей (1.3) порядка k ($2 \leq k \leq n + 1$) в канонической форме (2.8); и матрица F имеет вид (2.5), то передаточные функции от шума объекта $w(t)$ к ошибке наблюдения $e(t)$ и от шума наблюдения $v(t)$ к ошибке $e(t)$*

1) в случае $k = \overline{1, n-1}$ после сокращения общих нулей и полюсов равны:

$$W_{ew}(s) = \frac{1}{s - \lambda} \left(1 \quad \lambda \quad \dots \quad \lambda^{n-1} \right), \quad W_{ev}(s) = \frac{\alpha(\lambda)}{s - \lambda};$$

2) в случае $k = n$ равны:

$$W_{ew}(s) = \frac{1}{\beta(s)} \left(\Delta_{\beta,1}(s, \lambda) \quad \Delta_{\beta,\lambda}(s, \lambda) \quad \dots \quad \Delta_{\beta,\lambda^{n-1}}(s, \lambda) \right),$$

$$W_{ev}(s) = \frac{\alpha(\lambda)\delta_{\beta}(s, \lambda) - \beta(\lambda)\delta_{\alpha}(s, \lambda)}{\beta(s)};$$

3) в случае $k = n + 1$ равны:

$$W_{ew}(s) = \frac{1}{\beta(s)} \left(\begin{array}{c} \Delta_{\beta,1}(s, \lambda) - (\lambda^n - C_1) \\ \Delta_{\beta,\lambda}(s, \lambda) - s(\lambda^n - C_1) \\ \vdots \\ \Delta_{\beta,\lambda^{n-1}}(s, \lambda) - s^{n-1}(\lambda^n - C_1) \end{array} \right)^T,$$

$$W_{ev}(s) = \frac{\alpha(\lambda)\delta_{\beta}(s, \lambda) - \beta(\lambda)\delta_{\alpha}(s, \lambda) - (\lambda^n - C_1)\alpha(s)}{\beta(s)}, \quad C_1 \in \mathbb{R}.$$

Теорема 2.4. Если система (1.6) задана в канонической форме (2.1); выполнены условия (2.4) существования скалярного ($k = 1$) наблюдателя (2.3), условия (2.7) существования наблюдателей (1.8) порядка k ($2 \leq k \leq n + 1$) в канонической форме (2.8); и матрица F имеет вид (2.5), то передаточные функции от шума объекта w_i к ошибке наблюдения e_i и от шума наблюдения v_i к ошибке e_i

1) в случае $k = \overline{1, n-2}$ после сокращения общих нулей и полюсов равны:

$$W_{ew}(z) = \frac{1}{z - \lambda} \begin{pmatrix} 1 & \lambda & \dots & \lambda^{n-1} \end{pmatrix}, \quad W_{ev}(z) = \frac{\alpha(\lambda)}{z - \lambda};$$

2) в случае $k = n - 1$ равны:

$$W_{ew}(z) = \frac{1}{\beta(z)} \begin{pmatrix} \Delta_{\beta,1}(z, \lambda) \\ \Delta_{\beta,\lambda}(z, \lambda) \\ \dots \\ \Delta_{\beta,\lambda^{n-1}}(z, \lambda) \end{pmatrix}^T, \quad W_{ev}(z) = \frac{\alpha(\lambda)\delta_\beta(z, \lambda) - \beta(\lambda)\delta_\alpha(z, \lambda)}{\beta(z)};$$

3) в случае $k = n$ равны:

$$W_{ew}(z) = \frac{1}{\beta(z)} \begin{pmatrix} \Delta_{\beta,1}(z, \lambda) - C_1 \\ \Delta_{\beta,\lambda}(z, \lambda) - zC_1 \\ \dots \\ \Delta_{\beta,\lambda^{n-1}}(z, \lambda) - z^{n-1}C_1 \end{pmatrix}^T,$$

$$W_{ev}(z) = \frac{\alpha(\lambda)\delta_\beta(z, \lambda) - \beta(\lambda)\delta_\alpha(z, \lambda) - C_1\alpha(z)}{\beta(z)}, \quad C_1 \in \mathbb{R};$$

4) в случае $k = n + 1$ равны:

$$W_{ew}(z) = \frac{1}{\beta(z)} \begin{pmatrix} \Delta_{\beta,1}(z, \lambda) - (\lambda^n - C_2) - C_1(z + l_k) \\ \Delta_{\beta,\lambda}(z, \lambda) - z(\lambda^n - C_2) - C_1z(z + l_k) \\ \dots \\ \Delta_{\beta,\lambda^{n-1}}(z, \lambda) - z^{n-1}(\lambda^n - C_2) - C_1z^{n-1}(z + l_k) \end{pmatrix}^T,$$

$$W_{ev}(z) = \frac{\alpha(\lambda)\delta_\beta(z, \lambda) - \beta(\lambda)\delta_\alpha(z, \lambda) - (\lambda^n - C_2)\alpha(z) - C_1(z + l_k)\alpha(z)}{\beta(z)},$$

$$C_1, C_2 \in \mathbb{R}.$$

2.3. Примеры

В данном разделе приводятся вычислительные примеры, в которых как для непрерывной, так и для дискретной системы четвертого порядка строятся наблюдатели с первого по пятый порядок и проводятся моделирование и сравнение по среднеквадратичному критерию оптимальности полученных наблюдателей в динамике и установившемся режиме. Для синтеза наблюдателей применяются использующие утверждения теоремы 2.3 и теоремы 2.4 методы сведения задачи оптимального наблюдения к задаче нелинейной оптимизации и метод численного моделированию из главы 1.

Пример 2.1. Рассмотрим задачу 1 для непрерывной системы четвертого ($n = 4$) порядка (1.1), (1.2) и скалярного линейного функционала (1.4), в которых

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & -24 \\ 1 & 0 & 0 & -50 \\ 0 & 1 & 0 & -35 \\ 0 & 0 & 1 & -10 \end{pmatrix}, \quad \bar{x}_0 = \begin{pmatrix} 100 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad C = (0 \ 0 \ 0 \ 1), \quad Q = I_4, \quad P_0 = 0.1I_4, \\ F = (1 \ -5 \ 25 \ -125), \quad R = 1, \quad B = 0.$$

Наблюдатель первого порядка ($k = 1$), формирующий несмещенную оценку скалярного линейного функционала (1.4) имеет вид (2.2), в котором $\lambda = -5$, $g = -\alpha(-5) = -24$. Наблюдатели второго ($k = 2$) и третьего ($k = 3$) порядка имеют вид (1.3), в котором матрицы M , T берутся из соотношения (2.9) с $\lambda = -5$, а матрицы P , N — из канонического представления (2.8), где коэффициенты l_i , $i = \overline{1, k}$ удовлетворяют равенству $\beta(-5) = 0$. Передаточные функции указанных наблюдателей ($k = \overline{1, 3}$), согласно теореме 2.1, имеют вид $W_{\tilde{\sigma}y}(s) = -24/(s + 5)$, а передаточные функции относительно входов $w(t)$, $v(t)$ и выхода $e(t)$ имеют вид из первого утверждения теоремы 2.3 с $\lambda = -5$. Установившееся среднее значение квадрата ошибки наблюдения можно найти по

формуле для вычисления интегралов (1.38):

$$J_{\infty} = (1^2 + 5^2 + 25^2 + 125^2 + 24^2) \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \left| \frac{1}{j\omega + 5} \right|^2 d\omega = 1685.2.$$

Следовательно, для случаев $k = 2$, $k = 3$ существует множество оптимальных наблюдателей, являющихся решением задачи 1, у которых коэффициенты характеристического полинома находятся на пересечении линейного многообразия решений уравнения $\beta(-5) = 0$ с областью гурвицевости матрицы N . Оптимальные наблюдатели четвертого ($k = 4$) и пятого ($k = 5$) порядка также имеют вид (1.3), в котором матрицы M , T берутся с $\lambda = -5$: для $k = 4$ из соотношений (2.10); для $k = 5$ из соотношений (2.11). Матрицы P , N имеют канонический вид (2.8). При этом для нахождения оставшихся переменных решается задача минимизации критерия оптимальности с ограничением на параметры, которые должны быть такими, чтобы характеристический полином наблюдателя был устойчив. Численные результаты, которые получены с помощью метода последовательного квадратичного программирования [91, гл. 18], имеют вид для $k = 4$:

$$l_1 \approx 24.0208, \quad l_2 \approx 50.0857, \quad l_3 \approx 35.1275, \quad l_4 \approx 10.0626;$$

для $k = 5$:

$$l_1 \approx 22739.6763, \quad l_2 \approx 47438.4344, \quad l_3 \approx 33304.0276,$$

$$l_4 \approx 9560.9917, \quad l_5 \approx 956.7275, \quad C_1 \approx 606.0401.$$

Полученное значение критерия оптимальности в обоих случаях равно:

$$J_{\infty} \approx 1649.2521.$$

Матрицы наблюдателя (1.3) четвертого порядка, построенного методом

скалярных наблюдателей [9, гл. 4], имеют вид

$$N = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda_4 \end{pmatrix}, \quad T = \begin{pmatrix} 1 & \lambda_1 & \lambda_1^2 & \lambda_1^3 \\ 1 & \lambda_2 & \lambda_2^2 & \lambda_2^3 \\ 1 & \lambda_3 & \lambda_3^2 & \lambda_3^3 \\ 1 & \lambda_4 & \lambda_4^2 & \lambda_4^3 \end{pmatrix}, \quad M = \begin{pmatrix} -\alpha(\lambda_1) \\ -\alpha(\lambda_2) \\ -\alpha(\lambda_3) \\ -\alpha(\lambda_4) \end{pmatrix},$$

$$P = \left(\prod_{j=2}^4 \frac{\lambda_j+5}{\lambda_j-\lambda_1} \quad \prod_{j=1, j \neq 2}^4 \frac{\lambda_j+5}{\lambda_j-\lambda_2} \quad \prod_{j=1, j \neq 3}^4 \frac{\lambda_j+5}{\lambda_j-\lambda_3} \quad \prod_{j=1}^3 \frac{\lambda_j+5}{\lambda_j-\lambda_4} \right),$$

где $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4$ — различные неизвестные вещественные собственные значения наблюдателя. Вычисляя значение критерия оптимальности согласно методу из раздела 1.3 главы 1 и применяя численный метод последовательного квадратичного программирования [91, гл. 18] к минимизации целевой функции с ограничением на параметры $\lambda_j < 0, j = \overline{1, 4}$, получаем следующие значения оптимальных параметров и критерия оптимальности:

$$\lambda_1 = -1, \quad \lambda_2 \approx -2.0915, \quad \lambda_3 \approx -2.6707, \quad \lambda_4 \approx -4.3003, \quad J_\infty \approx 1649.2521.$$

Полученные значения соответствуют корням характеристического полинома наблюдателя четвертого порядка, найденного в канонической форме наблюдаемости, при этом минимальные значения критерия оптимальности совпадают.

Полноразмерный установившийся фильтр Калмана–Бьюси [70, гл. 8] имеет следующий вид:

$$\begin{aligned} \dot{\tilde{x}}(t) &= A\tilde{x}(t) + K_\infty(y(t) - C\tilde{x}(t)), \quad \tilde{x}(0) = \bar{x}^0, \\ \tilde{\sigma}(t) &= F\tilde{x}(t), \end{aligned} \quad t \geq 0; \quad (2.27)$$

в котором коэффициент усиления равен:

$$K_\infty = P_\infty C^\top R^{-1} \approx \begin{pmatrix} 0.0208 \\ 0.0857 \\ 0.1275 \\ 0.0626 \end{pmatrix}, \quad P_\infty \approx \begin{pmatrix} 3.1008 & 3.7907 & 1.7108 & 0.0208 \\ 3.7907 & 7.6745 & 3.9695 & 0.0857 \\ 1.7108 & 3.9695 & 3.3862 & 0.1275 \\ 0.0208 & 0.0857 & 0.1275 & 0.0626 \end{pmatrix},$$

где $P_\infty = \lim_{t \rightarrow \infty} \mathbb{E}[\hat{x}(t)\hat{x}^\top(t)]$ — установившееся значение ковариационной матрицы ошибки $\hat{x}(t) \triangleq x(t) - \tilde{x}(t)$, которое является решением матричного алгебраического уравнения Риккати:

$$AP_\infty + P_\infty A^\top - P_\infty C^\top R^{-1} C P_\infty + Q = 0.$$

Критерий оптимальности в этом случае также равен:

$$J_\infty = \text{tr}(F^\top F P_\infty) \approx 1649.2521.$$

Одинаковые значения критерия оптимальности для построенных наблюдателей четвертого и пятого порядка объясняются общими передаточными функциями $W_{\tilde{\sigma}_y}(s)$, $W_{ew}(s)$ и $W_{ev}(s)$, которые получаются после нахождения оптимальных значений параметров и сокращения общих нулей и полюсов. При этом минимальный порядок передаточной функции $W_{\tilde{\sigma}_y}(s)$, имеющей после сокращения полюсы $\lambda_1 \approx -2.0915$, $\lambda_2 \approx -2.6707$, $\lambda_3 \approx -4.3003$, равен трем. Однако наблюдателя третьего порядка с указанными собственными значениями не существует из-за условия $\lambda = -5 \in \text{спес } N$ несмещенности оценки для наблюдателей с первого по третий порядок.

Для моделирования динамики среднеквадратичной ошибки и линейного функционала по предложенному в разделе 1.4 методу используется разностная аппроксимация Эйлера исходной системы:

$$\begin{aligned} x_{i+1} &= (I_4 + A\tau)x_i + w_i, & i = \overline{0, 99}, \\ y_i &= Cx_i + v_i, \end{aligned}$$

где $x_i = x[i\tau]$, $u_i = u[i\tau]$, $y_i = y[i\tau]$, $\tau = 0.05$ — период дискретизации; некоррелированные между собой дискретные белые шумы w_i и v_i имеют нулевое среднее и спектральные плотности $Q\tau$ и R/τ соответственно.

На рисунке 2.1 пунктиром показана динамика линейного функционала $\sigma_i = \sigma(t_i) = \sigma[i\tau]$; для сравнения сплошной черной линией показана динамика линейного функционала $\check{\sigma}_i = \check{\sigma}(t_i) = \check{\sigma}[i\tau] = F(I_4 + A\tau)^i \bar{x}_0$ от вектора состояния

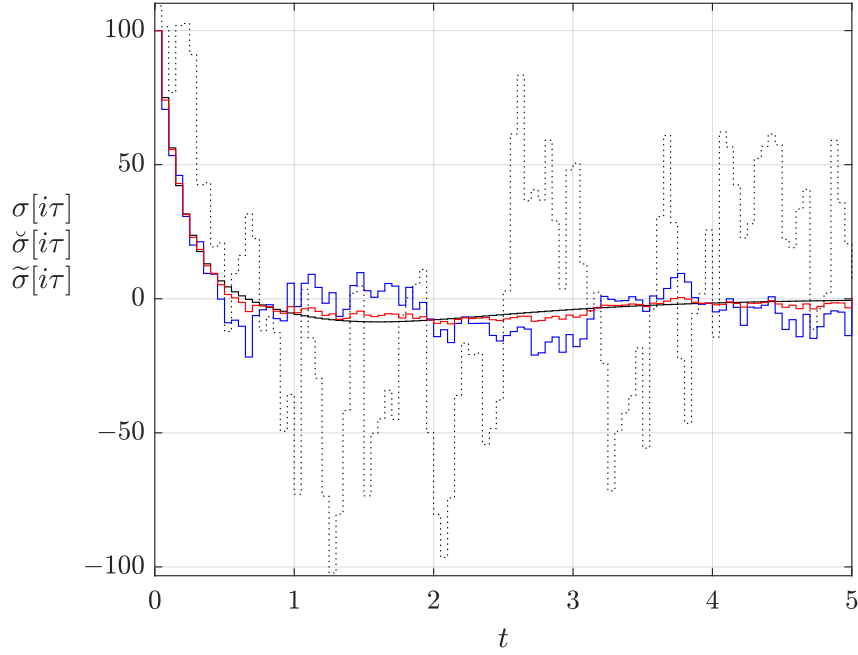


Рисунок 2.1. Динамика изменения величин: $\sigma[i\tau]$ — черная пунктирная линия, $\check{\sigma}[i\tau]$ — черная сплошная линия, $\tilde{\sigma}[i\tau]$ — синяя (для наблюдателей: (2.28) порядка $k = 1$, (2.29) порядка $k = 2$, $k = 3$) и красная (для наблюдателей (2.29) порядка $k = 4$, $k = 5$; полноразмерного фильтра (2.30)) линии в примере 2.1.

системы, очищенной от шумов и с усредненным начальным условием. Синей линией показана оценка $\tilde{\sigma}_i = \tilde{\sigma}(t_i) = \tilde{\sigma}[i\tau]$ линейного функционала, формируемая как дискретной аппроксимацией построенного скалярного наблюдателя

$$\tilde{\sigma}_{i+1} = (1 + \lambda\tau)\tilde{\sigma}_i + g\tau y_i, \quad \tilde{\sigma}_0 = F\bar{x}_0, \quad i = \overline{0, 99}, \quad (2.28)$$

так и дискретной аппроксимацией построенных наблюдателей второго и третьего порядка

$$\begin{aligned} \tilde{q}_{i+1} &= (I_k + N\tau)\tilde{q}_i + M\tau y_i, & \tilde{q}_0 &= T\bar{x}_0, \\ \tilde{\sigma}_i &= P\tilde{q}_i, & i &= \overline{0, 99}. \end{aligned} \quad (2.29)$$

Красной линией показана оценка $\tilde{\sigma}_i = \tilde{\sigma}(t_i) = \tilde{\sigma}[i\tau]$ линейного функционала, формируемая как дискретной аппроксимацией построенных наблюдателей четвертого и пятого порядка, так и дискретной аппроксимацией построенного уста-

новившегося полноразмерного фильтра Калмана–Бьюси четвертого порядка

$$\begin{aligned}\tilde{x}_{i+1} &= (I_4 + (A - K_\infty C)\tau)\tilde{x}_i + K_\infty \tau y_i, & \tilde{x}_0 &= \bar{x}_0, & i &= \overline{0, 99}. \\ \tilde{\sigma}_i &= F\tilde{x}_i,\end{aligned}\quad (2.30)$$

На рисунке 2.2 красной линией показана динамика аналитического значения среднеквадратичной ошибки как $J(t) = \text{tr}(P^\top P P_\varepsilon(t))$ для построенных наблюдателей четвертого и пятого порядка, где $P_\varepsilon(t) = \mathbb{E}[\varepsilon(t)\varepsilon^\top(t)]$ — ковариационная матрица ошибки $\varepsilon(t)$, удовлетворяющая дифференциальному матричному уравнению Ляпунова

$$\dot{P}_\varepsilon(t) = NP_\varepsilon(t) + P_\varepsilon(t)N^\top + TQT^\top + MRM^\top, \quad P_\varepsilon(0) = TP_0T^\top; \quad (2.31)$$

так и $J(t) = \text{tr}(F^\top F P_x(t))$ для построенного полноразмерного установившегося фильтра Калмана–Бьюси, где $P_x(t) = \mathbb{E}[\hat{x}(t)\hat{x}^\top(t)]$ — ковариационная матрица ошибки $\hat{x}(t) = x(t) - \tilde{x}(t)$, удовлетворяющая дифференциальному матричному уравнению Ляпунова

$$\dot{P}_x(t) = AP_x(t) + P_x(t)A^\top - K_\infty RK_\infty^\top + Q, \quad P_x(0) = P_0.$$

Черной линией показана динамика аналитического значения среднеквадратичной ошибки как $J(t) = \text{tr}(P^\top P P_\varepsilon(t))$ для построенных наблюдателей второго и третьего порядка, где $P_\varepsilon(t) = \mathbb{E}[\varepsilon(t)\varepsilon^\top(t)]$ — ковариационная матрица ошибки $\varepsilon(t)$, удовлетворяющая уравнению (2.31), так и $J(t) = -57.6e^{-10t} + 1685.2$ для построенного наблюдателя первого порядка, полученная как решение дифференциального уравнения

$$\dot{J}(t) = 2\lambda J(t) + g^2 R + FQF^\top, \quad J(0) = FP_0F^\top.$$

Для иллюстрации влияния дискретизации на оптимальность наблюдателя на рисунке 2.2 зеленой линией показана динамика аналитического значения среднеквадратичной ошибки как $J[i\tau] = \text{tr}(P^\top P P_\varepsilon[i\tau])$ для дискретной аппроксимации построенных наблюдателей четвертого и пятого порядка, где

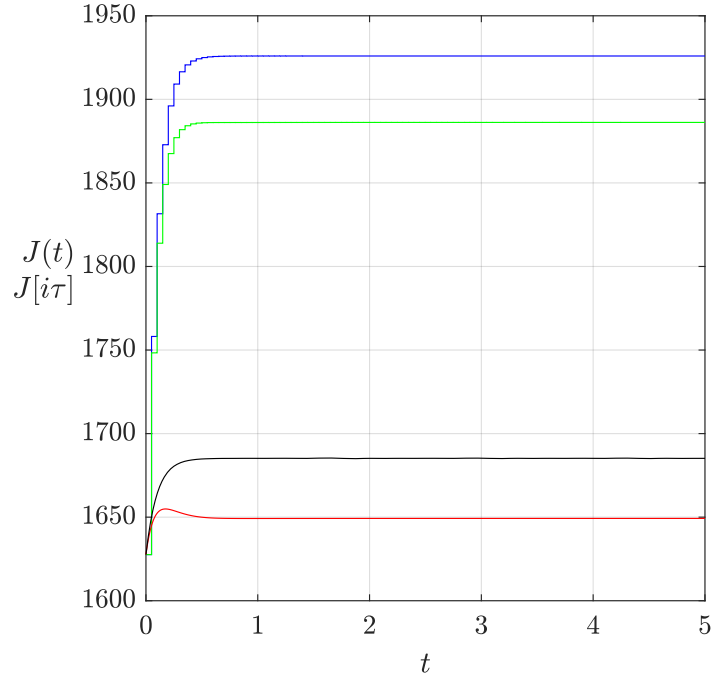


Рисунок 2.2. Динамика изменения среднеквадратичных ошибок: $J(t)$ — черная (для наблюдателей: (2.2) порядка $k = 1$, (1.3) порядка $k = 2, k = 3$) и красная (для наблюдателей (1.3) порядка $k = 4, k = 5$; фильтра (2.27) порядка $k = 4$) линии, $J[i\tau]$ — синяя (для наблюдателей: (2.28) порядка $k = 1$, (2.29) порядка $k = 2, k = 3$) и зеленая (для наблюдателей (2.29) порядка $k = 4, k = 5$; полноразмерного фильтра (2.30)) линии в примере 2.1.

$P_\varepsilon[i\tau] = \mathbb{E}[\varepsilon[i\tau]\varepsilon^\top[i\tau]]$ — ковариационная матрица ошибки $\varepsilon[i\tau]$, удовлетворяющая разностному матричному уравнению Ляпунова

$$\begin{aligned} P_\varepsilon[(i+1)\tau] &= (I_k + N\tau)P_\varepsilon[i\tau](I_k + N\tau)^\top + TQ\tau T^\top + MR\tau M^\top, \\ P_\varepsilon[0] &= TP_0T^\top; \end{aligned} \quad (2.32)$$

так и $J[i\tau] = \text{tr}(F^\top F P_x[i\tau])$, для дискретной аппроксимации построенного установившегося полноразмерного фильтра Калмана–Бьюси, где

$P_x[i\tau] = \mathbb{E}[\hat{x}[i\tau]\hat{x}^\top[i\tau]]$ — ковариационная матрица ошибки $\hat{x}[i\tau] = x[i\tau] - \tilde{x}[i\tau]$, удовлетворяющая разностному матричному уравнению

$$\begin{aligned} P_x[(i+1)\tau] &= (I_4 + (A - K_\infty C)\tau)P_x[i\tau](I_4 + (A - K_\infty C)\tau)^\top + Q\tau + K_\infty R\tau K_\infty^\top, \\ P_x[0] &= P_0. \end{aligned}$$

Синей линией показана динамика аналитического значения среднеквадратичной ошибки как $J[i\tau] = \text{tr}(P^\top P P_\varepsilon[i\tau])$ для построенных наблюдателей второго

и третьего порядка где $P_\varepsilon[i\tau] = \mathbb{E}[\varepsilon[i\tau]\varepsilon^\top[i\tau]]$ — ковариационная матрица ошибки $\varepsilon[i\tau]$, удовлетворяющая уравнению (2.32), так и $J\left[\frac{i}{20}\right] = -\frac{10442}{35}\left(\frac{9}{16}\right)^i + \frac{67408}{35}$ для построенного наблюдателя первого порядка, полученная как решение разностного уравнения

$$J[(i+1)\tau] = (1 + \lambda\tau)^2 J[i\tau] + g^2 R\tau + FQ\tau F^\top, \quad J[0] = FP_0F^\top.$$

Числовые значения, характеризующие динамику аналитического значения среднеквадратичной ошибки

$$i_m = \min_{i_*} \{i_* : |J[i\tau] - J[\infty]| \leq \Delta_1 J[\infty], \Delta_1 = 0.01, i \geq i_*\};$$

$$\eta = \frac{\max_{i \geq 0} J[i\tau] - J[\infty]}{J[\infty]} 100\%; \quad J[\infty] = \lim_{i \rightarrow \infty} \mathbb{E}[e^2[i\tau]];$$

для построенных дискретных аппроксимаций наблюдателей с первого по пятый порядок, включая наблюдатели в канонической форме наблюдаемости (ДКФН), полноразмерный установившийся дискретный стационарный фильтр Калмана–Бьюси (ДСФКБ) и наблюдатель, построенный с помощью метода скалярных наблюдателей (ДМСН), а также полноразмерные установившийся стационарный ([70, гл. 5]; ДСФК), классический нестационарный ([33]; ДФК), нелинейный расширенный ([70, гл. 13]; РФК) и нелинейные «ансцентные» (от английского слова «unscented», которое переводится как «без запаха»; [92; 93]; АФК1 с параметрами $\alpha = 10^{-3}$, $\beta = 2$, $\kappa = 0$; АФК2 с параметрами $\alpha = 10^{-6}$, $\beta = 2$, $\kappa = 0$) дискретные фильтры Калмана, приведены в таблице 2.1.

Числовые значения, характеризующие динамику аналитического значения среднеквадратичной ошибки

$$t_m = \min_{t_*} \{t_* : |J(t) - J_\infty| \leq \Delta_2 J_\infty, \Delta_2 = 0.001, t \geq t_*\};$$

$$\eta = \frac{\max_{t \geq 0} J(t) - J_\infty}{J_\infty} 100\%; \quad J_\infty;$$

Таблица 2.1. Динамические характеристики дискретных наблюдателей различных порядков с точностью 10^{-4} в примере 2.1

k (вид наблюдателя)	i_m	$\eta, \%$	$J[\infty]$
1 (ДКФН); 2 (ДКФН); 3 (ДКФН)	5	0	1925.9429
4 (ДКФН, ДМСН, ДСФКБ); 5 (ДКФН)	4	0	1886.2099
4 (ДСФК)	4	0	1886.1961
4 (ДФК, РФК, АФК1)	5	0	1886.1961
4 (АФК2)	5	0.0021	1886.1961

для рассмотренных непрерывных наблюдателей с первого по пятый порядок, включая наблюдатели в канонической форме наблюдаемости (КФН), полно-размерный установившийся стационарный фильтр Калмана–Бьюси (СФКБ) и наблюдатель, синтезированный с помощью метода скалярных наблюдателей (МСН), а также классический нестационарный фильтр Калмана–Бьюси ([34]; ФКБ) четвертого порядка, приведены в таблице 2.2.

Таблица 2.2. Динамические характеристики непрерывных наблюдателей различных порядков с точностью 10^{-4} в примере 2.1

k (вид наблюдателя)	t_m	$\eta, \%$	J_∞
1 (КФН); 2 (КФН); 3 (КФН)	0.3532	0	1685.2
4 (КФН, МСН, СФКБ); 5 (КФН)	0.4088	0.343	1649.2521
4 (ФКБ)	0.4013	0.2903	1649.2521

Таким образом, критерий оптимальности (1.5) для наблюдателей четвертого и пятого порядка совпадает и меньше, чем для наблюдателей первого, второго и третьего порядков. В свою очередь, целевая функция непрерывных наблюдателей первого, второго и третьего сходится быстрее и строго монотонно

к своему установившемуся значению, по сравнению с целевой функцией непрерывных наблюдателей четвертого и пятого порядка.

Пример 2.2. Рассмотрим задачу 2 для дискретной системы четвертого ($n = 4$) порядка (1.6), (1.7) и скалярного линейного функционала (1.9), в которых

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & -1/10 \\ 0 & 1 & 0 & -2/3 \\ 0 & 0 & 1 & -43/30 \end{pmatrix}, \quad \bar{x}_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad C = (0 \ 0 \ 0 \ 1), \quad Q = I_4, \quad P_0 = 0.1I_4, \\ F = \begin{bmatrix} 1 & -1/2 & 1/4 & -1/8 \end{bmatrix}, \quad R = 1, \quad B = 0.$$

Оптимальный наблюдатель первого порядка ($k = 1$), формирующий несмещенную оценку скалярного линейного функционала (1.9) имеет вид (2.3), в котором $\lambda = -1/2$, $g = -\alpha(-1/2) = 0$. Оптимальные наблюдатели второго ($k = 2$) порядка имеют вид (1.8), в котором матрицы M , T берутся из соотношения (2.13) с $\lambda = -1/2$, а матрицы P , N — из канонического представления (2.8), где коэффициенты l_1 , l_2 удовлетворяют равенству $\beta(-1/2) = 0$. Передаточные функции указанных наблюдателей ($k = 1$, $k = 2$), согласно теореме 2.2, имеют вид $W_{\tilde{\sigma}y}(z) = 0$, а передаточные функции относительно входов w_i , v_i и выхода e_i имеют вид из первого утверждения теоремы 2.4 с $\lambda = -1/2$. Установившееся среднее значение квадрата ошибки наблюдения вычисляется по формуле для вычисления интегралов (1.39):

$$J_\infty = \left(1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{16} + \frac{1}{64}\right) \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \left| \frac{2}{2e^{j\theta} + 1} \right|^2 d\theta = \frac{85}{48} \approx 1.7708.$$

Следовательно существует множество оптимальных наблюдателей второго порядка, являющихся решением задачи 2, у которых коэффициенты характеристического полинома находятся на пересечении линейного многообразия решений уравнения $\beta(-1/2) = 0$ с областью дискретной устойчивости матрицы N . Наблюдатели третьего ($k = 3$), четвертого ($k = 4$) и пятого ($k = 5$) порядка также имеют вид (1.8), в котором матрицы M , T берутся с $\lambda = -1/2$: для

$k = 3$ из соотношений (2.14); для $k = 4$ из соотношений (2.15); для $k = 5$ из соотношений (2.16). Матрицы P , N имеют канонический вид (2.8). Численные значения оставшихся неизвестных переменных, которые получены с помощью метода последовательного квадратичного программирования [91, гл. 18], имеют вид для $k = 3$:

$$l_1 \approx 0.0149, \quad l_2 \approx 0.116, \quad l_3 \approx 0.3268;$$

для $k = 4$:

$$l_1 \approx -0.0046, \quad l_2 \approx -0.0206, \quad l_3 \approx 0.016, \quad l_4 \approx 0.0209, \quad C_1 \approx -0.0864;$$

для $k = 5$:

$$l_1 \approx 0.0001, \quad l_2 \approx -0.0043, \quad l_3 \approx -0.0214, \quad l_4 \approx 0.0142,$$

$$l_5 \approx -0.0007, \quad C_1 \approx -0.0864, \quad C_2 \approx -0.0089.$$

Полученное значение критерия оптимальности во всех случаях равно:

$$J_\infty \approx 1.7042.$$

Одинаковые значения критерия оптимальности для построенных наблюдателей третьего, четвертого и пятого порядка объясняются общими передаточными функциями $W_{\tilde{\sigma}_y}(z)$, $W_{ew}(z)$ и $W_{ev}(z)$, которые получаются после нахождения оптимальных значений параметров и сокращения общих нулей и полюсов. При этом минимальный порядок передаточной функции $W_{\tilde{\sigma}_y}(z)$, имеющей после сокращения полюсы $\lambda_1 \approx -0.1671$, $\lambda_2 \approx -0.0798 + 0.288j$, $\lambda_3 \approx -0.0798 - 0.288j$, равен трем. Таким образом, минимальной реализацией (то есть системой наблюдаемой и управляемой одновременно), формирующей несмещенную оценку скалярного линейного функционала σ_i , для наблюдателей четвертого и пятого порядка является наблюдатель третьего порядка.

Матрицы наблюдателя (1.8) третьего порядка, построенного методом ска-

лярных наблюдателей [9, гл. 4], имеют вид

$$N = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{pmatrix}, T = \begin{pmatrix} 1 & \lambda_1 & \lambda_1^2 & \lambda_1^3 \\ 1 & \lambda_2 & \lambda_2^2 & \lambda_2^3 \\ 1 & \lambda_3 & \lambda_3^2 & \lambda_3^3 \end{pmatrix}, M = \begin{pmatrix} -\alpha(\lambda_1) \\ -\alpha(\lambda_2) \\ -\alpha(\lambda_3) \end{pmatrix},$$

$$P = \begin{pmatrix} \frac{(\lambda_2 + \frac{1}{2})(\lambda_3 + \frac{1}{2})}{(\lambda_2 - \lambda_1)(\lambda_3 - \lambda_1)} & \frac{(\lambda_1 + \frac{1}{2})(\lambda_3 + \frac{1}{2})}{(\lambda_1 - \lambda_2)(\lambda_3 - \lambda_2)} & \frac{(\lambda_1 + \frac{1}{2})(\lambda_2 + \frac{1}{2})}{(\lambda_1 - \lambda_3)(\lambda_2 - \lambda_3)} \end{pmatrix}, V = -(\lambda_1 + \frac{1}{2})(\lambda_2 + \frac{1}{2})(\lambda_3 + \frac{1}{2});$$

где $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ — различные неизвестные вещественные собственные значения наблюдателя. Вычисляя значение критерия оптимальности согласно методу из раздела 1.3 главы 1 и применяя численный метод последовательного квадратичного программирования [91, гл. 18] к минимизации целевой функции с ограничением дискретной устойчивости на параметры $|\lambda_j| < 1, j = \overline{1, 3}$, получаем следующие значения оптимальных параметров и критерия оптимальности:

$$\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 \approx -0.0599, J_\infty \approx 1.7053.$$

Полученные оптимальные значение параметров совпадают между собой, что противоречит исходному предположению метода скалярных наблюдателей о различности спектра функционального наблюдателя. Добавив ограничения различности параметров $|\lambda_1 - \lambda_2| > 0.01, |\lambda_2 - \lambda_3| > 0.01, |\lambda_1 - \lambda_3| > 0.01$, получим следующие значения оптимальных параметров и критерия оптимальности:

$$\lambda_1 \approx -0.0699, \lambda_2 \approx -0.0599, \lambda_3 \approx -0.0499, J_\infty \approx 1.7053.$$

Установившийся полноразмерный фильтр Калмана [70, гл. 5]:

$$\begin{aligned} \tilde{x}_{i+1} &= A\tilde{x}_i + AK_\infty(y_i - C\tilde{x}_i), \quad \tilde{x}_0 = \bar{x}_0, \\ \tilde{\sigma}_i &= F\tilde{x}_i; \end{aligned} \quad i = 0, 1, 2, \dots;$$

в котором коэффициент усиления равен:

$$K_\infty = P_\infty C^\top (CP_\infty C^\top + R)^{-1} \approx \begin{pmatrix} 0 \\ 0.0165 \\ 0.1129 \\ 0.8508 \end{pmatrix}, P_\infty \approx \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2.0085 & 0.0551 & 0.1107 \\ 0 & 0.0551 & 3.3628 & 0.7566 \\ 0 & 0.1107 & 0.7566 & 5.7016 \end{pmatrix},$$

где $P_\infty = \lim_{i \rightarrow \infty} \mathbb{E}[(x_i - \tilde{x}_i)(x_i - \tilde{x}_i)^\top]$ — установившееся значение ковариационной матрицы ошибки, которое является решением матричного алгебраического уравнения Риккати:

$$P_\infty = A [P_\infty - P_\infty C^\top (C P_\infty C^\top + R)^{-1} C P_\infty] A^\top + Q.$$

Так как в указанном фильтре Калмана отсутствует прямая связь в отличие от построенных наблюдателей третьего, четвертого и пятого порядка, то критерий оптимальности в этом случае отличается и равен:

$$J_\infty = \text{tr}(P_\infty F^\top F) \approx 1.7542.$$

На рисунке 2.3 черными точками показана динамика линейного функционала σ_i ; синими квадратами показана оценка $\tilde{\sigma}_i$ линейного функционала, формируемая как построенным наблюдателем первого порядка, так и построенным наблюдателем второго порядка.

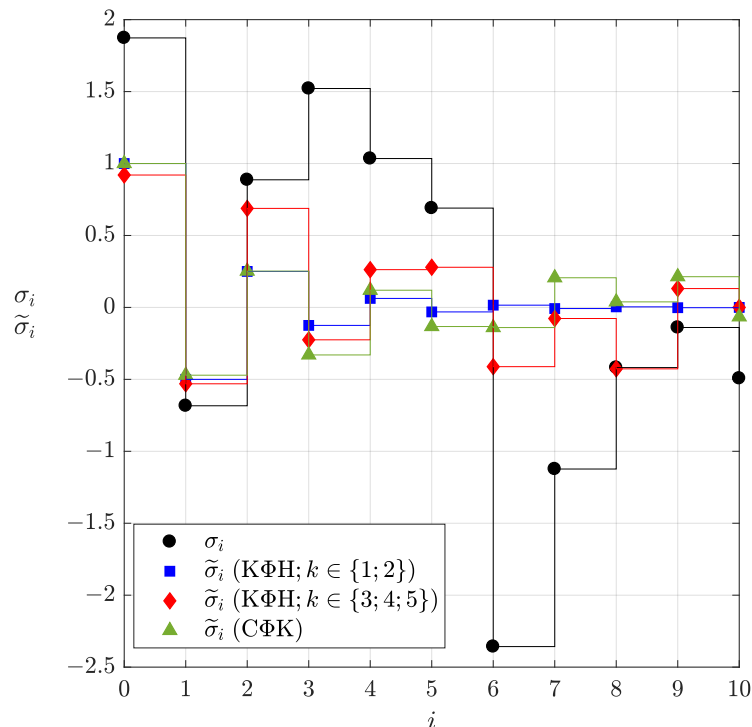


Рисунок 2.3. Динамика изменения величин σ_i , $\tilde{\sigma}_i$ в примере 2.2.

Красными ромбами показана оценка $\tilde{\sigma}_i$ линейного функционала, формируемая построенными дискретными наблюдателями третьего, четвертого и пятого по-

рядка в канонической форме наблюдаемости (КФН); зелеными треугольниками показана оценка $\tilde{\sigma}_i$ линейного функционала, формируемая построенным классическим фильтром Калмана ([33]; ФК).

На рисунке 2.4 синими точками показана динамика аналитического значения среднеквадратичной ошибки $J_i = \text{tr}(PP_{\varepsilon,i}P^\top + VRV^\top)$ для построенных наблюдателей третьего, четвертого и пятого порядка в канонической форме наблюдаемости (КФН), где $P_{\varepsilon,i} = \mathbb{E}[\varepsilon_i\varepsilon_i^\top]$ — ковариационная матрица ошибки ε_i , удовлетворяющая разностному матричному уравнению Ляпунова

$$P_{\varepsilon,i+1} = NP_{\varepsilon,i}N^\top + TQT^\top + MRM^\top, \quad P_{\varepsilon,0} = TP_0T^\top. \quad (2.33)$$

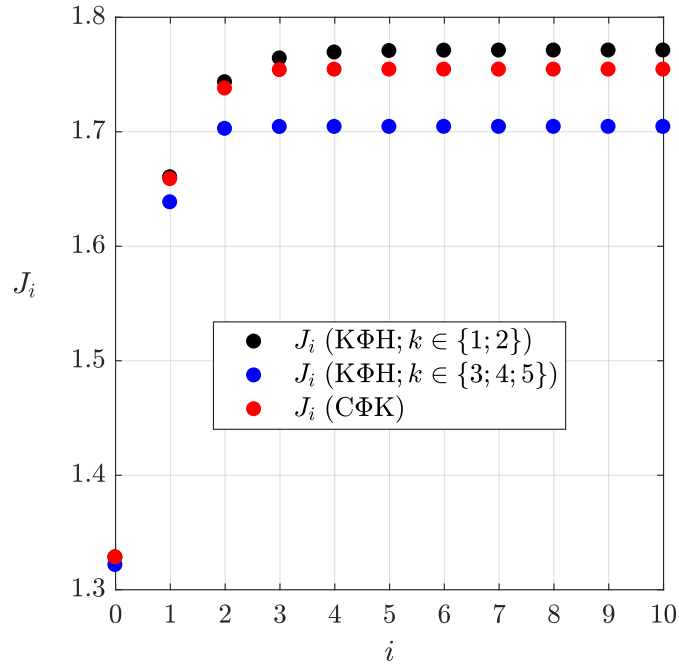


Рисунок 2.4. Динамика изменения среднеквадратичных ошибок J_i в примере 2.2.

Красными точками на рисунке 2.4 показана динамика аналитического значения среднеквадратичной ошибки $J_i = \text{tr}(F^\top FP_{x,i})$ для построенного полноразмерного установившегося стационарного фильтра Калмана (СФК), где $P_{x,i} = \mathbb{E}[\hat{x}_i\hat{x}_i^\top]$ — ковариационная матрица ошибки $\hat{x}_i = x_i - \tilde{x}_i$, удовлетворяющая разностному матричному уравнению Ляпунова

$$P_{x,i+1} = A[(I_4 - K_\infty C)P_{x,i}(I_4 - K_\infty C)^\top + Q + K_\infty RK_\infty^\top]A^\top, \quad P_{x,0} = P_0.$$

Черными точками на рисунке 2.4 показана динамика аналитического значения среднеквадратичной ошибки как $J_i = \text{tr}(PP_{\varepsilon,i}P^\top + VRV^\top)$ для построенного оптимального наблюдателя второго порядка в канонической форме наблюдаемости (КФН), где $P_{\varepsilon,i} = \mathbb{E}[\varepsilon_i\varepsilon_i^\top]$ — ковариационная матрица ошибки ε_i , удовлетворяющая уравнению (2.33), так и $J_i = \frac{-85}{192} \left(\frac{1}{4}\right)^i + \frac{85}{48}$ для построенного наблюдателя первого порядка, полученная как решение разностного уравнения

$$J_{i+1} = \lambda^2 J_{i+1} + g^2 R + FQF^\top, \quad J_0 = FP_0F^\top.$$

Числовые значения, характеризующие динамику аналитического значения среднеквадратичной ошибки

$$i_m = \min_{i_*} \{i_* : |J_i - J_\infty| \leq \Delta_1 J_\infty, \Delta_1 = 0.01, i \geq i_*\};$$

$$\eta = \frac{\max_{i \geq 0} J_i - J_\infty}{J_\infty} 100\%; \quad J_\infty = \lim_{i \rightarrow \infty} \mathbb{E}[e_i^2];$$

для построенных дискретных наблюдателей с первого по пятый порядок, включая наблюдатели в канонической форме наблюдаемости (КФН), полноразмерный установившийся стационарный фильтр Калмана (СФК), наблюдатель, синтезированный с помощью метода скалярных наблюдателей (МСН), а также полноразмерные классический нестационарный (ФК), нелинейный расширенный (РФК) и нелинейный «ансцентный» (АФК с параметрами $\alpha = 10^{-3}$, $\beta = 2$, $\kappa = 0$) дискретные фильтры Калмана, приведены в таблице 2.3.

Таким образом, критерий оптимальности (1.10) для наблюдателей третьего, четвертого и пятого порядка в канонической форме наблюдаемости оказался меньше, чем для наблюдателей первого, второго порядков в канонической форме наблюдаемости, для наблюдателя третьего порядка, построенного по методу скалярных наблюдателей, и для полноразмерных фильтров Калмана.

Таблица 2.3. Динамические характеристики дискретных наблюдателей различных порядков с точностью 10^{-4} в примере 2.2

k (вид наблюдателя)	i_m	$\eta, \%$	J_∞
1 (КФН); 2 (КФН)	3	0	1.7708
3 (КФН); 4 (КФН); 5 (КФН)	2	0	1.7042
3 (МСН)	2	0	1.7053
4 (СФК, ФК, РФК, АФК)	2	0	1.7542

2.4. Выводы ко второй главе

Во второй главе построены оптимальные наблюдатели различных динамических порядков, начиная с первого порядка и до одного из представителей повышенного порядка, как для непрерывных, так и для дискретных линейных динамических систем со скалярным выходом и аддитивными шумами.

Используя предположение о том, что оцениваемый скалярный линейный функционал имеет специальный вид, позволяющий построить наблюдатель первого порядка, была представлена структура оптимальных наблюдателей в канонической форме наблюдаемости.

Сформулированы и доказаны теоремы о передаточных функциях построенных наблюдателей и систем в отклонениях как для непрерывных, так и для дискретных систем.

Из доказанных теорем о передаточных функциях построенных оптимальных наблюдателей пониженного порядка и систем в отклонениях и предположения о существовании оптимального наблюдателя первого порядка следует вывод о постоянстве критерия оптимальности:

- для одновременно существующих непрерывных наблюдателей, заданных системой дифференциальных уравнений с выходом, порядка k , начиная с первого порядка ($k = 1$) и до порядка $k = n - 1$, критерий оптимальности

имеет равное значение;

- для одновременно существующих дискретных наблюдателей, заданных системой разностных уравнений с выходом, порядка k , начиная с первого порядка ($k = 1$) и до порядка $k = n - 2$, критерий оптимальности имеет равное значение;

при этом задача оптимизации при построении наблюдателя пониженного порядка не возникает.

Для сравнения построенных наблюдателей по среднеквадратической ошибке наблюдения в установившемся режиме и моделирования ее динамики в конце проведены вычислительные эксперименты.

Глава 3

Оптимальные наблюдатели второго и третьего порядков

В третьей главе строятся оптимальные наблюдатели второго и третьего порядков, предполагая, что наблюдателя первого порядка не существует, как для непрерывных, так и для дискретных стохастических систем со скалярным выходом. Представлена структура оптимальных наблюдателей второго и третьего порядков в каноническом базисе. Сформулированы и доказаны теоремы о необходимых и достаточных условиях существования оптимальных наблюдателей второго и третьего порядков и о передаточных функциях систем в отклонениях. Для сравнения между собой наблюдателей второго и третьего порядков по среднеквадратической ошибке наблюдения в установившемся режиме проведены вычислительные эксперименты, в которых применяется метод интегральных квадратичных показателей качества, представленный в первой главе.

Основные результаты третьей главы опубликованы в работах [15; 18; 29].

3.1. Условия существования наблюдателей второго и третьего порядков

В данном разделе рассматриваются задача 1 и задача 2, в которых исходные системы (1.1) и (1.6), порядок которых выше третьего (то есть размерность фазового вектора $n > 3$), имеют скалярный выход, то есть размерность выхода $l = 1$, и заданы в канонической форме наблюдаемости, а оцениваемый линейный функционал является скалярным (размерность линейного функционала $p = 1$). Сформулированы и доказаны необходимые и достаточные условия существования наблюдателей второго и третьего порядков в предположении, что наблюдателя первого порядка не существует.

Используя предположение о наблюдаемости исходных систем (1.1) и (1.6) и теорему о переходе к каноническому виду с помощью невырожденного преобразования координат [9, с. 25], считаем, что пара $\{C, A\}$ в исходных системах (1.1) и (1.6) задана во второй канонической форме наблюдаемости (2.1). Кроме того, оптимальные наблюдатели (1.3) и (1.8) второго и третьего порядков, так же как и в главе 2, ищутся в канонической форме наблюдаемости (2.8).

Не ограничивая общности рассуждений, далее считаем, что матрица F скалярных линейных функционалов (1.4) или (1.9) в каноническом базисе имеет вид:

$$F = \begin{pmatrix} f_1 & \dots & f_n \end{pmatrix}.$$

Известно [9, с. 75], что для того, чтобы скалярный линейный функционал (1.4) от вектора состояния непрерывной системы (1.1), порядок которой выше четвертого, мог быть восстановлен наблюдателем (1.3) второго порядка ($k = 2, n > 4$) необходимо и достаточно выполнение условий следующего вида:

$$l_1 = \frac{f_2 f_4 - f_3^2}{f_1 f_3 - f_2^2} > 0; \quad l_2 = \frac{f_2 f_3 - f_4 f_1}{f_1 f_3 - f_2^2} > 0; \quad f_1 f_3 - f_2^2 \neq 0; \quad (3.1)$$

$$f_i = -f_{i-2} \frac{f_2 f_4 - f_3^2}{f_1 f_3 - f_2^2} - f_{i-1} \frac{f_2 f_3 - f_4 f_1}{f_1 f_3 - f_2^2}, \quad i = 5, \dots, n, \quad (3.2)$$

где условие $f_1 f_3 - f_2^2 \neq 0$ означает, что наблюдатель (2.2) первого ($k = 1$) порядка не может сформировать несмещенную оценку линейного функционала (1.4).

Рассмотрим вопрос, когда линейные наблюдатели второго ($k = 2$) и третьего ($k = 3$) порядков могут для непрерывной системы (1.1) четвертого ($n = 4$) порядка сформировать несмещенную оценку линейного функционала (1.4) от вектора состояния, в котором элементы матрицы F удовлетворяют ограничениям (3.1).

Из необходимых и достаточных условий несмещенности (2.6) и канонических представлений исходной системы (2.1) и искомого оптимального наблюдателя (2.8) следует, что матрицы T и M наблюдателя второго порядка равны:

$$T = \begin{pmatrix} f_1 & f_2 & f_3 & f_4 \\ f_2 & f_3 & f_4 & t_{24} \end{pmatrix}, \quad M = \begin{pmatrix} -\alpha_1 f_1 - \alpha_2 f_2 - \alpha_3 f_3 - \alpha_4 f_4 - t_{24} \\ -\alpha_1 f_2 - \alpha_2 f_3 - (\alpha_3 - l_1) f_4 - (\alpha_4 - l_2) t_{24} \end{pmatrix},$$

$$t_{24} = -l_1 f_3 - l_2 f_4, \quad (3.3)$$

где коэффициенты l_1, l_2 характеристического полинома наблюдателя удовлетворяют условиям (3.1).

Из условий (2.6) и канонических представлений (2.1), (2.8) следует, что для непрерывных наблюдателей третьего порядка:

$$T = \begin{pmatrix} f_1 & f_2 & f_3 & f_4 \\ f_2 & f_3 & f_4 & t_{24} \\ f_3 & f_4 & t_{24} & t_{34} \end{pmatrix},$$

$$M = \begin{pmatrix} -\alpha_1 f_1 - \alpha_2 f_2 - \alpha_3 f_3 - \alpha_4 f_4 - t_{24} \\ -\alpha_1 f_2 - \alpha_2 f_3 - \alpha_3 f_4 - \alpha_4 t_{24} - t_{34} \\ -\alpha_1 f_3 - (\alpha_2 - l_1) f_4 - (\alpha_3 - l_2) t_{24} - (\alpha_4 - l_3) t_{34} \end{pmatrix}, \quad (3.4)$$

$$\begin{pmatrix} f_1 & f_2 & f_3 \\ f_2 & f_3 & f_4 \\ f_3 & f_4 & t_{24} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} l_1 \\ l_2 \\ l_3 \end{pmatrix} = - \begin{pmatrix} f_4 \\ t_{24} \\ t_{34} \end{pmatrix}, \quad (3.5)$$

где t_{24}, t_{34} — неизвестные параметры. При этом условие

$$t_{24} \neq \frac{f_3(f_3^2 - f_2 f_4) + f_4(f_1 f_4 - f_2 f_3)}{f_1 f_3 - f_2^2} \quad (3.6)$$

является необходимым и достаточным условием существования единственного решения линейной системы (3.5), которое в этом случае имеет вид:

$$l_1 = \frac{f_4(f_4^2 - f_3 t_{24}) + t_{24}(f_2 t_{24} - f_3 f_4) + t_{34}(f_3^2 - f_2 f_4)}{t_{24}(f_1 f_3 - f_2^2) - f_3(f_3^2 - f_2 f_4) - f_4(f_1 f_4 - f_2 f_3)},$$

$$l_2 = \frac{f_4(f_2 t_{24} - f_3 f_4) + t_{24}(f_3^2 - f_1 t_{24}) + t_{34}(f_1 f_4 - f_2 f_3)}{t_{24}(f_1 f_3 - f_2^2) - f_3(f_3^2 - f_2 f_4) - f_4(f_1 f_4 - f_2 f_3)},$$

$$l_3 = \frac{f_4(f_3^2 - f_2 f_4) + t_{24}(f_1 f_4 - f_2 f_3) + t_{34}(f_2^2 - f_1 f_3)}{t_{24}(f_1 f_3 - f_2^2) - f_3(f_3^2 - f_2 f_4) - f_4(f_1 f_4 - f_2 f_3)}, \quad (3.7)$$

где параметры t_{24}, t_{34} выбираются так, чтобы характеристический полином $\beta(s)$ искомого наблюдателя был устойчив, то есть:

$$l_1 > 0, \quad l_2 > 0, \quad l_3 > 0, \quad l_2 l_3 - l_1 > 0. \quad (3.8)$$

Если условие (3.6) нарушено, то решение линейной системы (3.5) имеет вид:

$$l_1 = \frac{(f_2 f_4 - f_3^2)(f_1 f_4 - f_2 f_3) + C_1(f_2 f_4 - f_3^2)(f_1 f_3 - f_2^2)}{(f_1 f_3 - f_2^2)^2}, \quad l_3 = C_1,$$

$$l_2 = \frac{3f_1 f_2 f_3 f_4 - f_1^2 f_4^2 - f_1 f_3^3 - f_2^3 f_4 + C_1(f_2 f_3 - f_1 f_4)(f_1 f_3 - f_2^2)}{(f_1 f_3 - f_2^2)^2}, \quad (3.9)$$

где C_1 — свободная неизвестная, которая выбирается так, чтобы выполнялись условия устойчивости (3.8). По-другому это означает, что существует множество вырожденных (здесь и далее такие наблюдатели будем называть *вырожденными*) наблюдателей третьего порядка, у которых коэффициенты характеристического полинома находятся на пересечении области гурвицевости матрицы N и линейного многообразия решений системы уравнений

$$\beta(s_1) = 0, \quad \beta(s_2) = 0;$$

где s_1, s_2 — корни характеристического полинома $\beta(s)$, которые имеют вид:

$$s_{1,2} = \frac{f_1 f_4 - f_2 f_3 \pm \sqrt{(f_2 f_3 - f_1 f_4)^2 - 4(f_2 f_4 - f_3^2)(f_1 f_3 - f_2^2)}}{2(f_1 f_3 - f_2^2)}.$$

Для систем (1.1) порядка выше четвертого ($n > 4$) существование единственного оптимального наблюдателя третьего порядка, формирующего несмещенную оценку линейного функционала (1.4) от вектора состояния и удовлетворяющего условиям (2.6), исключает возможность существования оптимального наблюдателя второго порядка, так как в этом случае нарушается условие (3.2).

Приведенные рассуждения можно сформулировать в виде следующего утверждения.

Теорема 3.1. Для систем (1.1), (2.1) со стохастическими возмущениями, порядок которых выше третьего ($n > 3$), и наблюдателей (1.3), (2.8) второго и третьего порядков, формирующих несмещенную оценку линейного функционала (1.4) от вектора состояния с матрицей $F = \begin{pmatrix} f_1 & \dots & f_n \end{pmatrix}$, верно, что

1) необходимые и достаточные условия существования и единственности наблюдателя второго порядка и матрицы T и M имеют вид

$$T = \begin{pmatrix} f_1 & f_2 & \dots & f_{n-1} & f_n \\ f_2 & f_3 & \dots & f_n & t_{2n} \end{pmatrix}, \quad M = \begin{pmatrix} -\sum_{i=1}^n \alpha_i f_i - t_{2n} \\ -\sum_{i=1}^{n-1} \alpha_i f_{i+1} - (\alpha_n - l_2)t_{2n} + l_1 f_n \end{pmatrix},$$

$$t_{2n} = -l_1 f_{n-1} - l_2 f_n, \quad f_1 f_3 - f_2^2 \neq 0,$$

$$l_1 = \frac{f_2 f_4 - f_3^2}{f_1 f_3 - f_2^2} > 0, \quad l_2 = \frac{f_2 f_3 - f_1 f_4}{f_1 f_3 - f_2^2} > 0, \quad (3.10)$$

$$f_i = -l_1 f_{i-2} - l_2 f_{i-1}, \quad i = 5, \dots, n, \quad \text{для } n > 4,$$

где условие единственности $f_1 f_3 - f_2^2 \neq 0$ означает, что не существует наблюдателя (2.2) первого порядка, формирующего несмещенную оценку линейного функционала (1.4);

2) необходимые и достаточные условия существования и единственности наблюдателя третьего порядка и матрицы T и M имеют вид

$$T = \begin{pmatrix} f_1 & f_2 & \dots & f_{n-2} & f_{n-1} & f_n \\ f_2 & f_3 & \dots & f_{n-1} & f_n & t_{2n} \\ f_3 & f_4 & \dots & f_n & t_{2n} & t_{3n} \end{pmatrix},$$

$$M = \begin{pmatrix} -\sum_{i=1}^n \alpha_i f_i - t_{2n} \\ -\sum_{i=1}^{n-1} \alpha_i f_{i+1} - \alpha_n t_{2n} - t_{3n} \\ -\sum_{i=1}^{n-2} \alpha_i f_{i+2} - (\alpha_{n-1} - l_2)t_{2n} - (\alpha_n - l_3)t_{3n} + l_1 f_n \end{pmatrix},$$

$$t_{2n} = -l_1 f_{n-2} - l_2 f_{n-1} - l_3 f_n, \quad t_{3n} = -l_1 f_{n-1} - l_2 f_n - l_3 t_{2n},$$

$$a \neq \frac{f_3(f_3^2 - f_2f_4) + f_4(f_1f_4 - f_2f_3)}{f_1f_3 - f_2^2}, \quad (3.11)$$

$$\begin{aligned} l_1 &= \frac{f_4(f_4^2 - f_3a) + a(f_2a - f_3f_4) + b(f_3^2 - f_2f_4)}{a(f_1f_3 - f_2^2) - f_3(f_3^2 - f_2f_4) - f_4(f_1f_4 - f_2f_3)}, \\ l_2 &= \frac{f_4(f_2a - f_3f_4) + a(f_3^2 - f_1a) + b(f_1f_4 - f_2f_3)}{a(f_1f_3 - f_2^2) - f_3(f_3^2 - f_2f_4) - f_4(f_1f_4 - f_2f_3)}, \\ l_3 &= \frac{f_4(f_3^2 - f_2f_4) + a(f_1f_4 - f_2f_3) + b(f_2^2 - f_1f_3)}{a(f_1f_3 - f_2^2) - f_3(f_3^2 - f_2f_4) - f_4(f_1f_4 - f_2f_3)}, \end{aligned}$$

$$l_1 > 0, \quad l_2 > 0, \quad l_3 > 0, \quad l_2l_3 - l_1 > 0, \quad (3.12)$$

$$a = \begin{cases} f_5, & \text{если } n > 4, \\ t_{24}, & \text{если } n = 4; \end{cases} \quad b = \begin{cases} f_6, & \text{если } n > 5, \\ t_{25}, & \text{если } n = 5, \\ t_{34}, & \text{если } n = 4; \end{cases}$$

$$f_i = -l_1f_{i-3} - l_2f_{i-2} - l_3f_{i-1}, \quad i = 7, \dots, n, \quad \text{для } n > 6,$$

где условие (3.11) для случая $n > 5$ означает единственность наблюдателя третьего порядка, а для случая $n > 4$ означает, что не существует наблюдателя (1.3) второго порядка, формирующего несмещенную оценку линейного функционала (1.4).

Замечание 3.1. Неравенства в формуле (3.12) являются необходимыми и достаточными условиями устойчивости оптимального наблюдателя (1.3) третьего порядка, полученные с помощью критерия устойчивости Льенара–Шипара [94] для линейных непрерывных систем.

С помощью аналогичных рассуждений, использующих условия несмещенности оценивания (2.7) для дискретных систем и канонические формы исходной системы (2.1) и искомого оптимального наблюдателя (2.8), можно сформулировать следующее утверждение о необходимых и достаточных условиях существования дискретных наблюдателей второго и третьего порядков.

Теорема 3.2. Для систем (1.6), (2.1) со стохастическими возмущениями, порядок которых выше третьего ($n > 3$), и наблюдателей (1.8), (2.8) второго и третьего порядков, формирующих несмещенную оценку линейного функционала (1.9) от вектора состояния с матрицей $F = \begin{pmatrix} f_1 & \dots & f_n \end{pmatrix}$, верно, что

1) необходимые и достаточные условия существования и единственности наблюдателя второго порядка и матрицы T , M и V имеют вид

$$T = \begin{pmatrix} f_1 & f_2 & \dots & f_{n-1} & f_n - V \\ f_2 & f_3 & \dots & f_n - V & t_{2n} \end{pmatrix},$$

$$M = \begin{pmatrix} -\sum_{i=1}^n \alpha_i f_i - t_{2n} + \alpha_n V \\ -\sum_{i=1}^{n-1} \alpha_i f_{i+1} - (\alpha_n - l_2)t_{2n} + l_1(f_n - V) + \alpha_{n-1}V \end{pmatrix},$$

$$V = f_n + l_1 f_{n-2} + l_2 f_{n-1}, \quad t_{2n} = -l_1 f_{n-1} - l_2 (f_n - V), \quad f_1 f_3 - f_2^2 \neq 0,$$

$$l_1 = \frac{f_2 a - f_3^2}{f_1 f_3 - f_2^2}, \quad l_2 = \frac{f_2 f_3 - f_1 a}{f_1 f_3 - f_2^2}, \quad 1 - l_1 > 0, \quad 1 - l_2 + l_1 > 0, \quad 1 + l_1 + l_2 > 0, \quad (3.13)$$

$$a = \begin{cases} f_4, & \text{если } n > 4, \\ f_4 - V, & \text{если } n = 4; \end{cases} \quad f_i = -l_1 f_{i-2} - l_2 f_{i-1}, \quad i = 5, \dots, n-1, \quad \text{для } n > 5,$$

где условие $f_1 f_3 - f_2^2 \neq 0$ означает, что не существует наблюдателя (2.3) первого порядка, формирующего несмещенную оценку линейного функционала (1.9), а для $n > 4$ означает единственность наблюдателя второго порядка;

2) необходимые и достаточные условия существования и единственности на-

блюдателя третьего порядка и матрицы T , M и V имеют вид

$$T = \begin{pmatrix} f_1 & f_2 & \dots & f_{n-2} & f_{n-1} & f_n - V \\ f_2 & f_3 & \dots & f_{n-1} & f_n - V & t_{2n} \\ f_3 & f_4 & \dots & f_n - V & t_{2n} & t_{3n} \end{pmatrix},$$

$$M = \begin{pmatrix} -\sum_{i=1}^n \alpha_i f_i - t_{2n} + \alpha_n V \\ -\sum_{i=1}^{n-1} \alpha_i f_{i+1} - \alpha_n t_{2n} - t_{3n} + \alpha_{n-1} V \\ -\sum_{i=1}^{n-2} \alpha_i f_{i+2} - (\alpha_{n-1} - l_2)t_{2n} - (\alpha_n - l_3)t_{3n} + l_1(f_n - V) + \alpha_{n-2} V \end{pmatrix},$$

$$V = f_n + l_1 f_{n-3} + l_2 f_{n-2} + l_3 f_{n-1},$$

$$t_{2n} = -l_1 f_{n-2} - l_2 f_{n-1} - l_3(f_n - V), \quad t_{3n} = -l_1 f_{n-1} - l_2(f_n - V) - l_3 t_{2n},$$

$$b \neq \frac{f_3(f_3^2 - f_2 a) + a(f_1 a - f_2 f_3)}{f_1 f_3 - f_2^2}, \quad (3.14)$$

$$l_1 = \frac{a(a^2 - f_3 b) + b(f_2 b - f_3 a) + c(f_3^2 - f_2 a)}{b(f_1 f_3 - f_2^2) - f_3(f_3^2 - f_2 a) - a(f_1 a - f_2 f_3)},$$

$$l_2 = \frac{a(f_2 b - f_3 a) + b(f_3^2 - f_1 b) + c(f_1 a - f_2 f_3)}{b(f_1 f_3 - f_2^2) - f_3(f_3^2 - f_2 a) - a(f_1 a - f_2 f_3)},$$

$$l_3 = \frac{a(f_3^2 - f_2 a) + b(f_1 a - f_2 f_3) + c(f_2^2 - f_1 f_3)}{b(f_1 f_3 - f_2^2) - f_3(f_3^2 - f_2 a) - a(f_1 a - f_2 f_3)},$$

$$1 - l_1^2 > 0, \quad l_1^2 - 1 < l_1 l_3 - l_2, \quad 1 + l_3 + l_2 + l_1 > 0, \quad -1 + l_3 - l_2 + l_1 < 0, \quad (3.15)$$

$$a = \begin{cases} f_4, & \text{если } n > 4, \\ f_4 - V, & \text{если } n = 4; \end{cases} \quad b = \begin{cases} f_5, & \text{если } n > 5, \\ f_5 - V, & \text{если } n = 5, \\ t_{24}, & \text{если } n = 4; \end{cases} \quad c = \begin{cases} f_6, & \text{если } n > 6, \\ f_6 - V, & \text{если } n = 6, \\ t_{25}, & \text{если } n = 5, \\ t_{34}, & \text{если } n = 4; \end{cases}$$

$$f_i = -l_1 f_{i-3} - l_2 f_{i-2} - l_3 f_{i-1}, \quad i = 7, \dots, n-1, \quad \text{для } n > 7,$$

где условие (3.14) для случая $n > 6$ означает единственность наблюдателя третьего порядка, а для случая $n > 5$ означает, что не существует наблюдателя (1.8) второго порядка, формирующего несмещенную оценку линейного функционала (1.9).

Замечание 3.2. Неравенства в формулах (3.13) и (3.15) являются необходимыми и достаточными условиями дискретной устойчивости оптимального наблюдателя (1.8) второго и третьего порядков, полученные с помощью упрощенного критерия устойчивости [95] для линейных дискретных систем.

Замечание 3.3. Если условие (3.14) нарушено, то существует множество вырожденных наблюдателей третьего порядка, коэффициенты характеристического полинома которых согласно формулам Виета имеют вид

$$l_1 = z_1 z_2 (C_1 + z_1 + z_2), \quad l_2 = z_1 z_2 - (z_1 + z_2)(C_1 + z_1 + z_2), \quad l_3 = C_1$$

и расположены на пересечении области дискретной устойчивости матрицы N и линейного многообразия решений системы уравнений

$$z_1^3 + l_3 z_1^2 + l_2 z_1 + l_1 = 0, \quad z_2^3 + l_3 z_2^2 + l_2 z_2 + l_1 = 0; \quad (3.16)$$

где корни z_1, z_2 характеристического полинома $z^2 + l_2 z + l_1$ с коэффициентами l_1, l_2 , удовлетворяющими (3.13); определяются по формуле

$$z_{1,2} = \frac{f_1 a - f_2 f_3 \pm \sqrt{(f_2 f_3 - f_1 a)^2 - 4(f_2 a - f_3^2)(f_1 f_3 - f_2^2)}}{2(f_1 f_3 - f_2^2)},$$

свободная неизвестная C_1 выбирается так, чтобы условия дискретной устойчивости (3.15) выполнялись, то есть

$$-1 - z_1 - z_2 < C_1 < 1 - z_1 - z_2,$$

переменная a определяется в соответствии со вторым утверждением теоремы 3.2.

3.2. Передаточные функции систем в отклонениях

В этом разделе будут сформулированы и доказаны теоремы о передаточных функциях систем в отклонениях как для непрерывных, так и для дискретных систем и наблюдателей второго и третьего порядков.

Теорема 3.3. *Если необходимые и достаточные условия существования выполнены для наблюдателей второго порядка и для наблюдателей третьего порядка, то матричная передаточная функция $\begin{pmatrix} W_{ew}(s) & W_{ev}(s) \end{pmatrix}$ системы в отклонениях имеет вид*

$$\begin{pmatrix} W_{ew}(s) & W_{ev}(s) \end{pmatrix} = \frac{1}{\beta(s)} \begin{pmatrix} W_1(s) & \dots & W_n(s) & W_{ev}(s) \end{pmatrix},$$

1) в котором для случая наблюдателей второго порядка

$$W_i(s) = f_i(s + l_2) + f_{i+1}, \quad i = 1, \dots, n-1, \quad W_n(s) = f_n(s + l_2) + t_{2n},$$

$$W_{ev}(s) = \left(\sum_{i=1}^n \alpha_i f_i + t_{2n} \right) (s + l_2) + \sum_{i=1}^{n-1} \alpha_i f_{i+1} + (\alpha_n - l_2)t_{2n} - l_1 f_n,$$

$$\beta(s) = s^2 + l_2 s + l_1;$$

2) в котором для случая наблюдателей третьего порядка

$$W_i(s) = f_i(s^2 + l_3 s + l_2) + f_{i+1}(s + l_3) + f_{i+2}, \quad i = 1, \dots, n-2,$$

$$W_{n-1}(s) = f_{n-1}(s^2 + l_3 s + l_2) + f_n(s + l_3) + t_{2n},$$

$$W_n(s) = f_n(s^2 + l_3 s + l_2) + t_{2n}(s + l_3) + t_{3n},$$

$$W_{ev}(s) = \left(\sum_{i=1}^n \alpha_i f_i + t_{2n} \right) (s^2 + l_3 s + l_2) + \left(\sum_{i=1}^{n-1} \alpha_i f_{i+1} + \alpha_n t_{2n} + t_{3n} \right) (s + l_3) +$$

$$+ \sum_{i=1}^{n-2} \alpha_i f_{i+2} + (\alpha_{n-1} - l_2)t_{2n} + (\alpha_n - l_3)t_{3n} - l_1 f_n, \quad \beta(s) = s^3 + l_3 s^2 + l_2 s + l_1.$$

Доказательство. Система в отклонениях $\varepsilon(t) = q(t) - \tilde{q}(t)$, $e(t) = \sigma(t) - \tilde{\sigma}(t)$ может быть записана следующим образом

$$\dot{\varepsilon}(t) = N\varepsilon(t) + \bar{B} \begin{pmatrix} w(t) \\ v(t) \end{pmatrix}, \quad e(t) = P\varepsilon(t), \quad t \geq 0; \quad \bar{B} = \begin{pmatrix} T & -M \end{pmatrix}.$$

Для этой системы матричная передаточная функция от шумов $w(t)$ и $v(t)$ к ошибке $e(t)$ равна

$$\begin{pmatrix} W_{ew}(s) & W_{ev}(s) \end{pmatrix} = P(sI_k - N)^{-1}\bar{B}. \quad (3.17)$$

Используя формулу (3.17), необходимые и достаточные условия существования наблюдателей соответствующего порядка из теоремы 3.1 и каноническое представление (2.8) искомых наблюдателей, мы получим оба утверждения теоремы 3.3. Более того, так как пара $\{P, N\}$ наблюдаема, а пара $\{N, \bar{B}\}$ управляема по условию $f_1 f_3 - f_2^2 \neq 0$ для наблюдателей второго порядка и по условию (3.11) для наблюдателей третьего порядка, то, используя свойства понятий управляемости и наблюдаемости [96, с. 439; 97, с. 227], можно сделать вывод, что представленная матричная передаточная функция несократима. \square

Замечание 3.4. В зависимости от порядка n исходной системы (1.1) и порядка k искомого наблюдателя (1.3), передаточная функция $\begin{pmatrix} W_{ew}(s) & W_{ev}(s) \end{pmatrix}$ имеет неизвестные параметры, указанные в таблице 3.1.

Таблица 3.1. Неизвестные параметры непрерывных наблюдателей второго и третьего порядка.

Порядок исходной системы	Порядок искомого наблюдателя	
	k=2	k=3
$n = 4$	нет параметров	t_{24}, t_{34}
$n = 5$		t_{25}
$n > 5$		нет параметров

Замечание 3.5. Если условие (3.11) из теоремы 3.1 нарушено для наблюдателей третьего порядка, то матричная передаточная функция системы в отклонениях может быть вычислена в соответствии с первым утверждением теоремы 3.3.

Теорема 3.4. Если необходимые и достаточные условия существования выполнены для наблюдателей второго порядка и для наблюдателей третьего порядка, то матричная передаточная функция $\begin{pmatrix} W_{ew}(z) & W_{ev}(z) \end{pmatrix}$ системы в отклонениях имеет вид

$$\begin{pmatrix} W_{ew}(z) & W_{ev}(z) \end{pmatrix} = \frac{1}{\beta(z)} \begin{pmatrix} W_1(z) & \dots & W_n(z) & W_{ev}(z) \end{pmatrix},$$

1) в котором для случая наблюдателей второго порядка

$$\begin{aligned} \beta(z) &= z^2 + l_2z + l_1; \quad W_i(z) = f_i(z + l_2) + f_{i+1}, \quad i = 1, \dots, n - 2, \\ W_{n-1}(z) &= f_{n-1}(z + l_2) + f_n - V, \quad W_n(z) = (f_n - V)(z + l_2) + t_{2n}, \\ W_{ev}(z) &= -V\beta(z) + \left(\sum_{i=1}^n \alpha_i f_i + t_{2n} - \alpha_n V \right) (z + l_2) + \\ &\quad + \sum_{i=1}^{n-1} \alpha_i f_{i+1} + (\alpha_n - l_2)t_{2n} - l_1(f_n - V) - \alpha_{n-1}V, \end{aligned}$$

2) в котором для случая наблюдателей третьего порядка

$$\begin{aligned} W_i(z) &= f_i(z^2 + l_3z + l_2) + f_{i+1}(z + l_3) + f_{i+2}, \quad i = 1, \dots, n - 3, \\ W_{n-2}(z) &= f_{n-2}(z^2 + l_3z + l_2) + f_{n-1}(z + l_3) + f_n - V, \\ W_{n-1}(z) &= f_{n-1}(z^2 + l_3z + l_2) + (f_n - V)(z + l_3) + t_{2n}, \\ W_n(z) &= (f_n - V)(z^2 + l_3z + l_2) + t_{2n}(z + l_3) + t_{3n}, \\ W_{ev}(z) &= -V\beta(z) + \left(\sum_{i=1}^n \alpha_i f_i + t_{2n} - \alpha_n V \right) (z^2 + l_3z + l_2) + \\ &\quad + \left(\sum_{i=1}^{n-1} \alpha_i f_{i+1} + \alpha_n t_{2n} + t_{3n} - \alpha_{n-1}V \right) (z + l_3) + \end{aligned}$$

$$+ \sum_{i=1}^{n-2} \alpha_i f_{i+2} + (\alpha_{n-1} - l_2)t_{2n} + (\alpha_n - l_3)t_{3n} - l_1(f_n - V) - \alpha_{n-2}V,$$

$$\beta(z) = z^3 + l_3z^2 + l_2z + l_1.$$

Доказательство. Система в отклонениях $\varepsilon_i = q_i - \tilde{q}_i$, $e_i = \sigma_i - \tilde{\sigma}_i$ может быть записана следующим образом

$$\varepsilon_{i+1} = N\varepsilon_i + \bar{B} \begin{pmatrix} w_i \\ v_i \end{pmatrix}, \quad e_i = P\varepsilon_i + \bar{D} \begin{pmatrix} w_i \\ v_i \end{pmatrix}, \quad i = 0, 1, 2, \dots;$$

$$\bar{B} = \begin{pmatrix} T & -M \end{pmatrix}, \quad \bar{D} = \begin{pmatrix} 0 & -V \end{pmatrix}.$$

Для этой системы матричная передаточная функция от шумов w_i и v_i к ошибке e_i равна

$$\begin{pmatrix} W_{ew}(z) & W_{ev}(z) \end{pmatrix} = P(zI_k - N)^{-1}\bar{B} + \bar{D}. \quad (3.18)$$

Используя формулу (3.18), необходимые и достаточные условия существования наблюдателей соответствующего порядка из теоремы 3.2 и каноническое представление (2.8) искомого наблюдателя, мы получим оба утверждения теоремы 3.4. Более того, так как пара $\{P, N\}$ наблюдаема, а пара $\{N, \bar{B}\}$ управляема по условию $f_1f_3 - f_2^2 \neq 0$ для наблюдателей второго порядка и по условию (3.14) для наблюдателей третьего порядка, то, используя свойства понятий управляемости и наблюдаемости [96, с. 439; 97, с. 227], можно сделать вывод, что представленная матричная передаточная функция несократима. \square

Замечание 3.6. В зависимости от порядка n исходной системы (1.6) и порядка k искомого наблюдателя (1.8), передаточная функция $\begin{pmatrix} W_{ew}(z) & W_{ev}(z) \end{pmatrix}$ имеет неизвестные параметры, указанные в таблице 3.2.

Замечание 3.7. Если условие (3.14) из теоремы 3.2 нарушено для наблюдателей третьего порядка, то матричная передаточная функция системы в отклонениях может быть вычислена в соответствии с первым утверждением теоремы 3.4.

Таблица 3.2. Неизвестные параметры дискретных наблюдателей второго и третьего порядка.

Порядок исходной системы	Порядок искомого наблюдателя	
	$k=2$	$k=3$
$n = 4$	V	V, t_{24}, t_{34}
$n = 5$	нет параметров	V, t_{25}
$n = 6$		V
$n > 6$		нет параметров

3.3. Примеры

В данном разделе приводятся вычислительные примеры, в которых как для непрерывной, так и для дискретной системы четвертого порядка с помощью метода интегральных квадратичных показателей качества строятся наблюдатели второго и третьего порядков и проводится их сравнение по среднеквадратичному критерию оптимальности установившемся режиме. Кроме того, в примерах даны наглядные иллюстрации применяемых процедур численной оптимизации.

Пример 3.1. Рассмотрим задачу 1 для непрерывной системы четвертого ($n = 4$) порядка (1.1), (1.2) и скалярного линейного функционала (1.4), в которых

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 0 & -4 \\ 0 & 1 & 0 & -6 \\ 0 & 0 & 1 & -4 \end{pmatrix}, \quad \bar{x}_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad C = (0 \ 0 \ 0 \ 1), \quad Q = P_0 = I_4, \\ F = (1 \ -1 \ 2 \ -5), \quad R = 1, \quad B = 0.$$

Наблюдателя первого ($k = 1$) порядка, формирующего несмещенную оценку скалярного линейного функционала (1.4), не существует. Наблюдатель второго ($k = 2$) порядка, формирующий несмещенную оценку скалярного линейного

функционала (1.4), согласно теореме 3.1 имеет вид (1.3), в котором

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 0 \end{pmatrix}, N = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -3 \end{pmatrix}, T = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & -5 \\ -1 & 2 & -5 & 13 \end{pmatrix}, M = \begin{pmatrix} -2 \\ 5 \end{pmatrix}.$$

Установившееся среднее значение квадрата ошибки наблюдения (1.5) можно найти по формуле для вычисления интегралов (1.38), используя передаточные функции системы в отклонениях из теоремы 3.3:

$$J_\infty = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{|j\omega + 2|^2 + |j\omega + 1|^2 + |2j\omega + 1|^2 + |5j\omega + 2|^2 + |2j\omega + 1|^2}{|(j\omega)^2 + 3j\omega + 1|^2} d\omega =$$

$$= \frac{23}{3} \approx 7.6667.$$

Если условие (3.6) нарушено ($t_{24} = 13$), то вырожденные наблюдатели третьего ($k = 3$) порядка имеют вид (1.3), в котором

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, N = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 3 - C_1 & 8 - 3C_1 & -C_1 \end{pmatrix},$$

$$T = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & -5 \\ -1 & 2 & -5 & 13 \\ 2 & -5 & 13 & -34 \end{pmatrix}, M = \begin{pmatrix} -2 \\ 5 \\ -13 \end{pmatrix}, C_1 > 3.$$

Критерий оптимальности в этом случае для наблюдателей третьего порядка находится так же, как и для наблюдателя второго порядка и равен

$$J_\infty = \frac{23}{3} \approx 7.6667.$$

Следовательно, для случая $t_{24} = 13$ существует множество вырожденных наблюдателей, у которых коэффициенты характеристического полинома $\beta(s)$ находятся на пересечении линейного многообразия решений системы уравнений

$$\begin{cases} \left(\frac{-3+\sqrt{5}}{2}\right)^3 + l_3 \left(\frac{-3+\sqrt{5}}{2}\right)^2 + l_2 \left(\frac{-3+\sqrt{5}}{2}\right) + l_1 = 0, \\ \left(\frac{-3-\sqrt{5}}{2}\right)^3 + l_3 \left(\frac{-3-\sqrt{5}}{2}\right)^2 + l_2 \left(\frac{-3-\sqrt{5}}{2}\right) + l_1 = 0; \end{cases}$$

с областью гурвицевости матрицы N .

Если условие (3.6) выполнено ($t_{24} \neq 13$), то существует оптимальный наблюдатель (1.3) третьего порядка, в котором для нахождения неизвестных переменных (t_{24}, t_{34} , согласно замечанию 3.4) решается задача минимизации критерия оптимальности с ограничением на параметры, которые должны быть такими, чтобы характеристический полином наблюдателя был устойчив. На рисунке 3.1 изображено решение этой задачи в области непрерывной устойчивости, заданной неравенствами (3.12) в координатах (l_2, l_3) . Параметрам вырожденных наблюдателей третьего порядка соответствует синяя штриховая линия $3l_3 - l_2 - 8 = 0$. Точка (на рисунке 3.1 черный квадрат) с координатами $(l_2 = 1, l_3 = 3)$ для линий уровня функции $J_\infty(l_2, l_3)$ со значением большим либо равным $23/3$ является предельной и соответствует параметрам вырожденного наблюдателя третьего порядка на границе устойчивости, то есть в случае когда константа $C_1 = 3$. Как можно видеть, траектория приближений метода последовательного квадратичного программирования [91, гл. 18] сходится к точке экстремума критерия оптимальности (1.5), которая имеет следующие координаты

$$l_2 \approx 4.1196, \quad l_3 \approx 3.5352.$$

Используя теоретические результаты из раздела 3.1, находим значения остальных неизвестных:

$$l_1 = l_2 - 2l_3 + 5 \approx 2.0493,$$

$$t_{24} = -l_2 + 3l_3 + 5 \approx 11.4859, \quad t_{34} = -3l_3^2 + l_2l_3 - l_3 + 3l_2 - 10 \approx -24.1049.$$

На рисунке 3.2 изображено решение задачи в области непрерывной устойчивости, заданной неравенствами (3.12) в координатах (t_{24}, t_{34}) . Точка (на рисунке 3.2 черный квадрат) с координатами $(t_{24} = 13, t_{34} = -34)$ для линий уровня функции $J_\infty(t_{24}, t_{34})$ со значением большим либо равным $23/3$ является предельной и соответствует параметрам вырожденного наблюдателя третьего

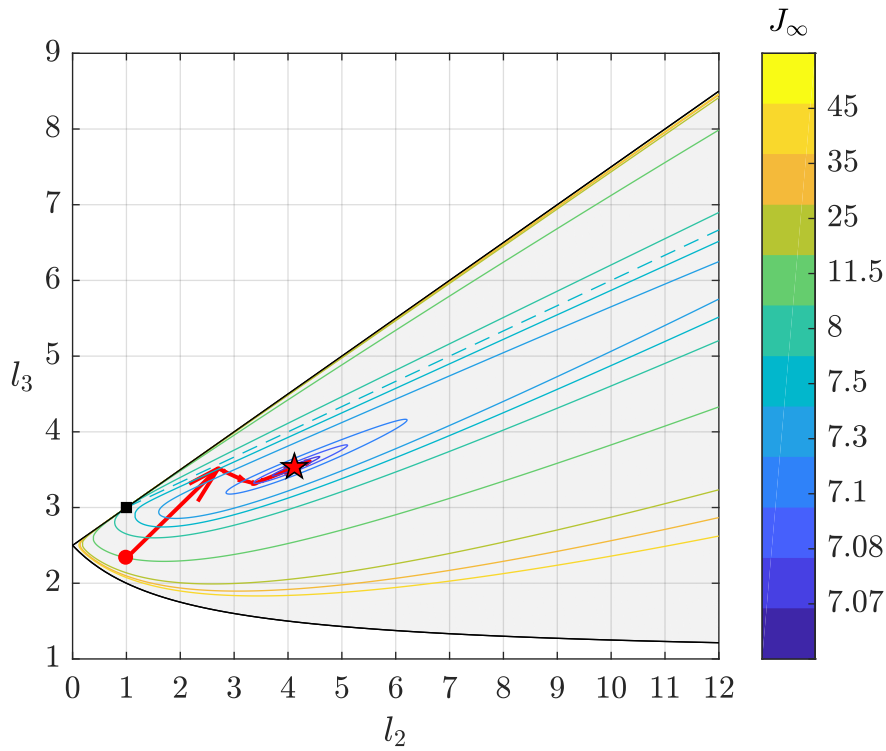


Рисунок 3.1. Траектория последовательных приближений (красные стрелки) к точке экстремума (красная звезда) критерия оптимальности J_∞ в области устойчивости в координатах l_2, l_3 . Точки с одинаковыми значениями J_∞ отмечены цветными линиями уровня. Синяя штриховая линия соответствует параметрам вырожденных наблюдателей третьего порядка в примере 3.1.

порядка. Как можно видеть, траектория приближений метода последовательного квадратичного программирования [91, гл. 18] сходится к точке экстремума критерия оптимальности (1.5), которая имеет следующие координаты

$$t_{24} \approx 11.4859, \quad t_{34} \approx -24.1049.$$

Матрицы наблюдателя третьего порядка имеют вид

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad N \approx \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -2.0493 & -4.1196 & -3.5352 \end{pmatrix},$$

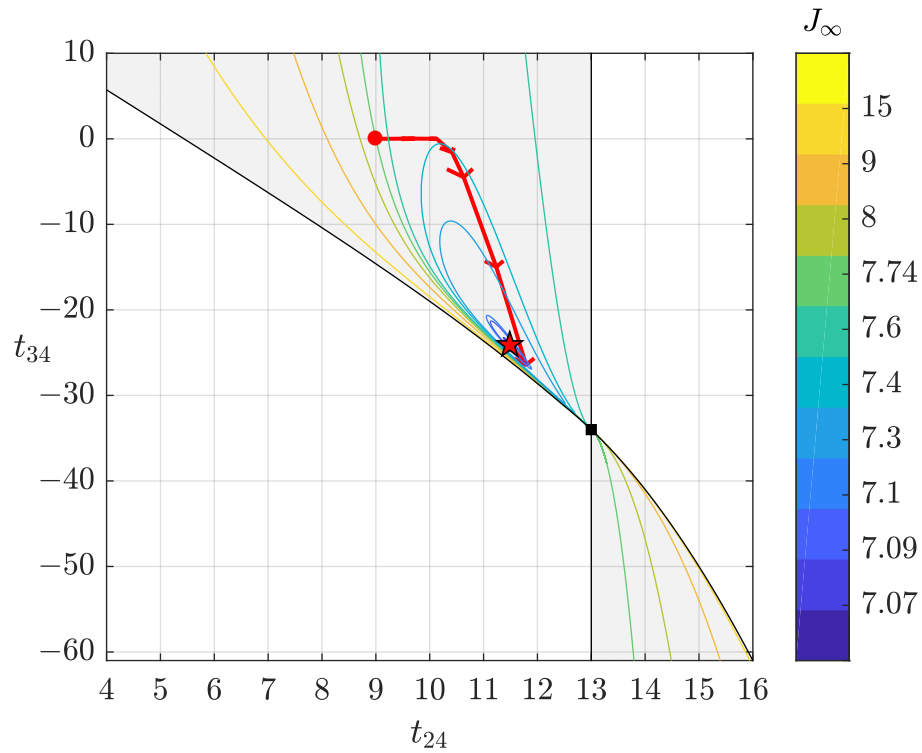


Рисунок 3.2. Траектория последовательных приближений (красные стрелки) к точке экстремума (красная звезда) критерия оптимальности J_∞ в области устойчивости в координатах t_{24}, t_{34} . Точки с одинаковыми значениями J_∞ отмечены цветными линиями уровня. Черный квадрат соответствует параметрам вырожденных наблюдателей третьего порядка в примере 3.1.

$$T \approx \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & -5 \\ -1 & 2 & -5 & 11.4859 \\ 2 & -5 & 11.4859 & -24.1049 \end{pmatrix}, \quad M \approx \begin{pmatrix} -0.4859 \\ 1.1614 \\ -2.6394 \end{pmatrix}.$$

Установившееся среднее значение квадрата ошибки наблюдения в этом случае

$$J_\infty \approx 7.0675.$$

Таким образом, критерий оптимальности (1.5) для наблюдателя третьего порядка оказался меньше, чем для наблюдателя второго порядка.

Пример 3.2. Рассмотрим задачу 2 для дискретной системы четвертого ($n = 4$)

порядка (1.6), (1.7) и скалярного линейного функционала (1.9), в которых

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & -1/16 \\ 1 & 0 & 0 & -1/2 \\ 0 & 1 & 0 & -3/2 \\ 0 & 0 & 1 & -2 \end{pmatrix}, \quad \bar{x}_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad Q = P_0 = I_4, \\ F = \begin{pmatrix} 1 & 1/2 & 1/3 & 1/4 \end{pmatrix}, \quad R = 1, \quad B = 0.$$

Для того чтобы найти неизвестный параметр (V , согласно замечанию 3.6) наблюдателя (1.8) второго порядка, решается задача минимизации критерия оптимальности (1.10), который согласно подходу из раздела 1.3 главы 1 зависит от параметра V следующим образом

$$J_\infty(V) = \frac{492687360V^4 + 143928576V^3 + 55244160V^2}{768(36V + 1)(36V + 5)(108V - 13)} - \frac{6303956V + 396985}{768(36V + 1)(36V + 5)(108V - 13)}, \quad (3.19)$$

где параметр V должен быть таким, чтобы характеристический полином наблюдателя был дискретно устойчивым, то есть $V \in (-1/36, 13/108)$. Функция (3.19), определенная на интервале $(-1/36, 13/108)$, имеет глобальный минимум в точке $V \approx 0.1148$. На рисунке 3.3 показан график функции $J_\infty(V)$.

Матрицы наблюдателя второго порядка имеют вид

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad N \approx \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0.5224 & -0.378 \end{pmatrix}, \\ T \approx \begin{pmatrix} 1 & 0.5 & 0.3333 & 0.1352 \\ 0.5 & 0.3333 & 0.1352 & 0.123 \end{pmatrix}, \quad M \approx \begin{pmatrix} -1.2058 \\ -0.6708 \end{pmatrix}, \quad V \approx 0.1148.$$

Установившееся значение среднеквадратичной ошибки в этом случае равно

$$J_\infty \approx 4.1223.$$

Если условие (3.14) нарушено (то есть $t_{24} = 12V^2 - 2V + 7/36$), то по замечанию 3.3 вырожденные наблюдатели третьего порядка имеют вид (1.8), в

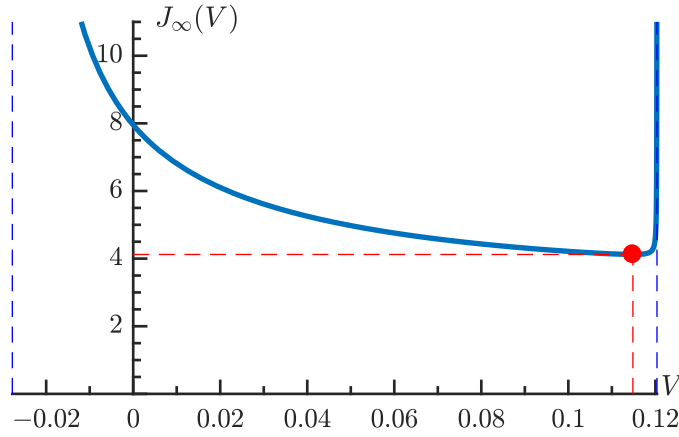


Рисунок 3.3. График функции (3.19) в примере 3.2. Красной точкой с координатами $(V \approx 0.1148, J_\infty(V) \approx 4.1223)$ показан глобальный минимум функции $J_\infty(V)$ на интервале $(-1/36, 13/108)$. Двумя синими штриховыми линиями показаны асимптоты $V = -1/36$ и $V = 13/108$.

котором

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, N \approx \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -0.1975 + 0.5224C_1 & 0.6653 - 0.378C_1 & -C_1 \end{pmatrix},$$

$$T \approx \begin{pmatrix} 1 & 0.5 & 0.3333 & 0.1352 \\ 0.5 & 0.3333 & 0.1352 & 0.123 \\ 0.3333 & 0.1352 & 0.123 & 0.0241 \end{pmatrix}, M \approx \begin{pmatrix} -1.2058 \\ -0.6708 \\ -0.3763 \end{pmatrix}, V \approx 0.1148,$$

где неизвестная переменная C_1 выбирается так, чтобы были выполнены условия дискретной устойчивости (3.15), то есть $C_1 \in (\underline{C}_1, \overline{C}_1)$, $\underline{C}_1 \approx -0.622$, $\overline{C}_1 \approx 1.378$. Согласно замечанию 3.7 матричная передаточная функция системы в отклонениях и критерий оптимальности в этом случае имеют тот же вид, что и для случая наблюдателя второго порядка.

Следовательно, если условие (3.14) нарушено, то существует множество вырожденных наблюдателей, у которых коэффициенты характеристического полинома $\beta(z)$ находятся на пересечении линейного многообразия решений си-

стемы уравнений (3.16), в которой

$$z_1 = \frac{3 - 36V + \sqrt{3}\sqrt{1 + 432V^2}}{6} \approx 0.558,$$

$$z_2 = \frac{3 - 36V - \sqrt{3}\sqrt{1 + 432V^2}}{6} \approx -0.9361;$$

с областью дискретной устойчивости матрицы N .

Если условие (3.14) выполнено (то есть $t_{24} \neq 12V^2 - 2V + 7/36$), то существует оптимальный наблюдатель (1.8) третьего порядка, решающий задачу 2. В этом случае для нахождения неизвестных переменных (V, t_{24}, t_{34} , согласно замечанию 3.6), решается задача минимизации критерия оптимальности с ограничением на параметры, которые должны быть такими, чтобы характеристический полином наблюдателя был устойчив. На рисунке 3.4 изображено решение этой задачи в области дискретной устойчивости, заданной неравенствами (3.15) в координатах (l_1, l_2, l_3) на рисунке 3.4, *а* и в координатах (V, t_{24}, t_{34}) на рисунке 3.4, *б*. Как можно видеть, траектории приближений метода последовательного квадратичного программирования [91, гл. 18] из различных начальных точек сходятся к общей точке минимума критерия оптимальности (1.10), которая имеет следующие координаты

$$l_1 \approx -0.0119, \quad l_2 \approx 0.2303, \quad l_3 \approx 0.0591;$$

$$V \approx 0.373, \quad t_{24} \approx -0.0636, \quad t_{34} \approx 0.0361.$$

Матрицы наблюдателя третьего порядка имеют вид

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad N \approx \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0.0119 & -0.2303 & -0.0591 \end{pmatrix},$$

$$T \approx \begin{pmatrix} 1 & 0.5 & 0.3333 & -0.123 \\ 0.5 & 0.3333 & -0.123 & -0.0636 \\ 0.3333 & -0.123 & -0.0636 & 0.0361 \end{pmatrix}, \quad M \approx \begin{pmatrix} -0.503 \\ 0.0776 \\ 0.0528 \end{pmatrix}, \quad V \approx 0.373.$$

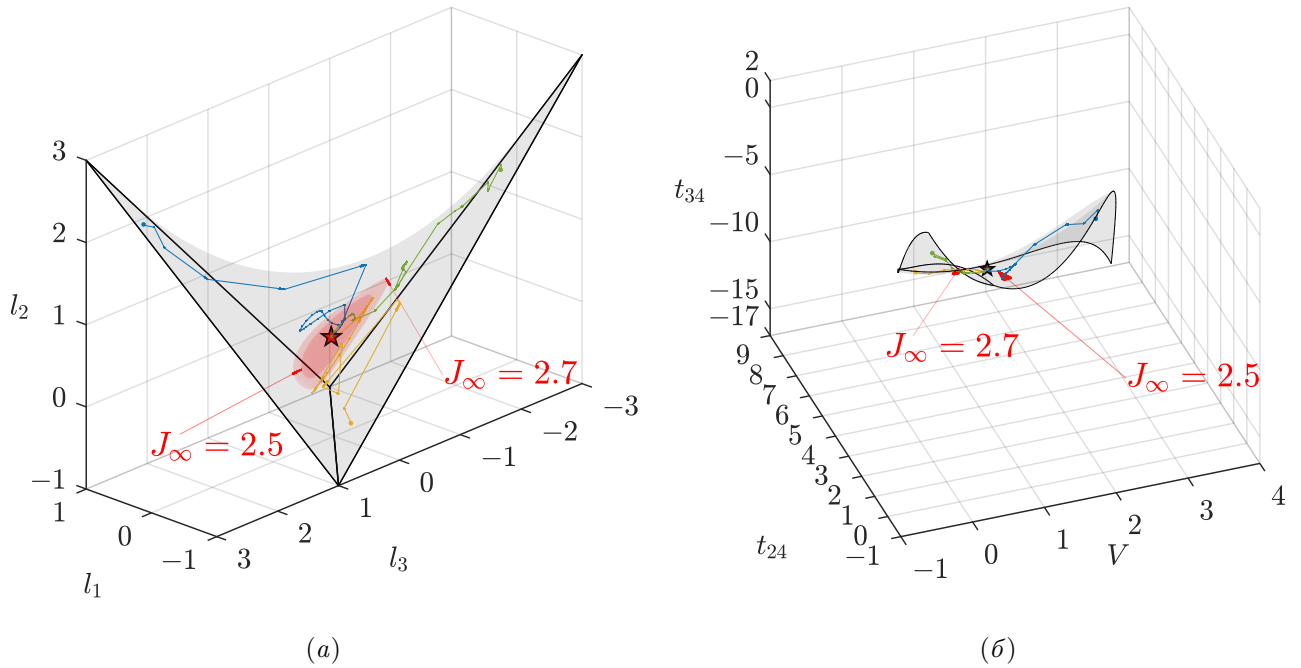


Рисунок 3.4. Три траектории последовательных приближений (синие, зеленые и оранжевые стрелки) сходятся к общему минимуму (красная звезда) критерия оптимальности J_∞ из различных начальных точек в области дискретной устойчивости в координатах (а) l_1, l_2, l_3 ; (б) V, t_{24}, t_{34} . Красными поверхностями уровня отмечены точки с одинаковыми значениями J_∞ в примере 3.2.

Установившееся значение среднеквадратичной ошибки в этом случае равно

$$J_\infty \approx 2.3179.$$

Таким образом, критерий оптимальности (1.5) для наблюдателя третьего порядка оказался меньше, чем для наблюдателя второго порядка.

Ранее наблюдатели второго и третьего порядка сравнивались между собой как с практической, так и с теоретической точки зрения. В контексте обработки информации со спутниковых навигационных систем было показано [59, гл. 5], что увеличение порядка наблюдателя приводит к улучшению динамических показателей качества. В работе [60] на численных примерах было показано меньшее значение \mathcal{H}_2 -нормы для наблюдателей третьего порядка, чем для наблюдателей второго порядка. В работе [58] дано теоретическое объяснение того, что с увеличением порядка модели наблюдателя значение оптимизируемой метрики

уменьшается.

3.4. Выводы к третьей главе

В третьей главе построены оптимальные наблюдатели второго и третьего порядков в предположении, что наблюдателей первого порядка не существует, как для непрерывных, так и для дискретных стохастических систем со скалярным выходом.

Представлена структура наблюдателей второго и третьего порядков в каноническом базисе. Сформулированы и доказаны теоремы о необходимых и достаточных условиях существования наблюдателей второго и третьего порядков и о передаточных функциях систем в отклонениях. Доказанные теоремы позволили определить случаи, в которых при построении оптимальных наблюдателей второго и третьего порядков возникает задача нелинейной оптимизации.

Для сравнения между собой оптимальных наблюдателей второго и третьего порядков по среднеквадратической ошибке наблюдения в установившемся режиме проведены вычислительные эксперименты, в которых применяется аналитический метод интегральных квадратичных показателей качества, представленный в первой главе.

Глава 4

Оптимальные наблюдатели для многосвязных систем

В четвертой главе решается задача построения оптимальных наблюдателей пониженного порядка для линейных векторных функционалов от фазового вектора стохастических многосвязных как непрерывных, так и дискретных объектов управления с векторным выходом. Представлена структура таких наблюдателей в каноническом базисе Люенбергера. Предложена формула для нахождения общего количества неизвестных параметров оптимальных наблюдателей в канонической форме и представлено левое матричное дробное описание передаточной функции для системы в отклонениях. На численных примерах многосвязных систем седьмого порядка показано, что с помощью предложенного подхода повышается оптимальность наблюдателей по сравнению с наблюдателями на основе скалярных наблюдателей. Кроме того, предложенный подход позволяет синтезировать оптимальные наблюдатели, порядок которых меньше, чем гарантированный порядок наблюдателя.

Основные результаты четвертой главы опубликованы в работах [19; 24; 30].

4.1. Структура оптимальных наблюдателей

В данном разделе рассматриваются задача 1 и задача 2 для многосвязных систем, то есть систем с векторным выходом (размерность выхода $l > 1$) и векторным линейным функционалом (размерность линейного функционала $p > 1$). Предложена структура оптимальных наблюдателей в канонической форме Люенбергера. При переходе к канонической форме Люенбергера будет использоваться следующее вспомогательное определение.

Определение 4.1. Минимальное число ν , при котором выполняется усло-

вие

$$\text{rank} \begin{pmatrix} C \\ CA \\ \vdots \\ CA^{\nu-1} \end{pmatrix} = n,$$

называют индексом наблюдаемости пары $\{C, A\}$ (системы (1.1) или (1.6))

На основании предположений о том, что $\text{rank } C = l$ и пара $\{C, A\}$ наблюдаема, исходные системы (1.1) и (1.6) могут быть преобразованы к канонической форме Люенбергера [9, с. 31; 43, с. 44; 98]:

$$A = \begin{pmatrix} A_{11} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & A_{22} & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & A_{ll} \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{n \times n}, \quad C = \begin{pmatrix} C_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & C_2 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & C_l \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{l \times n},$$

$$A_{jj} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 & -\alpha_{\theta_{j-1}+1} \\ 1 & 0 & \dots & 0 & -\alpha_{\theta_{j-1}+2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 1 & -\alpha_{\theta_{j-1}+\nu_j} \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{\nu_j \times \nu_j}, \quad C_j = (0 \ \dots \ 0 \ 1) \in \mathbb{R}^{1 \times \nu_j}, \quad (4.1)$$

где $\nu_j \geq 1$ — индексы наблюдаемости пары $\{C_j, A_{jj}\}$; $\theta_0 = 0$, $\theta_j = \sum_{i=1}^j \nu_i$, $j = \overline{1, l}$ — суммы индексов наблюдаемости, причем $\theta_l = n$; $\alpha_{\theta_{j-1}+\eta_j}, \eta_j = \overline{1, \nu_j}$ — коэффициенты характеристического полинома матрицы A_{jj} , то есть для систем (1.1), (1.6) соответственно

$$\alpha_j(s) = \det(sI_{\nu_j} - A_{jj}) = s^{\nu_j} + \alpha_{\theta_{j-1}+\nu_j} s^{\nu_j-1} + \dots + \alpha_{\theta_{j-1}+1},$$

$$\alpha_j(z) = \det(zI_{\nu_j} - A_{jj}) = z^{\nu_j} + \alpha_{\theta_{j-1}+\nu_j} z^{\nu_j-1} + \dots + \alpha_{\theta_{j-1}+1}.$$

Характеристический полином матрицы A при этом равен

$$\alpha(s) = \det(sI_n - A) = \prod_{j=1}^l \alpha_j(s) = \prod_{j=1}^l \det(sI_{\nu_j} - A_{jj}),$$

$$\alpha(z) = \det(zI_n - A) = \prod_{j=1}^l \alpha_j(z) = \prod_{j=1}^l \det(zI_{\nu_j} - A_{jj}).$$

Таким образом в *каноническом базисе Люенбергера* исходная система распадается на l подсистем со скалярным выходом порядка ν_j каждая. Размерность максимальной из подсистем равна индексу наблюдаемости пары $\{C, A\}$. При этом каждая из пар $\{C_j, A_{jj}\}$ наблюдаема, более того, задана в канонической форме наблюдаемости для скалярных систем, а связь между подсистемами осуществляется через компоненты вектора выхода системы [9, с. 33].

Заметим, что в отличие от канонических форм для скалярных систем переход к форме Люенбергера осуществляется не только заменой координат вектора состояния, но и преобразованием выходов. Кроме того, переход к указанной форме Люенбергера не является, вообще говоря, преобразованием подобия.

Так же как и для случая скалярного линейного функционала, векторный линейный функционал восстанавливается с помощью оптимального наблюдателя (1.3) порядка k , включая случай $k = 1$, для непрерывных систем и оптимального наблюдателя (1.8) порядка k , включая случай $k = 1$, для дискретных систем. В указанных формулах $N \in \mathbb{R}^{k \times k}$, $M \in \mathbb{R}^{k \times l}$, $T \in \mathbb{R}^{k \times n}$, $P \in \mathbb{R}^{p \times k}$, $V \in \mathbb{R}^{p \times l}$ — неизвестные постоянные матрицы.

Для минимизации числа ненулевых элементов неизвестные матрицы P и N наблюдателей (1.3) и (1.8) ищутся в том же блочно-диагональном каноническом представлении Люенбергера, что и исходные системы:

$$N = \begin{pmatrix} N_{11} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & N_{22} & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & N_{pp} \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{k \times k}, \quad P = \begin{pmatrix} P_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & P_2 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & P_p \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{p \times k},$$

$$N_{ii} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 & -l_{\varkappa_{i-1}+1} \\ 1 & 0 & \dots & 0 & -l_{\varkappa_{i-1}+2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 1 & -l_{\varkappa_{i-1}+k_i} \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{k_i \times k_i}, \quad P_i = \begin{pmatrix} 0 & \dots & 0 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{1 \times k_i}, \quad (4.2)$$

где $k_i \geq 1$ — индексы наблюдаемости пары $\{P_i, N_{ii}\}$; $\varkappa_0 = 0$, $\varkappa_i = \sum_{j=1}^i k_j$, $i = \overline{1, p}$ — суммы индексов наблюдаемости, причем $\varkappa_p = k$; $l_{\varkappa_{i-1}+\mu_i}$, $\mu_i = \overline{1, k_i}$ — коэффициенты характеристического полинома матрицы N_{ii} , то есть для наблюдателей (1.3), (1.8) соответственно

$$\beta_i(s) = \det(sI_{k_i} - N_{ii}) = s^{k_i} + l_{\varkappa_{i-1}+k_i} s^{k_i-1} + \dots + l_{\varkappa_{i-1}+1},$$

$$\beta_i(z) = \det(zI_{k_i} - N_{ii}) = z^{k_i} + l_{\varkappa_{i-1}+k_i} z^{k_i-1} + \dots + l_{\varkappa_{i-1}+1}.$$

Характеристический полином матрицы N при этом равен

$$\beta(s) = \det(sI_k - N) = \prod_{i=1}^p \beta_i(s) = \prod_{i=1}^p \det(sI_{k_i} - N_{ii}),$$

$$\beta(z) = \det(zI_k - N) = \prod_{i=1}^p \beta_i(z) = \prod_{i=1}^p \det(zI_{k_i} - N_{ii}).$$

Пусть матрицы $F = (f_{i,j})$, $T = (t_{i,j})$, $M = (m_{i,j})$, $V = (v_{i,j})$ в позициях (i, j) содержат элементы $f_{i,j}$, $t_{i,j}$, $m_{i,j}$, $v_{i,j}$ соответственно.

Для детерминированных полностью определенных систем было показано [99, с. 158; 100], что гарантированный порядок наблюдателя

$$k(p) = \sum_{j=1}^{\min\{p, l\}} (\nu_j - 1), \quad (4.3)$$

где $\nu_j \geq 1$ — упорядоченные по невозрастанию индексы наблюдаемости пары $\{C_j, A_{jj}\}$. Кроме того, для детерминированных полностью определенных систем в работе [99, с. 177] был предложен подход для определения индексов k_i

$$k_1 = \nu_1 - 1, \quad k_i = \max \left\{ (\nu_i - 1) - \left\lfloor \frac{\sum_{j=1}^{i-1} k_j}{p} \right\rfloor; 0 \right\}, \quad (4.4)$$

где $[\cdot]$ — целая часть числа. Так как модель наблюдателей состояния в работах [99, с. 120; 100] совпадает с моделью дискретного наблюдателя (1.8), то формулы (4.3) и (4.4) для дискретных стохастических систем (1.6) могут быть использованы без изменений. Так как в модели непрерывного наблюдателя (1.3) отсутствует прямая связь по измеренному выходу исходной системы (1.1), то формулы (4.3) и (4.4) для непрерывных стохастических систем (1.1) могут быть модифицированы следующим образом

$$k(p) = \sum_{j=1}^{\min\{p,l\}} \nu_j, \quad (4.5)$$

$$k_1 = \nu_1, \quad k_i = \max \left\{ \nu_i - \left[\frac{\sum_{j=1}^{i-1} k_j}{p} \right]; 0 \right\}. \quad (4.6)$$

Используя необходимые и достаточные условия (2.6) и (2.7) несмещенности оценки, полученные ранее в разделе 2.1 главы 2 при анализе непрерывных и дискретных систем в отклонениях (при переходе от случая скалярных выходов и линейного функционала к векторным, уравнения систем в отклонениях остаются без изменений), сформулируем необходимые и достаточные условия существования оптимальных наблюдателей порядка k в каноническом базисе Люенбергера.

Теорема 4.1. Пусть система (1.1) наблюдаема, $\text{rank } C = l$, и пара $\{C, A\}$ находится в каноническом представлении Люенбергера (4.1). Векторный линейный функционал (1.4), в котором в каноническом базисе матрица $F = (f_{i,j}) \in \mathbb{R}^{p \times n}$, может быть восстановлен оптимальным наблюдателем (1.3) порядка k , искомым в канонической форме Люенбергера (4.2), тогда и только тогда, когда относительно неизвестных элементов матриц $T = (t_{i,j}) \in \mathbb{R}^{k \times n}$, $M = (m_{i,j}) \in \mathbb{R}^{k \times l}$ выполняются следующие условия:

$$t_{\chi_{i-1}+1, \theta_{j-1}+\eta_j+1} = -l_{\chi_{i-1}+1} t_{\chi_i, \theta_{j-1}+\eta_j}, \quad \text{для } \nu_j > 1;$$

$$\begin{aligned}
t_{\mathcal{X}_{i-1}+\mu_i+1, \theta_{j-1}+\eta_j+1} &= t_{\mathcal{X}_{i-1}+\mu_i, \theta_{j-1}+\eta_j} - l_{\mathcal{X}_{i-1}+\mu_i+1} t_{\mathcal{X}_i, \theta_{j-1}+\eta_j}, \text{ для } \nu_j > 1, k_i > 1; \\
m_{\mathcal{X}_{i-1}+\mu_i+1, j} &= - \sum_{\eta=1}^{\nu_j} \alpha_{\theta_{j-1}+\eta} t_{\mathcal{X}_{i-1}+\mu_i+1, \theta_{j-1}+\eta} - t_{\mathcal{X}_{i-1}+\mu_i, \theta_j} + l_{\mathcal{X}_{i-1}+\mu_i+1} t_{\mathcal{X}_i, \theta_j}, \text{ для } k_i > 1; \\
m_{\mathcal{X}_{i-1}+1, j} &= - \sum_{\eta=1}^{\nu_j} \alpha_{\theta_{j-1}+\eta} t_{\mathcal{X}_{i-1}+1, \theta_{j-1}+\eta} + l_{\mathcal{X}_{i-1}+1} t_{\mathcal{X}_i, \theta_j}, \quad t_{\mathcal{X}_i, j} = f_{i, j}, \\
\mu_i &= \overline{1, k_i - 1}, \quad \eta_j = \overline{1, \nu_j - 1}, \quad i = \overline{1, p}, \quad j = \overline{1, l}; \\
\beta(s) & - \text{ непрерывно устойчивый полином.}
\end{aligned}$$

На основании необходимых и достаточных условий (2.7) несмещенности оценки и канонических представлений Люенбергера сформулируем аналогичную теорему для дискретных систем.

Теорема 4.2. Пусть система (1.6) наблюдаема, $\text{rank } C = l$, и пара $\{C, A\}$ находится в каноническом представлении Люенбергера (4.1). Векторный линейный функционал (1.9), в котором в каноническом базисе матрица $F = (f_{i,j}) \in \mathbb{R}^{p \times n}$, может быть восстановлен оптимальным наблюдателем (1.8) порядка k , искомым в канонической форме Люенбергера (4.2), тогда и только тогда, когда относительно неизвестных элементов матриц $T = (t_{i,j}) \in \mathbb{R}^{k \times n}$, $M = (m_{i,j}) \in \mathbb{R}^{k \times l}$, $V = (v_{i,j}) \in \mathbb{R}^{p \times l}$ выполняются следующие условия:

$$\begin{aligned}
t_{\mathcal{X}_i, \theta_{j-1}+\eta_j} &= f_{i, \theta_{j-1}+\eta_j}, \quad t_{\mathcal{X}_{i-1}+1, \theta_{j-1}+\eta_j+1} = -l_{\mathcal{X}_{i-1}+1} t_{\mathcal{X}_i, \theta_{j-1}+\eta_j}, \text{ для } \nu_j > 1; \\
t_{\mathcal{X}_{i-1}+\mu_i+1, \theta_{j-1}+\eta_j+1} &= t_{\mathcal{X}_{i-1}+\mu_i, \theta_{j-1}+\eta_j} - l_{\mathcal{X}_{i-1}+\mu_i+1} t_{\mathcal{X}_i, \theta_{j-1}+\eta_j}, \text{ для } \nu_j > 1, k_i > 1; \\
m_{\mathcal{X}_{i-1}+\mu_i+1, j} &= - \sum_{\eta=1}^{\nu_j} \alpha_{\theta_{j-1}+\eta} t_{\mathcal{X}_{i-1}+\mu_i+1, \theta_{j-1}+\eta} - t_{\mathcal{X}_{i-1}+\mu_i, \theta_j} + l_{\mathcal{X}_{i-1}+\mu_i+1} t_{\mathcal{X}_i, \theta_j}, \text{ для } k_i > 1; \\
m_{\mathcal{X}_{i-1}+1, j} &= - \sum_{\eta=1}^{\nu_j} \alpha_{\theta_{j-1}+\eta} t_{\mathcal{X}_{i-1}+1, \theta_{j-1}+\eta} + l_{\mathcal{X}_{i-1}+1} t_{\mathcal{X}_i, \theta_j}, \quad v_{i,j} = f_{i, \theta_j} - t_{\mathcal{X}_i, \theta_j}, \\
\mu_i &= \overline{1, k_i - 1}, \quad \eta_j = \overline{1, \nu_j - 1}, \quad i = \overline{1, p}, \quad j = \overline{1, l}; \\
\beta(z) & - \text{ дискретно устойчивый полином.}
\end{aligned}$$

4.2. Передаточные функции систем в отклонениях

В этом разделе относительно матричных передаточных функций систем в отклонениях и количества неизвестных параметров оптимальных наблюдателей будут сформулированы следствия из теорем о необходимых и достаточных условиях существования оптимальных наблюдателей порядка k в каноническом базисе Люенбергера.

Как было показано при доказательстве теоремы 3.3, матричная передаточная функция от шумов $w(t)$ и $v(t)$ к ошибке $e(t)$ равна

$$\begin{pmatrix} W_{ew}(s) & W_{ev}(s) \end{pmatrix} = P(sI_k - N)^{-1} \begin{pmatrix} T & -M \end{pmatrix}.$$

Используя представленную в разделе 4.1 структуру матриц оптимального наблюдателя порядка k и левое матричное дробное описание [96, с. 367] передаточной функции, сформулируем следствие из теоремы 4.1.

Следствие 4.1. *Для системы в отклонениях*

$$\dot{\varepsilon}(t) = N\varepsilon(t) + \begin{pmatrix} T & -M \end{pmatrix} \begin{pmatrix} w(t) \\ v(t) \end{pmatrix}, \quad e(t) = P\varepsilon(t), \quad t \geq 0;$$

левое матричное дробное описание передаточной функции от шумов $w(t)$, $v(t)$ к ошибке наблюдения $e(t)$ в каноническом базисе Люенбергера (4.2) имеет вид:

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} W_{ew}(s) & W_{ev}(s) \end{pmatrix} &= \mathcal{D}^{-1}(s) \begin{pmatrix} \mathcal{N}_{ew}(s) & \mathcal{N}_{ev}(s) \end{pmatrix}, & (4.7) \\ \mathcal{D}(s) &= \begin{pmatrix} \beta_1(s) & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots \\ 0 & \dots & \beta_p(s) \end{pmatrix}, \\ \mathcal{N}_{ew}(s) &= \begin{pmatrix} \mathcal{N}_{ew}^{1,1}(s) & \dots & \mathcal{N}_{ew}^{1,l}(s) \\ \dots & \dots & \dots \\ \mathcal{N}_{ew}^{p,1}(s) & \dots & \mathcal{N}_{ew}^{p,l}(s) \end{pmatrix}, & \mathcal{N}_{ev}(s) = \begin{pmatrix} \mathcal{N}_{ev}^{1,1}(s) & \dots & \mathcal{N}_{ev}^{1,l}(s) \\ \dots & \dots & \dots \\ \mathcal{N}_{ev}^{p,1}(s) & \dots & \mathcal{N}_{ev}^{p,l}(s) \end{pmatrix}, \end{aligned}$$

$$\mathcal{N}_{ew}^{i,j}(s) = \left(\sum_{\mu_i=1}^{k_i} t_{\chi_{i-1}+\mu_i, \theta_{j-1}+1} s^{\mu_i-1} \quad \dots \quad \sum_{\mu_i=1}^{k_i} t_{\chi_{i-1}+\mu_i, \theta_{j-1}+\nu_j} s^{\mu_i-1} \right),$$

$$\mathcal{N}_{ev}^{i,j}(s) = - \left(\sum_{\mu_i=1}^{k_i} m_{\chi_{i-1}+\mu_i, j} s^{\mu_i-1} \right), \quad i = \overline{1, p}, \quad j = \overline{1, l}.$$

Причем если пара $\{N, \bar{B}\}$ управляема, где $\bar{B} = \begin{pmatrix} T & -M \end{pmatrix}$, то передаточная матрица (4.7) имеет порядок k , то есть $\deg \det \mathcal{D}(s) = k$.

Как было показано при доказательстве теоремы 3.4, матричная передаточная функция от шумов w_i и v_i к ошибке e_i равна

$$\begin{pmatrix} W_{ew}(z) & W_{ev}(z) \end{pmatrix} = P(zI_k - N)^{-1} \begin{pmatrix} T & -M \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & -V \end{pmatrix}.$$

Используя представленную в разделе 4.1 структуру матриц оптимального наблюдателя порядка k и левое матричное дробное описание [96, с. 367] передаточной функции, сформулируем следствие из теоремы 4.2.

Следствие 4.2. *Для системы в отклонениях*

$$\varepsilon_{i+1} = N\varepsilon_i + \begin{pmatrix} T & -M \end{pmatrix} \begin{pmatrix} w_i \\ v_i \end{pmatrix}, \quad e_i = P\varepsilon_i + \begin{pmatrix} 0 & -V \end{pmatrix} \begin{pmatrix} w_i \\ v_i \end{pmatrix}, \quad i = 0, 1, 2, \dots;$$

левое матричное дробное описание передаточной функции от шумов w_i, v_i к ошибке наблюдения e_i в каноническом базисе Люенберга (4.2) имеет вид:

$$\begin{pmatrix} W_{ew}(z) & W_{ev}(z) \end{pmatrix} = \mathcal{D}^{-1}(z) \begin{pmatrix} \mathcal{N}_{ew}(z) & \mathcal{N}_{ev}(z) \end{pmatrix}, \quad (4.8)$$

$$\mathcal{D}(z) = \begin{pmatrix} \beta_1(z) & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots \\ 0 & \dots & \beta_p(z) \end{pmatrix},$$

$$\mathcal{N}_{ew}(z) = \begin{pmatrix} \mathcal{N}_{ew}^{1,1}(z) & \dots & \mathcal{N}_{ew}^{1,l}(z) \\ \dots & \dots & \dots \\ \mathcal{N}_{ew}^{p,1}(z) & \dots & \mathcal{N}_{ew}^{p,l}(z) \end{pmatrix}, \quad \mathcal{N}_{ev}(z) = \begin{pmatrix} \mathcal{N}_{ev}^{1,1}(z) & \dots & \mathcal{N}_{ev}^{1,l}(z) \\ \dots & \dots & \dots \\ \mathcal{N}_{ev}^{p,1}(z) & \dots & \mathcal{N}_{ev}^{p,l}(z) \end{pmatrix},$$

$$\mathcal{N}_{ew}^{i,j}(z) = \left(\sum_{\mu_i=1}^{k_i} t_{\kappa_{i-1}+\mu_i, \theta_{j-1}+1} z^{\mu_i-1} \quad \dots \quad \sum_{\mu_i=1}^{k_i} t_{\kappa_{i-1}+\mu_i, \theta_{j-1}+\nu_j} z^{\mu_i-1} \right),$$

$$\mathcal{N}_{ev}^{i,j}(z) = - \left(\sum_{\mu_i=1}^{k_i} m_{\kappa_{i-1}+\mu_i, j} z^{\mu_i-1} + v_{i,j} \beta_i(z) \right), \quad i = \overline{1, p}, \quad j = \overline{1, l}.$$

Причем если пара $\{N, \bar{B}\}$ управляема, где $\bar{B} = \begin{pmatrix} T & -M \end{pmatrix}$, то передаточная матрица (4.8) имеет порядок k , то есть $\deg \det \mathcal{D}(z) = k$.

Для подсчета количества неизвестных параметров как непрерывных (1.3), так и дискретных (1.8) оптимальных наблюдателей в канонической форме Люенбергера (4.2) может быть использовано следующее утверждение.

Следствие 4.3. Пусть для случая непрерывных систем

$$\Delta_{i,j} = \max(\nu_j - k_i, 0), \quad i = \overline{1, p}, \quad j = \overline{1, l},$$

а для случая дискретных систем

$$\Delta_{i,j} = \max(\nu_j - k_i - 1, 0), \quad i = \overline{1, p}, \quad j = \overline{1, l}.$$

Тогда количество неизвестных параметров оптимального непрерывного наблюдателя (1.3) порядка k в канонической форме Люенбергера (4.2) равно:

$$\chi = \sum_{i=1}^p \left(k_i - r_i + \sum_{j=1}^l \max(k_i - \nu_j, 0) \right), \quad (4.9)$$

а количество неизвестных параметров оптимального дискретного наблюдателя (1.8) порядка k в канонической форме Люенбергера (4.2) равно:

$$\chi = \sum_{i=1}^p \left(k_i - r_i + \sum_{j=1}^l \max(k_i - \nu_j + 1, 0) \right), \quad (4.10)$$

где r_i — количество базисных строк в системе линейных алгебраических урав-

Пример 4.1. Рассмотрим задачу 1 для непрерывной системы седьмого ($n = 7$) порядка (1.1), (1.2) с векторным ($l = 3$) выходом и для векторного ($p = 2$) линейного функционала (1.4), в которых

$$A = \left(\begin{array}{ccc|ccc} 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -12 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -6 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & -3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{array} \right), \quad \bar{x}_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}; \quad \begin{aligned} Q &= P_0 = I_7, \quad R = I_3, \quad B = 0, \\ C &= \left(\begin{array}{ccc|ccc} 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right), \\ F &= \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 0 & 0 & 3 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & -4 & 0 & 0 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Данная система находится в канонической форме Люенбергера (4.1) с индексами наблюдаемости $\nu_1 = 3$, $\nu_2 = 2$, $\nu_3 = 2$ и характеристическими полиномами подсистем следующего вида

$$\alpha_1(s) = s^3 + 6s^2 + 12s + 1, \quad \alpha_2(s) = s^2 + 3, \quad \alpha_3(s) = s^2 + 1.$$

Будем искать оптимальный непрерывный наблюдатель второго порядка ($k = 2$) с индексами наблюдаемости $k_1 = 1$, $k_2 = 1$ в канонической форме Люенбергера. Кроме того, сравним по критерию оптимальности этот наблюдатель с наблюдателем четвертого ($k = 4$) с индексами наблюдаемости $k_1 = 3$, $k_2 = 1$, которые можно получить по формуле (4.6), на основе скалярных наблюдателей и с полноразмерным классическим фильтром Калмана–Бьюси.

Матрицы оптимального наблюдателя второго порядка, полученные предложенным в работе методом канонической формы Люенбергера, равны

$$N = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}, \quad P = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad M = \begin{pmatrix} 6 & 0 & -6 \\ 0 & -14 & 0 \end{pmatrix},$$

$$T = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 0 & 0 & 3 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & -4 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Левое матричное дробное описание передаточных функций имеет вид (4.7), в котором:

$$\mathcal{N}_{ew}(s) = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 0 & 0 & 3 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & -4 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \mathcal{N}_{ev}(s) = \begin{pmatrix} -6 & 0 & 6 \\ 0 & 14 & 0 \end{pmatrix},$$

$$\mathcal{D}(s) = \begin{pmatrix} s+1 & 0 \\ 0 & s+2 \end{pmatrix}.$$

Установившееся среднее значение квадрата ошибки наблюдения вычисляется по формуле для вычисления интегралов (1.37):

$$J_\infty = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1^2 + (-1)^2 + 1^2 + 3^2 + (-3)^2 + 6^2 + (-6)^2}{|j\omega + 1|^2} d\omega +$$

$$+ \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{2^2 + (-4)^2 + 14^2}{|j\omega + 2|^2} d\omega = \frac{201}{2} = 100.5.$$

Используя метод [9, гл. 4], основанный на скалярных наблюдателях, получаем следующие матрицы наблюдателя (1.3) четвертого порядка:

$$N = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}, \quad T = \begin{pmatrix} 1 & \lambda_1 & \lambda_1^2 & 0 & 0 & 3 & 3\lambda_1 \\ 1 & \lambda_2 & \lambda_2^2 & 0 & 0 & 3 & 3\lambda_2 \\ 1 & \lambda_3 & \lambda_3^2 & 0 & 0 & 3 & 3\lambda_3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -2 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$P = \begin{pmatrix} \frac{(\lambda_2+1)(\lambda_3+1)}{(\lambda_2-\lambda_1)(\lambda_3-\lambda_1)} & \frac{(\lambda_1+1)(\lambda_3+1)}{(\lambda_1-\lambda_2)(\lambda_3-\lambda_2)} & \frac{(\lambda_1+1)(\lambda_2+1)}{(\lambda_1-\lambda_3)(\lambda_2-\lambda_3)} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix},$$

$$M = \begin{pmatrix} -\alpha_1(\lambda_1) & 0 & -3\alpha_3(\lambda_1) \\ -\alpha_1(\lambda_2) & 0 & -3\alpha_3(\lambda_2) \\ -\alpha_1(\lambda_3) & 0 & -3\alpha_3(\lambda_3) \\ 0 & -\alpha_2(-2) & 0 \end{pmatrix},$$

где $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ — различные вещественные собственные значения наблюдателя.

Вычисляя значение критерия оптимальности согласно подходу из раздела 1.3

главы 1 и применяя численный метод последовательного квадратичного программирования [91, гл. 18] к минимизации целевой функции с ограничением устойчивости на параметры $\lambda_j < 0$, $j = \overline{1,3}$, получаем следующие значения оптимальных параметров и критерия оптимальности:

$$\lambda_1 \approx -0.4073, \lambda_2 = \lambda_3 \approx -3.3151, J_\infty \approx 95.4685.$$

Два из полученных оптимальных значений параметров совпадают между собой, что противоречит исходному предположению метода скалярных наблюдателей о различности спектра наблюдателя. Добавив ограничения различности параметров $|\lambda_1 - \lambda_2| > 0.01$, $|\lambda_2 - \lambda_3| > 0.01$, $|\lambda_1 - \lambda_3| > 0.01$, получим следующие значения оптимальных параметров и критерия оптимальности:

$$\lambda_1 \approx -0.4073, \lambda_2 \approx -3.3201, \lambda_3 \approx -3.3101, J_\infty \approx 95.4685.$$

Классический полноразмерный фильтр Калмана–Бьюси [34] имеет вид

$$\begin{aligned} \dot{\tilde{x}}(t) &= A\tilde{x}(t) + \mathbf{P}(t)C^\top R^{-1}(y(t) - C\tilde{x}(t)), & \tilde{x}(0) &= \bar{x}_0, & t &\geq 0; \\ \tilde{\sigma}(t) &= F\tilde{x}(t); \end{aligned}$$

где $\mathbf{P}(t)$ — решение дифференциального матричного уравнения Риккати:

$$\dot{\mathbf{P}}(t) = A\mathbf{P}(t) + \mathbf{P}(t)A^\top - \mathbf{P}(t)C^\top R^{-1}C\mathbf{P}(t) + Q, \mathbf{P}(0) = P_0.$$

Приближенное значение критерия оптимальности для фильтра Калмана–Бьюси имеет вид

$$J_\infty = \lim_{t \rightarrow \infty} \text{tr}(F^\top F\mathbf{P}(t)) \approx 55.435.$$

На рисунке 4.1 показана динамика аналитического значения среднеквадратичной ошибки для трех рассмотренных наблюдателей: наблюдателя второго порядка в канонической форме Люенбергера (КФЛ, синяя линия); наблюдателя четвертого порядка, синтезированного с помощью метода скалярных наблюдателей (МСН, зеленая линия); классического полноразмерного фильтра Калмана–Бьюси ([34]; ФКБ, красная линия) седьмого порядка.

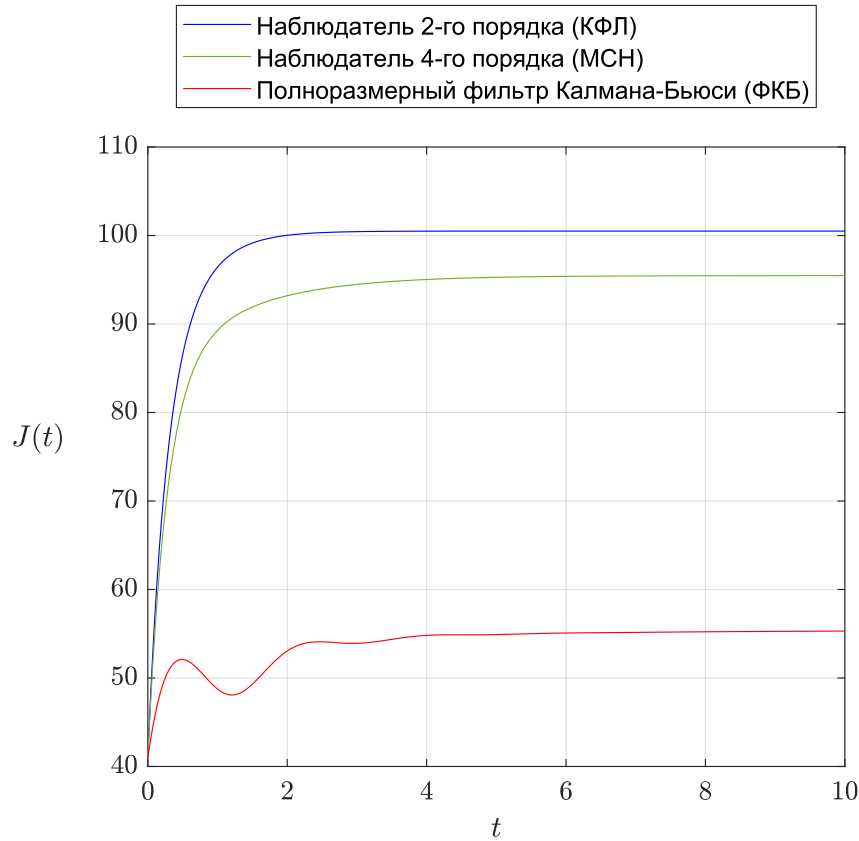


Рисунок 4.1. Динамика изменения среднеквадратичных ошибок $J(t)$ в примере 4.1.

Числовые значения, характеризующие динамику $J(t)$ аналитического значения среднеквадратичной ошибки

$$t_m = \min_{t_*} \{t_* : |J(t) - J_\infty| \leq \Delta_3 J_\infty, \Delta_3 = 0.005, t \geq t_*\};$$

$$\eta = \frac{\max_{t \geq 0} J(t) - J_\infty}{J_\infty} 100\%; J_\infty;$$

для рассмотренных непрерывных наблюдателей: наблюдателя второго порядка в канонической форме Люенбергера (КФЛ); наблюдателя четвертого порядка, синтезированного с помощью метода скалярных наблюдателей (МСН); классического полноразмерного фильтра Калмана–Бьюси ([34]; ФКБ) седьмого порядка; приведены в таблице 4.1.

Таким образом, значение оптимизируемой метрики (1.5) уменьшается с ростом порядка наблюдателя. В свою очередь, при уменьшении порядка наблюдателя время сходимости среднеквадратичной ошибки к своему установившемуся

Таблица 4.1. Динамические характеристики непрерывных наблюдателей различных порядков с точностью 10^{-4} в примере 4.1

k (вид наблюдателя)	t_m	$\eta, \%$	J_∞
2 (КФЛ)	1.6425	0	100.5
4 (МСН)	3.0511	0	95.4685
7 (ФКБ)	4.7732	0	55.435

значению уменьшается. Кроме того, порядок построенного оптимального наблюдателя в канонической форме Люенбергера оказался меньше, чем порядок наблюдателя, построенного по методу скалярных наблюдателей, и чем гарантированный порядок наблюдателя по формуле (4.5)

$$k = 2 < k(p) = \sum_{i=1}^{\min\{p,l\}} \nu_i = \nu_1 + \nu_2 = 3 + 2 = 5,$$

и по формуле (4.3)

$$k = 2 < k(p) = \sum_{i=1}^{\min\{p,l\}} (\nu_i - 1) = (\nu_1 - 1) + (\nu_2 - 1) = (3 - 1) + (2 - 1) = 3.$$

Пример 4.2. Рассмотрим задачу 2 для дискретной системы седьмого ($n = 7$) порядка (1.6), (1.7) с векторным ($l = 3$) выходом и для векторного ($p = 2$) линейного функционала (1.9), в которых

$$A = \left(\begin{array}{ccc|ccc} 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -12 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -6 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & -3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{array} \right), \bar{x}_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}; \quad \begin{aligned} Q &= P_0 = I_7, \quad R = I_3, \quad B = 0, \\ C &= \left(\begin{array}{ccc|ccc} 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right), \\ F &= \begin{pmatrix} 0 & -1 & 6 & 1 & -1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Данная система находится в канонической форме Люенбергера (4.1) с индексами наблюдаемости $\nu_1 = 3$, $\nu_2 = 2$, $\nu_3 = 2$ и характеристическими полиномами подсистем следующего вида

$$\alpha_1(z) = z^3 + 6z^2 + 12z + 1, \quad \alpha_2(z) = z^2 + 3, \quad \alpha_3(z) = z^2 + 1.$$

Будем искать оптимальный дискретный наблюдатель третьего порядка ($k = 3$) с индексами наблюдаемости $k_1 = 2$, $k_2 = 1$, которые можно получить по формуле (4.4). Кроме того, сравним по критерию оптимальности наблюдатель в канонической форме Люенбергера с наблюдателем на основе скалярных наблюдателей.

Используя метод [9, гл. 4], основанный на скалярных наблюдателях, получаем следующие матрицы наблюдателя (1.8) третьего порядка:

$$N = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{pmatrix}, \quad T = \begin{pmatrix} 1 & \lambda_1 & \lambda_1^2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & \lambda_2 & \lambda_2^2 & 0 & 0 & \lambda_1 - \lambda_2 & (\lambda_1 - \lambda_2)\lambda_2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \lambda_3 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$P = \begin{pmatrix} \frac{1}{\lambda_2 - \lambda_1} & \frac{1}{\lambda_1 - \lambda_2} & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad V = \begin{pmatrix} 6 + \lambda_1 + \lambda_2 & -1 - \lambda_3 & -1 - \lambda_2 \\ -1 & -\lambda_3 & 0 \end{pmatrix},$$

$$M = \begin{pmatrix} -\alpha_1(\lambda_1) & 0 & 0 \\ -\alpha_1(\lambda_2) & 0 & (\lambda_2 - \lambda_1)\alpha_3(\lambda_2) \\ 0 & -\alpha_2(\lambda_3) & 0 \end{pmatrix},$$

где $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ — различные вещественные собственные значения наблюдателя. Передаточные матрицы от шумов w_i, v_i к ошибке e_i имеют вид

$$W_{ew}(z) = \begin{pmatrix} \frac{-1}{(z-\lambda_1)(z-\lambda_2)} & \frac{-z}{(z-\lambda_1)(z-\lambda_2)} & \frac{\lambda_1\lambda_2 - (\lambda_1 + \lambda_2)z}{(z-\lambda_1)(z-\lambda_2)} & \frac{1}{z-\lambda_3} & \frac{\lambda_3}{z-\lambda_3} & \frac{1}{z-\lambda_2} & \frac{\lambda_2}{z-\lambda_2} \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{z-\lambda_3} & \frac{\lambda_3}{z-\lambda_3} & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$W_{ev}(z) = \begin{pmatrix} \frac{(-\lambda_1 - \lambda_2 - 6)z^2 + (\lambda_1\lambda_2 - 12)z - 1}{(z-\lambda_1)(z-\lambda_2)} & \frac{(1 + \lambda_3)z - \lambda_3 + 3}{z-\lambda_3} & \frac{(1 + \lambda_2)z - \lambda_2 + 1}{z-\lambda_2} \\ 1 & \frac{\lambda_3 z + 3}{z-\lambda_3} & 0 \end{pmatrix}.$$

Используя формулы из раздела 1.3 главы 1 получаем, что критерий оптимальности (1.10) является рациональной функцией от параметров $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$. Для поиска этих параметров решается задача минимизации критерия оптимальности с ограничением устойчивости характеристического полинома:

$$|\lambda_1| < 1, \quad |\lambda_2| < 1, \quad |\lambda_3| < 1.$$

Численные результаты, которые получены с помощью метода последовательного квадратичного программирования [91, гл. 18], имеют вид

$$\lambda_1 \approx -0.3296; \quad \lambda_2 \approx -0.2403; \quad \lambda_3 \approx -0.0277; \quad J_\infty \approx 159.2793.$$

Матрицы оптимального наблюдателя третьего порядка, полученные предложенным в работе методом канонической формы Люенбергера, равны

$$N = \begin{pmatrix} 0 & -l_1 & 0 \\ 1 & -l_2 & 0 \\ 0 & 0 & -l_3 \end{pmatrix}, \quad T = \begin{pmatrix} -1 & 0 & l_1 & t_{14} & -l_1 & t_{16} & -l_1 \\ 0 & -1 & l_2 & 1 & t_{14} - l_2 & 1 & t_{16} - l_2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -l_3 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$M = \begin{pmatrix} 1 - 6l_1 + l_1l_2 & -3t_{14} + l_1(t_{14} - l_2) & -t_{16} + l_1(t_{16} - l_2) \\ 12 - 6l_2 - l_1 + l_2^2 & -3 + l_1 + l_2(t_{14} - l_2) & -1 + l_1 + l_2(t_{16} - l_2) \\ 0 & -3 - l_3^2 & 0 \end{pmatrix},$$

$$P = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad V = \begin{pmatrix} 6 - l_2 & -1 + l_2 - t_{14} & -1 + l_2 - t_{16} \\ -1 & l_3 & 0 \end{pmatrix},$$

где $l_1, l_2, l_3, t_{14}, t_{16}$ — пять (согласно формуле (4.10) количество параметров оптимального наблюдателя $\chi = 5$) переменных параметров оптимального наблюдателя, первые три из которых удовлетворяют условию дискретной устойчивости полиномов $\beta_1(z) = z^2 + l_2z + l_1$ и $\beta_2(z) = z + l_3$, т. е.

$$1 + l_2 + l_1 > 0, \quad 1 - l_2 + l_1 > 0, \quad l_1 < 1; \quad |l_3| < 1.$$

Левое матричное дробное описание передаточных функций имеет вид (4.8),

В котором:

$$\mathcal{N}_{ew}(z) = \begin{pmatrix} \mathcal{N}_{ew}^{1,1}(z) & \mathcal{N}_{ew}^{1,2}(z) & \mathcal{N}_{ew}^{1,3}(z) \\ \mathcal{N}_{ew}^{2,1}(z) & \mathcal{N}_{ew}^{2,2}(z) & \mathcal{N}_{ew}^{2,3}(z) \end{pmatrix}; \quad \mathcal{N}_{ew}^{1,1}(z) = \begin{pmatrix} -1 & -z & l_1 + l_2 z \end{pmatrix};$$

$$\mathcal{N}_{ew}^{1,2}(z) = \begin{pmatrix} t_{14} + z & -l_1 - (l_2 - t_{14})z \end{pmatrix};$$

$$\mathcal{N}_{ew}^{1,3}(z) = \begin{pmatrix} t_{16} + z & -l_1 - (l_2 - t_{16})z \end{pmatrix};$$

$$\mathcal{N}_{ew}^{2,1}(z) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}; \quad \mathcal{N}_{ew}^{2,2}(z) = \begin{pmatrix} 1 & -l_3 \end{pmatrix}; \quad \mathcal{N}_{ew}^{2,3}(z) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \end{pmatrix};$$

$$\mathcal{N}_{ev}(z) = \begin{pmatrix} \mathcal{N}_{ev}^{1,1}(z) & \mathcal{N}_{ev}^{1,2}(z) & \mathcal{N}_{ev}^{1,3}(z) \\ \mathcal{N}_{ev}^{2,1}(z) & \mathcal{N}_{ev}^{2,2}(z) & \mathcal{N}_{ev}^{2,3}(z) \end{pmatrix}; \quad \mathcal{D}(z) = \begin{pmatrix} \beta_1(z) & 0 \\ 0 & \beta_2(z) \end{pmatrix};$$

$$\mathcal{N}_{ev}^{1,1}(z) = (l_2 - 6)z^2 + (l_1 - 12)z - 1,$$

$$\mathcal{N}_{ev}^{1,2}(z) = (t_{14} - l_2 + 1)z^2 + (3 - l_1 + l_2)z + 3t_{14} + l_1,$$

$$\mathcal{N}_{ev}^{1,3}(z) = (t_{16} - l_2 + 1)z^2 + (1 - l_1 + l_2)z + t_{16} + l_1,$$

$$\mathcal{N}_{ev}^{2,1}(z) = z + l_3, \quad \mathcal{N}_{ev}^{2,2}(z) = -l_3 z + 3, \quad \mathcal{N}_{ev}^{2,3}(z) = 0.$$

Найденные с помощью формулиз раздела 1.3 главы 1 и метода последовательного квадратичного программирования [91, гл. 18] численные значения оптимальных параметров и критерия оптимальности имеют вид

$$l_1 \approx 0.135; \quad l_2 \approx 0.5882; \quad l_3 = 0; \quad t_{14} \approx 0.5488; \quad t_{16} \approx 0.4385; \quad J_\infty \approx 158.3497.$$

При этом коэффициенты l_1, l_2, l_3 характеристического полинома соответствуют корням, среди которых один вещественный и пара комплексно-сопряженных.

На рисунке 4.2 изображено расположение в области дискретной устойчивости ($|z| < 1$) на комплексной плоскости корней (красные точки) характеристического полинома наблюдателя, полученного методом приведения к канонической форме Люенбергера (рисунок 4.2, а), и наблюдателя, полученного методом скалярных наблюдателей (рисунок 4.2, б).

Таким образом, показано, что предложенный подход позволяет снять ограничение на вещественность спектра и увеличить оптимальность наблюдателя в сравнении с наблюдателем, полученным методом скалярных наблюдателей.

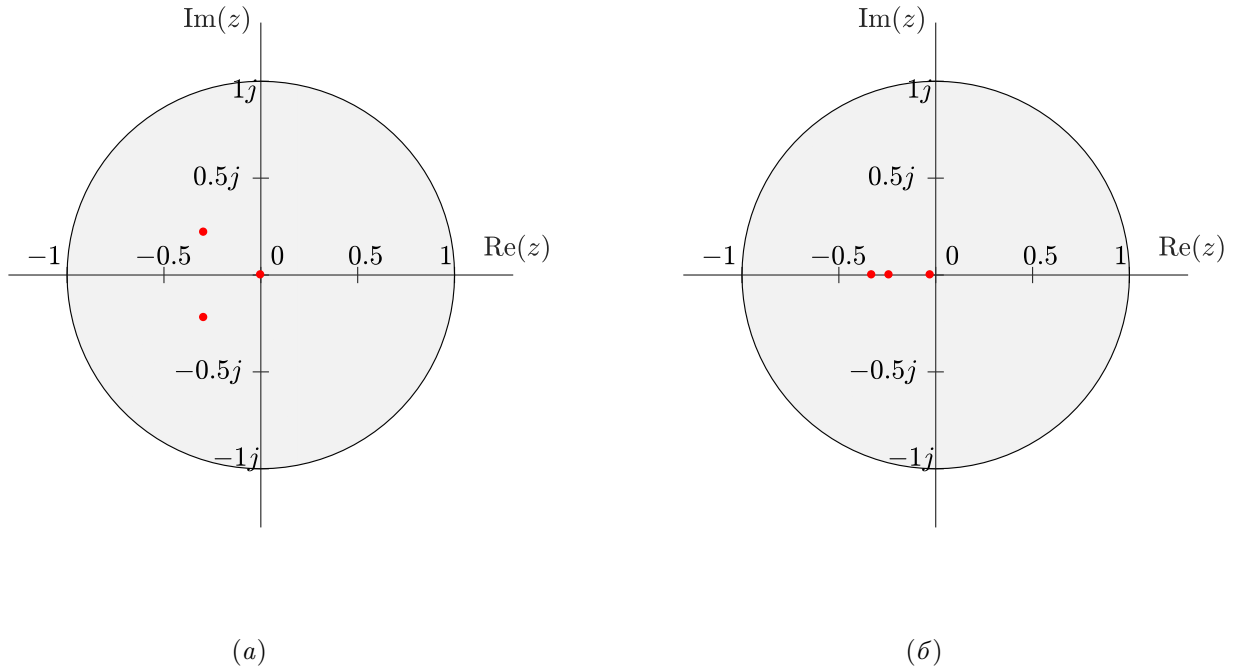


Рисунок 4.2. Расположение в области дискретной устойчивости ($|z| < 1$) на комплексной плоскости корней (красные точки) характеристического полинома: (а) наблюдателя, полученного методом приведения к канонической форме Люенбергера; и (б) наблюдателя, полученного методом скалярных наблюдателей в примере 4.2.

Пример 4.3. Рассмотрим задачу 2 для дискретной системы седьмого ($n = 7$) порядка (1.6), (1.7) с векторным ($l = 3$) выходом и для векторного ($p = 2$) линейного функционала (1.9), в которых

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 1 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -3 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & -2 \end{pmatrix}, \quad \bar{x}_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}; \quad \begin{aligned} Q &= P_0 = I_7, \quad R = I_3, \quad B = 0, \\ C &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \\ F &= \begin{pmatrix} 3 & -2 & -2 & 1 & 2 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & -1 & 1 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Данная система может быть преобразована к канонической форме Люенбергера (4.1) с индексами наблюдаемости $\nu_1 = 3$, $\nu_2 = 2$, $\nu_3 = 2$. После преобразования координат вектора состояния и преобразования выходов [9, с. 33]

пара $\{C, A\}$ будет иметь тот же вид канонической формы Люенбергера, что и в примере 4.2.

Будем искать оптимальный дискретный наблюдатель третьего ($k = 3$) порядка с индексами наблюдаемости $k_1 = 2$, $k_2 = 1$, которые можно получить по формуле (4.4). Кроме того, сравним по критерию оптимальности наблюдатель, полученный методом приведения к канонической форме Люенбергера с наблюдателем на основе скалярных наблюдателей.

Используя метод [9, гл. 4], основанный на скалярных наблюдателях, получаем следующие матрицы наблюдателя (1.8) третьего порядка:

$$N = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{pmatrix}, \quad P = \begin{pmatrix} \frac{1}{\lambda_2 - \lambda_1} & \frac{1}{\lambda_1 - \lambda_2} & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad V = \begin{pmatrix} \lambda_1 - \lambda_2 - \lambda_3 + 3 & -1 - \lambda_3 & -1 - \lambda_2 \\ -\lambda_3 - 1 & -\lambda_3 & 0 \end{pmatrix},$$

$$M = \begin{pmatrix} -\lambda_1^3 - 6\lambda_1^2 - 10\lambda_1 - 3 & -2 & \lambda_1 \\ \lambda_2^2 - 6\lambda_2 - 7\lambda_1\lambda_2 - 2\lambda_1\lambda_2^2 - 4\lambda_1 + \lambda_2^3 - 3 & \lambda_2(4\lambda_1 - 4\lambda_2) - 2 & \lambda_2 - (\lambda_2^2 + 1)(\lambda_1 - \lambda_2) \\ -\lambda_3(\lambda_3 + 1) & -\lambda_3^2 - 3 & 2\lambda_3 \end{pmatrix},$$

$$T = \begin{pmatrix} \lambda_1^2 + 5\lambda_1 + 6 & 0 & -1 & \lambda_1 + 2 & 0 & 1 & 1 \\ (\lambda_1 + 3)(\lambda_2 + 2) & \lambda_2 - \lambda_1 & \lambda_2(\lambda_1 - \lambda_2) - 1 & \lambda_1 + 2 & \lambda_1 - \lambda_2 & \lambda_1 - \lambda_2 + 1 & 1 \\ 2\lambda_3 + 3 & \lambda_3 & -1 & 1 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

где $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ — различные вещественные собственные значения наблюдателя.

Используя формулы из раздела 1.3 главы 1 получаем, что критерий оптимальности (1.10) является рациональной функцией от параметров $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$. Для поиска этих параметров решается задача минимизации критерия оптимальности с ограничением устойчивости характеристического полинома:

$$|\lambda_1| < 1, \quad |\lambda_2| < 1, \quad |\lambda_3| < 1.$$

Численные результаты, которые получены с помощью метода последовательного квадратичного программирования [91, гл. 18], имеют вид

$$\lambda_1 \approx -0.6584; \quad \lambda_2 \approx 0.3999; \quad \lambda_3 \approx 0.2767; \quad J_\infty \approx 72.9248.$$

Матрицы оптимального наблюдателя третьего порядка, полученные предложенным в работе методом канонической формы Люенбергера, равны

$$N = \begin{pmatrix} 0 & -l_1 & 0 \\ 1 & -l_2 & 0 \\ 0 & 0 & -l_3 \end{pmatrix}, \quad P = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad V = \begin{pmatrix} 2l_2 - 2t_{16} - t_{14} + 3 & -1 + l_2 - t_{14} & -1 + l_2 - t_{16} \\ & l_3 - 1 & l_3 & 0 \end{pmatrix},$$

$$M = \begin{pmatrix} 2l_1 - 4t_{16} + l_1l_2 + l_1(t_{14} - l_2) + 2l_1(t_{16} - l_2) + 3 & l_1(t_{14} - l_2) - 4l_1 - 3t_{14} + 2 & l_1(t_{16} - l_2) - 2l_1 - t_{16} \\ 2l_1 - 7t_{16} - t_{14} + 2l_2 + l_2(t_{14} - l_2) + 2l_2(t_{16} - l_2) + l_2^2 + 6 & 4t_{16} + l_1 - 4l_2 + l_2(t_{14} - l_2) - 3 & 2t_{14} + l_1 - 2l_2 + l_2(t_{16} - l_2) - 2 \\ & -l_3^2 + l_3 & -l_3^2 - 3 & -2l_3 \end{pmatrix},$$

$$T = \begin{pmatrix} 3t_{14} + 2t_{16} - 2l_1 - 6 & -t_{16} - l_1 & 1 - l_1 - t_{14} & t_{14} + t_{16} - 2 & t_{14} + t_{16} & t_{16} - 1 & -1 \\ & 2t_{14} + t_{16} - 2l_2 & t_{14} - l_2 - 1 & t_{16} - l_2 - 1 & 1 & 2 & 1 & 0 \\ & 3 - 2l_3 & -l_3 & -1 & 1 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

где $l_1, l_2, l_3, t_{14}, t_{16}$ — пять (согласно формуле (4.10) количество параметров оптимального наблюдателя $\chi = 5$) переменных параметров оптимального наблюдателя, первые три из которых удовлетворяют условию дискретной устойчивости полиномов $\beta_1(z) = z^2 + l_2z + l_1$ и $\beta_2(z) = z + l_3$, т. е.

$$1 + l_2 + l_1 > 0, \quad 1 - l_2 + l_1 > 0, \quad l_1 < 1; \quad |l_3| < 1.$$

Левое матричное дробное описание передаточных функций имеет вид (4.8), в котором:

$$\mathcal{N}_{ew}(z) = \begin{pmatrix} \mathcal{N}_{ew}^{1,1}(z) & \mathcal{N}_{ew}^{1,2}(z) & \mathcal{N}_{ew}^{1,3}(z) \\ \mathcal{N}_{ew}^{2,1}(z) & \mathcal{N}_{ew}^{2,2}(z) & \mathcal{N}_{ew}^{2,3}(z) \end{pmatrix}; \quad \mathcal{N}_{ev}(z) = \begin{pmatrix} \mathcal{N}_{ev}^{1,1}(z) & \mathcal{N}_{ev}^{1,2}(z) & \mathcal{N}_{ev}^{1,3}(z) \\ \mathcal{N}_{ev}^{2,1}(z) & \mathcal{N}_{ev}^{2,2}(z) & \mathcal{N}_{ev}^{2,3}(z) \end{pmatrix};$$

$$\mathcal{N}_{ew}^{1,1}(z) = \left((2(t_{14} - l_2) + t_{16})z + 3(t_{14} - 2) + 2(t_{16} - l_1) \quad (t_{14} - l_2 - 1)z - l_1 - t_{16} \quad (t_{16} - l_2 - 1)z - l_1 - t_{14} + 1 \right);$$

$$\mathcal{N}_{ew}^{1,2}(z) = \left(z + t_{14} + t_{16} - 2 \quad 2z + t_{14} + t_{16} \right); \quad \mathcal{N}_{ew}^{1,3}(z) = \left(z + t_{16} - 1 \quad -1 \right);$$

$$\mathcal{N}_{ew}^{2,1}(z) = \left(3 - 2l_3 \quad -l_3 \quad -1 \right); \quad \mathcal{N}_{ew}^{2,2}(z) = \left(1 \quad 1 \right); \quad \mathcal{N}_{ew}^{2,3}(z) = \left(0 \quad 0 \right);$$

$$\mathcal{N}_{ev}^{1,1}(z) = (t_{14} + 2t_{16} - 2l_2 - 3)z^2 + (t_{14} + 7t_{16} - 2l_1 - 5l_2 - 6)z + 4t_{16} - 5l_1 - 3;$$

$$\mathcal{N}_{ev}^{1,2}(z) = (t_{14} - l_2 + 1)z^2 + (5l_2 - l_1 - 4t_{16} + 3)z + 3t_{14} + 5l_1 - 2;$$

$$\mathcal{N}_{ev}^{1,3}(z) = (t_{16} - l_2 + 1)z^2 + (3l_2 - l_1 - 2t_{14} + 2)z + t_{14} + 3l_1;$$

$$\mathcal{N}_{ev}^{2,1}(z) = z(1 - l_3); \mathcal{N}_{ev}^{2,2}(z) = -l_3z + 3; \mathcal{N}_{ev}^{2,3}(z) = 2l_3; \mathcal{D}(z) = \begin{pmatrix} \beta_1(z) & 0 \\ 0 & \beta_2(z) \end{pmatrix}.$$

Найденные с помощью формул из раздела 1.3 главы 1 и метода последовательного квадратичного программирования [91, гл. 18] численные значения оптимальных параметров и критерия оптимальности имеют вид

$$l_1 \approx -0.1038; l_2 \approx 0.1425; l_3 \approx 0.1857; t_{14} \approx 0.8712; t_{16} \approx 0.786; J_\infty \approx 47.472.$$

На рисунке 4.3 показана динамика аналитического значения среднеквадратичной ошибки для рассмотренных наблюдателей третьего порядка: наблюдателя, полученного методом приведения к канонической форме Люенбергера (синие точки) и наблюдателя, синтезированного с помощью метода скалярных наблюдателей (красные точки).

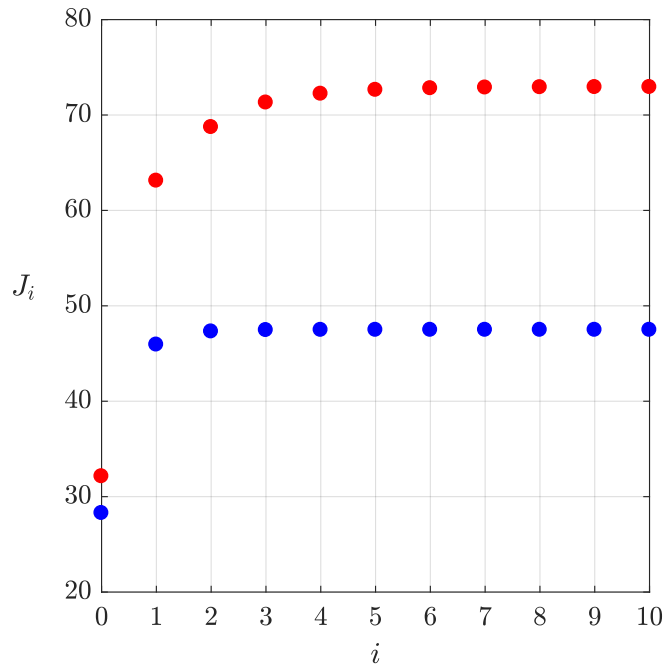


Рисунок 4.3. Динамика изменения среднеквадратичных ошибок J_i : синие точки для наблюдателя, построенного методом приведения к канонической форме Люенбергера; красные точки для наблюдателя, построенного методом скалярных наблюдателей в примере 4.3.

Таким образом, показано, что предложенный подход приведения к канонической форме Люенбергера позволяет существенно увеличить оптимальность

наблюдателей по сравнению с наблюдателем, полученным методом скалярных наблюдателей, без изменения порядка наблюдателя.

4.4. Выводы к четвертой главе

В четвертой главе решена задача построения оптимальных наблюдателей для стохастических многосвязных как непрерывных, так и дискретных объектов управления с векторным выходом и векторным линейным функционалом, подлежащим восстановлению.

Представлена структура таких наблюдателей в каноническом базисе Люенбергера. Предложена формула для нахождения общего количества неизвестных параметров оптимальных наблюдателей в канонической форме и представлено левое матричное дробное описание передаточной функции для системы в отклонениях.

На численных примерах многосвязных систем седьмого порядка показано, что с помощью предложенного подхода повышается оптимальность наблюдателей по сравнению с наблюдателями на основе скалярных наблюдателей. Кроме того, предложенный подход позволяет синтезировать оптимальные наблюдатели, порядок которых меньше, чем гарантированный порядок наблюдателя.

Заключение

Основные результаты работы автора заключаются в следующем.

1. Сформулированы и доказаны необходимые и достаточные условия существования несмещенных оценок, формируемых при решении задачи, объединяющей две классические задачи теории управления: стабилизации посредством управления с обратной связью и оптимального наблюдения, и задачи диагностики неисправностей для линейных стационарных динамических систем при аддитивных белых шумах.
2. Представлены аналитические выражения для передаточных функций системы в отклонениях и оптимальных наблюдателей различных динамических порядков как для непрерывных, так и для дискретных динамических систем как со скалярными, так и с векторными измеряемым выходом и оцениваемым линейным функционалом от вектора состояния.
3. Сформулированы и доказаны необходимые и достаточные условия существования и единственности оптимальных наблюдателей второго и третьего динамических порядков в каноническом базисе.
4. Разработаны методы решения задачи построения оптимальных наблюдателей (систем дифференциальных уравнений) пониженного порядка, основанные на сведении задач оптимального наблюдения к задачам нелинейной оптимизации на невыпуклом множестве допустимых параметров и аналитическом вычислении передаточных функций динамических систем в отклонениях.

Результаты диссертационной работы могут представлять интерес для специалистов, работающих в области теории управления динамическими системами.

Дальнейшие исследования могут быть связаны с применением разработанного подхода к задачам фильтрации для допускающих статистическую линеаризацию нелинейных систем при случайных воздействиях, в том числе цветных и мультипликативных шумах. Кроме того, в связи с наличием различных канонических форм для описания объектов управления с векторным выходом, возможно развитие подхода к построению оптимальных наблюдателей для многосвязных динамических систем.

Автор выражает благодарность своему научному руководителю, доктору физико–математических наук Василию Владимировичу Фомичеву за постановку задачи и внимание к работе, профессорско–преподавательскому составу факультета ВМК МГУ имени М.В. Ломоносова за полученное образование, а также всем сотрудникам кафедры Нелинейных динамических систем и процессов управления факультета ВМК МГУ имени М.В. Ломоносова за поддержку и внимание к диссертационной работе.

Литература

1. *Nagpal K. M., Helmick R. E., Sims C. S.* Reduced-order estimation part 1. Filtering // International Journal of Control. — 1987. — Vol. 45, no. 6. — P. 1867–1888.
2. *Домбровский В. В.* О синтезе и устойчивости непрерывных и дискретных линейных фильтров пониженного порядка // Автоматика и телемеханика. — 1989. — № 11. — с. 91–99.
3. *Darouach M.* On the optimal unbiased functional filtering // IEEE Transactions on Automatic Control. — 2000. — Vol. 45, no. 7. — P. 1374–1379.
4. *Darouach M., Zasadzinski M.* Reduced order filtering for stochastic discrete-time systems with unknown inputs // IFAC Proceedings Volumes. — 2002. — Vol. 35, no. 1. — P. 133–138.
5. *Geromel J. C., Levin G.* Suboptimal reduced-order filtering through an LMI-based method // IEEE transactions on signal processing. — 2006. — Vol. 54, no. 7. — P. 2588–2595.
6. *Darouach M., Ali H. S.* Optimal unbiased functional filtering in the frequency domain // Systems Science & Control Engineering: An Open Access Journal. — 2014. — Vol. 2, no. 1. — P. 308–315.
7. *Darouach M., Fernando T.* H_∞ Functional filtering for linear systems with unknown inputs // IEEE Transactions on Automatic Control. — 2020.
8. *Коровин С., Медведев И., Фомичев В.* Функциональные наблюдатели минимального порядка // Нелинейная динамика и управление. Сборник статей. Выпуск 5. — 2006.
9. *Коровин С. К., Фомичев В. В.* Наблюдатели состояния для линейных систем с неопределенностью. — Москва : ФИЗМАТЛИТ, 2007.

10. *Красовский А. А.* О степени устойчивости линейных систем // Труды военно-воздушной инженерной академии им. Н.Е. Жуковского. — 1946. — № 281.
11. *Gessing R.* State estimation for linear systems with observations partially corrupted by noise // Systems & control letters. — 1992. — Vol. 18, no. 2. — P. 139–145.
12. *Nakamizo T.* Reduced-order functional estimator for linear stochastic systems // Statistical methods in control and signal processing. — 1997.
13. *Simon D.* Reduced Order Kalman Filtering without Model Reduction. // Control & Intelligent Systems. — 2007. — Vol. 35, no. 2.
14. Бортовые терминальные системы управления / Б. Н. Петров [и др.]. — Москва : Машиностроение, 1983.
15. *Kamenshchikov M.* Conditions for existence of second-order and third-order filters for discrete systems with additive noises // Mathematics. — 2022. — Vol. 10, no. 3.
16. *Каменщиков М. А., Капалин И. В.* Метод построения оптимального функционального фильтра для линейных стационарных стохастических систем // Вестник Московского университета. Серия 15: Вычислительная математика и кибернетика. — 2018. — № 4. — с. 19–26.
17. *Каменщиков М. А.* Передаточные функции оптимальных фильтров различных динамических порядков для дискретных систем // Вестник Московского университета. Серия 15: Вычислительная математика и кибернетика. — 2021. — № 2. — с. 19–28.
18. *Фомичев В. В., Каменщиков М. А.* Сравнительный анализ оптимальных фильтров второго и третьего порядков для непрерывных систем // Дифференциальные уравнения. — 2021. — т. 57, № 11. — с. 1546–1554.

19. *Фомичев В. В., Каменщиков М. А.* Синтез субоптимальных фильтров для многосвязных дискретных систем // Дифференциальные уравнения. — 2022. — т. 58, № 8. — с. 1105—1111.
20. *Каменщиков М. А., Капалин И. В.* Обобщение условия несмещённости фильтра для замкнутых систем // Дифференциальные уравнения. — 2018. — т. 54, № 2. — с. 286—287.
21. *Каменщиков М. А., Капалин И. В.* Численное моделирование линейной стохастической системы в задаче оптимальной фильтрации пониженного порядка // Дифференциальные уравнения. — 2018. — т. 54, № 8. — с. 1142—1143.
22. *Капалин И. В., Каменщиков М. А.* Подход к вычислению стабилизатора пониженного порядка // Дифференциальные уравнения. — 2019. — т. 55, № 8. — с. 1163—1164.
23. *Каменщиков М. А., Капалин И. В.* Метод синтеза оптимального функционального фильтра для линейных стохастических систем // Сборник трудов XIII Всероссийского совещания по проблемам управления ВСПУ-2019 / под ред. Д. А. Новикова. — Москва : ИПУ РАН, 2019. — с. 853—857.
24. *Каменщиков М. А., Фомичев В. В.* Синтез субоптимальных фильтров для многосвязных стохастических систем // материалы Международной конференции Теория оптимального управления и приложения (ОСТА 2022). — Екатеринбург : Издательство УМЦ УПИ, 2022. — с. 94—97.
25. *Каменщиков М. А.* Метод синтеза функциональных оптимальных наблюдателей для линейных динамических систем с шумами // Ломоносов-2018: сборник тезисов XXV международной научной конференции студентов, аспирантов и молодых ученых: секция Вычислительная математика и кибернетика. — Москва : МАКС Пресс, 2018. — с. 22—23.

26. *Каменщиков М. А.* Условие несмещенности в совместной задаче стабилизации и оптимальной фильтрации // Ломоносов-2019: сборник тезисов XXVI международной научной конференции студентов, аспирантов и молодых ученых: секция Вычислительная математика и кибернетика. — Москва : МАКС Пресс, 2019. — с. 24—25.
27. *Фомичев В. В., Каменщиков М. А.* О функциональных наблюдателях для линейных систем со стохастическими возмущениями // Тихоновские чтения: научная конференция: тезисы докладов. — Москва : МАКС Пресс, 2019. — с. 9—9.
28. *Фомичев В. В., Каменщиков М. А.* Методы построения фильтров пониженного порядка // Тихоновские чтения: научная конференция: тезисы докладов. — Москва : МАКС Пресс, 2020. — с. 8—8.
29. *Фомичев В. В., Каменщиков М. А.* Сравнение оптимальных фильтров второго и третьего порядка в установившемся режиме // Ломоносовские чтения: научная конференция: тезисы докладов. — Москва : МАКС Пресс, 2021. — с. 151—152.
30. *Фомичев В. В., Каменщиков М. А.* О задаче субоптимальной фильтрации для стохастических многосвязных систем // Ломоносовские чтения: научная конференция: тезисы докладов. — Москва : МАКС Пресс, 2022. — с. 91—92.
31. *Стратонович Р.* Оптимальные нелинейные системы, осуществляющие выделение сигнала с постоянными параметрами из шума // Известия вузов СССР, серия «Радиофизика. — 1959. — т. 2. — с. 862—901.
32. *Stratonovich R. L.* Application of the Markov processes theory to optimal filtering // Radio Engineering and Electronic Physics. — 1960. — Vol. 5. — P. 1—19.

33. *Kalman R. E.* A new approach to linear filtering and prediction problems. — 1960.
34. *Kalman R. E., Bucy R. S.* New results in linear filtering and prediction theory. — 1961.
35. *Gauss C. F.* Theoria motus corporum coelestium in sectionibus conicis solem ambientium auctore Carolo Friderico Gauss. — sumtibus Frid. Perthes et IH Besser, 1809.
36. *Legendre A. M.* Nouvelles méthodes pour la détermination des orbites des comètes; par AM Legendre... — 1806.
37. *Колмогоров А. Н.* Интерполирование и экстраполирование стационарных случайных последовательностей // Известия Российской академии наук. Серия математическая. — 1941. — т. 5, № 1. — с. 3–14.
38. Extrapolation, interpolation, and smoothing of stationary time series: with engineering applications. Vol. 113 / N. Wiener [et al.]. — MIT press Cambridge, MA, 1949.
39. *Пугачев В. С.* Случайные функции, определяемые обыкновенными дифференциальными уравнениями // Труды военно-воздушной академии им. Н.Е. Жуковского. — 1944. — № 118.
40. *Kailath T.* A view of three decades of linear filtering theory // IEEE Transactions on Information Theory. — 1974. — Vol. 20, no. 2. — P. 146–181.
41. *Степанов О. А.* Фильтр Калмана: история и современность // Гироскопия и навигация. — 2010. — т. 69, № 2. — с. 107–121.
42. *Luenberger D.* Observers for multivariable systems // IEEE Transactions on Automatic Control. — 1966. — Vol. 11, no. 2. — P. 190–197.
43. *O'Reilly J.* Observers for linear systems. — London : Academic press, 1983.

44. Асимптотические наблюдатели состояния неопределенных векторных линейных систем / С. Коровин [и др.] // Доклады Академии наук. т. 396. — Федеральное государственное бюджетное учреждение "Российская академия наук". 2004. — с. 469—473.
45. *Коровин С., Медведев И., Фомичев В.* Функциональные наблюдатели для линейных неопределенных стационарных динамических систем // Доклады Академии наук. т. 411. — Федеральное государственное бюджетное учреждение "Российская академия наук". 2006. — с. 30—36.
46. *Bryson A., Johansen D.* Linear filtering for time-varying systems using measurements containing colored noise // IEEE Transactions on Automatic Control. — 1965. — Vol. 10, no. 1. — P. 4–10.
47. *Aoki M., Huddle J.* Estimation of the state vector of a linear stochastic system with a constrained estimator // IEEE Transactions on Automatic Control. — 1967. — Vol. 12, no. 4. — P. 432–433.
48. *Brammer K.* Lower order optimal linear filtering of nonstationary random sequences // IEEE Transactions on Automatic Control. — 1968. — Vol. 13, no. 2. — P. 198–199.
49. *Tse E., Athans M.* Optimal minimal-order observer-estimators for discrete linear time-varying systems // IEEE Transactions on Automatic Control. — 1970. — Vol. 15, no. 4. — P. 416–426.
50. *Овчаренко В. Н.* Синтез субоптимального фильтра заданного порядка // Автоматика и телемеханика. — 1978. — № 5. — с. 45—51.
51. *Домбровский В. В.* Метод синтеза субоптимальных фильтров пониженного порядка для дискретных линейных динамических систем // Автоматика и телемеханика. — 1981. — № 11. — с. 66—73.
52. *Sims C. S.* Reduced-order modeling and filtering // Control and dynamic systems. Vol. 18. — Elsevier, 1982. — P. 55–103.

53. *Kamenshchikov M. A., Kapalin I. V.* A Procedure for Constructing Optimum Functional Filters for Linear Stationary Stochastic Systems // Moscow University Computational Mathematics and Cybernetics. — 2018. — Vol. 42, no. 4. — P. 163–170.
54. *Singh S., Janardhanan S.* Sliding mode control-based linear functional observers for discrete-time stochastic systems // International Journal of Systems Science. — 2017. — Vol. 48, no. 15. — P. 3246–3253.
55. *Yamada S., Ohki K.* On a New Low-Rank Kalman-Bucy Filter and its Convergence Property // Proceedings of the ISCIE International Symposium on Stochastic Systems Theory and its Applications. Vol. 2021. — The ISCIE Symposium on Stochastic Systems Theory, Its Applications. 2021. — P. 16–20.
56. *Yamada S., Ohki K.* Comparison of estimation error between two different low-rank Kalman-Bucy filters // 2021 60th Annual Conference of the Society of Instrument and Control Engineers of Japan (SICE). — IEEE. 2021. — P. 462–467.
57. Frequency-weighted \mathcal{H}_2 -pseudo-optimal model order reduction / U. Zulfiqar [et al.] // IMA Journal of Mathematical Control and Information. — 2021. — Vol. 38, no. 2. — P. 622–653.
58. Frequency-weighted \mathcal{H}_2 -optimal model order reduction via oblique projection / U. Zulfiqar [et al.] // International Journal of Systems Science. — 2022. — Vol. 53, no. 1. — P. 182–198.
59. *Kaplan E., Hegarty C.* Understanding GPS: principles and applications. — Artech house, 2005.
60. *Aalto H.* Simplified Design of H_2 -suboptimal Reduced-order Filters // IFAC Proceedings Volumes. — 2013. — Vol. 46, no. 13. — P. 230–235.

61. Reduced Kalman filtering for indirect adaptive control of the induction motor / L. Glielmo [et al.] // International journal of adaptive control and signal processing. — 1994. — Vol. 8, no. 6. — P. 527–541.
62. *Soto G. G., Mendes E., Razek A.* Reduced-order observers for rotor flux, rotor resistance and speed estimation for vector controlled induction motor drives using the extended Kalman filter technique // IEE Proceedings-Electric Power Applications. — 1999. — Vol. 146, no. 3. — P. 282–288.
63. *Burl J. B.* A reduced order extended Kalman filter for sequential images containing a moving object // IEEE transactions on image processing. — 1993. — Vol. 2, no. 3. — P. 285–295.
64. *Patti A. J., Tekalp A. M., Sezan M. I.* A new motion-compensated reduced-order model Kalman filter for space-varying restoration of progressive and interlaced video // IEEE transactions on image processing. — 1998. — Vol. 7, no. 4. — P. 543–554.
65. *Pham D. T., Verron J., Roubaud M. C.* A singular evolutive extended Kalman filter for data assimilation in oceanography // Journal of Marine systems. — 1998. — Vol. 16, no. 3/4. — P. 323–340.
66. *Weerts A. H., El Serafy G. Y.* Particle filtering and ensemble Kalman filtering for state updating with hydrological conceptual rainfall-runoff models // Water resources research. — 2006. — Vol. 42, no. 9.
67. *Charleston S., Azimi-Sadjadi M. R.* Reduced order Kalman filtering for the enhancement of respiratory sounds // IEEE Transactions on Biomedical Engineering. — 1996. — Vol. 43, no. 4. — P. 421–424.
68. *Kwakernaak H., Sivan R.* Linear optimal control systems. — Wiley-interscience, New York, 1972.
69. *Домбровский В. В.* Понижение порядка систем оценивания и управления. — Томск: Издательство Томского университета, 1994.

70. *Simon D.* Optimal state estimation: Kalman, H infinity, and nonlinear approaches. — John Wiley & Sons, 2006.
71. *Åström K. J.* Introduction to stochastic control theory. — Courier Corporation, 1970.
72. *Oksendal B.* Stochastic differential equations: an introduction with applications. — Springer Science & Business Media, 2013.
73. *Brammer K., Siffing G.* Kalman-Bucy-Filter: Deterministische Beobachtung und stochastische Filterung. — Walter de Gruyter GmbH & Co KG, 2014.
74. *Куржанский А. Б.* Об аналитическом конструировании регулятора в системе с помехой, зависящей от управления // Дифференциальные уравнения. — 1965. — т. 1, № 2. — с. 204—213.
75. *Братусь А. С., Черноусько Ф. Л.* Численное решение задач оптимальной коррекции при случайных возмущениях // Журнал вычислительной математики и математической физики. — 1974. — т. 14, № 1. — с. 68—78.
76. *Острем К. Ю.* Введение в стохастическую теорию управления. — Москва, 1973.
77. *Оксендаль Б.* Стохастические дифференциальные уравнения. Введение в теорию и приложения. — М.: Мир, 2003.
78. *Квакернаак Х., Сиван Р.* Линейные оптимальные системы управления. — Москва, 1977.
79. Fault detection of dynamical systems using first-order functional observers / Н. Trinh [et al.] // 2013 IEEE 8th International Conference on Industrial and Information Systems. — IEEE. 2013. — P. 197–200.
80. *Волков И., Зуев С., Цветкова Г.* Случайные процессы: учебник для вузов/под ред. ВС Зарубина, АП Крищенко // М.: МГТУ им. Баумана. — 1999.

81. *Saberi A., Stoorvogel A. A., Sannuti P.* Filtering theory: with applications to fault detection, isolation, and estimation. — Springer, 2007.
82. *Бесекерский В. А., Попов Е. П.* Теория систем автоматического управления. — Профессия, 2003.
83. *Jury E., Dewey A.* A general formulation of the total square integrals for continuous systems // IEEE Transactions on Automatic Control. — 1965. — Vol. 10, no. 1. — P. 119–120.
84. *Солодовников В.* Техническая кибернетика. Теория автоматического регулирования. Кн. 1: Математическое описание, анализ устойчивости и качества систем автоматического регулирования // М.: Машиностроение. — 1967.
85. *Jury E.* A note on the evaluation of the total square integral // IEEE Transactions on Automatic Control. — 1965. — Vol. 10, no. 1. — P. 110–111.
86. *Greaves C., Gagne G., Bordner G.* Evaluation of integrals appearing in minimization problems of discrete-data systems // IEEE Transactions on Automatic Control. — 1966. — Vol. 11, no. 1. — P. 145–148.
87. *Баландин Д., Коган М.* Использование LMI toolbox пакета Matlab в синтезе законов управления // Учебно-методические материалы по программе повышения квалификации «Информационные технологии и компьютерная математика». Нижний Новгород. — 2006.
88. Sampling and sampled-data models / G. C. Goodwin [et al.] // Proceedings of the 2010 American Control Conference. — IEEE. 2010. — P. 1–20.
89. *Ивченко Г. И., Медведев Ю. И.* Введение в математическую статистику. — ЛКИ, 2010.
90. *Гантмахер Ф.* Теория матриц. — Москва, 2004.
91. *Nocedal J., Wright S. J.* Numerical optimization. — Springer, 2006.

92. *Julier S. J., Uhlmann J. K.* New extension of the Kalman filter to nonlinear systems // Signal processing, sensor fusion, and target recognition VI. Vol. 3068. — Spie. 1997. — P. 182–193.
93. *Van Der Merwe R., Wan E. A.* The square-root unscented Kalman filter for state and parameter-estimation // 2001 IEEE international conference on acoustics, speech, and signal processing. Proceedings (Cat. No. 01CH37221). Vol. 6. — IEEE. 2001. — P. 3461–3464.
94. *Liénard A., Chipart M.* Sur le signe de la partie réelle des racines d'une équation algébrique // J. Math. Pures Appl. — 1914. — Vol. 10, no. 6. — P. 291–346.
95. *Jury E.* A simplified stability criterion for linear discrete systems // Proceedings of the IRE. — 1962. — Vol. 50, no. 6. — P. 1493–1500.
96. *Kailath T.* Linear systems. — Prentice-Hall Englewood Cliffs, NJ, 1980.
97. *Chen C.-T.* Linear System Theory and Design. — Oxford University Press, 1999.
98. *Luenberger D.* Canonical forms for linear multivariable systems // IEEE Transactions on Automatic Control. — 1967. — Vol. 12, no. 3. — P. 290–293.
99. *Ильин А. В., Коровин С. К., Фомичев В. В.* Методы робастного обращения динамических систем. — Москва : ФИЗМАТЛИТ, 2009.
100. *Tsui C.-C.* A new design approach to unknown input observers // IEEE Transactions on Automatic Control. — 1996. — Vol. 41, no. 3. — P. 464–468.

Публикации автора по теме диссертации

1. *Каменщиков М. А., Капалин И. В.* Метод построения оптимального функционального фильтра для линейных стационарных стохастических систем // Вестник Московского университета. Серия 15: Вычислительная математика и кибернетика. — 2018. — № 4. — с. 19–26. — (Двухлетний импакт-фактор РИНЦ 2018 — 0.305). — Перевод:
Kamenshchikov M. A., Kapalin I. V. A Procedure for Constructing Optimum Functional Filters for Linear Stationary Stochastic Systems // Moscow University Computational Mathematics and Cybernetics. — 2018. — Vol. 42, no. 4. — P. 163–170. — (RSCI).
Автором разработаны методы решения задач и получены все основные результаты, а И.В. Капалиным поставлены задачи и намечены направления их решения.
2. *Каменщиков М. А.* Передаточные функции оптимальных фильтров различных динамических порядков для дискретных систем // Вестник Московского университета. Серия 15: Вычислительная математика и кибернетика. — 2021. — № 2. — с. 19–28. — (Двухлетний импакт-фактор РИНЦ 2021 — 0.077). — Перевод:
Kamenshchikov M. A. Transfer functions of optimum filters of different dynamic orders for discrete systems // Moscow University Computational Mathematics and Cybernetics. — 2021. — Vol. 45, no. 2. — P. 60–70. — (RSCI).
3. *Фомичев В. В., Каменщиков М. А.* Сравнительный анализ оптимальных фильтров второго и третьего порядков для непрерывных систем // Дифференциальные уравнения. — 2021. — т. 57, № 11. — с. 1546–1554. — (Двухлетний импакт-фактор РИНЦ 2021 — 8.043). — Перевод:
Fomichev V., Kamenshchikov M. Comparative analysis of optimal filters

of the second and third order for continuous-time systems // *Differential Equations*. — 2021. — Vol. 57, no. 11. — P. 1527–1535. — (RSCI, Web of Science, Scopus, Impact Factor 2021 — 0.784, CiteScore 2021 — 1.3).

Автором разработаны методы решения задач и получены все основные результаты. Научным руководителем, профессором В.В. Фомичевым поставлены задачи и намечены направления их решения.

4. *Kamenshchikov M.* Conditions for existence of second-order and third-order filters for discrete systems with additive noises // *Mathematics*. — 2022. — Vol. 10, no. 3. — (Web of Science, Scopus, Impact Factor 2021 — 2.592, CiteScore 2021 — 2.9).
5. *Фомичев В. В., Каменщиков М. А.* Синтез субоптимальных фильтров для многосвязных дискретных систем // *Дифференциальные уравнения*. — 2022. — т. 58, № 8. — с. 1105–1111. — (Двухлетний импакт-фактор РИНЦ 2021 — 8.043). — Перевод:
Fomichev V., Kamenshchikov M. Synthesis of suboptimal filters for multi-variable multicriteria discrete systems // *Differential Equations*. — 2022. — Vol. 58, no. 8. — P. 1097–1104. — (RSCI, Web of Science, Scopus, Impact Factor 2021 — 0.784, CiteScore 2021 — 1.3).

Автором разработаны методы решения задач и получены все основные результаты. Научным руководителем, профессором В.В. Фомичевым поставлены задачи и намечены направления их решения.

Иные публикации автора по теме диссертации

6. *Каменщиков М. А., Капалин И. В.* Обобщение условия несмещённости фильтра для замкнутых систем // *Дифференциальные уравнения*. — 2018. — т. 54, № 2. — с. 286–287.

7. *Каменщиков М. А., Капалин И. В.* Численное моделирование линейной стохастической системы в задаче оптимальной фильтрации пониженного порядка // Дифференциальные уравнения. — 2018. — т. 54, № 8. — с. 1142—1143.
8. *Каменщиков М. А.* Метод синтеза функциональных оптимальных наблюдателей для линейных динамических систем с шумами // Ломоносов-2018: сборник тезисов XXV международной научной конференции студентов, аспирантов и молодых ученых: секция Вычислительная математика и кибернетика. — Москва : МАКС Пресс, 2018. — с. 22—23.
9. *Капалин И. В., Каменщиков М. А.* Подход к вычислению стабилизатора пониженного порядка // Дифференциальные уравнения. — 2019. — т. 55, № 8. — с. 1163—1164.
10. *Каменщиков М. А., Капалин И. В.* Метод синтеза оптимального функционального фильтра для линейных стохастических систем // Сборник трудов XIII Всероссийского совещания по проблемам управления ВСПУ-2019 / под ред. Д. А. Новикова. — Москва : ИПУ РАН, 2019. — с. 853—857.
11. *Каменщиков М. А.* Условие несмещенности в совместной задаче стабилизации и оптимальной фильтрации // Ломоносов-2019: сборник тезисов XXVI международной научной конференции студентов, аспирантов и молодых ученых: секция Вычислительная математика и кибернетика. — Москва : МАКС Пресс, 2019. — с. 24—25.
12. *Фомичев В. В., Каменщиков М. А.* О функциональных наблюдателях для линейных систем со стохастическими возмущениями // Тихоновские чтения: научная конференция: тезисы докладов. — Москва : МАКС Пресс, 2019. — с. 9—9.

13. *Фомичев В. В., Каменщиков М. А.* Методы построения фильтров пониженного порядка // Тихоновские чтения: научная конференция: тезисы докладов. — Москва : МАКС Пресс, 2020. — с. 8—8.
14. *Фомичев В. В., Каменщиков М. А.* Сравнение оптимальных фильтров второго и третьего порядка в установившемся режиме // Ломоносовские чтения: научная конференция: тезисы докладов. — Москва : МАКС Пресс, 2021. — с. 151—152.
15. *Фомичев В. В., Каменщиков М. А.* О задаче субоптимальной фильтрации для стохастических многосвязных систем // Ломоносовские чтения: научная конференция: тезисы докладов. — Москва : МАКС Пресс, 2022. — с. 91—92.
16. *Каменщиков М. А., Фомичев В. В.* Синтез субоптимальных фильтров для многосвязных стохастических систем // материалы Международной конференции Теория оптимального управления и приложения (ОСТА 2022). — Екатеринбург : Издательство УМЦ УПИ, 2022. — с. 94—97.

Список иллюстративного материала

- 1.1 Структурная схема объединенной системы (исходная система и искомый оптимальный наблюдатель) в отклонениях. 22
- 1.2 Структурная схема объединенной системы (исходная система и искомый оптимальный наблюдатель) в отклонениях в задаче (а) диагностики и в совместной задаче (б) стабилизации и оптимального наблюдения. 23
- 1.3 Динамика среднеквадратичной ошибки для (а) исходной непрерывной системы, для (б) разностной аппроксимации в примере 1.1. 43
- 1.4 Динамика оценки и линейных функционалов для разностных аппроксимаций системы и наблюдателя в примере 1.1. 45
- 1.5 Динамика среднеквадратичной ошибки для (а) исходной непрерывной системы, для (б) разностной аппроксимации в примере 1.2. 48
- 1.6 Динамика оценки и линейных функционалов для разностных аппроксимаций системы и наблюдателя в примере 1.2. 49
- 1.7 Динамика среднеквадратичных ошибок для (а) исходной непрерывной системы и построенных наблюдателей: (1.48) — синяя линия $J(t)$ и (1.49) — красная линия $J(t)$; для (б) разностных аппроксимаций системы и построенных наблюдателей: (1.48) — синие линии: сплошная $J[i\tau]$, штриховая $\bar{J}[i\tau]$, пунктирные $J_U[i\tau]$, $J_L[i\tau]$; и (1.49) — красные линии: сплошная $J[i\tau]$, штриховая $\bar{J}[i\tau]$, пунктирные $J_U[i\tau]$, $J_L[i\tau]$ в примере 1.3. 52
- 1.8 Динамика оценок, формируемых наблюдателями: (1.48) — синяя линия $\tilde{\sigma}[i\tau]$ и (1.49) — красная линия $\tilde{\sigma}[i\tau]$; и линейных функционалов (черные линии: пунктирная $\sigma[i\tau]$, сплошная $\check{\sigma}[i\tau]$) для разностных аппроксимаций в примере 1.3. 54

- 2.1 Динамика изменения величин: $\sigma[i\tau]$ — черная пунктирная линия, $\check{\sigma}[i\tau]$ — черная сплошная линия, $\tilde{\sigma}[i\tau]$ — синяя (для наблюдателей: (2.28) порядка $k = 1$, (2.29) порядка $k = 2, k = 3$) и красная (для наблюдателей (2.29) порядка $k = 4, k = 5$; полноразмерного фильтра (2.30)) линии в примере 2.1. 77
- 2.2 Динамика изменения среднеквадратичных ошибок: $J(t)$ — черная (для наблюдателей: (2.2) порядка $k = 1$, (1.3) порядка $k = 2, k = 3$) и красная (для наблюдателей (1.3) порядка $k = 4, k = 5$; фильтра (2.27) порядка $k = 4$) линии, $J[i\tau]$ — синяя (для наблюдателей: (2.28) порядка $k = 1$, (2.29) порядка $k = 2, k = 3$) и зеленая (для наблюдателей (2.29) порядка $k = 4, k = 5$; полноразмерного фильтра (2.30)) линии в примере 2.1. 79
- 2.3 Динамика изменения величин $\sigma_i, \tilde{\sigma}_i$ в примере 2.2. 85
- 2.4 Динамика изменения среднеквадратичных ошибок J_i в примере 2.2. 86
- 3.1 Траектория последовательных приближений (красные стрелки) к точке экстремума (красная звезда) критерия оптимальности J_∞ в области устойчивости в координатах l_2, l_3 . Точки с одинаковыми значениями J_∞ отмечены цветными линиями уровня. Синяя штриховая линия соответствует параметрам вырожденных наблюдателей третьего порядка в примере 3.1. 106
- 3.2 Траектория последовательных приближений (красные стрелки) к точке экстремума (красная звезда) критерия оптимальности J_∞ в области устойчивости в координатах t_{24}, t_{34} . Точки с одинаковыми значениями J_∞ отмечены цветными линиями уровня. Черный квадрат соответствует параметрам вырожденных наблюдателей третьего порядка в примере 3.1. 107

- 3.3 График функции (3.19) в примере 3.2. Красной точкой с координатами ($V \approx 0.1148$, $J_\infty(V) \approx 4.1223$) показан глобальный минимум функции $J_\infty(V)$ на интервале $(-1/36, 13/108)$. Двумя синими штриховыми линиями показаны асимптоты $V = -1/36$ и $V = 13/108$ 109
- 3.4 Три траектории последовательных приближений (синие, зеленые и оранжевые стрелки) сходятся к общему минимуму (красная звезда) критерия оптимальности J_∞ из различных начальных точек в области дискретной устойчивости в координатах (а) l_1, l_2, l_3 ; (б) V, t_{24}, t_{34} . Красными поверхностями уровня отмечены точки с одинаковыми значениями J_∞ в примере 3.2. 111
- 4.1 Динамика изменения среднеквадратичных ошибок $J(t)$ в примере 4.1. 126
- 4.2 Расположение в области дискретной устойчивости ($|z| < 1$) на комплексной плоскости корней (красные точки) характеристического полинома: (а) наблюдателя, полученного методом приведения к канонической форме Люенбергера; и (б) наблюдателя, полученного методом скалярных наблюдателей в примере 4.2. . . . 131
- 4.3 Динамика изменения среднеквадратичных ошибок J_i : синие точки для наблюдателя, построенного методом приведения к канонической форме Люенбергера; красные точки для наблюдателя, построенного методом скалярных наблюдателей в примере 4.3. . . 134

Список таблиц

2.1	Динамические характеристики дискретных наблюдателей различных порядков с точностью 10^{-4} в примере 2.1	81
2.2	Динамические характеристики непрерывных наблюдателей различных порядков с точностью 10^{-4} в примере 2.1	81
2.3	Динамические характеристики дискретных наблюдателей различных порядков с точностью 10^{-4} в примере 2.2	88
3.1	Неизвестные параметры непрерывных наблюдателей второго и третьего порядка.	100
3.2	Неизвестные параметры дискретных наблюдателей второго и третьего порядка.	103
4.1	Динамические характеристики непрерывных наблюдателей различных порядков с точностью 10^{-4} в примере 4.1	127